

SUJET N°1

Exercice 1

Pour tout entier n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres :

$$a = n^3 - n^2 - 12n \text{ et } b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer que a et b sont des entiers naturels divisibles par : $n - 4$.

On pose : $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β .

2.a) Etablir une relation entre α et β indépendante de n .

b) Démontrer que d est un diviseur de 5.

c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.

3. Montrer que : $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.

4.a) Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de n , le PGCD(a ; b).

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Exercice 2 : Problème

Soit f l'application de $]0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2x + \frac{e^x + 1}{2(e^x - 1)} \text{ et } g \text{ l'application de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ définie par :}$$

$$g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2.$$

Partie A

1. Montrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a : $f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$

2. Montrer que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a : $f(x) = 2x - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{e^x - 1}$

3. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ puis factoriser $g(x)$.

Partie B : Etude de f

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$

2.a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de f .

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3. Montrer que la fonction dérivée de f est du signe de la fonction g de la partie A et dresser le tableau de variation de f .

4. Représenter (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormé (unité graphique : 1cm)

5.a) Etudier graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m , l'intersection de (C) et de la droite (D_m) d'équation $y = 2x + m$

b) Démontrer par le calcul ces résultats (on pourra utiliser le A.1)

Partie C : Calcul d'aire

1. En reconnaissant la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ déterminer les primitives sur $]0 ; +\infty[$ de la

$$\text{fonction } \mathbf{h(x)} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

2. En déduire, en utilisant A.2) les primitives sur $]0 ; +\infty[$ de $(x) - (2x + \frac{1}{2})$

3. Calculer l'aire du domaine plan limité par (C), (D) et les droites d'équations : $x = \ln 2$ et $x = \ln 4$

SUJET N°2

Exercice1 :

Dans le plan P, on donne un triangle équilatéral tel que :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 1.$$

Soit A' le milieu du segment [BC].

1. Montrer que le milieu G du segment [AA'] est le barycentre du système $\{(A ; 2), (B ; 1), (C ; 1)\}$

2. Trouver l'ensemble des points M du plan tel que : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2$

Exercice2 : Problème

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{e^x} \ln|x - 1|$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o,i,j)

Partie A

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $h(x) = 2x - 1 - \ln|x - 1|$

1) Calculer la limite de h en 1 et en $\pm\infty$

2) Etudier les variations de la fonction h

3.a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-\infty ; -1[$

b) Justifier que : $0,3 < \alpha < 0,4$; $h(0,3) \approx -0,4$ et $h(0,4) \approx 0,3$

4) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; \alpha[; h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha ; 1[\cup]1 ; +\infty[; h(x) > 0 \end{cases}$

Partie B:

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $g(x) = x^2 - (x - 1)\ln|x - 1|$

1) Calculer la limite de h en 1 et en $\pm\infty$

2) Montrer que $g'(x) = h(x)$

3) Dresser le tableau de variation de la fonction g .

4.a) Montrer que $g(\alpha) = -\alpha^2 + 3\alpha - 1$

b) Donner un encadrement de $g(\alpha)$ à 10^{-1} près.

c) En déduire que $g(\alpha) < 0$

5.a) Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]\alpha ; +\infty[$

b) Justifier que : $0,6 < \beta < 0,7$; $g(0,6) \approx -0,007$ et $g(0,7) \approx 0,13$

c) Calculer $g(0)$

d) En déduire le signe de la fonction g

Partie C

1) Calculer la limite de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat

2) Montrer que f est continue à gauche en 0 et discontinue à droite en 0. Que peut-on dire de f en 0

3) Montrer que : $f'(x) = \frac{\frac{1}{e^x}}{x^2(x-1)} g(x)$

4) Etudier les variations de la fonction f

5.a) Montrer que : $f(\beta) = \frac{\beta^2}{\beta - 1} e^{\frac{1}{\beta}}$

b) Donner un encadrement à 10^{-1} près de $f(\beta)$. On donne $4,2 < e^{\frac{1}{\beta}} < 5,3$

c) En déduire que $f(\beta) < 0$

6) Démontrer que la tangente (T) au point d'abscisse 2 a pour équation :

$$y = \left(4 - \frac{\sqrt{e}}{4}\right)x - 8 - \frac{\sqrt{e}}{4}$$

6) Tracer (C) et (T).

SUJET N°3

Exercice 1:

Soit n un entier premier différent de 2. On considère les entiers naturels :

$$a = (n + 1)^2 \text{ et } b = n^3 + 1. \text{ On désigne par } d = \text{PGCD}(a ; b)$$

1.a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, b = (n + 1)^2(n - 2) + 3(n + 1)$

b) Démontrer que : $d = n + 1$ ou $d = 3(n + 1)$

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait : $70a - 13b = 8$

Exercice 2 : Problème

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. On appelle C la courbe représentative de f dans le repère (o, i, j)

Partie A

1. Etude de f

a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Justifier vos calculs.

b) Préciser les équations des asymptotes.

2. Donner l'expression de $f'(x)$ ou f' est la dérivée de f . Dresser le tableau de variation de f . Préciser $f(0)$.

3. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse $x = 0$; on note T_o cette tangente.

4. courbe

- a) Soit x un réel quelconque. Calculer f(x) + f(-x).
- b) Quelle propriété de symétrie peut-on déduire de la question précédente
- c)Tracer (C), ses asymptotes et la tangente To

Partie B

- 1.a) Soit U(x) = 1 + e^{-x}. Calculer U'(x).
- b) En déduire la primitive F de f qui prend la valeur : -ln2 en x = 0.
- 2.a) On pose A = ∫₀¹ f(x)dx. Calculer A.
- b) Déterminer le réel c tel que A = lnc

3. Pour tout entier naturel n non nul on pose V_n = ∫_{1/n}^{1+1/n} f(x)dx.

- a) Exprimer V_n en fonction de n.
- b) Calculer lim_{n→+∞} V_n.

SUJET N°4

Exercice 1

2°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère les points A(-2; -1), B(1 ; 5), C(3 ; 1) et le cercle d'équation (δ): x² + y² + 2x - 4y - 24 = 0
Déterminer trois nombres réels :α, β et γ et la constante k tel que (δ) soit une ligne de niveau k de la fonction numérique de Leibniz associée au système {(A; α), (B; β), (C; γ)}

Exercice2 : Problème

On considère la fonction f définie sur R* par :
f(x) = cothx et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o, i, j).

Partie A

- 1) Calculer la limite de la fonction f en 0 puis donner une interprétation graphique du résultat.
- 2.a) Montrer que ∀x ∈R* ; f(x) = (1+e^{-2x})/(1-e^{-2x})
- b) Calculer la limite de f en +∞ puis en deduire une interprétation graphique du résultat.
- 3.a) Montrer que ∀x ∈R* ; f(x) = 1 + 2/(e^{2x}-1)
- b) Calculer la limite de f en -∞ puis en deduire une interpretation graphique du resultat.
- 4) Montrer que ∀x ∈R* ; f'(x) = -1/(shx)²
- 5) Dresser le tableau de variations de la fonction f
- 6) Montrer que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse ln2 a pour équation : y = 16/9 x - 16/9 ln2 + 5/3
- 7) Montrer que f est une fonction impaire
- 8) Construire la courbe (C) et (T)
- 9) Soit h la restriction de f à l'intervalle] 0 ; +∞[par :
 - a) Montrer que h réalise une bijection de]0 ; +∞[vers un intervalle J que l'on précisera
 - b) Montrer que h⁻¹ est dérivable en 5/3
 - c) Montrer que (h⁻¹)' = 9/16
 - d) Construire la courbe de (C_{h⁻¹}) dans le même repère

Partie B :

On considère la fonction g définie sur R* par
g(x) = ln|e^x - e^{-x}| et (φ) sa courbe représentative.
1) Montrer que g est une primitive de f
2.a) Calculer la limite de g en ±∞
b) Calculer la limite de g en 0. En déduire une interprétation graphique du résultat.

- 3) Calculer l'aire A du domaine du plan limité par la courbe (C), les droites d'équations x = 1 et x = 2 et la droite d'équation y = 1.
- 4) Donner la valeur approchée à 10⁻² près
- 5.a) Montrer que g(x) = x + ln|1 - e^{-2x}|
- b) Montrer que la droite (D) d'équation y= x est asymptote à (φ) en +∞. Etudier la position relative de (φ) par rapport à (D).
- 6) Etudier les variations de la fonction g
- 7.a) Montrer que l'équation g(x) = admet deux solutions : α et β avec
 - { α ∈] - ∞; 0[
 - { β ∈]0 ; +∞[
- b) Justifier que : { α ∈] - 0,5; -0,4[
- { β ∈]0,4; 0,5[

8.a) Calculer lim_{x→-∞} g(x)/x

- b) En déduire que (φ) admet une asymptote (D') puis trouver son équation
- 9) Tracer la courbe (φ) et ses asymptotes dans un autre repère.

Partie C :

- On considère par (H) la courbe d'équations paramétriques : { x = chx
- y = shx
 - 1) Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera son équation et ses éléments caractéristiques.
 - 2) Soit (S) l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : Z' = (1 + i)Z + 1 - i
 - a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S)
 - b) Déterminer l'expression analytique de (S)
 - c) Déterminer l'image de (H) par (S), préciser son équation et ses éléments caractéristiques.

SUJET N°5

Exercice 1

Le prix total de 41 pièces détachés réparties en trois lots, est de 480F
Le prix d'une pièce du premier lot est 48F
Le prix d'une pièce du deuxième lot est 36F
Le prix d'une pièce du troisième lot est 4F
Déterminer le nombre de pièce de chaque lot.

Exercice 2 : Problème

Partie A : Soit (E) l'équation différentielle définie par :
y'' - 4y' + y = x² - 8x + 1
1) Résoudre l'équation (E') : y'' - 4y' + y = 0
2) Déterminer un polynôme du second degré P(x) solution de (E)
3) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si f - P est solution de (E')
4) En déduire la solution sur R de (E) puis celle qui vérifie les conditions { y(0) = -1

Partie B : On considère la fonction h sur R par :

h(x) = -4(x + 1)e^{2x} + 2
1) Calculer les limites de h en -∞ et en + ∞
2) Calculer la dérivée de h, puis dresser son tableau de variation
3.a) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α
b) Vérifier que : -0,3 < α < -0,2
c) En déduire que : { ∀x ∈] - ∞; α[; h(x) > 0

Partie C

On considère la fonction g sur R par :
g(x) = (-2x - 1)e^{2x} + 2x
1) Calculer les limites de g en -∞ et en + ∞
2) Démontrer que g'(x) = h(x)

- 3.a) Montrer que la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -2x - 1$
- b) Etudier la position relative de (T) et (C_g), (on étudiera les variations de la fonction $g(x) - (-2x - 1)$)
- 4.a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à (C_g) en $-\infty$
- b) Etudier la position relative de (D) et (C_g)
- 5) Montrer que $g(\alpha) = 2\alpha - 1 + \frac{1}{2\alpha+2}$
- 6) A partir de l'encadrement de α dans la **Partie B**, donner un encadrement de $f(\alpha)$
- 7) Dresser le tableau de variation de g
- 8) En déduire que $g(x) < 0$
- 9) Construire la courbe représentative de g (C_g), (T) et (D)

Partie D : On considère la fonction f sur R par :

$$f(x) = -xe^{2x} + x^2 - 1$$

- 1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
- 2) Démontrer que $f'(x) = g(x)$; en déduire les variations de f
- 3.a) Montrer que la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 1$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$
- b) Etudier la position relative de (P) et (C_f)
- 4) Montrer que la tangente (T') à (C_f) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -x - 1$
- 5) Construire la courbe représentative de f (C_f), (T') et (P) dans le même repère
- 6) On considère par f^{-1} la bijection réciproque de f sur R
- a) Calculer $f(0)$
- b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en -1 existe
- c) Calculer $(f^{-1})'(-1)$
- d) Construire sur le même graphique la courbe de f^{-1}
- Partie E** : On considère par F l'intégrale définie par : $F(x) = -\int_0^1 f(x)dx$
- a) Etudier l'existence de F(x)
- b) Donner la nature de F(x)
- c) Calculer alors F(x) en cm².

SUJET N°6

Exercice 1

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher, de 3 sortes : 4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blancs ». Un joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux bulletins de sortes différentes ?

Exercice 2

Partie A : Soit f la fonction définie sur R par :

$$f(x) = 4 \frac{e^x}{1 + e^x}$$

On considère par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (o ; i ; j) (unité graphique 2cm)

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les droites asymptotes à C.

2. Etudier les variations de f et en dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que le point d'intersection A de C et de l'axe des ordonnées est centre de symétrie pour C.
4. Donner une équation de la tangente à C en A.
5. Tracer sur un même graphique : C, sa tangente au point A, et ses droites asymptotes.

Partie B

On considère la fonction f' , dérivée de f. On note C' sa courbe dans (o ; i ; j)

1. En utilisant le fait que C admet le point A comme centre de symétrie, justifier que f' est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les droites asymptotes à C'.

3. Montrer que $f''(x) = 4 \frac{e^x - e^{2x}}{(1 + e^x)^3}$. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

4. Tracer C' sur le même graphique que C.
5. Justifier la position de C' par rapport à C.

Partie C

- 1.a) Justifier que f admet des primitives sur R.
- 1.b) Soit F, la primitive de f sur R qui s'annule pour $x = 0$, et soit φ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (o, u, v) (unité graphique 2cm). Quel est le sens de variation de F ?
2. Expliciter F(x), pour tout x réel.
- 3.a) Déterminer les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire une propriété de la courbe φ .
- b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 4x - 4\ln 2$ est asymptote à φ .
- 4) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.
- 5) Tracer φ et ses asymptotes

SUJET N°7

Exercice 1

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD(231 ; 3311)
2. Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose :

$$\begin{cases} \mathbf{A(n)} = \mathbf{1 + 2 + 3 + \dots + n} \\ \mathbf{B(n)} = \mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2} \end{cases}$$

On rappelle que : $\mathbf{A(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$

- a) Montrer par récurrence que $\mathbf{B(n)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- b) On suppose que n est un multiple de 3. Déterminer dans ce cas le PGCD de A(n) et B(n)
- c) Vérifier le résultat obtenu dans le cas où n = 21.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x \ln(x + 1) + \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$$

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]-1 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 \ln(x + 1) + \frac{3x^2 + 4x - 1}{(x + 1)^2}$$

- 1) Calculer la limite de g en -1 et en $+\infty$
- 2) Etudier les variations de la fonction g
- 3.a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-1 ; +\infty[$
- b) Justifier que : $0,1 < \alpha < 0,2$;
 $g(0,1) \approx -0,28$ et $g(0,2) \approx 0,3$
- 4) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-1 ; \alpha[& g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha ; +\infty[& g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

- 1) Calculer la limite de f en -1 et en $+\infty$. En déduire une interprétation graphique du résultat.
- 2) Montrer que $\forall x \in]-1; +\infty[; f'(x) = g(x)$
- 3) Etudier les variations de la fonction f
- 4) Montrer que $f(\alpha) = -2\alpha + 3 + \frac{2\alpha}{(\alpha+1)^2}$
- 5) Donner un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près et prouver que $f(\alpha) > 0$. En déduire que $f(x) > 0$.
- 6) Montrer que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \left(2\ln 2 + \frac{3}{2}\right)x + \frac{3}{2}$
- 7) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, donner une interprétation graphique du résultat.
- 8) Tracer (C) et (T)

Partie C

On considère la fonction h définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = (x^2 + 1) \ln(x + 1) + 2x + 1$$

- 1) Montrer que h est une primitive de f
- 2) Calculer la limite de h en -1 et en $+\infty$. En déduire les variations de la fonction h .
- 3) Calculer l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
- 4) Construire la courbe (C_h) dans le même repère
- 5.a) Montrer que (C_h) réalise une bijection de $] -1 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$
- b) Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère.

Partie D

Soit (S) l'application du plan dans lui-même définie par : $Z' = Z + 1$

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S)
- 2) Déterminer l'expression analytique de (S)
- 3) Déterminer l'image de (T) par (S)
- 4) Démontrer que l'image de f par (S) est la courbe (D) d'équation :

$$y = 2(x + 1) \ln x + \frac{x^2 + 2}{x}$$

- 5.a) Montrer que $f(x - 1) = y$. Que peut-on déduire
- b) Tracer (D) sans étudier

SUJET N°8

Exercice1 :

On considère l'équation (E) : $Z \in \mathbb{C}$,

$$Z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i = 0.$$

- 1.a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
- b) Résoudre l'équation (E).
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, $3i$, $-2+3i$. Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.

a) Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.

b) Démontrer que les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont des termes d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.

c) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude.

Exercice2: Problème

Dans tout le problème le plan est muni du repère orthonormé (o, i, j) unité 2cm.

Partie A

1. On considère f la fonction numérique, de courbe représentative (Cf), définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$
- a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- b) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- c) Tracer la courbe (Cf) en prenant soin de tracer la tangente à l'origine.
2. On considère g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = |x|e^{1-|x|}$.
- a) Ecrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- b) En déduire une méthode pour obtenir la courbe représentative (Cg) de g sur $]-\infty; 1]$ à partir de (Cf).
- c) Etudier sur l'intervalle $[1; +\infty[$ le sens de variation de la fonction $h(x) = xe^{x-1}$.
- d) Etudier la dérivabilité de g en 0 et en 1.
- e) Déduire des questions précédentes le tableau de variation de g .
- f) Tracer (Cg) ainsi que les demi-tangentes à (Cg) aux points d'abscisses 0 et 1.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On considère la famille de fonctions f_n définies par :

$$f_n(x) = xe^{n(1-x)}$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n .

1. Calculer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Calculer la limite de $f_n(x)$ et de $\frac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$. En donner une interprétation graphique.
3. On admet que, pour tout entier naturel non nul n , la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- a) Déterminer la dérivée f'_n de f_n .
- b) Etudier le signe de $f'_n(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n .
- c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f_n(x) = x$.
- d) En déduire que toutes les courbes (C_n) passe par deux points fixes que l'on précisera.
4. Etudier la position de (C_n) par rapport à (C_{n+1}) .
5. Tracer (C_2) dans le repère (o, i, j).
6. α étant un nombre réel, on pose :

$$I_n(\alpha) = \int_0^\alpha f_n(x) dx.$$

- a) Calculer $I_n(\alpha)$ à l'aide d'une intégration par parties.
- b) Calculer la limite de $I_n(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

SUJET N°9

Exercice1:

1. Nous étions vendredi 1^{er} septembre 2006. Quel jour de la semaine serons-nous :

Le 1^{er} septembre 2007 ?

Le 1^{er} septembre 2008 ?

Le 1^{er} septembre 2009 ?

1. Il est 14heures. Quelle heure sera-t-il dans 113heures ?

Exercice2 : Problème

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, i, j) d'unité graphique 2 cm.

- 1.a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- b) Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe C.
- c) Etudier la position relative de C par rapport à D_1 .
- 2.a) On note f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x , on : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$
- b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f .

- 3.a) Que peut-on dire de la tangente D_2 à la courbe C au point I d'abscisse $\ln 3$.
- b) En utilisant les variations de la fonction f , étudier la position de la courbe C par rapport à D_2 .
- 4.a) Montrer que la tangente D_3 à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \frac{1}{4}x + 1$.
- b) Etudier la position de la courbe C par rapport à la tangente D_3 sur l'intervalle $]-\infty; \ln 3]$. On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' , définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par : $f''(x) = \frac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3}$.
- 5) On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe C . Tracer la courbe C , les tangentes D_2 , D_3 et les asymptotes à la courbe C . On rappelle que l'unité graphique choisie est 2cm .
- 6.a) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x+3}$.
- b) Soit θ un nombre réel strictement négatif. On note $A(\theta)$ l'aire, en unité d'aire, du domaine limité par D_1 , C et les droites d'équations $x = \theta$ et $x = 0$. Montrer que $A(\theta) = 4\ln 4 - 4\ln(e^\theta + 3)$.
- c) Calculer $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} A(\theta)$.

SUJET N°10

Exercice 1

- On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés. Les faces sont numérotées de 1 à 6 . On dit qu'on obtient un « double » si les deux faces supérieures des portent des chiffres identiques. A chaque lancer, si le joueur fait un « double » il gagne 500f ; si non; il perd 100f .
- On lance les dés une fois. Calculer la probabilité de gagner 500f .
 - On lance les dés trois fois. Soit X la variable aléatoire associée à la somme gagnée ou perdue après trois lancers.
 - Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
 - On lance les dés n fois.
 - Calculer, en fonction de n , la probabilité notée q_n ; de ne jamais faire un « double ».
 - Calculer, en fonction de n , la probabilité p_n ; de faire au moins un « double ».
 - Quelle est la valeur minimum de n pour que l'on ait : $p_n \geq 0,8$. On prendra : $\ln(0,2) = -1,61$; $\ln \frac{5}{6} = -0,19$

Exercice 2 : Problème

- Soit f_k la famille de fonctions définie sur $[0; +\infty[$ par $f_k(x) = kx^2 + e^{-x}$ ou k est un réel strictement positif quelconque et g_k la famille de fonctions également définies sur $[0; +\infty[$ par $g_k(x) = 2kx - e^{-x}$. On note C_k la courbe représentative de f_k dans le repère orthonormal $(O; i, j)$, unité graphique: 2cm .
- Sens de variation de g_k
 - Calculer la dérivée g'_k de g_k ; vérifier que $g'_k(x)$ est toujours strictement positif.

- Calculer la limite de $g_k(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
 - Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel $\alpha_{k>0}$ tel que $g_k(\alpha_k) = 0$. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α_1 et de α_2 .
 - Etudier le signe de $g_k(x)$ sur $[0; +\infty[$.
 - Montrer que $f'_k(x) = g_k(x)$; en déduire le sens de variation de f_k .
- 2) Comportement asymptotique de f_k en $+\infty$
- Déterminer la limite de $f_k(x)$ en $+\infty$.
 - Déterminer le signe de $f_k(x) - kx^2$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat; on note P_k la courbe d'équation $y = kx^2$.
3. Construction de f_k
- Dresser le tableau de variation de f_k . Préciser le signe de f_k .
 - Préciser l'équation de la tangente T à C_k au point d'abscisse 0 .
 - Prouver que $f_k(\alpha_k) = k\alpha_k(\alpha_k + 2)$.
 - On prend $k = 1$: Montrer que le point de coordonnées $(\alpha_1; f_1(\alpha_1))$ appartient à une parabole Q_1 dont on donnera l'équation. Tracer dans le même repère T , Q_1 et C_1 .

SUJET N°11

Exercice 1 :

- Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher. (On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles)
- On tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.
 - On tire simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
 - On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On fait cette expérience 4 fois.
 - Calculer la probabilité de tirer exactement deux boules rouges.
 - Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche.

Exercice 2: Problème

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$. On appelle (C) la représentation graphique de f , dans un repère orthogonal (O, i, j) du plan (unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses, 2cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A

- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0 .
- Calculer $f'(x)$ en fonction de x . Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\ln x(2 - \ln x)$. Déterminer le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- Tracer la représentation graphique (C) de f dans $(O; i, j)$.
- On pose $p \geq 1$, $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2} dx$.
 - A l'aide d'une intégration par parties, Calculer $I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx$.
 - Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $p \geq 1$: $I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$
 - En utilisant les résultats précédents, calculer successivement I_2, I_3, I_4 .
 - On fait tourner au tour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de (C) , d'abscisses comprises entre 1 et e^2 . Le point M de (C) ,

d’abscisse x , d’écrit alors un cercle de rayon $f(x)$. Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unité de volume.

Partie B

Soit b réel strictement positif et A le point de (C) d’abscisse b . Soit T_b la tangente à (C) au point A .

- 1) Ecrire une équation de T_b
- 2) Déterminer les réels b pour lesquels T_b passe par l’origine O du repère.
- 3) Donner une équation de chacune des tangentes à (C) , passant par O . Tracer ces tangentes sur la figure.

Partie C

On étudie maintenant l’intersection de (C) avec la droite (D) d’équation $y = \frac{1}{e^2} x$

- 1) On pose pour x strictement positif, $\varphi_1(x) = x - e \ln x$. Montrer que φ_1 est strictement croissante sur $]e; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; e[$.
- 2) On pose pour x strictement positif, $\varphi_2(x) = x + e \ln x$
- a) Etudier le sens de variation de φ_2 sur $]0; +\infty[$
- b) Prouver que $\varphi_2(x) = 0$ a une solution unique sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. On appelle α cette solution ; donner un encadrement de α d’amplitude 10^{-1}
- c) En déduire que $\varphi_2(x) = 0$ a une solution sur $]0; +\infty[$
- 3) Déterminer les points d’intersections de (C) et (D) .

SUJET N°12

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. Soit S la similitude directe de centre I transformant les points A et B d’affixes respectives $3 + i$ et $3 - i$ en A' et B' d’affixes respectives $2 + 5i$ et $4 + 3i$

- 1. Déterminer les éléments caractéristiques de S .
- 2. Déterminer le barycentre des points I, A et B affectés respectivement des coefficients $6; 1$ et 1 . En déduire le barycentre des points I, A' et B' affectés de même coefficients.

Exercice 2 : Problème

Partie A

On considère la fonction numérique de f définie sur l’intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 - (2x + 1) \ln x$ ou $\ln$ est la fonction logarithme népérien.

- 1°a) Calculer les fonctions $f'(x)$ et $f''(x)$ dérivées première et seconde de f .
- b) Déterminer le sens de variation de f' . En déduire que pour tout réel x strictement positif $f'(x) < 0$.
- 2°a) Indiquer le sens de variation de f .
- b) Déterminer les limites de f aux bornes de l’intervalle de définition.
- c) Démontrer qu’il existe un et un seul nombre réel α tel que $f(\alpha) = 0$. Justifier que $1,83$ est une valeur décimale approchée de α à 10^{-2} par défaut.
- d) Donner les signes de $f(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B

Etude de la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln x}{x^2 + x}$

On désigne par (C_g) la courbe représentative de g dans le plan rapportée au repère orthonormé (O, i, j) d’unité 4cm sur (Ox) et 12cm sur (Oy) .

- 1°a) Déterminer le sens de variation de g (on montrera que $g'(x)$ a le même signe que $f(x)$). Vérifier que $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha(2\alpha + 1)}$ (α est le nombre réel défini dans la **partie A**)
- b) Déterminer les limites de g aux bornes de l’intervalle de définition. Interpréter graphiquement ces résultats.
- 2°) Tracer la courbe (C_g) et sa tangente au point d’abscisse 1 .

Parti C

Majoration de l’intégrale $I(\theta) = \int_1^\theta \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx$ ou θ est un réel tel que $\theta > 1$

- 1) Donner l’interprétation générale de $I(\theta)$.

2.a) Montrer que $I(\theta) \leq \int_1^\theta \frac{\ln x}{x^2} dx$

b) A l’aide d’une intégration par partie calculer $\int_1^\theta \frac{\ln x}{x^2} dx$.

En déduire que pour tout réel θ élément de $[1; +\infty[$, $I(\theta) < 1$.

SUJET N°13

Exercice 1

Soit la suite U_n définie par :

$$U_1 = -1 \text{ et } U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \text{ pour } n > 0$$

- 1. Montrer, en raisonnant par récurrence, que la suite U_n est majorée par 3
- 2. Etudier le sens de variations de la suite U_n
- 3. On considère la suite V_n définie pour tout entier naturel n non nul : $V_n = n(3 - U_n)$. Montrer que V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 4. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

Exercice 2 : Problème

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, i, j) , l’unité graphique étant égale.

à 2cm .

- 1.a) Déterminer l’ensemble de définition de f . Etudier les limites de f aux bornes du D_f . Préciser les asymptotes de la courbe (C) .
- b) Etudier les variations de f ; dresser son tableau de variation. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d’abscisse 0 .
- c) Construire avec soin (T) et la courbe (C) .

2. On se propose de montrer que l’équation $f(x) = x$ admet sur $[0; 1]$ une solution unique.

a) Etudier les variations de la fonction dérivée f' sur $[0; 1]$. Démontrer que pour tout x de l’intervalle $[0; 1]$, on a :

$$\frac{1}{4} < f'(x) < \frac{2}{3}$$

- c) Etudier les variations de la fonction numérique g définie sur $[0; 1]$ par : $g(x) = f(x) - x$. Démontrer que l’équation $f(x) = x$ admet dans $[0; 1]$ une solution unique α . Vérifier que : $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{e}{3}$

3. On se propose de déterminer une valeur approchée de α .

Soit (U_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

- a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{e}{3}$
- b) En utilisant l’inégalité des accroissements finis, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha|$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

c) Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

d) Déterminer un entier n_0 tel que : Si $n \geq n_0$, alors $|U_n - \alpha| \leq 10^{-2}$

4. Ne connaissant pas de primitive de la fonction f sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on se propose de déterminer un encadrement de l’intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

- a) Justifier l’existence de I et en donner une interprétation graphique.
- b) On pose $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (2 - x) e^x dx$ et $K = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$. Vérifier que : $4I = J + K$.
- c) Calculer J .

d) Quelle est l’image par f du segment $\left[0; \frac{1}{2}\right]$?

En déduire un encadrement de K par deux intégrales simples que l’on calculera.

- f) A l'aide des questions précédentes, écrire un encadrement de l'intégrale I. En déduire un encadrement de I, d'amplitude 10^{-2} par des nombres décimaux.

SUJET N°14

Exercice 1

Une variable aléatoire X prend les valeurs : 1; -1 et 2 avec les probablites respectives : e^a, e^b et e^c ou a, b et c sont en progression arithmetique. On suppose que l'espérance mathématique E(X) = 1.

- Calculer a, b et c et la variance V(X).
- Soit A, B et C trois points d'abscisses respectifs : 1; -1 et 2 d'une droite graduée (D)
 - Calculer l'abscisse du point G barycentre de {(A ; 1), (B ; 2), (C ;4)}
 - On pose : $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$, ou M est un point de (D).
Montrer que $\varphi(G) = V(X)$.
 - Déterminer l'ensemble (T) des points M de (D) tels que $\varphi(M) = 3$

Exercice2

On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{2\ln x}{x}$. (C) est la représentation graphique de f dans le repère orthonormé (o,i,j). Unité 2cm.

Partie A

- On considère la fonction U dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et définie par $U(x) = x^2 + 4 - 4\ln x$
- Etudier les variations de U.
 - Justifier que $\forall x \in]0; +\infty[, U(x) > 0$

Partie B

- Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
 - Calculer la limite de f en $+\infty$
- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$ est asymptote a (C) en $+\infty$
- Vérifier que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{U(x)}{2x^2}$
 - En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α telque $1 < \alpha < e$
 - Déterminer une valeur approchée a 10^{-1} près de α
- Démontrer qu'il existe un point A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).
 - Donner les coordonnées du point A.
 - Etudier la position relative de (D) par rapport à (C)
 - Construire (T), (D) et (C).

SUJET N°15

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère les points A(-2; -1), B(1 ; 5), C(3 ; 1) et le cercle d'équation $(\delta): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 24 = 0$
 DDéterminer trois nombres réels : α, β et γ et la constante k tel que (δ) soit une ligne de niveau k de la fonction numérique de Leibniz associée au système $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$

Exercice 2 : Problème

La partie A est l'étude d'une fonction auxiliaire g nécessaire à l'étude de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$. L'étude de la fonction f fait l'objet de **la partie B**. La **partie C** est l'étude de deux suites numériques associées.

Partie A

- On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$
- Etudier le sens de variation de g.
 - En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

- On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$. On appel (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; i ; j) (unité graphique 2cm).
- Déterminer la limite de f en 0. Interprété graphiquement le résultat.
 - Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - Déterminer, sur $]0; +\infty[$, la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2}$. Montrer en particulier que (D) coupe (C) en un point A que l'on déterminera.
 - Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
 - Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (D). Préciser les coordonnées de B.
 - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α . Justifier l'encadrement : $0,34 < \alpha < 0,35$.
 - Tracer la courbe (C) et les droites (D) et (T).

Partie C

- On considère la fonction numérique x_n définie par $x_n = e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout nombre entier naturel n.
- Montrer que x_n est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
 - Montrer que x_n est une suite croissante.
 - Pour tout entier naturel n, on pose :

$$a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) dx$$
 - Donner une interprétation géométrique de a_n .
 - Montrer que $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n. En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.

SUJET N°16

Exercice1 :

- Trouver les nombres de trois chiffres dont le produit de chacun par 4 se termine par 364.
- Trouver les nombres de deux chiffres qui sont multiples du produit de leurs chiffres.

Exercice2 : Problème

Partie A

- On considère la fonction de variable réel x définie par : $g(x) = (1 - x)e^{1-x} - 1$
- Justifier que la limite de g en $+\infty$ est -1
 - Déterminer la limite de g en $-\infty$
 - Démontrer que $\forall x \in R, g'(x) = (x - 2)e^{1-x}$
 - Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation
 - Démontrer que :

$$\forall x \in R, g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha$$

- b) En déduire que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[& g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[& g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

- On considère la fonction f dérivable sur R et définie par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$
 On note par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; i ; j). L'unité graphique est 2cm
- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

- 2.a) Démontrer que f est une primitive de g
- b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 3°a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
- b) Etudier la position relative de (D) et (C)
- 4°) Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).
- 5) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point $x = 1$.
- 6°) Démontrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$
- 7°) Justifier que, pour tout nombre réel x ,
 $f(-x + 2) = e^{x-1} f(x)$
- 8) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. On appelle β l'une de ses solutions. Démontrer que $-\beta + 2$ est l'autre solution.
- 9) Tracer (D), (T) et (C)
- On prendra $\alpha = 0,4$ et $\beta = 2,5$

Partie C

- Soit θ un nombre réel strictement positif et $S(\theta)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \theta$.
- 1°) Calculer $S(\theta)$ à l'aide d'une intégration partie.
- 2°) Déterminer la limite de $S(\theta)$ lorsque θ tend vers $+\infty$.

SUJET N°17

EXERCICE1:

- On compose un jury en tirant au sort 3 personnes parmi 7 volontaires : 4 hommes et 3 femmes. X désigne la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de femmes qu'il présente.
- Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
 - Calculer la probabilité pour qu'il ait au moins une femme dans le jury.

Exercice 2 : Problème

Partie A

- Soit la fonction g de R^* dans R définie par :
- $$g(x) = -x|x| + 1 - \ln|x|.$$
- 1) Etudier le sens de variation de la fonction g et dresser son tableau de variation. (On ne demande pas de calculer les limites aux bornes du Df)
- 2.a) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $] -\infty; 0[$
- b) Calculer $g(1)$. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $] 0; +\infty[$.

Partie B

- Soit la fonction f de R^* dans R définie par :
- $$f(x) = -|x| + \frac{\ln|x|}{x}$$
- Soit (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (o ; i ; j) (Unité sera égale à 1cm)
- 1.a) En utilisant les résultats de la partie A, étudier le sens de variation de f.
- b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $] 0; +\infty[$
3. Démontrer que les droites (D_1) d'équation $y = x$ et (D_2) d'équation $y = -x$ son asymptotes à (C) respectivement en $+\infty$ et $-\infty$
- 4.a) Détermine l'intersection de (C) et (D_2) sur $] 0; +\infty[$
- b) Etudier la position relative de C) et (D_2) sur $] 0; +\infty[$
- 5.a) Déterminer l'intersection de (C) et (D_1) sur $] -\infty; 0[$
- b) Etudier la position relative de (C) et (D_1) sur $] -\infty; 0[$
- 6) Tracer (C), (D_1) et (D_2)

Partie C

- On se propose de déterminer l'intersection de (C) et (D_2) sur $] -\infty; 0[$
- Soit h la fonction définie sur $] -\infty; 0[$ par : $h(x) = f(x) + x$
- 1.a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$
- b) Etudier le sens de variation de la fonction h et dresser son tableau de variation.
- 2.a) Démontrer que pour tout $x \in] -\infty; 0[$, l'équation $f(x) = -x$ admet une solution unique α
- b) Démontrer que : $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$

Partie D

1. Soit t un nombre réel telque $t \geq 1$.
Calculer l'aire A(t) de la partie du plan délimité par (D_2) , (C) et les droites d'equations $x = 1$ et $x = t$
2. On pose, pour nombre réel t telque $t \geq 1$; $J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$
- a) A l'aide d'une intégration par partie, calculer J(t)
- b) Démontrer que : $0 \leq J(t) \leq 1$
- c) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} J(t)$.

SUJET N°18

Exercice 1

- On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Toutes les cartes ont la même probabilité d'être choisies. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « La carte choisie est la dame de cœur »
B : « La carte choisie est un cœur »
C : « La carte choisie est un cœur ou un as »
D : « La carte choisie n'est ni un cœur, ni un cas »
- On choisit une carte au hasard parmi les cœurs. Tous les cœurs ont la même probabilité d'être choisis. Calculer la probabilité de l'évènement F : « La carte choisie est une figure ».

Exercice 2 :Problème

Partie A :

- Soit g la fonction définie sur R par :
- $$g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$$
- Calculer $g'(x)$ et montrer que ce nombre est strictement negatif pour tout x de R.
 - Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
 - Dresser le tableau de variation de g.
 - Donner le signe de $g(x)$.

Partie B :

- Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + e^x)$
- On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques 4cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées).
- calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x,
 $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$.
 - a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 - b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - Dresser le tableau de variation de f.
 - Tracer (C).
 - Soit α un nombre réel strictement positif.
 - a) Vérifier que, pour tout réel x, $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$. En déduire la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$.

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$.
Donner une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

Partie c

On considère l'équation différentielle (E) : $y'+2y = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie B est solution de (E).

SUJET N°19

Exercice 1:

On considère l'équation (E) : $\mathbf{Z \in C}$,

$$Z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i = 0.$$

1.a)Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Résoudre l'équation (E).

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, $3i$, $-2+3i$. Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.

a) Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.

b) Démontrer que les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont des termes d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.

c)En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude.

Exercice2: Problème

Partie A :

Résolution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = x - 1$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_1^x e^t(t - 1)dt$

2.a) Soit z une fonction dérivable sur l'ensemble R des nombres réels. On pose $f(x) = z(x)e^{-x}$. Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si pour tout x de R, $z'(x) = e^x(x - 1)$.

b) A l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions z vérifiant pour tout x de R, $z'(x) = e^x(x - 1)$.

3. Déduire de la question précédente les solutions de (E)

b) Déterminer la solution de (E) pour laquelle l'image de 1 est 0.

Partie B :

Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x - 2 + e^{1-x}$. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (o, i, v) (unité graphique : 1cm). On désigne par (Cf) la courbe représentative de f.

1.a) Etudier le sens de variation de f.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$,

2.a) Montrer que la droite (D), d'équation $y = x - 2$, est asmtote à la courbe (Cf) .

b) Préciser la position de (Cf) par rapport à (D).

3. Tracer (D) et (Cf).

Partie C :

Calcul d'aires

1. On considère le domaine limité par la courbe (Cf), son asymptote (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$. Exprimer, à l'aide de x_0 , l'aire S_1 de ce domaine.

2. On considère la fonction g, définie sur R par $g(x) = e^{1-x}$.

a) Etudier g, puis tracer sa courbe représentative (Cg).

b) Donner une interprétation, en terme d'aire, de l'intégrale ayant servie au calcul de S_1 à l'aide de la courbe (Cg).

3. A est le point de coordonnées $(x_0 ; 0)$. B est le point de la courbe (Cg) d'abscisse x_0 . Soit (T) la tangente à la courbe (Cg) au point d'abscisse x_0 . C est le point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de C.

4. Calculer (en unités d'aire) l'aire S_2 du triangle ABC. Vérifier que $S_1 + 2S_2 = 0$.

SUJET N°20

Exercice1

Soit dans C l'équation : $Z^2-(4+3i\sqrt{3})Z + 6i\sqrt{3} = 0$.

1. Résoudre cette équation. Soient Z_1 et Z_2 les solutions ; $Z_1 \in R$. A, B et C sont les points du plan complexe d'affixes respectives Z_1 , Z_2 et $-7 + 6i\sqrt{3}$.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S telles que $S(A) = B$ et $S(B) = C$

3. Déterminer l'expression analytique de S.

Exercice 2 Problème

Partie A : Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2. Etudier les variations de f.

3. On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de f dans un repère orthonormé (o,i,j)

(Unité 2cm). Montrer que la droite (Δ) d'equation $y = -\frac{x}{2}$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

Préciser la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ) .

4. Montrer que le point $I(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ est centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

5. Donner une équation de la tangente de la tangente en I à $(\mathcal{C}_f)$.

6. Construire $(\mathcal{C}_f)$.

7. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 et que :

$$\frac{2}{5} < x_0 < \frac{9}{20}$$
 (on donne :

$$\ln 2 = 0.693; \ln 3 = 1,099; \ln 11 = 2,398)$$

Partie B

Soit $\theta \in]1; 2[$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_\theta^2 \ln(\frac{x-1}{x})dx$

2. En déduire l'aire $A(\theta)$, en cm², de la partie du plan dont les points ont des coordonnées x et y telles que: $\begin{cases} \theta \leq x \leq 2 \\ f(x) \leq y \leq \frac{-x}{2} \end{cases}$

3. Calculer : $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} A(\theta)$, avec $\theta > 1$

SUJET N°21

Exercice 1

On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en les faisant répondre à dix questions. Ils devront choisir, pour chacune des questions, parmi quatre affirmations, celle qui est exacte. Un candidat se présente et répond à toutes les questions au hasard. On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses exactes données par ce candidat à l'issue du questionnaire.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ?

2) Calculer la probabilité pour qu'il fournisse au moins 8 bonnes réponses, et soit ainsi sélectionné.

Exercice 2 : Problème

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur

l'intervalle $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x - \frac{x^n - 1}{n} & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

On désigne par (Cn) la représentation graphique de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (o ;i,j) (unité 2cm)

Partie A

1. Etudier la continuité de f_n à droite en 0.

2. Déterminer la limite de $\frac{f(n(x)) - \frac{1}{n}}{x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures (on distinguera les cas $n = 1$ et $n > 1$). Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
3. Étudier le sens de variation de $f(n)$. Préciser la nature de la branche infinie.
4. Construire (C_1) et (C_2) .

Partie B

Soit λ un réel strictement positif.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de λ l'intégrale : $\int_{\lambda}^1 x^2 \ln x dx$.
2. En déduire la valeur, en fonction de λ , de $I(\lambda)$ tel que : $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx$.
3. Calculer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers 0. En déduire l'aire en cm^2 de la portion de plan limitée par (C_2) , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

1. On pose, pour tout x de l'intervalle $]0; 1[$, $g(x) = f_2(x) - x$. Dresser le tableau de variation de g . En déduire que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0; 1[$.
- 2.a) Étudier le sens de variation de $f_2'(x)$, sur l'intervalle $]0; 1[$ et dresser son tableau de variation.
- b) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$, on a : $|f_2'(x)| \leq \frac{2}{e}$
3. On considère la suite (U_n) définie : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f_2(U_n) \end{cases}$
- a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n , $U_n \in [0; 1]$
- b) α étant le nombre réel défini à la question C.1, démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e} |U_n - \alpha|$,
- c) Démontrer par récurrence que : $|U_n - \alpha| \leq (\frac{2}{e})^n |1 - \alpha|$.
- d) En déduire que la suite (U_n) converge vers α .

SUJET N°22

Exercice1

Exercice 1

- Une urne U contient une boule portant le numéro 1 et deux boules portant le numéro 2. Une urne V contient une boule portant le numéro 4 et n boules portant le numéro 3. On tire au hasard une boule de U, une boule de V et on désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros portés par les deux boules.
- Déterminer en fonction de n la loi de probabilité de X.
 - Calculer en fonction de n l'Espérance mathématique $E(X)$.
 - Déterminer n pour que : $E(X) = \frac{59}{12}$.
 - Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $E(X) < 4,8$.

Exercice 1 Problème

Partie A : Soit la fonction définie par : $f(0) = 0$ et pour tout réel strictement positif x par $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$.

- Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
- Soit φ la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par : $\varphi(x) = \ln x + x + 1$.
 - Étudier le sens de variation de φ .
 - Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β telle que : $0,27 \leq \beta \leq 0,28$.

- 3.a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f .
 - Vérifier que : $f(\beta) = -\beta$
 - Calculer la limite de f en $+\infty$
 - Dresser le tableau de variation de f .
4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j)

On placera en particulier les points d'abscisses $1; 3; 4; e^2; 12$.

On prendra : $\ln 0,27 \approx -1,31; \ln 0,28 \approx -1,27; \ln 2 \approx 0,7; \ln 3 \approx 1,1; \ln 5 \approx 1,6$.

Partie B

- Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[3; 4]$.
- Démontrer que les équations $f(x) = 1$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes. Soit g la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie pour tout réel strictement positif x par : $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$
 - Étudier le sens de variation de g .
 - Démontrer que pour tout x élément de $[3; 4]$, $g(x)$ est un élément de $[3; 4]$
 - Démontrer que : $\forall x \in [3; 4], |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

- On prendra $e^{\frac{4}{3}} \approx 3,8; e^{\frac{5}{4}} \approx 3,49$.
3. Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 3$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$.
- Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3; 4]$.
 - Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$.
- En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.
- Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Calculer sa limite.
 - Pour quelles valeurs de n , (U_n) est une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

Partie C

- Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution α_n et une seule. Placer α_1 et α_2 dans le même repère que précédemment.
- a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $\alpha_n \geq e^n$.
- b) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on : $f(\alpha_n) = n$ est équivalent à $\ln \frac{\alpha_n}{e^n} = \frac{n}{\alpha_n}$.
- c) Déduire des questions 2.a et 2.b que la suite $\frac{\alpha_n}{e^n}$ $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente et calculer sa limite.

SUJET N°23

Exercice1

- On lance un dé à 6 faces. On suppose que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur elle.
- Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.
 - Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Exercice2 : Problème

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, i, j) (unité graphique 2cm).
- Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.
- Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.
 - En déduire le tableau de variation de g .
 - Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$, puis justifier que : $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$
 - En déduire le signe de g .
- Partie B** de f
- Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
 - Déterminer $f'(x)$ pour tout x réels.

3. En déduire, à l'aide de la Partie A, les variations de f et donner son tableau de variation.
4. a) Démontrer que : $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$
b.) A l'aide de l'encadrement de α déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4×10^{-2}
5. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$
Préciser la position de (C) par rapport à (D) .
6. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
7. Tracer (D) , (T) puis (C) .
- 8.a) Déterminer les réels a , b et c tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. Soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : x on associe $(x^2 + 2)e^{-x}$
- d) Calculer en fonction de α l'aire A en cm^2 de la partie du plan limitée par (C) , (D) et les droites d'ordonnées $x = -\alpha$ et $x = 0$.
- c) Justifier que : $A = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$

Partie C : Etude d'une suite

1. Démontrer que pour tout x de $[1; 2]$; on a : $1 \leq f(x) \leq 2$.
2. Démontrer que pour tout x de $[1; 2]$: $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$.
3. En utilisant le sens de variation de la fonction h définie sur $[1; 2]$ par : $h(x) = f(x) - x$, démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique β dans $[1; 2]$.
4. Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = f(U_n)$
 - a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq U_n \leq 2$.
 - b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4}|U_n - \beta|$
 - c) Démontrer que pour tout entier naturel n , $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$
 - d) En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.
 - e) Trouver un entier n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$ on ait : $|U_n - \beta| \leq 10^{-2}$.

SUJET N°24

Exercice 1

Une urne contient 3 boules vertes 4 boules et 5 boules bleu. On tire au hasard et simultanément 2 boules de l'urne.

- 1.a) Quelle est la probabilité de tirer 2 boules vertes ?
- b) Quelle est la probabilité de tirer 2 boules de couleurs différentes ?
2. Lorsqu'on tire une boule bleue, on marque un point ; lorsqu'on tire une boule rouge, on perd un point ; lorsqu'on tire une boule verte, on marque zéro point. On désigne par X le nombre de points marqués.
 - a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - c) Calculer l'Espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X .

Exercice 2 :

1. Soit $A(2; -1)$ et $A'(-2; 3)$. Déterminer une équation de l'ensemble (C) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 1$.
2. Déterminer une équation de l'image de (C) :
 - a) Par l'affinité orthogonal d'axe la droite de repère (O, i) et de rapport $\frac{2}{3}$.
 - b) Par l'affinité orthogonal d'axe la droite de repère (O, j) et de rapport 3.

Exercice 3 : Problème

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x-1} \ln x \\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1 \end{cases}$

On notera (C) la courbe représentative de f relativement à un repère orthonormé (O, i, j) d'unité 5cm.

Partie A : On considère la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $g(x) = (x - 2) \ln x + (x - 1)$

1. Démontrer que pour tout réel x élément de $]0; +\infty[$

$$g'(x) = \frac{2(x-1)}{x} + \ln x$$

2. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
3. Déduire de 2) que $g(x)$ est positif pour tout x élément de $]0; +\infty[$

Partie B :

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
c) Démontrer que f est continue à droite en 0 et continue en 1.
d) Calculer le nombre dérivée de f à droite en 0. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
e) On admettra que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \frac{3}{2}$. En déduire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
- 2.a) On admet que f est dérivable sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$. Démontrer que pour tout x appartenant à : $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ $f'(x) = \frac{x}{(x-1)^2} g(x)$
b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
c) Démontrer que pour tout x appartenant à $[0; 1]$ on a $0 \leq f(x) \leq 1$.
d) Dans le repère (O, i, j) tracer la tangente à (C) au point 0, la tangente au point $B(1; 1)$ et la courbe (C) on donne $\ln 2 \approx 0,69$ et $\ln 3 \approx 1,1$.