Chap I : **Les Nombres Complexes :**

I) Notion de nombre Complexe

a) Introduction :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^2 + 1 = 0$

(E) : $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ (impossible)

l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Admettons que l'existence d'un nombre imaginaire noté i / $i^2 = -1$

(E) : $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$

$\Rightarrow x = i \quad x = -i$

Les solution i et $-i$ sont des nombres Complexe

b) Définition :

On appelle nombre Complexe tout nombre pouvant s'exprimer sous la forme $z = x + iy$:

$x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$; i / $i^2 = -1$.

L'écriture $z = x + iy$ est appelée forme algébrique de z. On pose

- $x = Re(z)$ appelé partie réelle de z
- $y = Im(z)$ appelé partie imaginaire de z

Exemple : $z_1 = 2 + 3i$ / $2 \in \mathbb{R}$, $3 \in \mathbb{R}$ i / $i^2 = -1$

z_1 est un nombre Complexe. $\begin{cases} Re(z) = 2 \\ Im(z) = 3 \end{cases}$

$z_2 = 5 - 2i$ / $5 \in \mathbb{R}$, $-2 \in \mathbb{R}$ / i / $i^2 = -1$

z_2 est un nombre Complexe $\begin{cases} Re(z) = 5 \\ Im(z) = -2 \end{cases}$

Remarque :

Soit $z = x + iy$; ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, i / $i^2 = -1$)

un nombre Complexe.

- Si $y = Im(z) = 0$: $z = x \in \mathbb{R}$; z est dit réel

(tout nombre réel est aussi complexe).

- $x = Re(z) = 0$ et $y \neq 0$: $z = iy$ est dit imaginaire pur.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$

3-) Nombre complexe nul :

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ $i / i^2 = -1$

z est un nombre complexe nul lorsque sa partie réelle et sa partie imaginaire sont à la fois nul.

$$z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = Re(z) = 0 \\ y = Im(z) = 0 \end{cases}$$

4-) Nombre complexe égaux :

Soit $z = x + iy$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i / i^2 = -1)$

$z' = x' + iy'$ $(x' \in \mathbb{R}, y' \in \mathbb{R}, i / i^2 = -1)$

Deux nombres complexes

$$z = z' \Rightarrow x + iy = x' + iy'$$

$$x - x' + i(y - y') = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x' = 0 \\ y - y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

$$\boxed{z = z' \quad \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}}$$

Conclusion : Deux nombre complexes sont égaux si leurs parties réelles et imaginaires égaux.

5-) Opération sur les nombres complexes :

5-1) Somme :

Soit $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ $y \in \mathbb{R}$ $i / i^2 = -1$)

et $z' = x' + iy$ ($x' \in \mathbb{R}$ $y \in \mathbb{R}$ $i / i^2 = -1$)

deux nombre complexes.

$$z' + z = x + iy + x' + iy' = (x + x') + i(y' + y)$$

$z + z' \in \mathbb{C}$. La somme de nombre complexe est une nombre complexe. $z + z' \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} Re(z+z') = x + x' = Re(z) + Re(z') \\ Im(y+y') = y + y' = Im(z) + Im(z') \end{cases}$$

5-2) Produit de nombre Complexe :

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes. $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}$, $y' \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$

$z \times z' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + ixy' + iyx' - yy'$

$z \times z' = xx' - yy' \quad i(xy' + yx')$

$z \times z' \in \mathbb{C}$: le produit d'un nombre complexe est un nombre Complexe

$$\begin{cases} Re(z \times z') = xx' - yy' \\ Im(z \times z') = xy' + yx' \end{cases}$$

Exemple 1 $z_1 = 3 + i$; $z_2 = -\sqrt{2} + 3i$

$z_1 \times z_2 = (3 + i)(-\sqrt{2} + 3i) = -3\sqrt{2} - 3 + i(9 - \sqrt{2})$

$= -3\sqrt{2} + 9i - \sqrt{2}i - 3 = -3\sqrt{2} + 3 + i(9 - \sqrt{2})$

Exemple 2 $(1 + 2i) = z_1$ et $z_2 = (2 - i)$

$z_1 \times z_2 = (1 + 2i)(2 - i) = 2 + 2 + 3i = 4 + 3i$

$= 2 - i + 4i + 2 = 4 + 3i$

(-3) Inverse d'un nombre complexe :

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul $((x, y) \neq (0, 0))$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$= \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \left(i \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \qquad \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$\frac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$ l'inverse d'un nombre Complexe est un nombre Complexe

$\frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ $\begin{cases} Re(1/z) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ Im(1/z) = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$

Exemple : 1) $z_1 = 8+4i$

$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{8+4i} = \frac{8}{80} + i\frac{-4}{80} = \boxed{\frac{1}{10} - i\frac{4}{20}}$

$z_2 = 2i+1$.

$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{2i+1} = \boxed{\frac{1}{5} + i\frac{-2}{5}}$

5-4) Quotient de nombre complexe :

Soit $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ deux nombres complexes tel que $z' \neq 0$

$\frac{z}{z'} = \frac{x+iy}{x'+iy'} = \frac{(x+iy)(x'-iy')}{(x'+iy')(x'-iy')} = \frac{xx'+yy'+i(-xy+yx')}{x'^2+y'^2}$

$\frac{z}{z'} = \underbrace{\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}}_{\in \mathbb{R}} + i\underbrace{\frac{-xy+yx'}{x'^2+y'^2}}_{\in \mathbb{R}}$

donc le quotient d'un nombre complexe et un nombre complexe.

$\frac{z}{z'} \in \mathbb{C}$ $\begin{cases} Re(z/z') = \frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2} \\ Im(z/z') = \frac{-xy'+x'y}{x'^2+y'^2} \end{cases}$

Exemple : $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 4+3i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{4+3i} = \frac{18}{25} + i\frac{-1}{25}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+2i)}{(4+3i)} = \frac{(3+2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{18-i}{25} = \frac{18}{25} - \frac{i}{25}$

exemple 2: $z_1 = (1+2i)$ et $z_2 = (2-i)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+2i)}{(2-i)} = \frac{2-2}{5} + i\,\frac{1+4}{5} = i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+2i)}{(2-i)} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2^2-(i)^2} = \frac{2+i+4i-2}{5}$$

- Identité Remarquable:

$z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$

$(z+z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$

$(z-z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$

$(z+z')^3 = z^3 + 3z^2z' + 3zz'^2 + z'^3$

$(z-z')^3 = z^3 - 3z^2z' + 3zz'^2 - z'^3$

$$\boxed{(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, z^k z'^{n-k}}$$

Remarque: $n \in \mathbb{Z}$ $p \in \mathbb{Z}$ $n \neq 4p$, $r \neq p$

$n = 4p + r$ $(r \leq 3)$

$i^n = i^{(4p+r)} = (i^4)^p * i^r = i^r$

$$\boxed{i^n = i^r} \qquad r \leq 3$$

exemple: $i^{-1999} = (i^4)^{499} \times i^3 = -i$

$i^{2021} = (i^4)^{505} \times i^1 = i$

Application: $(1, i, -1, -i)$ 62 Trm

6) Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

but

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow P$$

$$z = x + iy \longmapsto f(z) = M(z) \;/\; M(z) = M(x,y)$$

a) Application f qui à tout nombre complexe $z = x + iy$

associé le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est une bijection de $\mathbb{C} \longrightarrow P$

le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est appelé point image du nombre complexe $z = x + iy$.

Le nombre complexe $z = x + iy$ noté z_M est appelé affixe du point M de coordonné (x, y)

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow V \quad \text{[ensemble des vecteurs du plan]}$$
$$z = x + iy \longmapsto f(z) = \vec{u}(z) \;/\; \vec{u}(z) = \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{i}, \vec{j})$$

L'Application f qui à tout nombre complexe $z = x + iy$ associe le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est une bijection de $\mathbb{C} \longrightarrow V$.

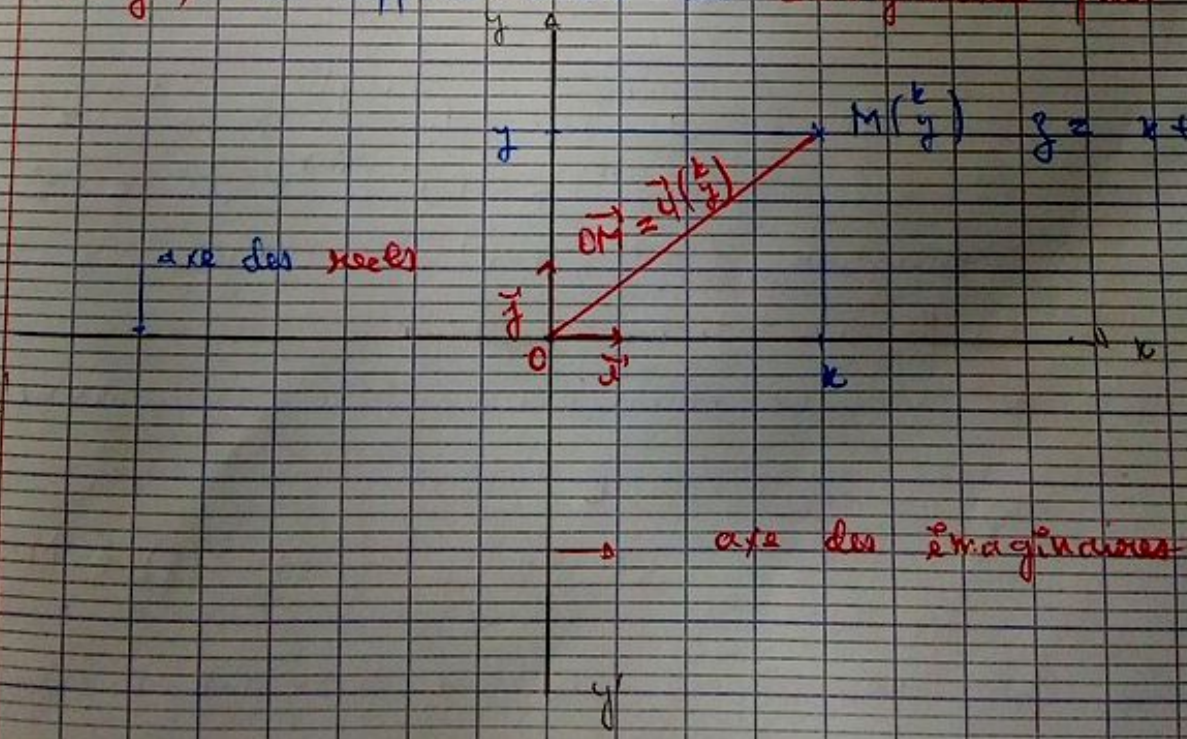
$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est appelé vecteur image du nombre complexe $z = x + iy$.

Le nombre Complexe $z = x + iy$ noté $z_{\vec{u}}$ est appelé Affixe du vecteur $\vec{u}$.

Le Plan muni du repere orthonormé directe $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé Plan complexe.

$(O, \vec{i})$ est appelé l'axe des réels

$(O, \vec{j})$ est appelé l'axe des imaginaires purs



Remarques : Soit $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs A, B, C 3 pt et $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda' \in \mathbb{R}$

On a :

i) $$z_{(\vec{u}+\vec{u'})} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{u'}}$$

ii) $$z_{\lambda\vec{u}} = \lambda \times z_{\vec{u}}$$

iii) $$z_{(\lambda\vec{u}+\lambda'\vec{u'})} = \lambda z_{\vec{u}} + \lambda' z_{\vec{u'}}$$

iv) $$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

v) I : milieu [AB] $$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

vi) G barycentre $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array}$ $(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

En particulier : si G centre de gravité du triangle ABC (isobarycentre)

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

NB : A démontrer pour vendredi.

7) Conjugué

Définition :

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, on appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que

$\bar{z} = x - iy$; $z = x + iy$

exemples : $z = 2i + 3 \Rightarrow \bar{z} = 3 - 2i$

$z = -7i \Rightarrow \bar{z} = 7i$

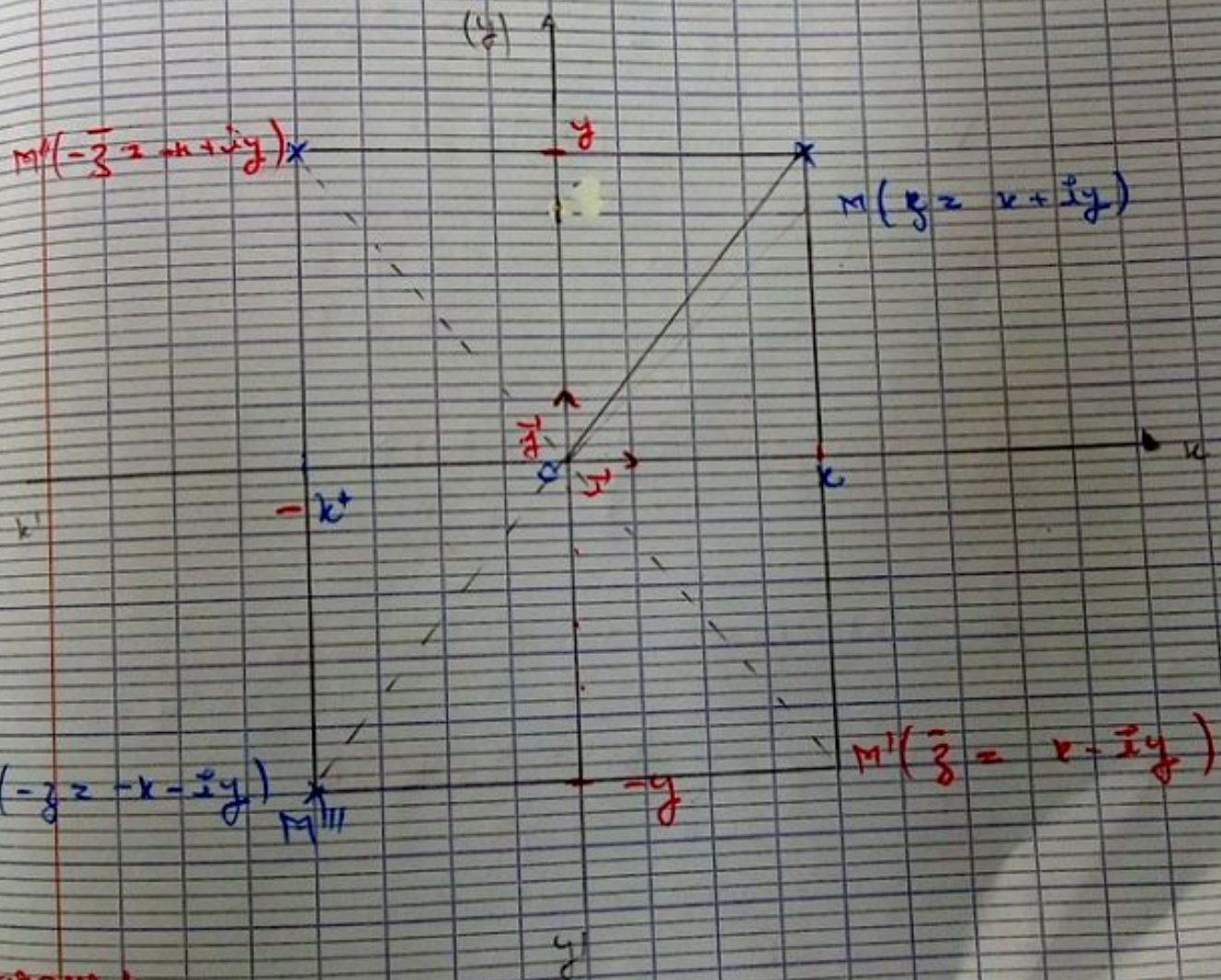
$z = \sqrt{5} \Rightarrow \bar{z} = \sqrt{5}$.

$z = x + iy \Rightarrow \bar{\bar{z}} = (x + iy) = (x - iy) = x + iy = z$

Donc $\boxed{\bar{\bar{z}} = z}$

$z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$; $-\bar{z} = -x + iy$

$-z = -x - iy$



Remarque :

$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

$z + \bar{z} = 2x$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = Re($

$z = x + iy \quad -\bar{z} = -x + iy$

$z - \bar{z} = 2iy \rightarrow$ ②

$$y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = Im(z)$$

D'après ① et ② on a :

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = 0$

$\frac{1}{2i} \neq 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$

$\rightarrow \bar{z} = z$ donc $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

z imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(z) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \neq 0$ et $z + \bar{z} = 0$

$z = -\bar{z}$ donc z imaginaire pur ssi $z = -\bar{z}$

Propriétés

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes

$n \in \mathbb{Z}$

i) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

ii) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

iii) $\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\bar{z}}$ $(z \neq 0)$

iv) $\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ | v) $\bar{z^n} = (\bar{z})^n$

I) Module : démonstration

$z = x + iy$ / $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe

$\bar{z} = x - iy$

$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$

$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$

Définition :

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle **module de z** noté $|z|$ le nombre réel positif défini par

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Exemple :

$z_1 = 3 + 2i$; $|z_1| = |3+2i| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2} = \sqrt{13}$

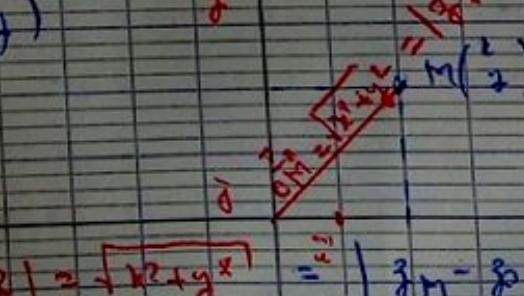
$z_2 = -4 + 3i$; $|z_2| = |-4+3i| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = 5$

$z_3 = -7i$; $|z_3| = |-7i| = \sqrt{(-7)^2} = 7$

$z_4 = \sqrt{5}$; $|z_4| = |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

- **Interprétation géométrique :**

M(z = x + iy)



$M(z) : OM = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = |z_M - z_O|$

$\vec{u}(z) = \|\vec{u}\| = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$AB = |z_B - z_A|$ où $A(z_A)$ et $B(z_B)$

Remarque : • Si $z \in \mathbb{R}$ $z = x$ $|z| = |x|$

• Si z imaginaire pur : $z = iy$: $|z| = |y|$

• Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$

• Pour tout $z \in \mathbb{C}$ $|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$

en effet $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{z\bar{z}} = 1$

$\Leftrightarrow z\bar{z} = 1$

$\Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$

• Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (nul)

- Propriétés :

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$

(i) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

(ii) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $(z \neq 0)$

(iii) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $(z' \neq 0)$

(iv) : $|z^n| = |z|^n$

(v) : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Exercice - Page (62) exo 1 et 2 et 1-2 (Sm)

- Page (76) exo 5, 9, 10 (Sm)

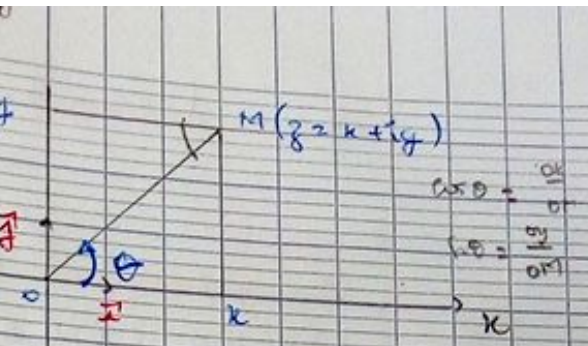
II) Forme Trigonométrique :

1-) Argument :

Définition :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soit $M(z) / z = x + iy$



$\theta = \text{mes}(\vec{i}, \vec{OM}) = \arg(z)$

θ est un argument de z

On appelle argument de z noté $\arg(z)$ toute mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OM})$.

- Sachant que tout angle orienté admet une infinité de mesure, tout nombre complexe non nul ($\neq 0$) admet une infinité d'Arg
- Parmi tout les arguments de z il y a un Argument appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ appelé Argument principal noté $\text{Arg}(z)$.
- Si θ et θ' sont deux argument de z alors $\theta \equiv \theta' (2\pi)$ ($\equiv$: congru, 2π : modulo)

$\theta = \theta' + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$M(z)$; θ argument de z

$\arg(z) = \theta \ (2\pi)$ signifie $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

- Détermineurs d'un argument d'un complexe non nul :

$M(z)$; $\arg(z) = \text{mes}(\vec{i}, \vec{OM}) = \theta (2\pi)$

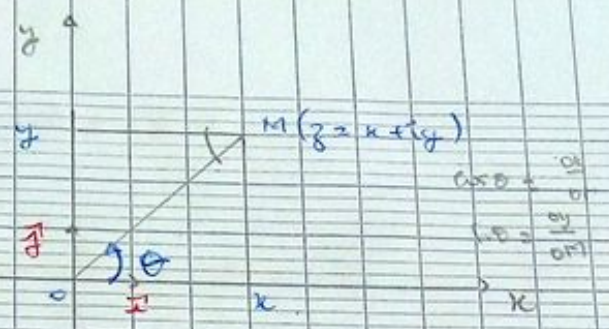
$\vec{i} \cdot \vec{OM} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{OM}\| \times \cos(\vec{i}, \vec{OM})$

$= 1 \times OM \times \cos\theta$

$= |z| \times \cos\theta$

$\vec{i} \cdot \vec{OM} = |z| \times \cos\theta$ (1)

$\vec{j} \cdot \vec{OM} = x$ (2) Donc (1) et (2) $\cos\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{\text{Re}(z)}{|z|}$



$\theta = \text{mes}(\vec{i}, \vec{OM}) = \arg(z)$

θ : est un argument de z

On appelle argument de z noté $\arg(z)$ toute mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OM})$.

- Sachant que tout angle orienté admet une infinité de mesure, tout nombre complexe non nul ($\neq 0$) admet une infinité d'Arg
- Parmi tout les arguments de z il y a un Argument appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ appelé Argument principal noté $\text{Arg}(z)$.
- Si θ et θ' sont deux argument de z alors $\theta \equiv \theta' (2\pi)$ (congru, modulo)

$\theta = \theta' + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$M(z)$; θ argument de z

$\arg(z) = \theta\ (2\pi)$ signifie $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

- Détermination d'un argument d'un complexe non nul :

$M(z)$; $\arg(z) = \text{mes}(\vec{i}, \vec{OM}) = \theta (2\pi)$

$\vec{i} \cdot \vec{OM} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{OM}\| \times \cos(\vec{i}, \vec{OM})$

$= 1 \times OM \times \cos\theta$

$= |z| \times \cos\theta$

$\vec{i} \cdot \vec{OM} = |z| \times \cos\theta$ (1)

$\vec{i} \cdot \vec{OM} = k$

(2) Donc θ et θ $\cos\theta = \frac{k}{|z|} = \frac{\text{Re}(z)}{|z|}$

$\vec{z} \cdot \vec{OM} = \|\vec{z}\| \times \|\vec{OM}\| \times \cos(\vec{z}, \vec{OM})$ avec $\beta = (\vec{z}, \vec{OM})$

$\vec{z} \cdot \vec{OM} = 1 \times OM \times \cos\beta$

$= 1 \times |z| \times \sin\theta$ car $\beta + \theta = \frac{\pi}{2}$ complémentaire

$$\vec{z} \cdot \vec{OM} = \sin\theta \times |z| \quad (3)$$

$\vec{z} \cdot \vec{OM} = x x' + y y' = 0 \times x + y \times 1 = y$

$$\vec{z} \cdot \vec{OM} = y \quad (4)$$

D'après (3) et (4) $\begin{cases} \vec{z} \cdot \vec{OM} = |z| \times \sin\theta \\ \vec{z} \cdot \vec{OM} = y \end{cases}$

$|z| \times \sin\theta = y \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{|z|} = \frac{Im(z)}{|z|}$

En résumé $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{Re(z)}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{y}{|z|} = \frac{Im(z)}{|z|} \end{cases}$

Application: $z = 1 + i\sqrt{3}$

$|z| = 2$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2} > 0 \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \ (2\pi)$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{3} \ (2\pi)$$

$z_2 = 2 + 2i \qquad |z_2| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{|z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$$

- Interpretation geometrique d'argument :

M(z) :	$\arg(z_M) = mes(\vec{i}, \vec{OM})$ (2π)
$\vec{u}(z)$:	$\arg(z_{\vec{u}}) = mes(\vec{i}, \vec{u})$ (2π)
A(z_A) et B(z_B)	$\arg(z_B - z_A) = \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = mes(\vec{i}, \overrightarrow{AB})$

Exemple

$\arg(1) = 0$ (2π) $\quad \arg(-2) = \pi$ (2π)

$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ (2π) $\quad \arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ (2π)

Remarque : le nombre complexe nul n'a pas d'argument

- z est reel ssi $z = 0$ ou $\arg(z) = 0$ (π)

ou

- z est imagine pure ssi $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ (π)

- z est imaginaire pure positif ssi $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ (2π)

- z est imaginaire pure negatif ssi $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$ (2π)

- z est reel positif ssi $\arg(z) = 0$ (2π)

- z est un reel negatif ssi $\arg(z) = \pi$ (2π)

- Pour tout nombre complexe $z \neq 0$ ($\mathbb{C}^*$) on a :

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ (2π)
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)$ (2π)
- $\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z)$ (2π)

2) Forme trigonometrique d'un nombre complexe :

2-1) Définition :

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ ($|z| = r > 0$; $\arg(z) = \theta\ (2\pi)$)

on appelle forme trigonométrique de z l'écriture

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

avec $\begin{cases} r = |z| \\ \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$

Exemple : $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

avec $\begin{cases} |z_1| = 2 \\ \arg(z_1) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi) \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Exemple 2 : $z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

avec $\begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Remarques : $z \neq 0$

forme algébrique

$$\boxed{z = x + iy}$$

$\Downarrow$

$\begin{cases} |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arg(z)\ (2\pi) \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

$\Rightarrow$ forme trigonométrique

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$\Downarrow$

$\begin{cases} r\cos\theta = x \\ r\sin\theta = y \end{cases}$

$\Rightarrow z$ (algébrique) $= z$ (trigo)

- $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est une forme trigonométrique avec $\begin{cases} |z| = r \\ \arg(z) = \theta\ (2\pi) \end{cases}$

Pour $r < 0$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad z = -r(-\cos\theta + i\sin(-\theta))$

$z = -r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$ — forme trigonométrique avec $|z| = -r > 0$ et $\arg(z) = \theta + \pi\ (2\pi)$

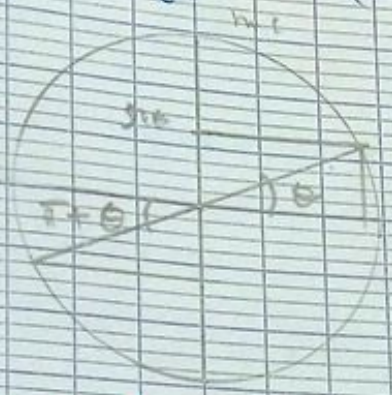
$z = -(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$z = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin(-\frac{\pi}{6})$

$z = \cos(\frac{\pi}{6}+\pi) + i\sin(\frac{\pi}{6}+\pi)$

$z = \cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6})$

$z = 1(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$



2-2) Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et $n \in \mathbb{Z}$ on a :

i) $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$

ii) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ (2\pi)$

iii) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ (2\pi)$

iv) $\arg(z^n) = n\arg(z)\ (2\pi)$

Exercice :

Soit A, B et C trois points deux à deux distincts, d'affixes z_A, z_B et z_C.

Montrer que : $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \text{mes}(\vec{AB}, \vec{AC})\ [2\pi]$

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

• Formule de Moivre :

Soit $z = \cos\theta + i\sin\theta$ on a :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$ formule de Moivre

Exemple : $(1+i)^{2017} = \left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^{2017} = \sqrt{2}^{2017}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2017}$

$= (\sqrt{2})^{2017}\left(\cos\frac{2017\pi}{4} + i\sin\frac{2017\pi}{4}\right)$

or $2017 = \frac{\pi}{4} + 504(2\pi)$ même principe que $\frac{\pi}{4}$

$$\boxed{(1+i)^{2017} = (\sqrt{2})^{2017}\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}$$

I-3) Notation exponentielle :

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.

En pose $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

d'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée notation ou forme exponentielle de z

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

Exemple : $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\pi/3\right)$

$= 2e^{i\pi/3}$

$\boxed{z = 2e^{i\pi/3}}$

Page : 77 : 23 → 31
Pag-76 : 11 → 14

$z_2 = 1 - i = r_2\left(\frac{r_2}{1} + i\sin\left(-\frac{r_2}{2}\right)\right)$

$= r_2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\pi/4\right)\right)$

$= r_2 e^{-i\pi/4}$

$z_2 = e^{-i\pi/4}$

$z_3 = 2 = 2(1 + i(0)$

$= 2(\cos 0 + i\sin(0) = 2e^{i0}$

$z_3 = 2e^{i0}$

$z_4 = -2 = 2(-1 + i(0)$

$= 2(\cos\pi + i\sin(\pi) = 2e^{i\pi}$

$z_4 = 2e^{i\pi}$

- **Propriétés :**

Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta}$ avec

$|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$ et $|z'| = r'$ et $\arg(z') = \theta'$ (2π)

On a les propriétés suivantes :

i) $zz' = (re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = rr'e^{i(\theta+\theta')}$

- $|zz'| = rr' = |z| \times |z'|$

$\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z') + 2\pi$

ii) $\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{r}{r'} = \frac{|z|}{|z'|}$

- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' = \arg(z) - \arg(z')$

iii) $\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{i(-\theta)}$

Page 48 : 48 → 49

Page 37 : 23 → 31

Page 76 : 11 → 14

$z_2 = 1 - i = r_2\left(\frac{r_2}{2} + i\sin\left(-\frac{r_2}{2}\right)\right)$

$= r_2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= r_2 e^{-i\pi/4}$

$z_2 = e^{-i\pi/4}$

$z_3 = z = 2(1 + i(0)$

$= 2(\cos 0 + i\sin(0)) = 2e^{i0}$

$z_3 = 2e^{i0}$

$z_4 = -2 = 2(-1 + i(0)$

$= 2(\cos\pi + i\sin(\pi) = 2e^{i\pi}$

$z_4 = 2e^{i\pi}$

- **Propriétés :**

Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta}$ avec

$|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$ et $|z'| = r'$ et $\arg(z') = \theta'$ (2π)

On a les propriétés suivantes :

i) $zz' = (re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = rr'e^{i(\theta+\theta')}$

- $|zz'| = rr' = |z| \times |z'|$

$\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z') \ (2\pi)$

ii) $\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{r}{r'} = \frac{|z|}{|z'|}$

- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' = \arg(z) - \arg(z')$

iii) $\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{i(-\theta)}$

- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta = -\arg(z) \ (2\pi)$

iv) $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{i(n\theta)}$

- $|z^n| = r^n = |z|^n$

- $\arg(z^n) = n\theta = n\arg(z) \ (2\pi)$

- **Formule d'Euler :**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$\begin{cases} \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta} \end{cases}$

$\begin{cases} \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \cos(\theta) - i\sin(\theta) = e^{-i\theta} \end{cases}$

$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

Formule d'Euler

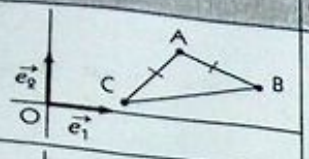
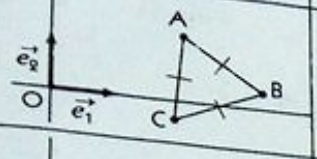
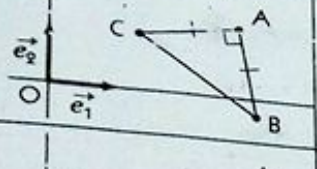
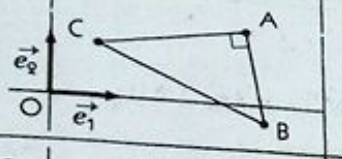
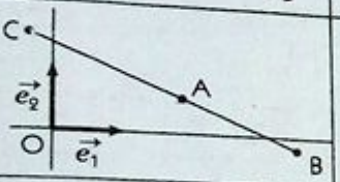
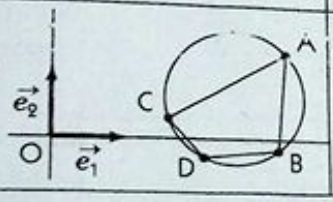
- $\begin{cases} \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \end{cases} \Rightarrow 2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

d'où $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ Formule d'Euler

2-4)

4) Configurations du plan et nombres complexes

Dans le tableau ci-dessous, nous caractérisons certaines configurations géométriques à l'aide des nombres complexes.

Configuration	Caractérisation géométrique	Caractérisation complexe
Triangle ABC isocèle en A 	AB = AC et mes $\hat{A} = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$ $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
Triangle ABC équilatéral 	AB = AC et mes $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A 	AB = AC et mes $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
Triangle ABC rectangle en A 	mes $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi$ $(b \in \mathbb{R}^*)$ module
Points A, B, C alignés 	Mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0\ [\pi]$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C, D cocycliques 	Mes $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) =$ Mes $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ $0\ [\pi]$ $\left(\text{Mes}\,(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \neq 0\ [\pi]\right)$	$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}^*$

III/ Racine nièmes

1- Définition :

Soit $\zeta \in \mathbb{C}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$

On appelle racine nième de z tout nombre complexe ζ

tq : $\boxed{(\zeta)^n = z}$

$(\Rightarrow)$ $\boxed{\zeta_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)}}$ avec $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$, $k = 0, \dots, n-1$

Demonstration :

$z = re^{i\theta}$ ($r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$)

$Z = \rho e^{i\alpha}$ ($\rho = |Z|$; $\alpha = \arg(Z)$)

$Z^n = z \Leftrightarrow (\rho e^{i\alpha})^n = re^{i\theta}$

$\Leftrightarrow \rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\rho^n)^{\frac{1}{n}} = (r)^{1/n} \\ \alpha_n = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \rho^{\frac{n}{n}} = r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = |Z| = \sqrt[n]{r} = (r)^{1/n} \\ \alpha = \arg(Z) = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$

$Z^n = z \Leftrightarrow Z_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$

$\boxed{Z^n = z \Leftrightarrow Z_k = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad k = 0, \dots, n-1}$

(E) $Z^n = z$ les solutions sont :

$Z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$; $Z_1 = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi}{n}\right)}$

$Z_{n-1} = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}\right)}$

N (terme) $= n - 1 - 0 + 1$

$= n$ nombre de solutions

Interprétation géométrique

On désigne par $M_0(Z_0)$, $M_1(Z_1)$, $M_2(Z_2)$ ... $M_k(Z_k)$ ... $M_{n-1}(Z_{n-1})$ les images respectives de ces solutions

$|Z_0| = |Z_1| = |Z_2| = \dots = |Z_k| = \dots = |Z_{n-1}| = \sqrt[n]{r}$

$OM_0 = OM_1 = OM_2 = \dots = OM_k = \dots = OM_{n-1} = \sqrt[n]{r}$

Les pts $M_0, M_1, M_2 \dots M_k \dots M_{(n-1)}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n coté inscrit

dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r} = \rho$

Soient $z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_k + \dots + z_{n-1} = 0$

$$A = z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_k + \dots + z_{n-1}$$

$$= \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)} + \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)} + \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta+4\pi}{n}\right)} + \dots + \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} + \dots + \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)}$$

$$A = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)} \left[1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + \dots + e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} + \dots + e^{i\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)} \right]$$

$$A = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)} \left[1 + e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)} + e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2} + \dots + e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)^k} + \dots + e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{n-1}} \right]$$

$$A = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)} \left[1 \times \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} \right] = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)} \left[\frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} \right]$$

$$= \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)} \left[\frac{1 - 1}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} \right] = 0$$

Remarque : La somme des racine nième d'un complexe non nul est nulle.

2) Racine nième de l'unité :

$$z^n = 1 \quad (n \geq 2)$$

$$z^n = 1 \Leftrightarrow z^n = 1 e^{i0}$$

$$\Leftrightarrow z_k = 1 e^{i\frac{2k\pi}{n}} \; ; \; k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$$

$$\boxed{z^n = 1 \Leftrightarrow z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \; ; \; k \in \{0; 1; \dots; n-1\}}$$

Les solutions de l'équation $z^n = 1 \quad (n \geq 2)$ sont $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{n}}$, $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{n}}$, $z_{n-1} = e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}$

$M_0(z_0)$, $M_1(z_1)$, $\dots$, $M_{n-1}(z_{n-1})$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrits dans le cercle trigonométrique ($r = 1$)

3) Cas Particulier

• Racine cubique de l'unité : $n = 3$

$z^3 = 1 \Leftrightarrow z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$; $k \in \{0, 1, 2\}$

$z_0 = e^{i0}$; $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$; $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{-2\pi}{3}} = \bar{j} = \frac{1}{j}$

• $1 + j + j^2 = 0$

• $1 + j + \bar{j} = 0$

$M_0(z_0)$, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle trigonométrique

• Racine quatrième de l'unité : $n = 4$

$z^4 = 1 \Leftrightarrow z_k = e^{i\frac{k\pi}{2}}$; $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$z_0 = 1$; $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $z_2 = e^{i\pi} = -1$

$z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

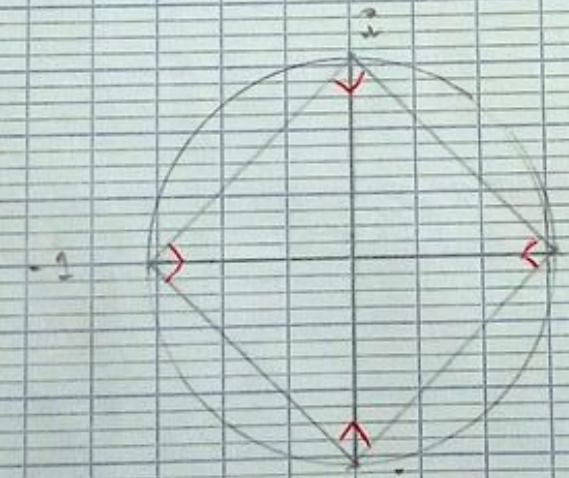
Exo: Page 79

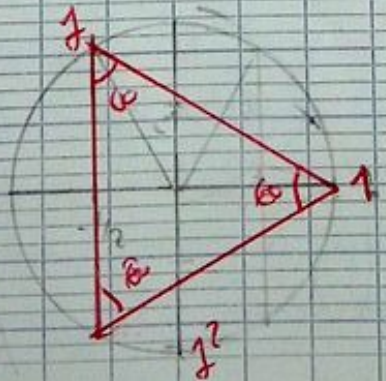
Exo: 53, 52, 55, 54

Les solutions de l'équation $z^4 = 1$ sont $1, i, -1, -i$

les points $M_0(z_0)$, $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ sont les sommets d'un carré inscrit dans le cercle trigonométrique (car $r = 1$).

$1 + i - 1 - i = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 0$





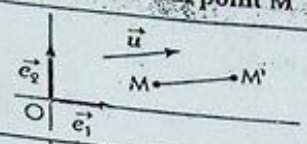
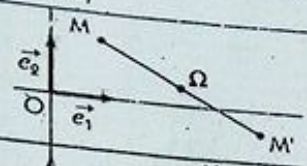
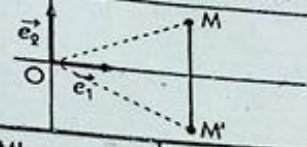
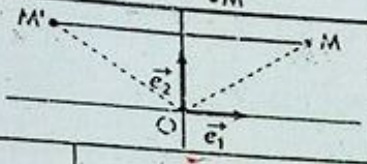
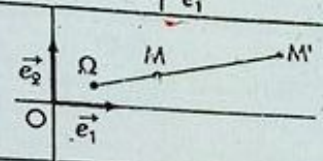
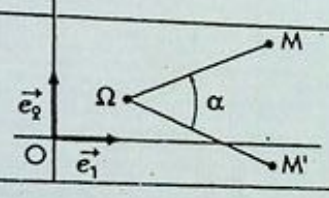
$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Géométrie et nombres complexes

Dans tout ce paragraphe, le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Transformations et nombres complexes

Nous indiquons dans le tableau ci-dessous l'écriture complexe de certaines transformations du plan. Dans ce tableau, $M(z)$ et $M'(z')$ désignent un point et son image, ainsi que leurs affixes, par chacune de ces transformations.

Transformation	Image M' d'un point M	Définition géométrique	Écriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}(a)$		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + a$
Symétrie de centre $\Omega(\omega)$		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Symétrie par rapport à l'axe réel		$\begin{cases} OM' = OM \\ (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM'}) = -(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$	$z' = \overline{z}$
Symétrie par rapport à l'axe imaginaire		$\begin{cases} OM' = OM \\ (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM'}) = \pi - (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$	$z' = -\overline{z}$
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k		$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha\ [2\pi] \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$

Similitude

Chapitre II : Similitudes Directes Planes

I/ Définition et propriétés :

1/ Définition :

On appelle similitude directe plane la composé d'une isométrie (transformation du distances [par exemple : une rotation] et d'une homothétie.

Ecriture complexe :

Soit h : une homothétie ayant pour écriture complexe $z' = kz + c$ $\begin{cases} k \in \mathbb{R}^* \\ c \in \mathbb{C} \end{cases}$

r : une rotation ayant pour écriture complexe $z' = e^{i\theta}z + c$ $\begin{cases} e^{i\theta} \in \mathbb{C}^* \text{ (ici =1)} \\ c \in \mathbb{C} \end{cases}$

hor a pour écriture complexe :

$$\begin{aligned} z' &= k(e^{i\theta}z + c) + c \\ &= ke^{i\theta}z + kc + c \text{ avec} \end{aligned} \quad \begin{cases} ke^{i\theta} \in \mathbb{C}^* \\ kc + c \in \mathbb{C} \end{cases}$$

roh : a pour écriture complexe

$$\begin{aligned} z' &= e^{i\theta}(kz + c) + c \\ &= ke^{i\theta}z + e^{i\theta}c + c \text{ avec} \end{aligned} \quad \begin{cases} ke^{i\theta} \in \mathbb{C}^* \\ ce^{i\theta} + c \in \mathbb{C} \end{cases}$$

On admet $\boxed{hor = roh = S}$: appelée similitude directe plane

2/ Propriétés :

- Toute similitude directe à une écriture complexe de forme :

$$\boxed{z' = az + b} \text{ avec } \begin{cases} a \in \mathbb{C}^* \\ b \in \mathbb{C} \end{cases}$$

- La réciproque est aussi vraie :

Toute application (S) du plan dans lui même dont l'écriture complexe est de la forme : $\boxed{z' = az + b}$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{C}^* \\ b \in \mathbb{C} \end{cases}$

est une similitude directe du plan

* si $a = 1$ alors S est une translation de vecteur $\vec{u}'(b)$ (u d'affixe b)

* Si $a \neq 1$ alors s admet 1 seul pt invariable Ω
tel θ arg de a et k module de a: $(a = k e^{i\theta})$
s est la composé de l'homothétie de centre Ω
de rapport k et de la rotation de centre Ω et
d'angle θ ou encore la similitude directe plane
de centre Ω de rapport k et d'angle θ

$$S(P)\left\{ S_{\Omega}(\Omega) \quad k = |a| \;,\; \arg a = \theta \right\}$$

En effet:
Si s: une application ayant pour écriture complexe
$z' = az + b$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{C}^* \\ b \in \mathbb{C} \end{cases}$

- Si $a = 1$: $z' = z + b$: s est une translation de vecteur $\vec{u}(b)$
- Si $a \neq 1$: $z' = az + b$

$z' = z = w$: $\Omega(w)$ est un point invariant par s

$w = aw + b \Leftrightarrow$
$w - aw = b \Leftrightarrow$
$w(1-a) = b \Leftrightarrow w = \dfrac{b}{1-a}$.

Et equation $w = aw + b$ admet une solution unique

$$w = \frac{b}{1-a}$$

s: admet un unique point invariant $(s(\Omega) = \Omega)$
point fixe $\Omega\left(w = \dfrac{b}{1-a}\right)$

$$\begin{cases} z' = az + b \\ w = aw + b \end{cases}$$

$z' - \omega = a(z - \omega)$

posons $a = k e^{i\theta}$ avec $\begin{cases} |a| = k \\ \arg(a) = \theta\ (2\pi) \end{cases}$

$$\boxed{z' - \omega = k e^{i\theta}(z - \omega)}$$

$S = h \circ r = r \circ h$

S = Composée de $h(\Omega(\omega); k)$ et de la rotation $r(\Omega(\omega); \theta)$

ou encore similitude directe (~~avec~~) Plane de centre $\Omega\left(\omega = \frac{b}{1-a}\right)$ de rapport k et d'angle θ.

Une similitude directe du plan qui n'est pas une translation est déterminé par son centre, son rapport et de son angle appelé element caractéristique de cette similitude

Remarque: - 1 rotation d'angle θ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle θ

- une homothétie de rapport k ($k \neq 0$) est une similitude directe de rapport k et d'angle nul ;
- une homothétie de rapport k ($k < 0$) est une similitude directe de rapport $-k$ et d'angle π
- une translation peut être considérée comme une similitude directe de rapport 1, d'angle nul (0), dans ce cas le rapport est non-défini

Application:

$S : P \longrightarrow P$

$r\left(\frac{1}{1}\right) : k = 2 \quad ; \quad \theta = -\frac{\pi}{3}$

S est une similitude directe plane

S a pour écriture complexe.

$$z' = az + b \quad \begin{cases} a \in \mathbb{C}^* \\ b \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$\omega = -1 + i$

$a = k e^{i\theta} \Rightarrow 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 1 - i\sqrt{3}$

$\boxed{a = 1 - i\sqrt{3}}$

$w = \frac{b}{1-a} \Leftrightarrow b = w(1-a)$

$b = (1+i)(1-a) = (1+i)(1-1+i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$

$\boxed{b = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}}$

$z' = az + b = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i\sqrt{3}$

$\boxed{z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i\sqrt{3}}$

Réciproque :

$f : z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i\sqrt{3}$

f a une écriture complexe de la forme

$z' = az + b$ avec $\begin{cases} a = (1 - i\sqrt{3}) \in \mathbb{C}^* \\ b = -\sqrt{3} + i\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ f est une similitude directe plane.

$\Omega(w)$: le centre de la similitude

$w = \frac{b}{1-a} = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{1 - 1 + i\sqrt{3}} = \frac{-1+i}{i} = 1 + i$

$w = 1 + i$; $\boxed{\Omega(1, 1)}$

$a = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$a = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $\boxed{k = |a| = 2}$ $\boxed{\arg(a) = -\frac{\pi}{3}}$

Autre application :

Soit f application du plan dans lui-même d'écriture complexe $z' = (1+i)z - 2i$

donner la nature de f et ses éléments caractéristiques

Solution :

f a pour écriture complexe $z' = (1+i)z - 2i$ $\begin{cases} a = (1+i) \neq 1 \\ b = -2i \in \mathbb{C} \end{cases}$

f est une similitude directe plane

$\Omega(\omega)$ le centre de la similitude

$$\omega = \frac{b}{1-a} \Rightarrow \omega = \frac{-2i}{1-1-i} = \frac{-2i}{-i} = 2$$

$\omega = 2$: $\boxed{\Omega(2, 0)}$

$$a = (1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$a = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad \boxed{k = |a| = \sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{4}}$$

f est une similitude directe plane de centre $\Omega(2,0)$ de rapport $k = |a| = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$

I-3/ Autres propriétés :

- Soit (S) une similitude directe de rapport k et d'angle θ, S' une similitude directe de rapport k' et d'angle θ'
  - la composée $S' \circ S$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$
  - la composée $\underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{n \text{ fois}} = S^n$ ($n \geq 2$ entier) est une similitude directe de rapport $(k)^n$ et d'angle $n\theta$
  - la réciproque de S est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$

Exemples 1 Soit S : $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2i$

S' : $z' = 3e^{i\frac{\pi}{4}}z - 5$

1) Déterminer la nature de $S \circ S'$ et préciser ses éléments caractéristiques

Exemple 2: Soit S : $z' = (1+i)z + 2i$

S' : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z - 5$

1) Déterminer la nature de $S' \circ S$ et préciser ses éléments caractéristiques

Exemple 3: Soit S : $z' = (1+i)z - 2i$

Déterminer la nature de f la similitude de S et ses éléments caractéristiques.

Solution 1)

S : $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2i$; S' : $z' = 3e^{i\frac{\pi}{6}}z - 5$

$S' \circ S$: $z' = 3e^{i\frac{\pi}{6}}(2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2i) - 5$

$= 6e^{i\frac{\pi}{2}} + 6ie^{i\frac{\pi}{6}} - 5$

$ie^{i\frac{\pi}{6}} = i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

En a: $z' = 6e^{i\frac{\pi}{2}}z + 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 5$

$= 6e^{i\frac{\pi}{2}}z - 8 + i3\sqrt{3}$

$S' \circ S$: $z' = 6e^{i\frac{\pi}{2}}z - 8 + i3\sqrt{3}$

$S' \circ S$ est une homothétie directe plane de rapport $k = 6$ d'angle $\theta + \theta' = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\omega)$

$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-8 + i3\sqrt{3}}{1 + 6i} = \frac{-8 - 18\sqrt{3}}{37} + i\frac{-48 + 3\sqrt{3}}{37}$

$\omega = -\frac{8 - 18\sqrt{3}}{37} + i\frac{-48 + 3\sqrt{3}}{37}$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i$

Solution 2

S : $z' = (1+i)z + 2i$

S' : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z - 5$

SOS' : $z' = (1+i)\left[\frac{1}{2}(1-i)z - 5\right] + 2i$

$z' = \frac{1}{2}(1+i)(1-i)z - 5(1+i) + 2i$

$z' = z - 5 - 3i$; SOS' : $z' = z - 5 + 3i$

SOS' = $t_{\vec{u}}(-5-3)$: la translation de $\vec{u}(-5-3)$

Solution 3

S' : $z' = (1+i)z - 2i$

$z' = (1+i)z - 2i \Leftrightarrow$

$(1+i)z = z' + 2i \Leftrightarrow$

$z = \frac{1}{1+i}z' + \frac{2i}{1+i}$

$z = \frac{1}{2}(1-i)z' + \frac{2i(1-i)}{2}$

$z = \frac{1}{2}(1-i)z + 1+i$

a : $\frac{1}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $\begin{cases} k = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

Propriétés géométriques :

* propriétés caractéristiques :

Soit f : 1 application du plan dans lui-même, k ($k>0$) un réel et θ un nombre ($\theta \in \mathbb{R}$)

f est une similitude directe plane ssi pour tout point M et N ($M \neq N$) d'images respectives M' et N'

on a :

$$\begin{cases} M'N' = k\,MN \\ mes(\widehat{\vec{MN}, \vec{M'N'}}) = \theta \end{cases}$$

f : $P \longrightarrow P$
$M \longrightarrow M'$
$N \longrightarrow N'$

f est une similitude directe plane $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} M'N' = kMN \\ mes(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta \end{cases}$$

Toute similitude directe de rapport k multiplie transforme

Conserve	multiplie	transforme
- l'alignement - le parallélisme - les angles orientés - les barycentres - le contact - l'orthogonalité	- les longueurs par k - les aires par k^2	- les droites en droites - les segment en segments - les cercles en cercles - les demi-droites en demi-droites

II/ Exemple d'étude de similitude directe :

1) Similitude déterminée par son écriture complexe :

Soit (S) l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe $z' = \frac{1}{2}z - 1 - i$

1-a) justifier que S est une similitude directe et préciser ses éléments caractéristiques

b) Déterminer l'expression analytique de S

2-) Déterminer une équation $(\mathcal{C}')$ de l'image par S du cercle $(\mathcal{C})$ d'équation : ~~$(x-2)^2 + y^2 = 1$~~

$(x-2)^2 + y^2 = 1$

3/ Déterminer une équation de l'image par S de la droite (BC), B et C étant les point d'affixe respectives

2 et $3-i$.

Solution :

S a pour écriture complexe : $z' = az + b$

avec $\begin{cases} a = 3i \in \mathbb{C}^* \\ b = -1-7i \in \mathbb{C} \end{cases}$

S est une similitude directe passe

$a = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad \begin{cases} k = |a| = 3 \\ \theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Soit $\Omega(w)$ centre de cette similitude

$$w = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-7i}{1-3i} = \frac{20}{10} + i\frac{-10}{10} = 2-i$$

$$\boxed{w = 2-i}$$

S est la similitude directe passe de centre $\Omega(2-i)$ de rapport $k = 3$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$

3) Expression analytique :

$z' = x' + iy'$; $z = x + iy$

$z' = 3iz - 1 - 7i$

$x' + iy' = 3i(x+iy) - 1 - 7i$

$x' + iy' = 3ix - 3y - 1 - 7i$

$x' + iy' = 3y - 1 + i(3x - 7)$

Par identification $\begin{cases} x' = -3y - 1 \\ y' = 3x - 7 \end{cases}$ expression analytique de (S)

2)

$B(2)$; $C(3-i)$

$B'\begin{pmatrix} x_{B'} \\ y_{B'} \end{pmatrix} : \begin{cases} x_{B'} = -3y_B - 1 = -1 \\ y_{B'} = 3x_B - 7 = -1 \end{cases}$

$C'\begin{pmatrix} x'_C \\ y'_C \end{pmatrix} : \begin{cases} x'_C = -3y_C - 1 = 2 \\ y'_C = 3x_C - 7 = 2 \end{cases}$ $\boxed{C'(2+2i)}$

$(B'C') = \left(B'\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \vec{B'C'}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (B'C') \Leftrightarrow \vec{B'M}\begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{B'C'}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ colinéaire

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 3(x+1) - 3(y+1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad y+1 = x+1 \Rightarrow y = x$

$\boxed{(B'C') : \; y = x}$

3/ Equation de $(\mathcal{E}')$ l'image par (S) de $(\mathcal{E})$.

$(\mathcal{E}) : (x-2)^2 + y^2 = 1$

$(\mathcal{E})\ (I\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; r = 1)$

$I' = S(I) : \begin{cases} x'_I = -3y_I - 1 = -1 \\ y'_I = 3x_I - 7 = -1 \end{cases}$

$(\mathcal{E}')\ (I'\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; r' = kr = 3(1) = 3$

$\boxed{(\mathcal{E}') : (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9 = 3^2}$

Similitude directe déterminée par son expression analytique

1/ Déterminons l'écriture complexe :

$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$

soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $z = x + iy$

$M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $z' = x' + iy$

$z' = x + y + 2 + i(-x + y - 1)$

$z' = x + iy - ix + y + 2 - i$

$= x + iy - i(x + iy) + 2 - i$

$= (x + iy)(1 - i) + 2 - i$

$= (1 - i)z + 2 - i$

$\boxed{z' = (1-i)z + 2 - i}$

Autre méthode :

$z' = x' + iy' = x + y + 2 + i(-x + y - 1)$

$= x(1 - i) + y(1 + i) + 2 - i$

$= \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)(1 - i) + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)(1 - i) + 2 - i$

$= \left(\frac{1 - i}{2} + \frac{1 - i}{2}\right)z + \left(\frac{1 - i}{2} + \frac{-1 + i}{2}\right)\bar{z} + 2 - i$

$= (1 - i)z + 2 - i$

$\boxed{z' = (1-i)z + 2 - i}$

Application dénombrement

Dans une classe tous les élèves pratiquent au moins 1 des 2 sports proposés le football et le basket.

- 26 élèves pratiquent du football
- 24 élèves pratiquent le basket
- 10 élèves pratiquent les 2 à la fois

1) Déterminer le nombre d'élève de cette classe

2) Déterminer le nombre d'élève qui pratique 1 seul sport

Correction

Soit E ensemble des élevés de la classe $card(E) = ?$

Soit F l'ensemble des élèves qui pratiquent du $card(F) = 26$

Soit B l'ensemble des élèves qui pratiquent le basket $card(B) = 24$

$F \cap B$ l'ensemble des élèves qui pratiquent les 2 sport à la fois

$card(F \cap B) = 10$

$E = F \cup B$; $\text{card}(E) = \text{card}(F \cup B) = \text{card}(F) + \text{card}(B) - \text{card}(F \cap B)$

$\text{card}(E) = 26 + 24 - 10 = 40$

Soit F_1 l'ensemble des élèves qui pratiquent uniquement le football

$\boxed{\text{card}(F_1) = 26 - 10 = 16}$

B_1 l'ensemble des élèves qui pratiquent uniquement le basket

$\text{card}(B_1) = 24 - 10 = 14$

$\boxed{\text{card}(B_1) = 14}$

Soit $E' = F_1 \cup B_1$ l'ensemble des élèves qui pratiquent uniquement que l'un seul sport.

$\text{card}(E') = \text{card}(F_1 \cup B_1) = \text{card}(F_1) + \text{card}(B_1) - \text{card}(F_1 \cap B_1)$

$= 16 + 14 - 0 = 30$

$\boxed{\text{card}(E') = 30}$

Autre méthode

$\text{card}(E') = \text{card}(E) - \text{card}(F \cap B)$

$= 40 - 10 = 30$ $\boxed{\text{card}(E') = 30}$

Application

Sur 1000 ampoules produites par une usine, 50 sont défectueuses

1/ Déterminer le nombre d'ampoules non défectueuses

Soit E l'ensemble des ampoules produites par l'usine.

D l'ensemble des ampoules défectueuses

$\text{card}(E) = 1000$, $\text{card}(D) = 50$

$\overline{D}$ l'ensemble des ampoules non défectueuse

D et $\overline{D}$ sont complémentaires dans E

$\text{Card}\,\overline{D} = \text{Card}\,E - \text{card}\,D = 1000 - 50 = 950$

Exercice d'application : dénombrement

a) Soit F_1 l'ensemble des tirages successifs avec remise de 3 boules

Card $F_1 = 5^3 = 125$ ($n = 5$ et $p = 3$)

Autrement :

Card $F_1 = \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{\text{nombre de possibilité}} = 125$

b) Soit F_2 ensemble des tirage successif sans remise.

Card $F_2 = A_n^p = A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$

Card $F_2 = 60$

Autrement :

Card $F_2 = \underbrace{5 \times 4 \times 3}_{\text{nombre de possibilité}} = 60$

c) F_3 : ensemble des tirages simultanés de 3 boules parmi 5.

Card $F_3 = C_5^3 = 10$

Exercice 1 dénombrement

1/ Soit F_1 ensemble des tirages contenant exactement les jetons noirs

Card $F_1 = C_2^1 \times C_3^2 = 6$

2/ Soit F_2 ensemble des tirage avec 2 jetons noirs

Card $F_2 = C_2^2 \times C_3^1 = 3$

3/ F_3 ensemble du tirage contenant aucun jeton noir

Card $F_3 = C_3^3 = 1$

4/ F_4 ensemble des tirage contenant au moins un jeton noir

Card $F_4 = C_2^1 \times C_3^2 + C_2^2 \times C_3^1 = 9$

Exercice 2

1/ Soit F_1 ensemble des nombre à 3 chiffres.

card F_1 = A^3 = 216

2/ Soit F_2 ensemble des nombre à 3 chiffres distincts

card F_2 = A_n^p = A_6^3 = 120

3/ Soit F_3 ensemble des nombres à 6 chiffres distincts

Card F_3 = A_6^6 = 720

Exercice 3 : dénombrement

1/ Soit F_1 ensemble d'équipe différentes qu'on peut former

Card F_1 = C_{10}^4 = 210

2/ Soit F_2 ensemble d'equipe contient de femme.

Card F_2 = C_4^4 = 1

3/ Soit F_3 ensemble d'equipes contient 1 seul femme

Card F_3 = $C_4^1 \times C_6^3$ = 80

4/ F_4 ensemble des equipe ayant au moins une femme

Card F_4 = $C_4^1 \times C_6^3 + C_4^2 \times C_6^2 + C_4^3 \times C_6^1 + C_4^4 \times C_6^0$

= 195

Exercice 4 : dénombrement

1/ Déterminons le nombre de tirage comptant 4 boule jaune

F ensemble de tirage comptant 4 boule jaune

Card F = $(7)^4$ = 2401

2/ nombre de tirage comptant 4 boule verte

F_1 ensemble des tirage comptant 4 boule verte

Card F_1 = 3^4 = 81

c/ nombre de tirage comptant 3 jaune et 1 verte dans cette ordre

F_2 ensemble des tirages comptant 3 jaune et 1 verte dans cet ordre,

Card $F_2 = 7^3 \times 3^1 = 1029$

d) Soit F_3 ensemble de tirages comptant 3 boule jaune et une boule verte.

Card $F_3 = (7^3 \times 3)\,4 = 4116$

e) F_4 ensemble de tirage comptant 2 jaune et 2 vertes dans cet ordre.

Card $F_4 = 7^2 \times 3^2 = 441$

f) Soit F_5 ensemble de tirage comptant 2 boules vertes et 2 boules jaunes.

Card $F_4 = (7^2 \times 3^2)\,6 = 2646$

↳ C_6^2

2) Tirage sans remise

a) F_1 ensemble de tirage comptant 4 boule jaune

Card $F = A_7^4 = 840$

b) F_1 ensemble de tirage comptant 4 boules vertes

Card $F_1 = \emptyset$

c) F_2 ensemble de tirage comptant 3 boules jaunes et une boule verte

Card $F_2 = A_7^3 \times A_3^1 = 630$

d) F_3 ensemble de tirage comptant 3 boules jaunes et une boule verte

Card $F_3 = (A_7^3 \times A_3^1)\,4 = 2520$

e) F_4 ensemble du tirage comportant 2 boules jaunes et 2 boules vertes.

$\text{Card } F_4 = A_7^2 \times A_7^2 = 252$

f) F_5 ensemble du tirage comportant 2 boules jaunes et 2 boules vertes

$\text{Card } F_5 = (A_7^2 \times A_3^2) \times 6 = 1512$

Exercice 5

1/ a/ F l'ensemble des tirages contenant 3 jetons de la même couleur.

$\text{Card } F = C_5^3 + C_9^3 = 14$

b/ F_1 l'ensemble des tirages contenant le vert num 1 et le rouge numéro 1

$\text{Card } F_1 = C_1^1 \times C_4^1 \times C_7^1 = 7$

c/ F_2 ensemble des tirages contenant un seul jeton portant le numéro 1

$\text{Card } F_2 = C_2^1 \times C_7^2 = 42$

d/ F_3 ensemble des tirages contenant exactement 1 jeton vert et un jeton numéro 1

$\text{Card } F_3 = C_1^1 \times C_7^2 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_7^1 = 15$

$C_1^1 \times C_3^1 \times C_{11}^1$

2 a/ F' ensemble des tirages successifs sans remise

$\text{Card } F' = 504 = A_9^3$

b/ F_1' ensemble des tirages successifs contenant 1 rouge et 2 vert dans cet ordre

$\text{Card } F_1 = 504 \quad A_5^2 \times A_4^1 = 80$

c) Soit F_2' ensemble des tirages successifs sans remise contenant 1 rouge et 2 vert dans cette ordre quelconque.

$$\text{Card } F_2' = (A_4^1 \times A_5^2) \times 3 = 240$$ (3 combinaisons)

Exercice : n° 6

a) F ensemble des tirages possible (simultanément)

$\text{Card } F = C_{12}^3 = 792$; $\boxed{\text{Card } F = 792}$

b) F_1 ensemble des tirages possible comptant 2H et 3B

$\text{Card } F_1 = C_5^2 \times C_7^3 = 10$; $\boxed{\text{Card } F_1 = 10}$

c) F_2 ensemble des tirages simultané comptant 2R, 1H, 2B.

$\text{Card } F_2 = C_4^2 \times C_3^1 \times C_7^2 = 90$; $\boxed{\text{Card } F_2 = 90}$

2 a) F' ensemble des tirages successive avec remise

$\text{Card } F' = 12^5 = 248832$; $\boxed{\text{Card } F' = 248832}$

2-b) F_1' ensemble des tirages successive avec remise comptant 2H, 3B.

$\text{Card } F_1' = (5^2 \times 3^2) \times \frac{5!}{2!3!} = 6750$ $\boxed{\text{Card } F_1' = 6750}$

2-c) F_2' ensemble des tirages successive avec remise comptant 2R, 1H, 2B.

$\text{Card } F_2' = (4^2 \times 5^1 \times 3^2) \times \frac{5!}{2!1!2!} = 720$; $\boxed{\text{Card } F_2' = 21600}$

3 a) F'' ensemble des tirages successive sans remise

Chapitre : Probabilités

Vocabulaire :

* Une expérience aléatoire : est une épreuve dont on connaît le résultat mais est pas prévisible.

Exemples : → Lancer une pièce de monnaie ; ici $\Omega = \{pile, face\}$
→ Lancer un dé
→ choisir un élève au TSTP etc...

* L'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire est appelé univers souvent noté Ω

* Un événement : est un sous ensemble de l'univers

Exemple : épreuve : on lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

$$\text{Univers} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Soit l'événement A « obtenir un multiple de 3 »
alors $A = \{3, 6\}$

- Si B est l'événement « obtenir un chiffre impair »
alors $B = \{1, 3, 5\}$

I/ Probabilités sur un univers FINI :

1°/ Définition : Soit Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire.

On désigne par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω (ou ensemble de événement)

On appelle probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ toute application souvent notée P, de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0,1]$ (0% à 100%)

$$p : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

$p(\text{impossible}) = 0\% \quad \frac{0}{100}$; $p(\text{certain}) = 100\% = \frac{100}{100}$

Pour de manière $\Omega = P \cup F$ pile : $\frac{1}{2}$ face : $\frac{1}{2}$

$P(\Omega) = P(P) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

et qui vérifie les conditions suivantes :

- pour tout evenement A de $\mathcal{P}(\Omega)$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (\text{toujours})$$

et $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ($\bar{A}$ contraire de A)

- Pour tout evenements A et B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- La somme des probabilités des evenements elementaires est égale à 1 (evenement certain)

- $P(\Omega) = 1 = 100\%$: Ω est un évènement certain
  $P(\emptyset) = 0$: $\emptyset$ est un évènement impossible

Exemple : On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on désigne par p_i la probabilité d'apparition de la face portant le numéro i ($1 \leq i \leq 6$)

On admet que :

i) $2p_3 = p_1$

ii) p_1, p_2 et p_4 sont dans cet ordre, 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{10}$

iii) p_3, p_5 et p_6 sont en progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$

a) Calculer p_1 et p_3

b) - Déduire p_2, p_4, p_5 et p_6

Calculer la probabilité de chacun des evenements suivants :

E " obtenir un chiffre pair "

F " obtenir un multiple de 3 "

Solution :

c) Calculons p_1 et p_3

D'abord on sait que $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ *

i) $2p_3 = p_1 \Rightarrow p_3 = \frac{1}{2} p_1$

ii) p_1, p_2 et p_4 en progression arithmétique

$p_2 = p_1 + \frac{1}{10} \Rightarrow p_1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = p_1 + \frac{1}{5}$

iii) $\boxed{p_4 = p_1 + \frac{1}{5}}$

iii) p_3, p_5 et p_6 en progression géométrique de $\frac{1}{2}$

$p_5 = \frac{1}{2} p_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} p_1\right) = \frac{1}{4} p_1$

$\boxed{p_5 = \frac{1}{4} p_1}$

$p_6 = \frac{1}{2} p_5 \Rightarrow \boxed{p_6 = \frac{1}{8} p_1}$

L'égalité (*) devient

$p_1 + \left(p_1 + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{2} p_1 + \left(p_1 + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{4} p_1 + \frac{1}{8} p_1 = 2$

$\left(3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) p_1 = 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{5}$

$\left(\frac{24 + 4 + 2 + 1}{8}\right) p_1 = \frac{10 - 3}{10}$

$\frac{31}{8} p_1 = \frac{7}{10} \Rightarrow p_1 = \frac{7}{10} \times \frac{8}{31} = \frac{28}{155}$

$\boxed{p_1 = \frac{28}{155}}$

d'où $p_3 = \frac{1}{2} p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{28}{155}\right) = \frac{14}{155}$

$\boxed{p_3 = \frac{14}{155}}$

Déduisons en p_2, p_4, p_5 et p_6 :

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{10} = \frac{21}{155} + \frac{1}{10} = \frac{87}{310}$$

$$p_4 = p_1 + \frac{1}{5} = \frac{21}{155} + \frac{1}{5} = \frac{59}{155}$$

$$p_5 = \frac{1}{4} p_1 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{21}{155}\right) = \frac{7}{155}$$

$$p_6 = \frac{1}{8} p_1 = \frac{1}{8} \times \left(\frac{21}{155}\right) = \frac{7}{310}$$

$$\boxed{p_2 = \frac{87}{310}} \quad \boxed{p_4 = \frac{59}{155}} \quad \boxed{p_5 = \frac{7}{155}} \quad \boxed{p_6 = \frac{7}{310}}$$

E " obtenir un chiffre pair "

$$p(E) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{87}{310} + \frac{59}{155} + \frac{7}{310} = \frac{106}{155}$$

$$\boxed{p(E) = 106/155}$$

F " obtenir un multiple de 3 "

$$p(F) = p_3 + p_6 = \frac{14}{155} + \frac{7}{310} = \frac{7}{62}$$

$$\boxed{p(F) = \frac{7}{62}}$$

2/ Equiprobabilité :

~~Def def~~ Principe : On dit que l'on est en situation d'équiprobabilité dans une épreuve lorsque tous les événements élémentaires ont la même chance d'être réalisés dans ces conditions, tout événement A

Eva :

$$\boxed{p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}}$$

nbre de résultat favorable / nbre de résultats possible

Exemple : Un sac contient
4 boules rouges numérotées de 1 à 4

3 boules noires
et 2 boules vertes

1°) On tire au hasard (Hasard) simultanément 3 boules du sac. Calculer la probabilité de chacun des événement suivant

A " obtenir un tirage unicolore "
B " obtenir un tirage tricolore "
C " obtenir au moins 1 boule verte "
J " obtenir exactement un as (as = n° 1)

2°) On tire maintenant successivement avec remise 4 boules du sac (les boules étant discernable au toucher)

Calculer la probabilité des événements :

E " les boules tirés sont de la même couleur "
F " obtenir 3 Noirs et 1 Rouges dans cet ordre "
G " Obtenir 3 Noirs et 1 Rouges "
H " obtenir autant de une que Rouge "

Remarque : Au hasard, indiscernable au toucher, pièce normale ou équilibré, honnête que l'on dit : On a 1 Equiprobabilité

Solution :

1°) On tire simultanément 3 boules du sac

Soit Ω l'univers de cette épreuve consistant à tirer 3 boules parmi 9 simultanément.

$$\boxed{\text{Card}(\Omega) = C_9^3 = 84}$$

- A " obtenir un tirage unicolore "

$$\text{Card } A = C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5 \quad (\text{ou } \begin{matrix} 3R \text{ parmi } 4 \\ 3N \text{ parmi } 3 \end{matrix})$$

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5}{84}}$$

- B "obtenir un tirage tricolore !!"

card B = $C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 24$ (12 parmi 4 et 1H parmi 3 1V parmi 2)

$$P(B) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

- C "obtenir au moins 1 boule verte"

Passons par le contraire

$\bar{C}$ "aucune boule verte"

Il s'agit de tirer 3 boule parmi 7

$$\text{card } \bar{C} = C_7^3 = 35$$

$$P(\bar{C}) = \frac{\text{card } \bar{C}}{\text{card } \Omega} = \frac{35}{84} \quad ; \quad P(\bar{C}) = \frac{35}{84} = \frac{5}{12}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

$$P(C) = \frac{7}{12}$$

- D "obtenir exactement un as"

Il s'agit de tirer 1 "as" parmi 3 C_3^1

et 2 "non as" parmi 6 C_6^2

$$\text{card } D = C_3^1 \times C_6^2 = 45$$

$$P(D) = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

2°) Retirer successivement avec remise 4 boules dans

but : le nombre univers

$$\text{card } \Omega^4 = 9^4 = 6561$$

E " obtenir les boules tirées sont de même couleur "

card E = $4^4 + 3^4 + 2^4 = 353$

$$P(E) = \frac{\text{card } E}{\text{card } \Omega} = \frac{353}{6561}$$

F " obtenir 3 Noirs et 1 Rouge dans cet ordre "

Ex tirer puis

3N parmi 3 (3^3)

1R parmi (4 1) ((4^1))

card F = $3^3 \times 4 = 108$

$$P(F) = \frac{108}{6561} = \frac{4}{243}$$

G " obtenir 3N et 1R "

On peut avoir dans l'ordre

NNNR ou NNRNB

NRNN ou RNNN

En fait il s'agit de tirer 3N parmi 3

tirer 1R parmi 4

et de les permuter (anagramme de NNNR)

$$\text{card } G = (3^3 \times 4^1) \times \left(\frac{4!}{3!\,1!}\right) = 432$$

$$P(G) = \frac{432}{6561} = \frac{16}{243}$$

H " obtenir autant de Noir que Rouge "

On distingue :

1er cas : 1N - 1R et 2V

2ème cas : 2N - 2R

3ème cas : 0N - 0R - 4V

1er cas : 1H - 1R et 2V et on le permute (avec prend 1R 1V)

$(3^1 \times 4^1 \times 2^2) \frac{4!}{1!1!2!} = 576$

2ème cas : 2H et 2R puis on permute (HHRR)

ou ici $(3^2 \times 4^2) \frac{4!}{2! \times 2!} = 864$

3ème cas : 4V - (0R et 0V)

$2^4 = 16$

Card H = $576 + 864 + 16 = 1456$

$P(H) = \frac{1456}{6561}$

Exercice Probabilité :

Une urne contient 1 boule blanche numérotée "1" (B_1)
1 boule blanche numérotée "2" (B_2)
2 boules rouges numérotée "1" ($R_1 = R_1$)
n boules rouges numérotée "2" (nR_2)
On tire simultanément 3 boules de cette urne

1°) On suppose dans cette question que n = 4
et on considère les evenements

⇓

E " obtenir exactement une boule blanche "
F " obtenir exactement 1 boule portant le numéro 1 "
Calculer $p(E)$, $P(F)$, $P(E \cup F)$ et $P(\bar{E} \cup F)$

2°) Quelle valeur faut-il donner à n afin que

$P(A \cap B) = 0 \Rightarrow A$ et B sont incompatibles.

... pour que la probabilité de l'événement ... obtenir au moins une boule blanche est $= \frac{7}{12}$

II/ Probabilités Conditionnelles :

II-1/ Formule de Bayes :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire

A et B 2 événements de Ω.

- On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé le nombre noté $P_B(A)$ ou $P(A/B)$ tel que :

$$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ formule de Bayes

- On définit de même la probabilité conditionnelle de l'événement B sachant l'événement A est réalisé

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On a :
$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B) \\ P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A) \end{cases}$$

$$P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$$

Remarque : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire

A et B 2 événements de Ω

- Si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ alors les événements A et B sont indépendants.

$\neq$ A et B ne sont pas incompatibles

II-2/ Formule des probabilités totales :

Soit Ω univers d'une expérience aléatoire

A et $\bar{A}$ deux evenements contraire de l'univers Ω

$\begin{cases} A \cup \bar{A} = \Omega \\ A \cap \bar{A} = \emptyset \end{cases}$ $\quad P(A) + P(\bar{A}) = 1$

et B 1 autre evenement de Ω.

$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A})$

$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$

$P(B) = P[(B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})]$

$= P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) - P[(B \cap A) \cap (B \cap \bar{A})]$

$= P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$ avec $P[(B \cap A) \cap (B \cap \bar{A})] = P(\emptyset) = 0$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \quad (1)$$

En a : $\begin{cases} P(B \cap A) = P(B/A) \times P(A) \\ P(B \cap \bar{A}) = P(B/\bar{A}) \times P(\bar{A}) \end{cases}$

D'après (1) on a :

$$P(B) = P(B/A) \times P(A) + P(B/\bar{A}) \, P(\bar{A})$$

formule des probabilités totales.

Exercice d'application : Demain !!

Une classe de terminale compte 30 élèves dont 10 filles. Le professeur choisit au hazard successivement 2 élèves pour effacer le tableau. On considère les évenements suivants :

A « le premier élève est un garçon »

B « le deuxième élève est une fille »

a) Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$

17,28 5,28

5) Les evenements A et B sont ils sont dépendants

Solution : Probabilité

Ω ensemble des manieres de choisir 2 eleves pour le

Card Ω = A_{20}^{2} = 870

A "le premier eleve choisi est un garçon"

Card A = $A_{10}^{1} \times A_{19}^{1}$ = 190

$P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega} = \frac{190}{870} = \frac{2}{3}$

B "le deuxieme eleve est une fille"

Card B = $A_{10}^{1} \times A_{19}^{1}$ = 190

$P(B) = \frac{Card\ B}{card\ \Omega} = \frac{190}{870} = \frac{1}{3}$

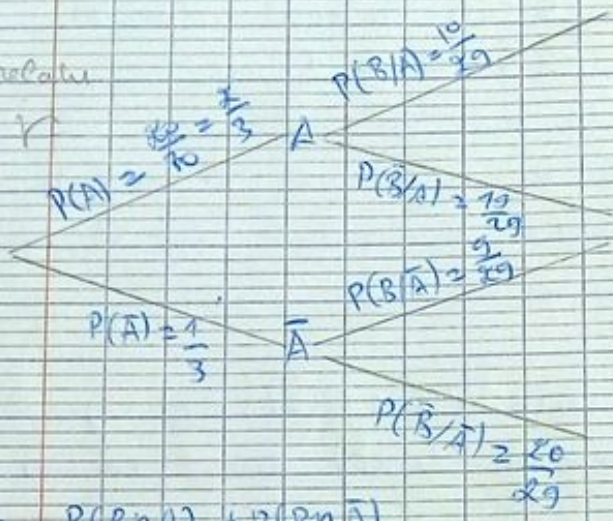
$P(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card\ \Omega}$ avec, $Card(A \cap B) = A_{10}^{1} \times A_{10}^{1} = 100$

$P(A \cap B) = \frac{100}{190} = \frac{10}{17}$

$\begin{cases} P(A) \times P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \\ P(A \cap B) = \frac{10}{17} \end{cases}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc les evenements A et B ne sont pas independants.

Autrement dit :



$B : P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A) = \frac{10}{87}$

$\bar{B} : P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}/A) \times P(A) = \frac{19}{87}$

$B : P(\bar{A} \cap B) = P(B/\bar{A}) \times P(\bar{A}) = \frac{3}{29}$

$\bar{B} : P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B}/\bar{A}) \times P(\bar{A}) = \frac{10}{87}$

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

$= P(B/A) \times P(A) + P(B/\bar{A}) \times P(\bar{A}) = \frac{29}{87} = \frac{1}{3}$

$P(B) = \frac{1}{3}$

Exercice d'application : Page 332 Exo 1 (TAM SE)

Un Sondage effectué dans deux régions montre que les opinions à propos de la construction d'un barrage donne les résultats suivants :

- 65% des personnes interrogées sont contre
- Parmi les personnes contre cette construction, 70% sont des écologistes
- Parmi les personnes favorable à la construction 30% sont des écologistes

On note C « l'événement la personne interrogée est contre la construction et $\bar{C}$ « l'événement contraire »

On note E « l'événement la personne interrogée est écologiste »

Calculer la Probabilité des événements suivants

C, E/C, C/E

Exercice 2 Page 316 n°6

Deux urnes indiscernables : 1 et 2 contiennent des boules
l'urne (1) contient 4 boules Rouge et 2 blanches
l'urne (2) contient 3 Rouge et 1 blanche
On choisit une urne au hasard.
On tire une boule de cette urne et on note sa couleur.
1/ Calculer la Probabilité pour la Boule tirée soit rouge (R)

Exercice : Equation différentielle : (E) : $y' + 2y = e^{-2x}$

MT : $f+g$ est solution de (E) ssi f solution de $y' + 2y = 0$

1ère méthode :

$f+g$ solution de (E) $\Leftrightarrow (f+g)'(x) + 2(f+g)(x) = e^{-2x}$

$\Leftrightarrow f'(x) + g'(x) + 2f(x) + 2g(x) = e^{-2x}$

$\Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) + g'(x) + 2g(x) = e^{-2x}$

avec $g'(x) + 2g(x) = e^{-2x}$

$\Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = e^{-2x} - e^{-2x}$

$\Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = 0$

f est solution de (E')

$f+g$ solution de (E) ssi (E') f solution de E

2ème méthode :

Déduire que les solutions de (E) :

f solution de (E') $\Leftrightarrow f(x) = \ell e^{-2x}$

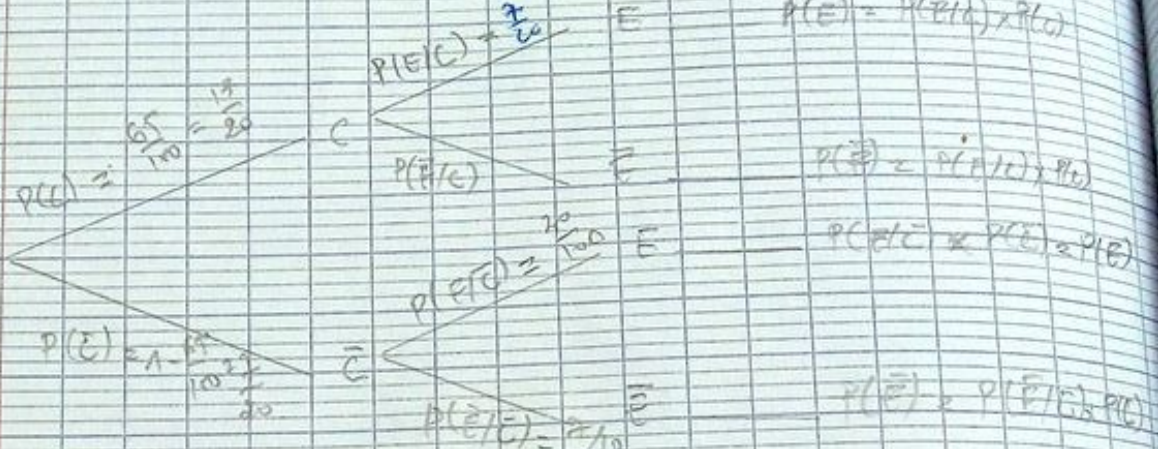
$f(x) + g(x) = \ell e^{-2x} + (x+1)e^{-2x} = (x+1+\ell)e^{-2x}$

$(f+g)(x) = (x+1+\ell)e^{-2x}$ solutions générales de l'équation (E) : $y' + 2y = e^{-2x}$

Solutions Probabilité

65 — 100 jours

C : « l'événement la personne interrogée est contre »



Calculons P(C) ; P(E/C) ; P(C/C̄)

D'après l'hypothèse $P(C) = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$

Par l'hypothèse $P(E/C) = \frac{70}{100} = \frac{7}{20}$

$P(C/E) = P(C \cap E) \times P(E)$

or $P(E) = P(\bar{E} \cap C) + P(E \cap \bar{C})$

$P(E/\bar{E}) = ((P(C \cap E))(P(E)$

$P(\bar{E} \cap C) = P(E/C) \times P(C) = \frac{7}{20} \times \frac{13}{20} =$

$P(E \cap \bar{C}) = P(E/\bar{C}) \times P(\bar{C}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{20} =$

$P(C \cap E) = P(E/C) \times P(C) = \frac{7}{10} \times \frac{13}{20} =$

III°/ Variable Aléatoire :

1°/ Introduction :

Chercle Vauclé

Une urne contient 3 boules rouges (R) - 4B Quatre 4 boules numérotées ensemble et une Regard : On gagne 100F par Rouge tirée

1°/ Déterminer les gains possibles et leur probabilité

Solution :

Ω : ensemble des tirages possibles :

$$\boxed{\text{Card } \Omega = C_7^2 = 21}$$

$$P(X=0) = P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

$$\boxed{P(X=0) = P(A) = \frac{2}{7}}$$

A « evenement obtenir 2 boule Rouge »

B « evenement obtenir une boule rouge et une boule bleue »

$$P(X=100) = P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

$$\boxed{P(X=100F) = P(B) = \frac{4}{7}}$$

C « ensemble obtenir 2 boules rouges »

$$P(X=200F) = P(C) = \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$\boxed{P(X=200F) = P(C) = \frac{1}{7}}$$

Les résultats peuvent être rangés dans le tableau suivant

$X = x_i$	0	100	200
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Le tableau définit une probabilité sur l'univers $\{0, 100, 200\}$

X = V.a.r.a : toute application dans $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$A \longrightarrow 0$

$B \longrightarrow 100$

$C \longrightarrow 200$

$X(\Omega) = \{0, 100, 200\}$

2°) Définitions :

- Définition 1 : On appelle variable aléatoire X sur un univers Ω toute application de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
- Définition 2 : Soit P une probabilité définie sur un univers Ω. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est l'application qui à toutes valeurs x_i prise par X associe $P(X = x_i)$.

Notation : X une variable aléatoire définie de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$: univers des images

Le tableau suivant : loi de probabilité de la variable X

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

la somme

Note : Fonction $\leq$ ⟶ signe ○ } dans le graphe.
$<$ ⟶ signe •

Remarques : Après avoir déterminé la loi de probabilité d'une variable aléatoire X il est pris de vérifié la somme donne 1

- Pour notre Exemple d'introduction on a : la loi de probabilité de la variable aléatoire X

x_i	0	100	200
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$\sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{7} = 1$

$(X = x_i)$: désigne l'événement « X prend la valeur x_i »
$(X < x)$: désigne l'événement « X prend 1 valeur $< x$ »

3) Fonction de Répartition :

$F(x)$:
- $x < 0$
- $0 \leq x < 100$
- $100 \leq x < 200$
- $200 \leq x$

Répartition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P.
la Fonction de répartition de X est l'application $F : \mathbb{R} \to [0;1]$ définie par

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Exemple : Reprenons l'exemple introductif :

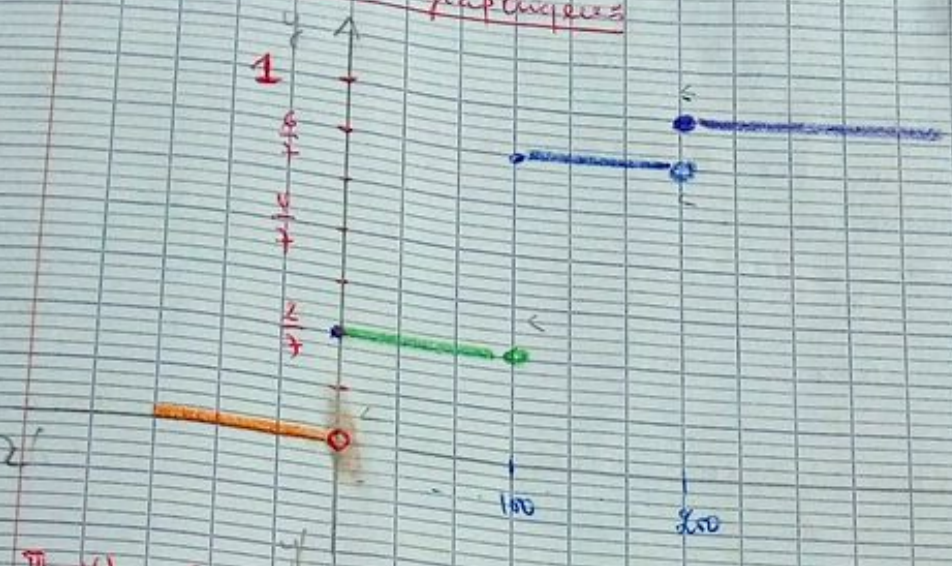
x_i	0	100	200
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

la loi de probabilité

$F(x)$:
- $x < 0$: 0
- $0 \leq x < 100$: $\frac{2}{7} + 0$
- $100 \leq x < 200$: $\frac{6}{7}$ $\left(\frac{2}{7} + \frac{4}{7} + 0\right)$
- $200 \leq x$: 1 $\left(\frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{7}\right)$

Exo : Page 177 : 34, 35
Page 180 Exo 37

Représentation graphique :



III-4) Caractéristiques d'une variable aléatoire :

• Espérance mathématique :

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, x_2 \dots x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2 \dots p_n$ on encore ayant pour loi de probabilité

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

On appelle espérance mathématique de X le nombre réel noté $E(X)$ tel que

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots x_n p_n$$

- si $E(X) < 0$ on dit que le jeu est défavorable
- si $E(X) = 0$ on dit que le jeu est équitable
- si $E(X) > 0$ " " " " jeu est favorable

Pour notre exemple introductif :

x_i	0	100	200
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{7} + 100 \times \frac{4}{7} + \frac{1}{7} \times 200 = \frac{600}{7}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{600}{7}}$$

- **Variance : écart-type :**

Soit X variable aléatoire prenant les valeurs respectives $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$

On appelle variance de X le nombre réel positif ≥ 0 noté $V(X)$

tq :

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i}$$

ou

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (E(X))^2}$$

ou encore

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

~~$V(X) = \sum_{i=1}^{n}$~~

Dans notre exemple introductif

x_i	0	100	200
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$
$x_i p_i$	0	$\frac{400}{7}$	$\frac{200}{7}$
$x_i^2 p_i$	0	$\frac{40.000}{7}$	$\frac{40.000}{7}$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{40.000}{7} + \frac{40000}{7 \times 7}$$

$$V(X) = \frac{80.000}{7} - \frac{360000}{49}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{200.000}{49}}$$

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 63,88}$$

Loi Binomiale

$$P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(x) = np$$

$$V(x) = np(1-p)$$

STATISTIQUES

I/ Serie Doubles :

1°/ Definition :

Soient X et Y deux caractere quantitatifs discrets (valeur reelle) definis sur une même population. On appelle serie statistique double la donnée pour chaque individu de numero i d'un couple de modalité (x_i, y_i).

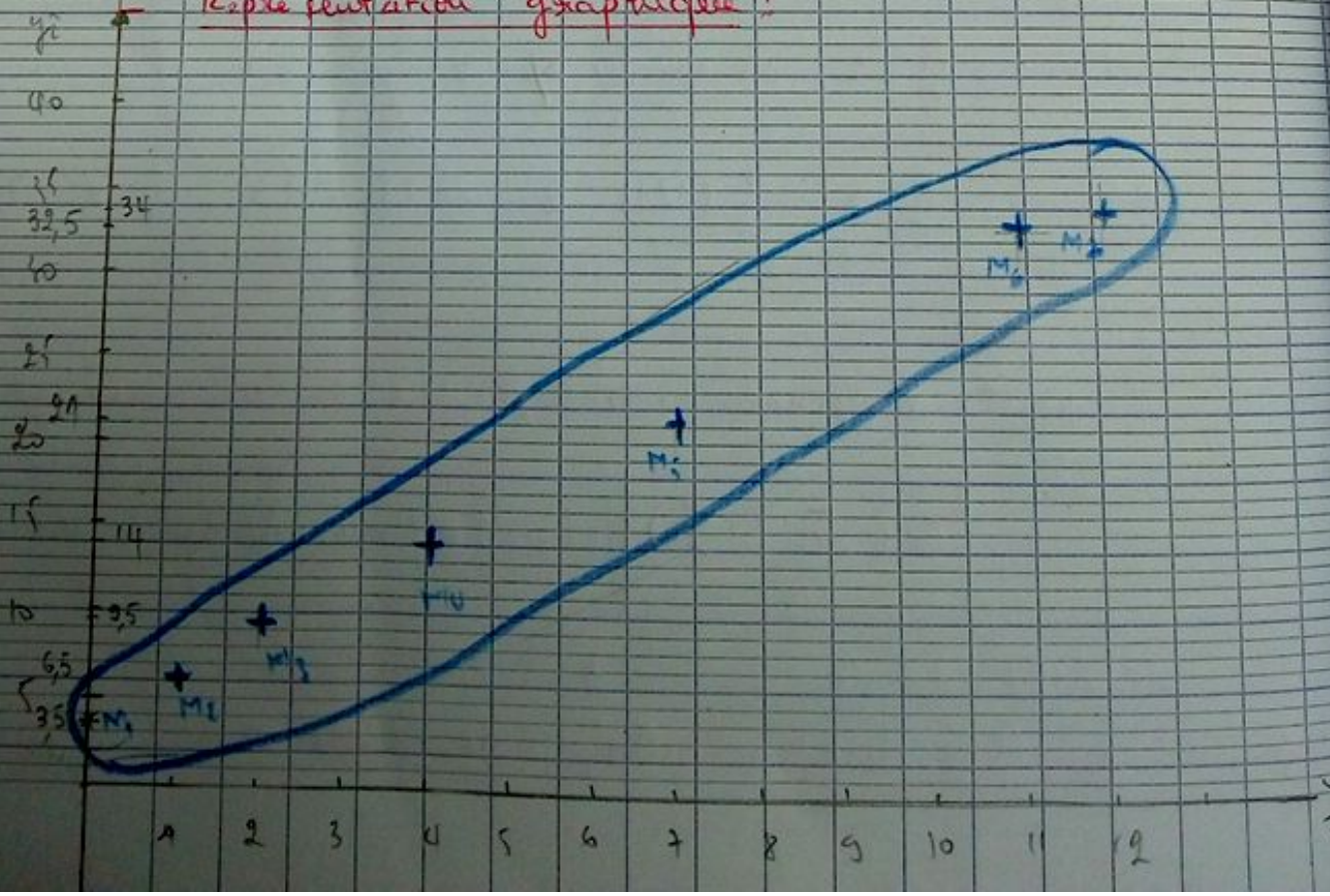
Exemple :

x_i	0	1	2	4	7	11	12
y_i	3,5	6,5	9,5	14	21	32,5	34

2°/ Nuage de points :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ a chaque couple de modalité $(x_i; y_i)$ correspond un point $M_i(x_i; y_i)$, l'ensemble des point $M_i(x_i, y_i)$ est appelé nuage de points. Pour notre exemple le nuage des point est l'ensemble des points $M_1\begin{pmatrix}0\\3,5\end{pmatrix}$; $M_2\begin{pmatrix}1\\6,5\end{pmatrix}$; $M_3\begin{pmatrix}2\\9,5\end{pmatrix}$; $M_4\begin{pmatrix}4\\14\end{pmatrix}$; $M_5\begin{pmatrix}7\\21\end{pmatrix}$; $M_6\begin{pmatrix}11\\32,5\end{pmatrix}$; $M_7\begin{pmatrix}12\\34\end{pmatrix}$

Representation graphique :



3) Caractéristiques

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
0	35	0	12,25	0
1	6,5	1	42,25	6,5
2	9,5	4	90,25	19
4	16	16	196	64
7	21	49	441	147
11	32,5	121	1056,25	357,5
12	34	144	1156	408
37	121	335	2994	994

$$\bar{x} = \text{moyenne de } X = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i$$

AN : $\bar{x} = \frac{1}{7}(37) = 5,28 \simeq 5,3$ $\quad \boxed{\bar{x} = 5,3}$

$$\bar{y} = \text{moyenne de } Y = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} y_i$$

AN : $\bar{y} = \frac{1}{7}(121) = 17,28 = 17,3$ $\quad \boxed{\bar{y} = 17,3}$

point moyenne ou barycentre de la série $(X;Y)$

$\boxed{G(\bar{x};\bar{y})}$ point moyenne de la série.

effectif total $n = 7$ individus.

Les caractéristiques de dispersion :

- Variance de la série X notée

$$V(X) = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{n=7} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

AN : $V(X) = \frac{1}{7}(335) - (5,3)^2 = 19,91 \simeq 19,9$

$$V(X) = 19,9$$

- Ecart - type de la série X notée σ_X

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

AN $\sigma_X = \sqrt{19,9} = 4,46$

$$\sigma_X = 4,46 \simeq 4,5$$

- Variance de la série Y notée V(Y)

$$V(Y) = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} (y_i)^2 - (\bar{y})^2$$

AN : $V(Y) = \frac{1}{7}(2994) - (17,3)^2 = 127,71 \simeq 128,9$

$$V(Y) = 128,9$$

- Ecart - type de la série Y notée σ_Y

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$$

AN : $\sigma_Y = \sqrt{128,9} = 11,35 \simeq 11,3$

$$\sigma_Y = 11,3$$

- Covariance de la série (X, Y) notée cov (X, Y)

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i y_i - (\bar{x})(\bar{y})$$

AN : $Cov(X,Y) = \frac{1}{7}(994) - (53)(17,7) = 50,35 \simeq 50,3$

$$\boxed{Cov(X,Y) = 50,3}$$

On appelle coefficient de corrélation linéaire le réel r défini par :

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{(\sigma_X)(\sigma_Y)}$$

On a : $-1 \leq r \leq 1$ ou encore $|r| \leq 1$

Remarques

lorsque $r \leq -0,86$ ou $r \geq 0,86$

On a une forte corrélation donc une bonne estimation

application : Pour notre exemple

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{(\sigma_X)(\sigma_Y)} = \frac{50,3}{(4,5)(11,3)} = 0,99$$

$$\boxed{r = 0,99 \simeq 1}$$

On a une forte corrélation $r > 0,86$

5°) Droites de régression :

On appelle droite de régression de **y** en **x** ou première droite des **moindres carrés**, la droite notée $(\Delta y/x)$; la droite d'équation :

$$(\Delta y/x) : \hat{y} - \bar{y} = a(x - \bar{x})$$

avec $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$

Pour notre exemple : Intro ductif

$\bar{x} = 5,3$; $\bar{y} = 17,3$, $cov(X,Y) = 50,3$, $V(X) = 19,9$

$$a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{50,3}{19,9} = 2,54$$

$a = 2,54$

( ) b = marketing

$(\Delta Y/X)$: $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$

$y - 17,3 = 2,54(x - 5,3)$

$y = 2,54x - 13,462 + 17,3$

$(\Delta Y/X)$: $\boxed{y = 2,54x + 3,838}$

$ax + b$ $\left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow \text{0 matériel} \\ b \rightarrow \text{a matériel} \end{array} \right.$

Autrement : $(\Delta Y/X)$: $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$

$y = ax + b$ où $G(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta$

$\bar{y} = a\bar{x} + b$

avec $\begin{cases} a = \dfrac{cov(X,Y)}{V(X)} = 2,54 \\ b = \bar{y} - a\bar{x} = 17,3 - 2,54(5,3) = 3,849 \end{cases}$

$$\boxed{\Delta Y/X : y = 2,54x + 3,849}$$

On appelle droite de régression de X en Y ou 2ème droite des moindres carrés, la droite notée $(\Delta X/Y)$ définit $\boxed{(\Delta X/Y) : x - \bar{x} = a(y - \bar{y})}$

avec $\boxed{a = \dfrac{cov(X,Y)}{V(Y)}}$

Pour notre exemple :

$$a' = \frac{cov(X,Y)}{V(Y)} = \frac{50,3}{128,9} = 0,39$$

$(\Delta X/Y)$: $x - \bar{x} = a(y - \bar{y})$

$x - 5,3 = 0,39(y - 17,3)$

$x = 0,39y - 6,747 + 5,3$

$x = 0,39y - 1,447$

$(\Delta_{x/y}) : \quad x = 0,39y - 1,447$

Remarque :

$$\begin{cases} a = \dfrac{cov(X,Y)}{V(X)} \\ a' = \dfrac{cov(X,Y)}{V(Y)} \end{cases}$$

$$aa' = \frac{cov^2(X,Y)}{V(X) \times V(X)}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} \Rightarrow \sigma_X^2 = V(X)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} \Rightarrow \sigma_Y^2 = V(Y)$$

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \Rightarrow r^2 = \frac{cov^2(X,Y)}{\sigma_X^2 \times \sigma_Y^2} = \frac{cov^2(X,Y)}{V(X) \times V(Y)} = aa'$$

$$\boxed{r^2 = aa'}$$

Application : 2001 - 2008 - 2013 - (Bac)

II°/ Série simple (à une variable)

1) Définition

On appelle mode d'une série statistique $\{n_i ; n_i^o\}$ la valeur du caractère correspondant au plus grand effectif noté M_o.

Exemple :

n_i	1	2	4	5	6
n_i^o	2	5	9	2	///

$M_o = 4$

- On appelle médiane d'une série statistique à une variable notée Me, la valeur du caractère qui partage la série en deux sous groupes de même effectif, lorsque les valeurs sont rangées par ordre croissant.

Exemple :

effectif total = 14

x_i	1	2	3	4
n_i	3	2	4	2

111 22 3333 44

$Me = 3$

x_i	1	2	3	4
n_i	3	2	4	2

ECC $\frac{3}{14} \approx 0{,}21$ $\frac{5}{14} \approx 0{,}35$ $\frac{9}{14} \approx 0{,}64$ $\frac{1}{2}$ $> 50\%$

$Me = 3$

III/ Série Doubles (ou - Bijectives) :

Exemples :

X \ Y	y_1 1	y_2 2	y_3 3	(colonne)	Total
x_1 1	$n_{11} = 1$	$n_{12} = 1$	$n_{13} = 2$	Somme →	4
x_2 2 (ligne)	$n_{21} = 2$	$n_{22} = 1$	$n_{23} = 3$	Somme →	6
Total	3	2	5		10

n_{ij} = effectif partiel

$n_{13} = 2$; signifie que le couple $(1, 3)$ se répète 2 fois.

1/ Série Marginale X ou 1ère Série Marginale

Pour notre exemple :

x_i	1	2
n_i	4	6

$$\bar{x}_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2} x_i n_i$$

$$\bar{x}_m = \frac{1}{10}(1 \times 4 + 2 \times 6) = 1{,}6$$

$$V_m(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - (\bar{x}_m)^2$$

AN : $V(X) = \frac{1}{10}(2\times 4 + 2^2\times 6) - (1,4)^2$

$$V_m(X) = 0,24$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 0,48 \qquad \sigma_{Xm} = 0,48$$

2-) Série Marginale Y ou Loi de la série marginale

y_j	1	2	3
n_j^o	3	2	5

$$\bar{y}_m = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} n_j y_j$$

AN : $\bar{y}_m = \frac{1}{10}(1\times 3 + 2\times 2 + 3\times 5) = 2,2$

$$\bar{y}_m = 2,2$$

$$V_m(Y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} k_j y_j^2 - (\bar{y}_m)^2$$

AN : $V_m(Y) = \frac{1}{10}(1^2\times 3 + 2^2\times 2 + 3^2\times 5) = (2,2)^2 = 0,76$

$$V_m(Y) = 0,76$$

quelque mode +1
sens si xy que mode +2

$\sigma_m(Y) = \sqrt{V_m(Y)} = \sqrt{0,76} = 0,87$

$$\boxed{\sigma_m(Y) = 0,87}$$

$$\boxed{Cov(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} n_{ij} x_i y_j - (\bar{x}_m)(\bar{y}_m)}$$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{10}(1+2+6+4+4+18) - (1,6)(3,2)$$

$$\boxed{Cov(X,Y) = -0,02}$$

IV/ Distribution conditionnelle :

On appelle distribution conditionnelle de la série X sachant $Y = y_j$ notée X/y_j la distribution des valeurs de X lorsque Y a pris une valeur fixe y_j. On définit de même la série conditionnelle Y sachant $X = x_i$ notée Y/x_i.

Exemples :

X/y_1

x_i	1	2
n_i	1	2

Y/x_1

y_j	1	2	3
n_j	1	1	2

X/y_2

x_i	1	2
n_i	1	1

Y/x_2

y_j	1	2	3
n_j	2	1	3

X/y_3

x_i	1	2
n_i	2	3

Remarque :

$$\bar{y}_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_j y_j = \sum_{i=1}^{3} \frac{n_j}{N} y_j \quad \text{or} \quad \frac{n_j}{N} = f$$

$$\boxed{\bar{y}_m = \sum_{i=1}^{3} f_j y_j}$$ - Pour

$$\boxed{\bar{x}_m = \sum_{i=1}^{4} f_i x_i}$$

$$V(X) = \sum f_i x_i^2 - (\bar{x}_m)^2$$

$$V(Y) = \sum f_j y_j^2 - (\bar{y}_m)^2$$

application Bac KOZ

Fonction (Etude)

Theoreme 1 : (Bijection)

Soit f fonction continue, et strictement monotone sur I

f est bijective sur I (Intervalle)

f est une bijection de I vers $J = f(I)$

$f^{-1} :$ $J = f(I) \longrightarrow I$

$y \longmapsto x = f^{-1}(y)$

Pour un intervalle

$0 \in J$: 0 admet une unique antecedent $\alpha \in I$

$f(\alpha) = 0$: α est solution de l'equation $f(x) = 0$ $(\alpha \in I)$

$\alpha \in]a ; b[$: $f(a) \times f(b) < 0$

Theoreme 2 : Theoreme des valeurs Intermédiaire : (corollaire)

- f est continue monotone sur $[a, b]$ $([a, b) \subset I)$
- $f(a) = k$ et $f(b) = k'$
- $f(a) \times f(b) < 0$ • D'après le theoreme des valeurs intermédiaire, il existe un unique reel $\alpha \in]a, b[$ / $f(x) = 0$

Pour un intervalle borné

$(\ln x)^k = \ln^k x \neq \ln x^k$

Chapitre II : Fonction Logarithme Népérien ET Fonction Exponentielle.

I/ Fonction Logarithme :

1) Définition

La Fonction logarithme Népérien noté $\ln$, est la primitive de la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ définit sur $]0, +\infty[$ et qui s'annule en 1 ($\ln 1 = 0$)

$\ln(x^n) = n\ln(x)$

$$\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \ln x \quad / \text{(bijective)}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \; ; \; \ln 1 = 0$$

Exemple : (x ne peut être négatif)

x	0,01	0,7	1	2	7
$\ln x$	-4,6	-0,36	0	0,7	1,9

2) Propriétés

Soit $x > 0$; $y > 0$

(i) $\boxed{\ln(x \times y) = \ln x + \ln y}$ propriété fondamentale

exemple :
$\ln(15) = \ln(3 \times 5) = \ln(3) + \ln(5) = 2,7$
$\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3) = 1,79$

(ii) $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \quad (\ln\frac{1}{x} = -\ln x)}$

(iii) $\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y}$

(iv) $\ln(x^n) = n \ln x$; $x \in \mathbb{R}$

(v) $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x$ ($\ln x^{1/2}$)

Exercice 1 Page 244 : 1-a, 2-b, 3-c (12)

3) Conséquence de la stricte croissance de la fonction ln :

$x \longmapsto \ln x$ est définie sur $]0, +\infty[$

Pour tout $x > 0$ on a $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$

La fonction $x \longmapsto \ln x$ est une fonction continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Par conséquent :

Pour $x > 0$; $y > 0$ on a :

- $x = y \iff \ln x = \ln y$
- $x < y \iff \ln x < \ln y$

En particulier :

$x = 1 \iff \ln x = 0$

- $0 < x < 1 \iff \ln x < 0$
- $x > 1 \iff \ln x > 0$

Remarque : On appelle base du logarithme népérien l'unique nombre réel noté e tel que $\ln e = 1$

On a : $e \simeq 2,71$

Exercice : Page 244 : 1-b, 2-c et 2-d - 2-e

Page 245 : 1, 2, 3, et 4 (Activités) 4) $(\ln x)^3 + 2 \ln x + 6$

4) Limites

$x \longmapsto \ln x$ est définie sur $]0, +\infty[$

• $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ • $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Într-adevăr fie $\lim_{x \to +\infty} \ln x = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$

$\ln 3x = \ln 3 + \ln x$

$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \ln 3x = \ell \\ \lim_{x \to +\infty} (\ln 3 + \ln x) = \ln 3 + \ell \end{cases}$ $\Rightarrow \ell = \ln 3 + \ell$ $\ln 3 = 0$ (imposibil)

$\ell \notin \mathbb{R}$.

deci $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$

- Demonstrăm că $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Fie $x = \frac{1}{x}$ | $x \to 0^+ \Rightarrow x \to +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x \to +\infty} \ln x = -\infty$

$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^x} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ $(x > 0)$

• $\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0$; $\lim_{x \to 0^+} (x^x \ln x) = 0$; $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$ $(x > 0)$

Demonstrație: $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

demonstrație: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} = 2 \left[\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right]$

$x \ln x = \frac{x^2 \ln x}{x}$; $x^2 \frac{\ln x}{x}$ =

$= 2\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{x}\right) = 0$ (2 l 2 0

ou $= 2 \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ avec $\sqrt{x} = X$

A retenir :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Démonstration : (1) posons

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} \qquad f(x) = \ln x \; ; \; f'(x) = \frac{1}{x} \qquad x_0 = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$$

1) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Démonstration : (2)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = ?$$

Posons $X = 1 + x$ 2) $x = X - 1$

Si $x \to 0$ alors $X \to 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{X \to 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Exercice : Page 2[illegible] : a ; b ; c ; (2 l

Page 2[illegible] : Exo 1 et Exo 2 1

I) Dérivé

1) Dérivé de $\ln \circ u$ fonction composée $\ln(u(x))$

Soit $f(x) = \ln(u(x))$

si u est une fonction dérivable et strictement positive (> 0) sur un intervalle I. Alors la fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a :

$$\boxed{\left(\ln(u(x))\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

Démonstration :

$(u \circ v(x))' = v'(x) \times u'(v(x))$

$f(x) = \ln \circ u(x) = u'(x) \times \ln'(u(x))$

$= u'(x) \times \frac{1}{u(x)}$

$f'(x) = (\ln \circ u_x)' = \ln'(u(x)) = \boxed{\frac{u'(x)}{u(x)}}$

Exemples :

$f(x) = \ln x$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad I =]0, +\infty[$

$f(x) = \ln x$ $\quad I =]0, +\infty[$

$f(x) = \ln(x^2+1)$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ $\quad I = \mathbb{R}$

$f(x) = \ln(x^2+x-1)$

$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$ $\quad I =]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$

I-2) La Dérivée de $\ln \circ |u|$:

Soit $f(x) = \ln|u(x)|$

si u est dérivable et non nul ($\neq 0$) sur un intervalle I. Alors la fonction $x \longmapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a :

$$\boxed{\left(\ln|u(x)|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

Exemples :

$f(x) = \ln|x|$; $f'(x) = \frac{1}{x}$ $I = \mathbb{R}^*$

$f(x) = \ln|2x|$; $f'(x) = \frac{2}{2x}$ $I = \mathbb{R}^*$

$f(x) = \ln|x^2+1|$ $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ $I = \mathbb{R}$

$f(x) = \ln|x^2+x-1|$ $f'(x) = \frac{\ln'}{x^2+x-1}$ $I = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

5-3) Dérivée $\ln \circ \frac{u}{v}$

On pose $f(x) = \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$

- Si la fonction $x \longrightarrow \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur un intervalle I et strictement positif sur I alors la fonction $x \longrightarrow \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$ est dérivable sur I

$$\left[\ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)\right]' = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}$$

- Pour montrer il faut utiliser $(\ln(u(x)))'$ et la fonction $\ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$

Application :

$f(x) = \ln\left(\frac{1-\sqrt{5}x}{2-3x}\right)$; $\frac{1-\sqrt{5}x}{2-3x} > 0$ (t.s) $\begin{matrix} 1-\sqrt{5}x \geq 0 \\ 2-3x > 0 \end{matrix}$

$D = \left]-\infty; \frac{1}{\sqrt{5}}\right[\cup \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}x} - \frac{-3}{2-3x} = \frac{-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}x} + \frac{3}{2-3x} = \frac{-7}{(1-\sqrt{5}x)(2-3x)}$$

$$f'(x) = \frac{-7}{(1-\sqrt{5}x)(2-3x)}$$

5-4) Dérivée $\ln \circ \left|\frac{u}{v}\right|$

On pose $f(x) = \ln\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|$

La fonction $x \longrightarrow \left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|$ est dérivable sur un intervalle I et non nulle sur I alors on

fonction $x \longrightarrow \ln\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|$ est dérivable sur I

Pour tout $x \in I$ on a : $\left(\ln\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}$

Remarque pour $\frac{u(x)}{v(x)} > 0$ et $\frac{u(x)}{v(x)} < 0$ dérivée.

Application : $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$; $I = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$x \longrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ est dérivable sur I

$f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$

Etude de la fonction : $x \longrightarrow \ln x$

Ensemble de définition :

$f(x)$ existe ssi $x > 0$

$\Leftrightarrow x \in]0, +\infty[$

$D_f =]0, +\infty[$

Limite aux bornes :

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ ($(y'y) : x = 0$ est une asymptote verticale à (C_f))

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (C_f) admet une branche parabolique de direction (Ox).

2 Exemple de fonction : Fonction

Dérivée :

$x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

$f(x) = \ln x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ car $x > 0$

f est croissante sur $]0, +\infty[$

$(C_f) \cap h(xx')$: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

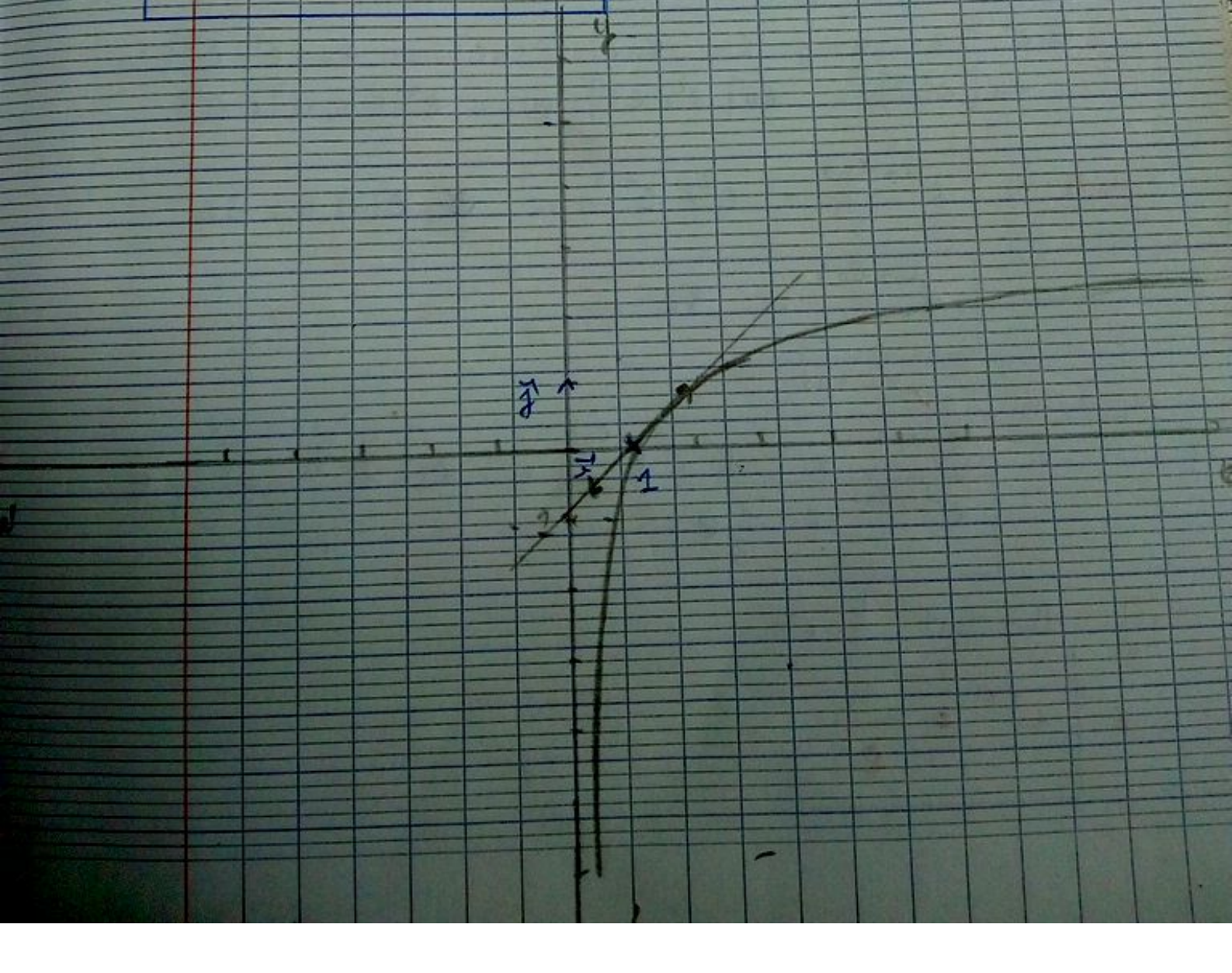
$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in (C_f) \cap h(xx')$

Equation de la tangente (T_A) au point $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(T_A) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$= 1(x - 1) + 1$

$(T_A) : y = x - 1$



II/ Fonction Exponentielle :

1) Définition :

La fonction exponentielle notée exp est la bijection réciproque de la fonction logarithme Népérien. Elle est définit sur $\mathbb{R}$

On a : • Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\ln e^x = x$ $\ln e = 1$

• Pour tout $x > 0$ $e^{\ln x} = x$

• Pour tout $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$\ln x = y \iff x = e^y$$ (lancez)

2) Propriétés :

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$ propriété fondamentale.

$\ln e^{x+y} = x+y = \ln e^x + \ln e^y = \ln(e^x \times e^y)$

$\ln[e^{x+y}] = \ln[e^x \times e^y] \Rightarrow e^{x+y} = e^x \times e^y$

Exemple : (1) $e^{1+\ln 3} = e^1 \times e^{\ln 3} = e(3) = 3e$

$$e^{1+\ln 3} = 3e$$

Exemple : 2 $e^{1-\ln 3}$

$e^{1-\ln 3} = e^1 \times e^{-\ln 3} = e \times e^{\ln(\frac{1}{3})} = \frac{1}{3}e$

$$e^{1-\ln 3} = \frac{1}{3}e$$

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$1 = e^0 = e^{x-x} = e^x \times e^{-x}$

$e^x \times e^{-x} = 1 \iff e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

* $\boxed{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$ $\qquad e^{x-y} = e^x \times e^{-y} = e^x \times \frac{1}{e^y}$

(iv) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $r \in \mathbb{Q}$

* $\boxed{(e^x)^r = e^{xr}}$

Exemple : $(e^x)^2 = e^{2x}$; $(e^x)^3 = e^{3x}$

Autres Propriétés :

La fonction Exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et en conséquence on a les propriétés suivantes :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

- $e^x = e^y \iff x = y$
- $e^x < e^y \iff x < y$

En particulier :

$e^x = 1 \iff x = 0$

$0 < e^x < 1 \iff x < 0$

$e^x > 1 \iff x > 0$

Exemple d'équation :

(E) : $3e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{1+\ln 2}$

$3e(e^x)^2 + ee^x = 2e$

$3ex^2 + ex - 2e = 0$

$3x^2 + x - 2 = 0$

(Poser) -1 est solution !

Poser $x' = -1$, $x'' = -P = \frac{2}{3}$

$\begin{cases} x' = -1 \\ x = e^x \end{cases} \Rightarrow e^x = -1$ (impossible)

$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = e^x \end{cases} \Rightarrow e^x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \ln\frac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3$

$\boxed{S = \{\ln 2 - \ln 3\}}$

Inéquations ①

3) $3e^x - 7e^{-x} + 20 \leq 0$

$3(e^x)^2 + 20e^x - 7 \leq 0$

$3X^2 + 20X - 7 \leq 0$ avec $X = e^x$

On pose $3X^2 + 20X - 7 = 0$

$\Delta' = 100 + 21 = 121$

$X_1 = \frac{-10-11}{3} = -7$ $\quad \boxed{X_1 = -7}$

$X_2 = \frac{-10+11}{3} = \frac{1}{3}$ $\quad \boxed{X_2 = \frac{1}{3}}$

x	$-\infty$		-7		$1/3$		$+\infty$
$3x^2+20x-7$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vient

$(e^x)^2$

$\begin{cases} x = -7 \\ x = e^x \end{cases} \Rightarrow e^x = -7$ (impossible)

$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = e^x \end{cases} \Rightarrow e^x = \frac{1}{3}$; $x = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3$

$\boxed{x = -\ln 3}$

x	$-\infty$		-7		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2+20x-7$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

car $3x^2+20x-7 \leq 0$

car $e^x = X$ et $X > 0$; $e^x > 0$

$\Leftrightarrow X \in \left]0 ; \frac{1}{3}\right]$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < X \leq \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow$

$X \leq \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow$

$e^x \leq \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow$

$x \leq -\ln 3$

$\boxed{S =]-\infty ; -\ln 3]}$

Inéquation : ② : 4 :

$$\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \geq 2$$

L'inequation existe $\Leftrightarrow$ $e^{2x}-1 \neq 0$

Posons $e^{2x}-1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1$

$\Leftrightarrow 2x = \ln 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

L'inéquation existe $\Leftrightarrow x \neq 0$

Resolution :

$$\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \geq 2$$

$$\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} - 2 \geq 0$$

$$\frac{e^{2x}+1-2e^{2x}+2}{e^{2x}-1} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{e^{2x}+3}{e^{2x}-1} \geq 0$$

pour tout x : $-e^{2x} + 3 = 0$

$-e^{2x} + 3 = 0$ ⇔ $(e^x)^2 = 3$

⇔ $(e^x)^2 = (\sqrt{3})^2$

⇔ $e^x = \sqrt{3}$ ou $e^x = -\sqrt{3}$

⇔ $x = \ln\sqrt{3}$

x	$-\infty$		0		$\ln\sqrt{3}$		$+\infty$
$-e^{2x}+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$e^{2x}+1$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{-e^{2x}+3}{e^{2x}+1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]0, \ln\sqrt{3}]$

Exp (ln) : SG, So, dg (252)

I/ Limites : La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$.

$\exp :]-\infty, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

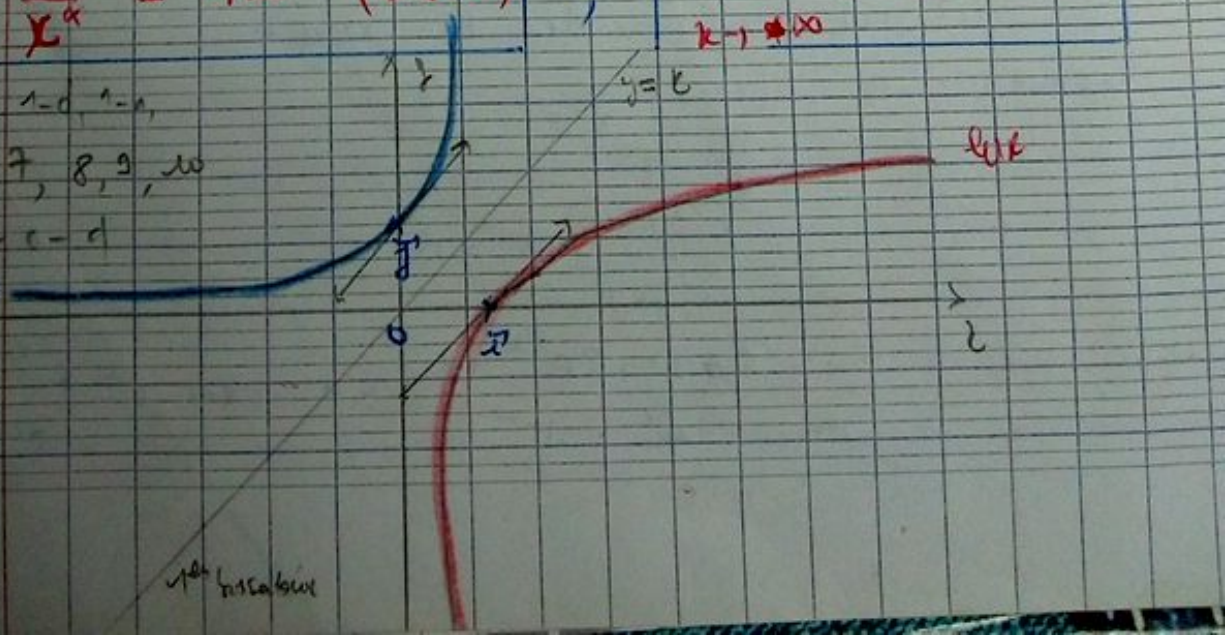
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad (\alpha > 0)$; $\lim_{x \to -\infty} x^\alpha e^x = 0 \quad \alpha$

Exercices : P 255 : Exo 1-c, 1-f,

P 271 : Exo 7, 8, 9, 10

Corrigés a - b - c - d



$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Pour $f(x) = e^x$ avec $f(0) = 1$ et $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0)$$ car $f'(x) = e^x$

$f'(0) = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

5/ Dérivée de fonction exponentielle :

- La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout x de cet intervalle on a : $(\ln x)' = \frac{1}{x} \neq 0$

- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $(\exp(x))' = \frac{1}{\ln'(\exp x)} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp$

$$(\exp(x))' = \exp(x)$$

* **Propriété 1 :**

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$(e^x)' = e^x$$

* **Propriété : 2**

- Si la fonction : $x \longrightarrow u(x)$ est dérivable sur I alors la fonction : $x \longrightarrow e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}$

Exemple : $e^{x^2 - 2x} = (2x - 2)e^{x^2 - 2x}$; $I = \mathbb{R}$

$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$; $I = \mathbb{R}^*$ car $x^2 \neq 0$ ssi $x \neq 0$

Exercice : P: 265 : $x - a \longmapsto xe$

P: 269 : fonction : $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

P: 270 : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} x e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

P: 271 : Exo : 12 $\longmapsto$ 17

Exo : 18, 19, 20, 21,

Calcul Intégral :

I/ Integrale d'une fonction continue :

1) Introduction :

Soit f : fonction continue sur un intervalle I a et b appartenant à I, F et G 2 primitives de f sur I

Pour tout $x \in I$: on $G(x) = F(x) + c$ $(c \in \mathbb{R})$

$a \in I$; $G(a) = F(a) + c$

$b \in I$; $G(b) = F(b) + c$

$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$

le nombre reel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive de f choisie sur I

2) Définition :

Soit f une fonction continue sur une intervalle I.

On appelle **intégrale de a à b de f** le nombre reel $F(b) - F(a)$ ou F est une primitive de f sur I, on note

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

- $\int_a^b f(x)\,dx$; se lit intégrale ou somme de a à b de $f(x)\,dx$
- $[F(x)]_a^b$: se lit $F(x)$ pris entre a et b
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_b^a f(u)\,du$ la variable x est une variable muette.
- a et b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$

Exemples : $f(x) = x^2$; $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right] = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}[8-1] = \frac{7}{3}$$

$$\boxed{\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{7}{3}}$$

Exemple 2 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Remarques :

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad ; \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

En effet :

$$\int_a^a f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a) = -\left(F(a) - F(b)\right)$$

$$= \boxed{-\int_b^a f(x)\,dx}$$

3/ Intégrale et Primitive :

Soit f fonction continue sur I (intervalle)

$a \in I$, F primitive de f qui s'annule en a ($F(a) = 0$).

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

$$\therefore \int_x^t f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^t = F(t) - F(a)$$

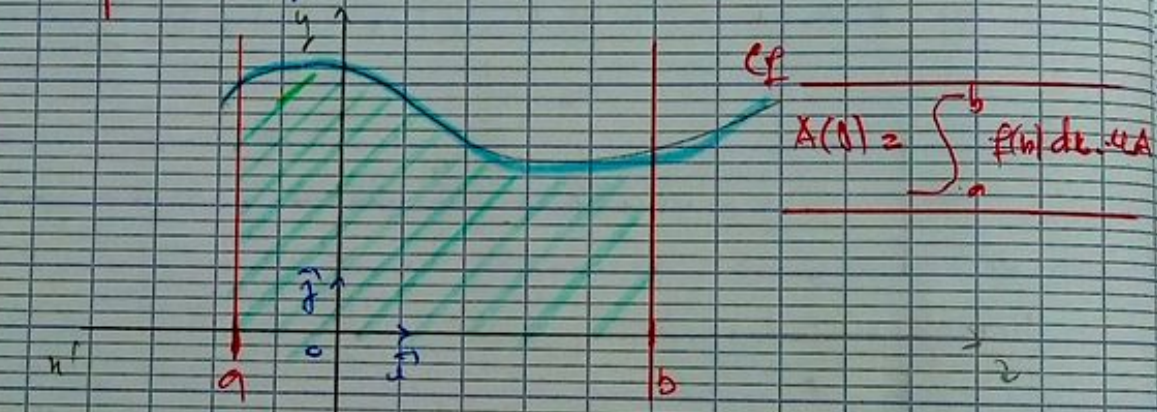
$$\int_a^t f(t)\,dt = F(x)$$

4/ Interprétation graphique de l'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I, C_f : sa courbe représentative a et $b \in I$ $(a < b)$

$\int_a^b f(x)\,dx$. u.A : aire du domaine (noté $A(D)$) délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisse (Ox) et les droites d'équation $x = a$, $x = b$

$$A(D) = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \; a \leq x \leq b \; ; \; 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$



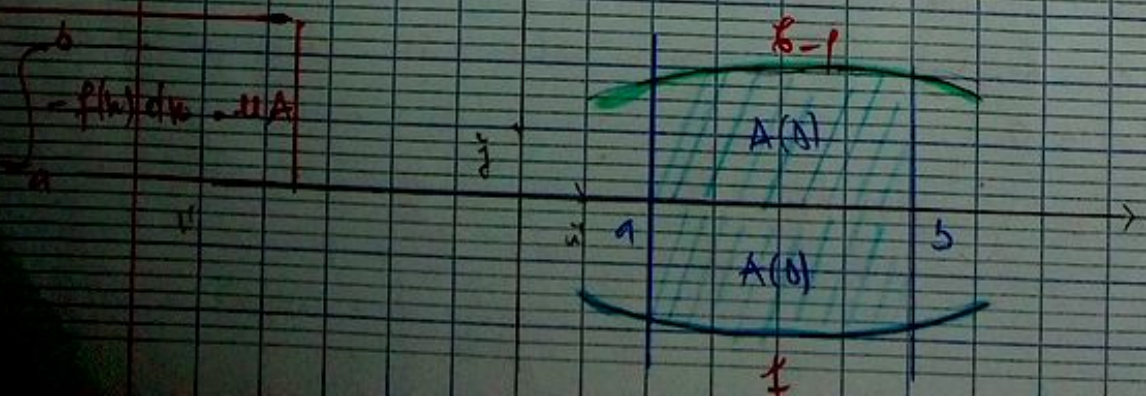
Exercice d'application: Page 201 : a - f

Valeur moyenne et $= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

intégrale.

Remarque :

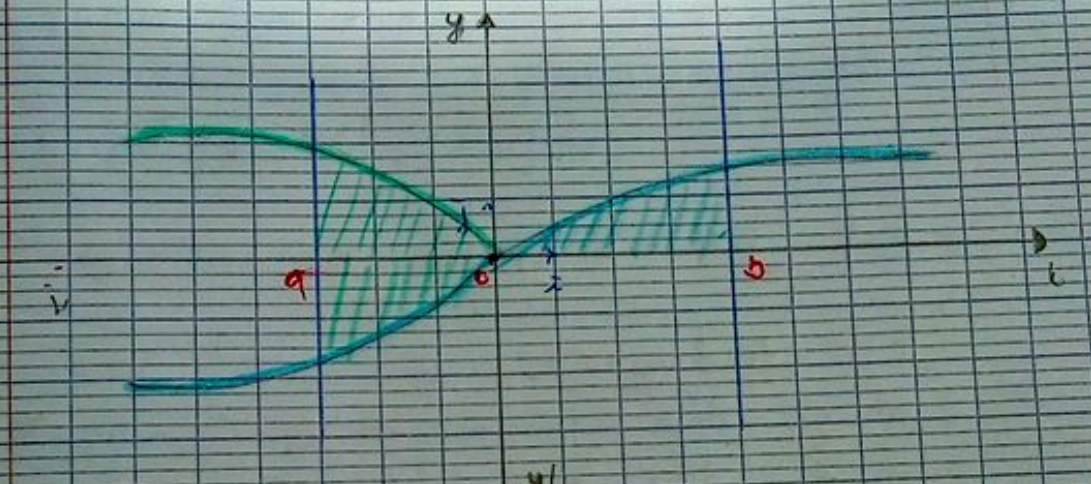
- Si f est continue et négative sur $[a, b]$, la symétrie orthogonale d'axe (Ox) transforme la courbe C_f en la courbe représentative (C_{-f}) de f



- Si f continue et négative ($f<0$) sur $[a;c]$
f continue et positive ($f>0$) sur $[c;b]$

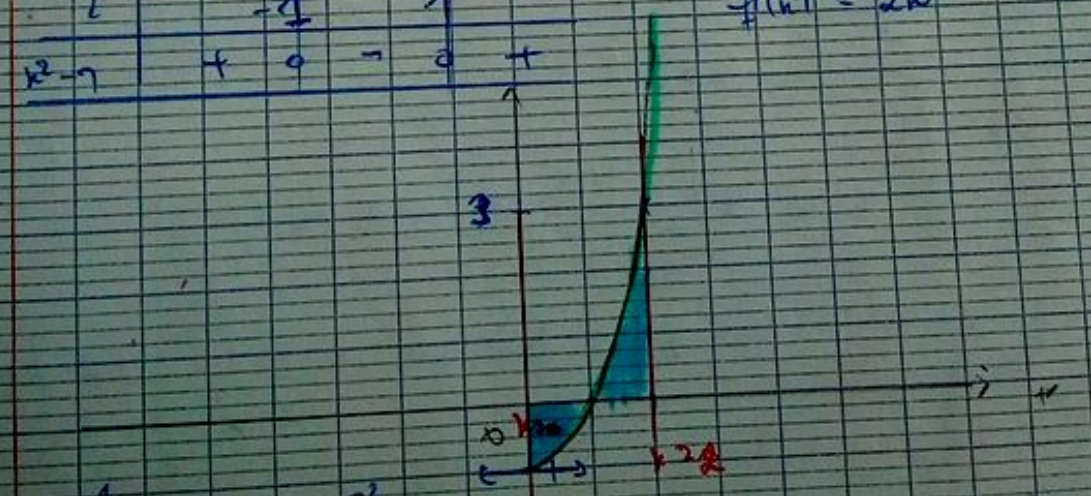
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$A(D) = \int_a^c -f(x)\,dx \cdot u.A + \int_c^b f(x)\,dx \cdot u.A$$



Exemple : $f(x) = x^2 - 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	



$$A(D) = \left(\int_0^1 -f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx \right) u.A$$

$$= \left(\int_0^1 (-x^2+1)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx \right) u.A = \left(\left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^2 \right) u.A$$

$$= \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) = 2 \times 1\,cm^2$$

$$\boxed{A(D) = 2\,cm^2}$$

5) Propriétés :

i) Relation de chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

exemples :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin t\,dt + \int_0^{\pi/3} \sin t\,dt$$

$$= -\left[\cos t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = +1 + 1 = 2 + 2$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|\,dt = +2$$

ii) Linéarité :

Soit f et g deux fonctions continue sur I

α et β deux réel, a et $b \in I$

On a :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Exemple : Pg. 205, Exo 1 2

Exemples :

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\left[+\sin 2t\right]_0^{\pi/4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

6/ Signe de l'intégrale

Soit f fonction continue sur I, a et $b \in I$ $(a < b)$

- Si f est positive ≥ 0 sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- Si $f \leq 0$ sur $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

iii) Soit f et g deux fonctions continues sur I

a et $b \in I$ $(a < b)$

- Si $f \geq 0$ $x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- Si $f \geq g$ pour tout $x \in [a,b]$

alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Exemple : Pour tout $x \in [1,+\infty[$; $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$

$x \in [1,+\infty[$; $1 \leq x$

$t \in [1,x]$ $\Leftrightarrow$ $1 \leq t \leq x$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq 1$

$\Rightarrow$ $\int_1^x \frac{1}{x}\,dt \leq \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \leq \int_1^x 1\,dt$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{x}[t]_1^x \leq [\ln t]_1^x \leq [t]_1^x$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1}$

Remarque : Soit f continue I, a et $b \in I$ tq $a \leq b$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f|(x)\,dx$$

7) Inégalité de la moyenne :

i) Soit f une fonction continue sur I.

a et $b \in I$ $(a < b)$

- Si m et M sont deux nombres réels tq :

Pour tout $k \in [a, b]$; $m \leq f(k) \leq M$

alors on a : $\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(k)\,dk \leq M(b-a)}$

ii) Soit f une fonction continue sur I

a et $b \in I$ ( )

- Si M est un réel tq : $|f(k)| \leq M$

pour tout k (~~$\in [a, b]$ alors~~) compris entre a et b

$$\boxed{\left|\int_b^a f(k)\,dk\right| \leq M|(b-a)|}$$

8) Valeur moyenne d'une fonction :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ on appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le nombre réel μ tel que : $\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(k)\,dk}$

III/ Techniques de Calcul Intégral

1/ Primitives usuelles :

U désigne une fonction dérivable sur I

V désigne une fonction dérivable sur I

$\alpha \in \mathbb{R}$

Fonctions	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$	$u'u^\alpha$	$u' \times v' \circ u$
Primitives	$\ln \lvert u \rvert$	e^u	$\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$	$v \circ u$
Commentaires	$u \neq 0$ sur I		$u > 0$ sur I	

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I dont les dérivées u' et v' sont continues sur I

a et $b \in I$

Alors :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$$

II-2/ Intégration Par Parties :

Application : $I = \int_1^e x \ln x \, dx$

Remarque

$\ln x + \ln x \to$ on dérive $\ln$

$e^x + \ln x \to$ on dérive $\ln x$

Posons

$u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$I = \frac{1}{2}\left[x^2 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$$

On a :

$$\left[x^2 \ln x\right] = e^2 \quad (1)$$

$$\int_1^e x\,dx = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}(e^2-1) \quad (2)$$

D'après (1) et (2) on a :

$$I = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{1}{4}(e^2-1)$$

$$\boxed{I = \frac{1}{4}(e^2-1)}$$

exemple 2 : $J = \int_0^1 x e^x \, dx$

$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x \qquad v(x) = e^x$

$J = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx$

$= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1$

$= e - (e - 1) = 1$

$\boxed{J = 1}$

Exemple 3 $H = \int_0^{\pi/4} x \cos x \, dx$

$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos x \qquad v(x) = \sin x$

$H = [x \sin x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x$

$= [x \sin x]_0^{\pi/4} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\cos x]_0^{\pi/4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{-8 + 4\sqrt{2} + \sqrt{2}\pi}{8}$

$\boxed{H = \frac{-8 + 4\sqrt{2} + \sqrt{2}\pi}{8}}$

Exemple : 4

Page 324 : Exposé (1 feuille) Fait

Page 331 Exo 1 3a - 3b

Page 183 : Exo 25 et 24

Page 189 : Exo 26 ;

Chapitre : III

Equation Différentielle (E)

I/ Equation du Type : $y' + ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}$)

1/ Définition :

Toute équation (E) : $y' + ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}$) est appelée equation differentielle linéaire du premier ordre sans second membre.

Exemple : (E) : $y' - 2y = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre.

Soit (E) : y

I-2/ Résolution :

Soit (E) : $y' + ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}$)

l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\boxed{f'(x) + af(x) = 0}$

Soit (E) : $y' + ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}^*$)

- la fonction nulle est solution de (E)

$y \neq 0$ sur solutions de (E) sur $\mathbb{R}$

$y' + ay = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y} = -a$

$\Leftrightarrow \ln|y| = -ax + C$

$\Rightarrow |y| = e^{-ax+C} = e^{C} e^{-ax}$

$\Leftrightarrow y = Ke^{-ax}$ avec $K \in \mathbb{R}^*$

- La fonction nulle étant solution de (E)

On a : $y(x) = Ke^{-ax}$ avec $K \in \mathbb{R}$

Réciproquement :

Soit y une fonction de (E) et $g(x) = y(x)e^{ax}$

$x \mapsto g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g(x) = y(x)e^{ax}$

$z'(x) = y'(x)e^{ax} + ay(x)e^{ax} = e^{ax}(y'(x) + ay(x))$

$= 0 e^{ax} = 0$ avec $y'(x) + ay(x) = 0$

Pour tout $k \in \mathbb{R}$ $z'(x) = 0$ $z(x) = k \in \mathbb{R}$

Donc : $\begin{cases} z(x) = y(x)e^{ax} \\ z(x) = k \end{cases} \Rightarrow y(x)e^{ax} = k$

$y(x)e^{ax} = k \Leftrightarrow y(x) = ke^{-ax}$

(E) : $y' + ay = 0 \Leftrightarrow y(x) = ke^{-ax}$

Application : (E_1) : $y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y(x) = ke^{2x}$

Rendre dans $\mathbb{R}$

1°) (E_2) : $y = y'$

2°) (E_3) : $y' = -\frac{y}{2}$

3°) $y\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$

Solution :

1°) $y' - y = 0 \Leftrightarrow$ **$y(x) = ke^{x}$**

2°) $y' + \frac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow$ **$y(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$**

3°) $y'\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$

$y' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y = 0 \Leftrightarrow$ **$y(x) = ke^{+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x}$**

Solution vérifiant une condition initiale :

Théorème : Pour tout couple (x_0, y_0) de nombre réel l'équation différentielle (E) : $y' + ay = 0$ $(a \in \mathbb{R})$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur y_0 en x_0

Exemple : Soit (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 0$ et $y(\ln 4) = 1$

Page 332 Exo 9, Exo 22 (Vendredi)
Page 329 ; TD : Exo 1

(E) : $y' + \frac{1}{2}y = 0$ ⇔

$y = ke^{-\frac{1}{2}x}$

$\begin{cases} y(\ln 4) = ke^{-\frac{1}{2}\ln 4} = ke^{-\ln 2} = \frac{1}{2}k = \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}k \\ y(\ln 4) = 1 \end{cases}$

Par comparaison $1 = \frac{1}{2}k \Rightarrow k = 2$

$$\boxed{y(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}}$$

Application : Résoudre $\mathbb{R}$

(E_1) : $y' - 3y = 0$ et $y(0) = 1$

(E_2) : $y' + y\ln 2 = 0$ et $y(1) = -2$

Solution :

1°) (E_1) : $y' - 3y = 0$ (2) $y = ke^{3x}$

$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(0) = ke^0 = k \end{cases}$

Par comparaison $\Rightarrow k = 1$ ⇔ $\boxed{y(x) = e^{3x}}$

2°) (E_2) : $y' + \ln 2\, y = 0$ ⇔ $y(x) = ke^{(-\ln 2)x}$

$\begin{cases} y(1) = ke^{-\ln 2} = k\frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}k \\ y(1) = -2 \end{cases}$

Par comparaison $\Rightarrow \frac{1}{2}k = -2$ ⇔ $k = -4$

$$\boxed{y(x) = -4e^{-\ln 2 x}}$$

II/ Equation du type $ay'' + by' + cy = 0$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$

Toute equation (E) : $ay' + by' + cy = 0$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ $a \neq 0$ et appelé équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant sans second membre.

Résolution :

Pour resoudre une equation du type (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ $(a \text{ et } b \in \mathbb{R}\ a \neq 0)$, c'est trouver l'ensemble des fonctions f 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$

Equation caractéristique

Considérons une d'equation differentielle (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ $(a, b, \text{et } c \in \mathbb{R}\ a \text{ et } b \neq 0)$

Soit la fonction $y(x) = e^{rx}$ $(r \in \mathbb{R})$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$y'(x) = re^{rx}$; $y''(x) = r^2 e^{rx}$

y solution de (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ (E)

$a(r^2 e^{rx}) + b(re^{rx}) + c(e^{rx}) = 0$ $(\Leftrightarrow)$

$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$ $(\Leftrightarrow)$

$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$ $(\Leftrightarrow)$

$ar^2 + br + c = 0$ avec $e^{rx} \neq 0$

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ $(a \neq 0)$ est appelée équation caractéristique associé à l'equation differentielle

$ay'' + by' + cy = 0$

Exemples :

(E_1) : $y'' - 8y' + 16y = 0$ à pour équation caractéristique $r^2 - 8r + 16 = 0$ $(r \in$

(E_2) : $y'' + 3y' - 10y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 3r - 10 = 0$

(E_3) : $y'' - 4y' + 13y = 0$ a pour équation

Caractéristique $r^2 - 4r + 13 = 0 \quad (r \in \mathbb{C})$

• Pour résoudre sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle du type

$ay'' + by' + cy = 0 \quad (a \neq 0,\ a, b \text{ et } c \in \mathbb{R})$

on peut résoudre l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ et utiliser le tableau ci-dessus.

$\Delta = b^2 - 4ac$	Solution de l'équation caractéristique	Solution de l'équation différentielle
$\Delta = 0$	solution double $r_0 = -b/2a$	$y(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$ $A; B \in \mathbb{R}$
$\Delta > 0$	deux solutions distinctes $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}$	$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ $(A, B \in \mathbb{R})$
$\Delta < 0$	deux solution complexes conjugué $\alpha - i\beta$; $\alpha + i\beta$	$y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ A et $B \in \mathbb{R}$

Application :

(E_1) : $y'' - 8y + 16y = 0$

$r^2 - 8r + 16 = 0$

$\Delta' = (-4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$

$r_0 = \frac{-b}{a} = \frac{4}{1} = 4$ $\boxed{r_0 = 4}$

$\boxed{y(x) = (Ax + B)e^{4x}}$

(E_2) : $y'' + 3y' - 10y = 0$

$r^2 + 3r - 10 = 0$

$\Delta = (3)^2 - 4(-10) = 49 > 0$

$r_1 = \frac{-3-7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$ $\boxed{r_1 = -5}$

$r_2 = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2$ $\boxed{r_2 = 2}$

$\boxed{y(x) = Ae^{-5x} + Be^{2x}}$

(E_3) : $y'' - 4y' + 13y = 0$

$r^2 - 4r + 13 = 0$

$\Delta' = (-2)^2 - 13 = -9 = (3i)^2$

$r_1 = 2 - 3i$; $r_2 = 2 + 3i$

$\boxed{y(x) = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)}$

Page

Exo 1, 333 : 13 et 16

Correction Comportement

2/ g dérivable sur $[-1, 3]$ telle $g(0) = \ln 2$

$\forall x \in [-1, 3]$ $\ln(1,1) \leq g'(x) \leq \ln(1,2)$

justifions que $\ln(2,42) \leq g(x) \leq \ln(2,88)$

$0 \in [-1, 3]$ et $x \in [-1, 3]$: $[0, x] \subset [-1, 3]$

g dérivable sur $[-1, 3]$ et bornée

$\ln(1,1) \leq g'(x) \leq \ln(1,2)$

En particulier g est dérivable sur $[0, x]$

et $\ln(1,1) \leq g'(x) \leq \ln(1,2)$

D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis

$\ln(1,1) \times (x-0) \leq g(x) - g(0) \leq \ln(1,2) \times (x-0)$

$2\ln(1,1) + \ln 2 \leq g(x) \leq 2\ln(1,2) + \ln(2)$

$\ln(1,1)^2 + \ln 2 \leq g(x) \leq \ln(1,2)^2 + \ln(2)$

théorème de l'inégalité des accroissements finis

$\ln((1,1)^2 \times 2) \leq g(x) \leq \ln((1,2)^2 \times 2)$

$\ln(2,42) \leq g(x) \leq \ln(2,88)$ (1)

5) En théorie :

Calculons l'espérance mathématique :