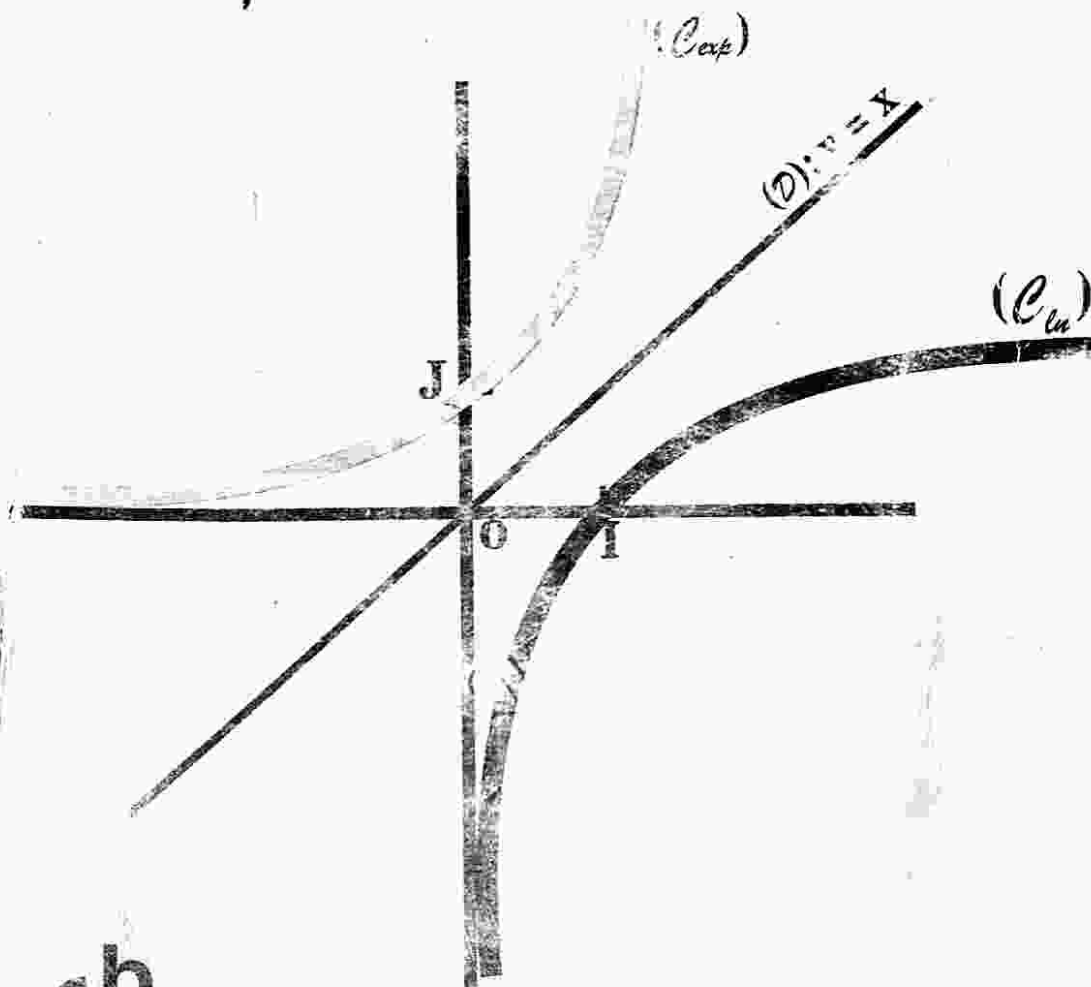


Le Facilitateur

Mathématiques I^{le} D

Recueil de plus de 120 exercices et Corrigés



$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

2500 fcfa

Auteur : SAWADOGO D. Serge

Professeur Certifié des Lycées et Collèges

Tél.: +226 71 93 84 26 / 66 15 56 25 - E-mail : sergesawadogo226@gmail.com

Avant - Propos

Le facilitateur est un fascicule de mathématiques destiné aux élèves de la classe de Terminale D. Son contenu est conforme au programme en vigueur dans les Lycées et Collèges du Burkina Faso.

Ce manuel vise à mettre à la disposition des élèves de la classe Terminale D des exercices pour leur permettre de mieux s'entraîner afin d'affronter les évaluations avec une meilleure préparation.

Le facilitateur est un recueil de plus de 120 exercices de Terminale D classés par chapitre.

Le but est de permettre à chaque élève au terme de chaque chapitre d'avoir suffisamment d'exercices pour se préparer pour l'évaluation.

J'espère de tout cœur au travers de ce manuel comme son nom l'indique faciliter l'apprentissage des mathématiques aux élèves concernés.

Comme toute oeuvre humaine le facilitateur reste perfectible.

J'accueillerai donc avec reconnaissance toutes remarques, suggestions et critiques susceptibles d'améliorer la qualité de l'ouvrage.

MERCIEMENTS:

Je remercie sincèrement :

M^r KIEMDE Koussouma (Professeur certifié de physique chimie)

M^r SAVADOGO Issou (Professeur de mathématiques)

qui ont fortement contribué à l'élaboration de ce fascicule.

CHAPITRE 1: NOMBRE COMPLEXE

EXERCICE 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme $p(z)$ définie par :

$$P(z) = z^4 - 2(4 - i)z^3 + (26 - 9i)z^2 - (43 - 15i)z + 32 - 4i. \quad i \text{ désignant le nombre complexe tel que } i^2 = -1$$

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $U^2 - (-11 + i)U + 32 - 4i = 0$

2°) a- Démontrer que pour tout nombre complexe z , l'on a :

$$P(z) = [z^2 - (4 - i)z]^2 - (-11 + i)[z^2 - (4 - i)z] + 32 - 4i$$

b- En utilisant les résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$.

3°) On donne les points A ; B et C d'affixes respectives : $1+i$; $2+i$ et $2-2i$ dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$

a) Déterminer une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

b) Donner une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.

4°) A tout nombre complexe z on associe le nombre complexe $Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$

i) Vérifier que si $z \neq 1$, alors $Z = \frac{1-z^5}{1-z}$

ii) On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Calculer Z .

EXERCICE 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1cm). Soient A et B deux points d'affixes respectives $3+i$ et $2i$.

On considère l'application f de P privé du point B dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $f(z) = z' = \frac{iz+1-3i}{z-2i}$.

On pose : $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$ où x, y, x' et y' sont des réels.

Exprimer x' et y' en fonction de x et y

Déduisez-en l'ensemble (C) des points M d'affixe z tel que z' soit un réel non nul.

a) Déterminer les affixes des points invariants de f c'est-à-dire les points tel que $M=M'$.

b) Soient E et F les points d'affixes respectives $1-i$ et $-1+2i$. Calculer les affixes des points E'' et F'' images respectives de E' et de F' par rapport à l'axe des réels sachant que $E'=f(E)$ et $F'=f(F)$

3- a) Interpréter géométriquement $|z'|$ et $\arg z'$.

b) Déduisez-en la nature des ensembles de points (Δ) et (Δ') définis par : $(\Delta) = \{M(z)/|z'| = 1\}$
 $(\Delta') = \{M(z)/z' \text{ soit un imaginaire pur non nul}\}$

4- Construire (Δ) et (Δ')

EXERCICE 3

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2cm). On considère :

- Le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$
- Le point B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct, c'est-à-dire $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{3}$
- Le milieu q de $[OB]$

1- a) Déterminer les affixes des points B et Q.

b) Déterminer l'affixe Z_K du point K tel que ABQK soit un parallélogramme

c) Démontrer que $\frac{Z_K - a}{Z_K}$ est imaginaire pur. Qu'en déduit-on pour le triangle OKA ? Préciser la nature du quadrilatère OQAK

d) Placer les points A, B, Q et K dans le plan

2- Soit C le point d'affixe $C = \frac{2a}{3}$

a) Calculer $\frac{Z_K - b}{Z_K - c}$ (b étant l'affixe de B). Que peut-on en déduire pour les points B, C et K ?

b) Placer c sur la figure.

EXERCICE 4

I. Soient les nombres complexes $u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$

1- Ecrire sous forme trigonométrique u, v et $w = \frac{u}{v}$. En déduire les réels $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$

II. On pose $w = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1- Vérifier que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$

2- Montrer que $\frac{w^5 - 1}{w - 1} = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$.

3- En posant $X = w + \frac{1}{w}$, vérifier que $X^2 + X - 1 = 0$ (1)

4- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1). En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

EXERCICE 5

Soit Π le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm).

On considère les trois nombres complexes non nuls deux à deux distincts, a , b et c tels que : $|a| = |b| = |c|$.

On désigne par A l'image dans Π de a , par B celle de b et par C celle de c . on note H le point d'affixe $a+b+c$. le but de l'exercice est de montrer que H est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC .

1- a) soit $\omega = \bar{b}c - b\bar{c}$. Exprimer $\bar{\omega}$ à l'aide de ω . En déduire que ω est un nombre imaginaire pur.

b) Montrer à l'aide de a) que $(b+c)(\bar{b}-\bar{c})$ et $\frac{b+c}{b-c}$ sont des imaginaires purs.

2- a) Exprimer en fonction de a , de b , et de c , les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$

b) Utiliser a) et 1-b) pour montrer que la droite (AH) est la hauteur passant par A du triangle ABC .

c) Expliquer, sans calcul supplémentaire, pourquoi H est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC .

3- Placer les points A , B , C et H dans le plan Π en donnant à a la valeur $\sqrt{3} + i$, à b la valeur $-1 + \sqrt{3}i$ et à c la valeur $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Exercice 6

1. a°) soit z un nombre complexe non nul tel que : $z^3 + \bar{z} = 0$

(i) Montrer que : $|z| = 1$

(ii) Montrer que : $z^4 + 1 = 0$

b°) Montrer que si z est un nombre complexe tel que $z^2 + 1 = 0$ alors $|z| = 1$ et

$$z^3 + \bar{z} = 0$$

2. soit P le polynôme défini par $P(z) = z^4 + 1$

a) Vérifier que $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $-a$ sont des racines de $P(z)$

b) Déterminer $g(z)$ tel que $P(z) = (z-a)g(z)$ et factoriser $g(z)$

c) Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$?

d) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 + \bar{z} = 0$

Exercice 7

Le plan P est muni d'un R.O.N.D $(o, \vec{u}, \vec{v})$

A) 1) Calculer $(4 + 3i)^2$

2) Résoudre l'équation $(E) : z^3 - (4 - 5i)z^2 - 11(1 + i)z + 2 - 42i = 0$

sachant que (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.

B) soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 1 - 4i$; $b = 5 - i$ et $c = -2$

1) On pose $Z = \frac{c-a}{b-a}$. Calculer Z et en déduire la nature exacte du triangle ABC .

2) Déterminer l'affixe du point D image de C par la translation de vecteur $\vec{AB}$

3) Déterminer la nature précise du quadrilatère $ABDC$.

Exercice 8

Le plan complexe P est muni d'un R.O.N.D $(o, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points E, F d'affixes respectives $z_E = 1 - 4i$ et $z_F = 2 + 3i$

On considère l'application du plan $P \rightarrow P$ qui, à tout point M d'affixe

z ; on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{(1-i)z+3+5i}{-(1-i)z+5+i}$

1. Montrer que $z' = \frac{z-1+4i}{-z+2+3i}$

2. On pose $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

a. Déterminer les réels X et Y en fonction de x et y tels que $z' = X + iY$

b. En déduire et représenter l'ensemble :

i. (Γ) des points $M(z)$ tels que $M' \in (o, \vec{v})$

ii. (Γ') des points $M(z)$ tels que $M' \in (o, \vec{u})$

3. a. Interpréter géométriquement $|z'|$ et $\arg(z')$

b. En déduire et représenter l'ensemble:

i. (Γ_1) des points $M(z)$ tels que $z' \in i\mathbb{R}$

ii. (Γ_2) des points $M(z)$ tels que $z' \in \mathbb{R}$

iii. (Γ_3) des points $M(z)$ tels que M' appartiennent au cercle de centre o et de rayon 1.

Exercice 9

Le plan est rapporté au repère orthonorme direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 1cm).

On note z_M l'affixe d'un point M .

Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe $4i$

1) Soit θ un réel de $[0, 2\pi]$ et r un réel positif.

On considère le point E d'affixe $re^{i\theta}$ et F le point tel que OEF soit un triangle isocèle rectangle vérifiant $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{2}$. Quelle est en fonction de r et θ , l'affixe de F ?

2) Faire une figure et la compléter au fur et à mesure. On choisira pour la figure uniquement : $\theta = \frac{5\pi}{6}$ et $r = 3$

3) On appelle P, Q, R et S les milieux respectifs des segments $[AB], [BE], [EF]$ et $[FA]$

a) Prouver que $PQRS$ est un parallélogramme

b) On pose $Z = \frac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}$. Déterminer le module et un argument de Z .

En déduire que $PQRS$ est un carré.

4) a) Calculer, en fonction de r et θ , les affixes respectives des points P et Q

b) Quelle est en fonction de r et θ , l'aire du carré $PQRS$

c) r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale? Quelle est alors l'affixe de E ?

Exercice 10

Z et z sont des nombres complexes tels que : $Z = z^2 - 2\bar{z} + 1$

a) On pose : $z = x + iy$ (avec x et y des réels).

Calculer, en fonction de x et y , la partie réelle X et la partie imaginaire Y de Z

b) Trouver puis représenter dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal, l'ensemble des points dont l'affixe z est tel que Z soit réel.

c) Trouver l'ensemble des complexes z tels que $Z = 0$

d) A, B et C sont les images respectives des nombres complexes : $1; -1 + 2i; -1 - 2i$.

Placer les points A, B et C . Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

CHAPITRE 2: LIMITES ET CONTINUITÉ

EXERCICE 1

3A: ...

1- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x - 3}$. Etudier la limite à gauche puis la limite à droite en $x_0 = 3$.

Conclure quant à la limite de f en $x_0 = 3$.

2- Pour chaque fonction numérique définie ci-dessous

a) Trouver son ensemble de définition que l'on écrira sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalle.

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

$$1) f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^3 + 1}} \quad 2) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 1}}{x} - x$$

3- Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}$. Peut-on prolonger f par continuité au point d'abscisse 3 ? Si oui, préciser le prolongement

4- f est une fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{7x^2 + 3x - 8}{(x-1)(x-2)}$; calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

5- a) On sait que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Etudier les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{2x}$$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

6- A l'aide du taux de variation de fonctions bien choisies, calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{1-x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{3x - \pi}$$

7- Déterminer α pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x}{x}, \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = \alpha \end{cases}$$

8- Etudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x + \cos x}$.

9- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 + 5x + 1} + x + 1$.

EXERCICE 2

1- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x-1}$.

a) Etudier la limite de f en 1

b) la fonction f peut-elle être prolongée par continuité en 1 ? si oui, déterminer son prolongement.

2- On considère la fonction g définie par $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, si $x \neq 0$ et $g(x) = 0$

- a) Montrer que g est continue en 0
- b) Montrer que g est dérivable en 0
- c) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \neq 0$

CHAPITRE 3: CALCUL DIFFERENTIEL

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2(x-2)}{x-1}$

1- Trouver 4 réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-1}$

2- On désigne par (C) la courbe de la fonction f et par (Γ) la courbe de la fonction : $g: x \mapsto ax^2 + bx + c$.

a) Montrer que (C) et (Γ) sont des courbes asymptotes.

b) Etudier la position relative de (C) et (Γ)

3- Etudier les variations de f

4- Etudier les variations de g .

5- Construire (Γ) puis (C) dans le même repère.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x+9}{(2x+3)^2}$

1- Etudier les variations de f .

2- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) de f avec les axes du repère.

3- Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 2} - 1 & \text{si } x > 2 \\ \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } x < 2 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2cm

1- Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de l'ensemble de définition de f ci-dessus cité.

2- Montrer que la droite $(D): y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$

3- Etudier la dérivabilité de f en 2 et interpréter graphiquement le résultat

4- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

5- a) Ecrire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0

b) Tracer les asymptote, la tangente et la courbe (C_f)

6- Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ où $m \in \mathbb{R}$

7- soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; 1[$

a) Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera

b) Déterminer le sens de variation et le tableau de variation de la bijection réciproque g^{-1} de g

c) Construire la courbe (C') de g^{-1} dans le même repère que (C_f). Justifier la construction

Donnée : $\sqrt{13} = 3,60$; $\sqrt{2} = 1,41$; $\sqrt{6} = 2,44$.

EXERCICE 4

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} (x-2)\sqrt{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^3-1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2.

PARTIE A

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = 1$

2- Etudier les variations de f .

3- Montrer que la droite (D) : $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) de f en $+\infty$.

4- Construire la droite (D) et la courbe (C). On précisera les tangentes ou demi-tangentes aux points d'abscisses 1.

PARTIE B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

1- Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera

2- Dresser le tableau de variation de la bijection réciproque g^{-1} de g

3- Construire la courbe (Γ) de la fonction réciproque g^{-1} de g dans le repère précédent.

EXERCICE 5

PARTIE 1 : Etude de la fonction auxiliaire g

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$

a) Etudier le sens de variation de g . Dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α . Vérifier que : $1,4 < \alpha < 1,5$

c) Déterminer le signe de $g(x)$

PARTIE 2 : Etude et représentation graphique de f.

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{2-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
 et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm)

1- Déterminer le domaine de définition D de f . Calculer les limites de f aux bornes de D.

2- a) Etudier la continuité de f en O.

b) Etudier la dérivabilité de f en O. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

3- a) Etudier le sens de variation de f .

b) En utilisant la définition de α . Démontrer que : $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ par deux décimaux à 10^{-1} près

c) Dresser le tableau de variation de f .

4- a) Trouver les réels a, b, c et d tel que pour tout réel $x \in]0; +\infty[$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-1} + \frac{d}{2x+1}$$

b) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $+\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à (Δ) .

5- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

6- Tracer (Δ) et la courbe (c)

7- Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; \alpha \right]$

a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de départ et d'arrivée.

b) Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Justifier la construction.

EXERCICE 6

PARTIE A

Soit la fonction numérique g définie par : $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

1- Etudier le sens de variation de g . (on ne demande pas le calcul des limites).

2- Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.

3- En déduire le signe de $g(x)$

PARTIE B

Soit le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm sur $(O, \vec{i})$ et 1cm sur $(O, \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$ et (C) sa courbe représentative dans le plan.

1- Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$

2- On pose $h(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - ax$

a) Montrer que $h(x) = \frac{(4-a^2)x^2 + 4}{2\sqrt{x^2 + 1} + ax}$

b) Pour quelle valeur de a la limite de $h(x)$ est nulle quand x tend vers $+\infty$

c) Pour quelle valeur de a la limite de $h(x)$ est nulle quand x tend vers $-\infty$

d) En déduire que les droites (Δ) et (Δ') d'équation respectives $y = x$ et $y = -3x$ sont asymptotes à (C) .
Préciser la position de (C) par rapport à (Δ) et (Δ')

3- a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$

b) En déduire le tableau de variation de f

c) Montrer à partir de la définition de α que $f(\alpha) = 3\alpha$

4- Montrer que f est bijective de $] -\infty; \frac{\sqrt{3}}{3}]$ sur un intervalle I que l'on déterminera

5- construire la courbe (C) ainsi que (Δ) et (Δ') .

PARTIE C

Soit K la fonction définie par $K(x) = -2\sqrt{1 + x^2} - |x|$ et on note (Γ) sa courbe dans le plan

1- Etudier la parité de K et en déduire la conséquence géométrique sur (Γ)

2- Comparer K et f lorsque x est négative ou nulle

3- Construire la courbe (Γ) dans le même repère que (C) . Justifier la construction

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x\sqrt{-x+4} & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ f(x) = \frac{x-4}{2x-11} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1- Quel est l'ensemble de définition Df de la fonction f

2- Etudier la continuité de f en 0 et en 4

3- Etudier la dérivabilité de f sur Df

Aux points d'abscisses 0 et 4, on précisera les demi-tangentes si elles existent.

4- Etudier les variations de f

5- Calculer les limites aux bornes de Df puis dresser le tableau de variation de f

6- Etudier les branches infinies de (Cf) en $-\infty$

7- Tracer la courbe représentative (Cf) de f

8- Discuter graphiquement suivant les valeurs de m , le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$ où $m \in \mathbb{R}$

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Exercice 1

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x + 2 \sin x$. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Vérifier que l'on peut réduire l'ensemble d'étude de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

2) Démontrer que pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de : $4 \cos x (\frac{1}{2} - \sin x)$

3) Etudier les variations de f sur $[-\pi, \pi]$ et dresser son tableau de variations.

4) Donner les valeurs exactes des extrema et préciser en justifiant s'il s'agit de minima ou de maxima.

5) Démontrer que la courbe (C) admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

6) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

7) Tracer dans le repère la tangente (T) et la courbe (C) sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos 4x + 2 \sin 2x$

1- Justifier le choix de l'intervalle $I = [0, \pi]$ comme intervalle d'étude.

2- Démontrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = 4 \cos 2x (1 - 2 \sin 2x)$.

3- A) Résoudre dans I , l'équation $f(x) = 0$.

b) En déduire le sens de variation de f sur I .

d) Dresser le tableau de variation de f .

4. Démontrez que la droite (D) l'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de (Cf) .

5. Tracer (Cf) dans le plan muni d'un repère orthogonal.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$

1. Déterminer D_f puis calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} f(x)$.
2. Montrer que f est périodique de période $T = 2\pi$.
3. Etudier la parité de f .
4. Dédire de 2) et 3) que l'on peut étudier f sur $D = [0, \pi] - \left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{3\pi}{4} \right\}$.
5. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \cos 2x + 2 \sin x \sin 2x = [1 + 2 \sin^2 x] \cos x$.
6. Résoudre dans $D_E, [1 + 2 \sin^2(x)] \cos x \geq 0$.
7. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur D_E .
8. Tracer sur $D_E, (C_f)$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x - \sin x$.

- 1- Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0, \pi]$.
- 2- Démontrer que pour tout réel $x, f'(x) = -4 \sin^2 x \cos x$.
- 3- Déterminer le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
- 4- Tracer la courbe (C) représentative de f sur $[-\pi, \pi]$.

EXERCICE 5

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin 3x$.

- 1.a) Montrer que f est périodique de période 2π et étudier la parité de f .
 - b) Calculer $f(\pi - x)$. Que peut-on en déduire pour (C_f) ?
 - c) En déduire que l'on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que : $f'(x) = \cos x \cos 2x$.
 - 3- Etudier les variations de f sur I et dresser son tableau de variation.
 - 4- Tracer la courbe (C_f) sur $[-\pi, \pi]$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'unité graphique: 2 cm).

EXERCICE 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x$

- 1- Démontrer qu'il suffit d'étudier la fonction f sur $[0, \pi]$ pour connaître les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 2- Calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0, \pi]$.
Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$

h) Construire dans le même repère que (C) la courbe représentative (C') de h et la tangente (T') à (C') au point d'abscisse 0.

PRIMITIVES

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{1-x}$

1- Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2cm.

2- Donner une primitive G de la fonction g définie sur $] -\infty; 1[$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

3- Soit la fonction h définie sur $] -\infty; 1[$ par $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$. Exprimer $h(x)$ en fonction de $f'(x)$ et $g(x)$. En déduire la primitive H de la fonction h telle que $H(0) = -\frac{1}{3}$

EXERCICE 2

1- Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$,

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

b) Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$

2- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$

3- En utilisant les résultats obtenus précédemment calculer : $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x \, dx$. On donnera le résultat exact sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$ avec p et q rationnels

EXERCICE 3

Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la condition $F(0) = 0$

1- Démontrer que la fonction $h: x \mapsto -F(-x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En déduire que F est impaire

2- Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = F(-\frac{1}{x})$

a) Démontrer que g est une primitive de f sur $]0; +\infty[$

b) En déduire que pour tout $x > 0$, $F(x) = 2F(1) - F(\frac{1}{x})$ et que la fonction F admet une limite L en $+\infty$.

3- On désigne par K la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par $K(x) = F(\tan x)$

- Déterminer la fonction dérivée de K
- En déduire que pour tout réel x , $K(x) = x$
- Calculer $F(1)$ et en déduire la valeur de L .

CHAPITRE4: FONCTIONS USUELLES :

FONCTIONS LOGARITHME

Exercice 1

- Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :
$$\begin{cases} \ln(xy) = 9 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 1 \end{cases}$$
- Déterminer les primitives de la fonction $x \mapsto \sqrt{5-3x}$ sur l'intervalle $]-\infty; \frac{5}{3}[$.
 - Déterminer la primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ [qui prend la valeur 0 en $\frac{\pi}{4}$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$ l'inéquation
(I) : $2 \ln(2x+1) - \ln(1-x-2x^2) \leq \ln(4x+1) - \ln(x+1)$.

EXERCICE 2

f est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} & \text{si } x \in]-\infty; 0] \\ f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2x \ln x & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$
 et (Cf) sa
représentation dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2cm

PARTIE A : Etude de la fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 - 2 \ln x$

- Etudier le sens de variation de g et calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$
 - Dresser le tableau de variation de g
- Démontrer qu'il existe un unique réel α dans $[2; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $\alpha \in [3,5; 3,6]$
 - Calculer $g(1)$
- Déduisez-en le signe de $g(x)$

PARTIE B : Etude et représentation graphique de la fonction f

- Déterminer l'ensemble de définition D de f
- Etudier la continuité de f en 0

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat. Préciser le domaine de dérivabilité E de f

3- a) Calculer les limites de f aux bornes de D

b) Démontrer que : $f(\alpha) = \frac{-\alpha^2 + 4\alpha}{2}$

c) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

4- Tracer la courbe (C_f)

5- Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -1; 0]$ et (C_h^{-1}) sa représentation graphique

a) Démontrer que h admet une bijection réciproque h^{-1}

b) Donner le tableau de variation de h^{-1}

c) Expliquer h^{-1}

d) Tracer (C_h^{-1}) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE C : calcul d'aire

1- Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \frac{1}{2}x^2(\ln x - 1)$. Démontrer que u est une primitive la fonction $x \mapsto x \ln x$ sur $]0; +\infty[$

2- Soit un réel t tel que $0 < t < 1$.

a) Calculer l'aire $A(t)$ en unité d'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (C_f) l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = t$ et $x = 1$.

b) Calculer la limite de $A(t)$ quand t tend vers 0. Données : $\ln 3,5 = 1,25$, $\ln 3,6 = 1,28$, $f(\alpha) = 0,8$

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2cm. Soit la fonction f définie sur

$$\mathbb{R}^+ \text{ par : } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On appelle Γ la courbe représentative de f .

PARTIE A : Préliminaires (les questions 1 ; 2 et 3 sont indépendantes)

1. On donne les valeurs approchées : $\ln 2 \approx 0,69$; $\ln 3 \approx 1,10$; $\ln 10 \approx 2,30$; en déduire les valeurs approchées de $\ln(0,2)$ et $\ln(0,3)$.

2. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x + 1 + \ln x$.

a) Etudier les variations de g , et calculer ses limites en 0 et $+\infty$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$. Vérifier que $0,2 < \alpha < 0,3$

c) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$

3- Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x \ln x + \frac{1-x^2}{2}$

a) Calculer ses dérivées première et seconde : h' et h''

b) Etudier les variations puis le signe de h' ; en déduire les variations et le signe de h .

PARTIE B : Etude de f

1. Montrer que f est continue en 0

2. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en 0. Que peut-on en déduire pour f ? Interpréter graphiquement

3. Calculer la limite de f en $+\infty$

4. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$

5. Etudier le signe de f' et donner le tableau de variation de f

PARTIE C : Construction de Γ

1- a) Pour tout $x > 0$, on pose $\varphi(x) = f(x) - \ln x$. Etudier le signe de $\varphi(x)$ en fonction de x et calculer la limite de φ en $+\infty$.

b) On note L la courbe représentative de la fonction $\ln$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus à la question 1-a)

2- Déterminer une équation de la tangente Δ à Γ au point d'abscisse 1. Etudier la position relative de Γ et de la tangente Δ .

3- Construire L et Δ puis tracer Γ dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

4- Soit K la fonction définie par : $\begin{cases} K(0) = 0 \\ K(x) = -f(|x|) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ et Γ' sa représentation graphique dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction K

b) Etudier la partie de K et interpréter graphiquement

c) Comparer $K(x)$ et $f(x)$ pour tout $x > 0$. En déduire une explication de l'obtention de Γ' à partir de Γ sans étudier K .

d) Tracer Γ' dans le même repère que Γ .

e) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $K(x) = m$ où $m \in \mathbb{R}$

EXERCICE 4

On considère la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\ln$ étant le logarithme népérien ; on note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A

- 1- Etudier la continuité de f en 0
- 2- Etudier la dérivabilité de f en 0 puis donner une interprétation géométrique
- 3- Etudier la dérivabilité de f en -1
- 4- Etudier les variations de f sur $[-1; 0]$

PARTIE B

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x+1}$

- 1- Etudier la variation de g sur $]0; +\infty[$
- 2- Calculer les limites de g en $+\infty$ et en 0.
- 3- a) Dresser le tableau de variation de g
b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0,25 < \alpha < 0,26$
- 4- Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 5- a) Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} g(x)$.
b) En déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$
- 6- Calculer la limite de f en $+\infty$, puis dresser le TV de f .
- 7- Construire la courbe (C) ($f(\alpha) = 0,81$).

Exercice 5

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$

- 1) a) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b°) Etudier le sens de variation de g .

c°) Dresser le tableau de variation de g .

2) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que : $0,5 < \alpha < 0,6$

3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B : Etude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right), & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0, \end{cases}$

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(Unité graphique : 4cm)

1.a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) = g(x)$

En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$

3. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4. a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer la courbe représentative (C) de la fonction f .

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$

a) démontrer que h admet une bijection réciproque

b) Comment obtient-on la courbe (C') de h^{-1} ?

FUNCTION EXPONENTIELLE

EXERCICE 1

On considère la fonction numérique f de la variable réelle définie par : $\begin{cases} \text{si } x \geq 0 \text{ alors } f(x) = (3-x)\sqrt{x} \\ \text{si } x < 0 \text{ alors } f(x) = e^x - x - 1 \end{cases}$

On considère par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2cm.

PARTIE A

1. a) Etudier la continuité de f en 0

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Quelle interprétation géométrique peut-on en faire ?

c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

2. a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote à (C) en $-\infty$. Préciser la position de (Δ) par rapport à (C) pour $x < 0$

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3.

c) Construire la courbe (C) , la tangente (T) et la droite (Δ) .

PARTIE B

1. Soit g la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 0[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $] -\infty; 0[$ sur un intervalle que l'on déterminera

b) Tracer la courbe représentative (T) de la bijection réciproque g^{-1} de g dans le même repère que (C) .

c) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = -|f(x)|$. Sans étudier les variations de h , représenter sa courbe représentative (C') dans le même repère que (C) .

2. a) On considère le domaine plan (E) délimité par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$. Calculer l'aire A de (E) en cm^2

b) Déterminer en cm^3 le volume du solide Q engendré par la rotation de (E) autour de l'axe des abscisses

FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

EXERCICE 1

1°) On considère le polynôme : $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$

a) calculer $P(1)$ et mettre $P(X)$ sous forme de produit de facteur du premier degré.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(X) = 0$ puis l'inéquation $P(X) > 0$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $e^{2x} - 2e^x - 1 + 2e^{-x} = 0$

b) $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0$

c) $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 > 0$

d) $(-1 + \ln x)^3 - 2(-1 + \ln x)^2 + 3 - \ln x > 0$

EXERCICE 2

PARTIE A

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = 1 - x - 2\ln x$

- 1°) Etudier le sens de variation de g . (On ne demande pas de calcul de limite ni de tableau de variation).
- 2°) Calculer $g(1)$ et déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1} - x, & \text{si } x < 1 \\ \frac{x + \ln x}{x^2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2cm)

- 1°) a) Etudier la continuité de f en 1.
- b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

En déduire l'existence d'une asymptote horizontale à (C).

- c) Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

- 2°) a) Etudier la dérivabilité de f en 1 et préciser la nature du point $A(1; 1)$ pour (C).

On donne $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

- b) Calculer la fonction dérivée f' de f sur les intervalles où f est dérivable.

- 3°) Etudier le signe de $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

(On pourra utiliser la partie A)

- 4°) Construire la courbe (C) et ses asymptotes

PARTIE C

Soit h la restriction de f à $[1; +\infty[$.

- 1°) Montrer que h est bijective de $[1; +\infty[$ sur un intervalle k à préciser.
- 2°) Déterminer les variations de h^{-1} et son tableau de variation.
- 3°) Construire la courbe (Γ) de h^{-1} dans le même repère. Expliquer la construction.

PARTIE D

- 1°) Calculer la dérivée de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{-1 - \ln x}{x}$

- 2°) En déduire une primitive de la fonction f sur $[1; +\infty[$.

- 3°) Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$. On donne $e=2,7$; $\ln 2=0,7$; $\ln 3=1,1$

EXERCICE 3

PARTIE A

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x^2} + \ln x$

1°) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

2°) a) Déterminer la fonction dérivée de g .

b) En déduire le sens de variation de g .

c) Dresser le tableau de variation de la fonction g .

3°) a) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique a .

b) Justifier que $2,5 < a < 2,6$.

c) En déduire le signe de $g(x)$.

PARTIE B

On considère la fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(0 ; 1, 1)$.

Unité graphique : $OI=2\text{cm}$ et $OJ=10\text{cm}$

1°) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, puis donner une interprétation graphique du résultat.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis donner une interprétation graphique du résultat.

2°) Démontrer que $f'(x) = -\frac{1+x}{x^2} e^{-x}$.

3°) a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.

b) En déduire les variations de f .

c) Dresser le tableau de variation de f .

4°) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

5°) Construire (T) et (C) dans le plan muni du repère $(0 ; 1 ; 1)$. On prendra $\alpha = 2,6$.

PARTIE C

1° Soit h la fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par : $h(x) = e^{-x} \ln x$. Démontrer que h est une primitive sur $]0 ; +\infty[$.

2°) Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$.

a) Calculer, en cm^2 et en fonction de λ l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C) , (OI) et les droites d'équations $x=3$ et $x=\lambda$. On donne : $\ln(2,5)=0,92$; $\ln(2,6)=0,95$; $(2,5)^2=6,25$; $(2,6)^2=6,76$; $e^{-2,6} = 0,1$; $e^{-1}=0,4$

EXERCICE 4

PARTIE A

On considère la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$.

- 1) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
- 2) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 3) a) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique a .
- b) Justifier que : $0,4 < a < 0,5$
- c) En déduire le signe de $g(x)$.

PARTIE B

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$.

On ote (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2cm

- 1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2) a) Démontrer que f est une primitive de g .
- b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 3) a) Démontrer que la droite $(D) : y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
- b) Etudier la position relative de (D) et (C) .
- 4) Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
- 5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
- 6) Démontrer que : $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$.
- 7) Justifier que pour tout nombre réel
$$f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$$
- 8) On admet que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions. On appelle β l'une de ces solutions. Déterminer la deuxième solution en fonction de β .
- 9) Tracer (D) , (T) et (C) . On prendra $\alpha = 0,4$ et $\beta = 2,5$

PARTIE C

Soit λ Un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), la droite D d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$

1°) Calculer $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

2°) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

On donne ; $e^{0,5} = 1,6$ et $e^{0,6} = 1,8$.

EXERCICE 5

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

1°) a) Calculer $f'(x)$ pour tout x puis étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x . En déduire les variations de la fonction f .

b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; dresser le tableau de variation de f .

2°) Démontrer que le point $A(0; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C) de f .

3°) Donner une équation de la tangente (T) au point A à la courbe (C) de f .

4°) Soit la fonction $\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - f(x)$

a) Démontrer que ; $\forall x \in]-\infty; 0[$, $\varphi(x) > 0$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $\varphi(x) < 0$

b) Déduire la position de (T) par rapport à (C).

c) Tracer (T) et (C).

EXERCICE 6

PARTIE A

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \ln x - 1$

1. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour $x > 0$

2. Dresser le tableau de variation de g . On précisera les limites de g' en 0 et en $+\infty$.

3. Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution notée α et que

$$0,56 < \alpha < 0,57$$

4. Etudier le signe de $g'(x)$ pour $x > 0$.

5. Calculer les limites de g aux bornes de D_g et dresser le tableau de variation de g .

6. Montrer que $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha - 1$ et donner un encadrement de $g(\alpha)$ à 10^{-1} près. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) > 0$

PARTIE B

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1 - e^x} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = e^x - x \ln x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2cm.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
- 2.a) Etudier la dérivation de f en 0
- b) Interpréter graphiquement ce résultat
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (pour la limite de f en $+\infty$ on pourra mettre x^2 en facteur dans l'expression de $f(x)$)
4. Déterminer la dérivée f' de f
5. Etudier le sens de variation de f . (pour l'étude sur $]0; +\infty[$, on pourra utiliser la partie A 6).
- 6- Montrer que $f(\alpha) = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha} - 1$
- 7- Dresser le tableau de variation de f
- 8- Construire dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C})$.

PARTIE C

Soit h la restriction de f à $I =]-\infty; 0[$

1. Montrer que h est bijective de I sur un intervalle J que l'on précisera
2. Déterminer les variations de la bijection réciproque h^{-1} de h et dresser son tableau de variations.
3. Déterminer l'expression de l'application réciproque h^{-1} de h .
4. Construire dans le repère précédent la courbe représentative $(\mathcal{C}')$ de h^{-1} .

On donne : $e \approx 2,72$; $e^{0,56} \approx 1,75$; $e^{0,57} \approx 1,77$; $e^2 \approx 7,39$; $e^3 \approx 20,08$; $\ln 0,56 \approx -0,58$;

$\ln 0,57 \approx -0,56$; $\ln 2 \approx 0,69$; $\ln 3 \approx 1,10$; $f(\alpha) \approx 0,25$

CHAPITRE 5: SUITES NUMERIQUES

EXERCICE 1

On considère la suite (U_n) définie par $U_0=5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3U_{n+1} = U_n + 4$.

- 1- Calculer U_1 et U_2 .
- 2- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 2$.
- 3- Montrer que (U_n) est décroissante.
- 4- Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 5- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - 2$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de V_n en fonction de n .
- 6- Soit $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ et $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.
Déterminer l'expression de S_n , puis l'expression de T_n en fonction de n .
- 7- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

EXERCICE 2

Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} V_1 = 1/2 \\ V_{n+1} = \frac{n+1}{2n} V_n \end{cases}$$

- 1- Calculer V_2 , V_3 et V_4
- 2- a) Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a $V_n > 0$
 - a) Démontrer que la suite (V_n) est décroissante.
 - b) En déduire que la suite (V_n) est convergente.
- 3- Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \frac{V_n}{n}$, $\forall n > 0$.
 - a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme
 - b) Exprimer U_n puis V_n en fonction de n .
 - c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

EXERCICE 3

On considère la suite (U_n) $n \in \mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + U_n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

- 1- a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(-2U_n - 1)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + U_n + 2U_n}}$. En déduire le sens de variation de la suite (U_n) et montrer qu'elle est convergente.

c) Déterminer la limite l de la suite (U_n)

2- On sait que : pour tout $x \in [0; \pi]$; $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

a) Montrer alors que pour tout entier naturel n , on a $U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

b) Retrouver ainsi la limite l de la suite (U_n) .

EXERCICE 4

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 1; U_1 = 2 \\ U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

1- Calculer U_2 ; U_3 et U_4

2- Soit la suite (V_n) définie par $V_n = 2^n U_n, n \in \mathbb{N}$

a) Calculer $V_{n+2} - V_{n+1}$ en fonction de $V_{n+1} - V_n$. En déduire que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer V_n , puis U_n en fonction de n

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2^n}{n}\right)$, en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2^n}\right)$. La suite (U_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 5

Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite numérique définie par $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{3+2U_n}{2+U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $-1 \leq U_n \leq 2$

2. a) Montrer que $U_{n+1} - U_n$ et $U_n - U_{n-1}$ sont de même signe

b) Calculer $u_1 - u_0$, puis en déduire le sens de variation de la suite $(U_n)_{n \geq 0}$

3. Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ converge et calculer sa limite.

EXERCICE 6

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{2}{V_n}$ et $U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$

1. Calculer V_0 ; U_1 ; V_1 ; U_2 ; V_2 . Donner les résultats sous forme de fraction irréductible

2. Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) sont majorées par 2 et minorées par 1.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)}$ (1)

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq V_n$

5. Montrer que (U_n) est décroissante et (V_n) croissante

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n - V_n \leq 1$ et en déduire que $(U_n - V_n)^2 \leq U_n - V_n$ (2)

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(U_n - V_n)$ (on pourra utiliser les relations (1) et (2))
 déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

8. Montrer que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite et donner leur limite commune.

EXERCICE 7

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par $U_0=4$, $V_0=9$ et pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \text{ et } V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n)$$

1- Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$ et $V_n > 0$

2- a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n - U_n)^2}{2(U_n + V_n)}$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$ et que $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$

3- a) Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante

b) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) convergent

c) Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite l

4- a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \cdot V_{n+1} = U_n \cdot V_n$

b) En déduire la valeur exacte de l .

EXERCICE 8

On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies, pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = \frac{U_{n+1} + V_n}{2} \end{cases}$$

1- Calculer u_1 , v_1 , u_2 et v_2

2- Soit la suite (W_n) définie pour tout entier naturel n par : $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice n°9

Soit la suite (U_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{1}{U_n}) \end{cases}$. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$

1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_{n+1} = (V_n)^2$

2) On définit la suite (w_n) $n \in \mathbb{N}$ par $W_n = \ln(V_n)$

a) Donner la nature de la suite (W_n) .

b) Ecrire W_n et V_n en fonction de n

3) Déterminer U_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

EXERCICE 10

On considère la suite numérique (U_n) , $n \geq 0$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 + \frac{1}{16} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{16}$.

1. a) Etudier et représenter graphiquement f dans un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ unité 8cm.

b) Utiliser la courbe de f pour construire sur l'axe des abscisses U_1 et U_2 .

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $\frac{1}{24} \leq U_n \leq \frac{3}{4}$.

3. a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, si $U_n - U_{n-1} < 0$ alors $U_{n+1} - U_n < 0$ et si $U_n - U_{n-1} > 0$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$.

b) Calculer $U_1 - U_0$ puis en déduire le sens de variation de la suite $(U_n)_{n \geq 0}$.

c) Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ converge et calculer sa limite.

EXERCICE 11

On considère les suites U et V définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$; $V_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour tout n , $U_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}U_n - V_n$ et $V_{n+1} = U_n + \frac{\sqrt{3}}{3}V_n$. On pose $Z_n = U_n + iV_n$

1. Calculer $|Z_0|$ puis $|Z_{n+1}|$ en fonction de $|Z_n|$. En déduire en fonction de n , une expression de $|Z_n|$

2- a) Exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n

b) Trouver un argument de $\frac{\sqrt{3}}{3} + i$.

c) Dédire de ce qui précède un argument θ_{n+1} de Z_{n+1} en fonction d'un argument θ_n de Z_n

d) Trouver un argument de Z_0 puis une expression de θ_n en fonction de n .

3. Exprimer U_n et V_n en fonction de n .

CHAPITRE 6: CALCUL INTEGRAL

EXERCICE 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan 2x}{\cos^2 2x} dx ; J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx ; K = \int_0^2 (x-2)e^{2x+1} dx$$

$$L = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx ; M = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx ; N = \int_e^{e^2} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt$$

EXERCICE 2

1. Donner une primitive des fonctions f, g, h, k définies par :

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+10} ; g(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}, h(x) = x^2 e^{-x^3}, k(x) = (2x-1)^6$$

2. Calculer $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$ et $J = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

3. En remarquant que $\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}$, calculer $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$

EXERCICE 3

On considère les fonctions numériques f et g définie par : $f(x) = \frac{1}{(1+e^x)}$ et $g(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2}$

1- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

b) Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

c) Démontrer que pour tout réel x , $g(x) = f(x) - \frac{1}{(1+e^x)^2}$

2- On considère la suite numérique (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+e^x)^n}$, $n \geq 1$

a) Vérifier que $I_1 = 1 + \ln \frac{2}{1+e}$ et que $I_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+e} + \ln \left(\frac{2}{1+e} \right)$

b) Démontrer que pour tout naturel non nul n , $I_{n+1} = I_n - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^{n+1}} dx$

3- a) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante

b) Montrer que pour tout naturel n non nul, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$

c) En déduire la limite de la suite (I_n) .

EXERCICE 4

On considère les intégrales $I = \int_0^\pi \cos^4 x dx$ et $J = \int_0^\pi \sin^4 x dx$

1. a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire sous la forme : $I = \int_0^\pi \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $I = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3} J$

c) Montrer de même que $J = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3} I$

2. a) Montrer que $I+J = \frac{3\pi}{4}$ et que $I-J=0$

b) En déduire les valeurs exactes des intégrales I et J

EXERCICE 5

On pose pour tout entier n , $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$

1. A l'aide d'une intégration par partie calculer U_n . Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. a) Calculer $I_n = \int_0^{n\pi} e^{-x} \sin x dx$.

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

EXERCICE 6

On considère la suite (U) définie pour tout entier naturel n , par : $U_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx$

1- Calculer la valeur de U_0

2. Montrer que $U_0 + U_1 = 1$. En déduire U_1

3. Montrer que la suite (U) est positive

4. On pose $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$

a) Montrer que pour tout x réel, $k(x) = \frac{1-e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$.

b) Etudier le signe de $k(x)$ pour $x \in [0; 1]$

c) En déduire que la suite (U) est décroissante

5- a) Déterminer pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $U_{n-1} + U_n$

b) Calculer U_2

6- Soit (V) la suite définie pour tout $n \geq 2$ par $V_n = \frac{U_{n-1} + U_n}{2}$

a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $0 \leq U_n \leq V_n$

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

EXERCICE 7

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt$ et $U_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1- Calculer U_0 et U_1

2- Montrer que la suite U est décroissante

3- Grâce à un encadrement de $\sqrt{1+t}$, établissez : $\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

4- a) Montrer que pour tout t de $[0; 1]$ on a $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

b) Déduisez en : $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

c) Déterminer la limite de la suite (nU_n)

Exercice 8

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 2 \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $U_n > 0$ et $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$.

2*) Calculer U_0 . En déduire la valeur de U_1 puis celle de U_2 .

3*) Etudier les variations de (U_n) .

4*) Démontrer que, pour tout n , on a $0 < U_n < \frac{1}{n+1}$. En déduire que (U_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 9

1*) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

a) Déterminer les nombres réels a , b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$, $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$

b) Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1, +\infty[$

2°) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

3°) En utilisant les résultats obtenus précédemment calculer $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x \, dx$. On donnera le résultat exact sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$ avec p et q rationnels.

Exercice 10

1°) On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Quel est l'ensemble de définition de f ? Justifiez l'existence de l'intégrale $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$, puis celle de l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} \, dx$, où n est un nombre entier non nul.

2°) Calculez I_0 , I_1 et I_2

3°) Montrer que la suite numérique $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Cette suite admet-elle une limite ?

4°) Montrer que, pour tout x de $[0; \frac{\pi}{4}]$ et pour tout nombre entier non nul,

on a : $0 \leq \sin^n x \leq (\frac{\sqrt{2}}{2})^n$. Deduisez en que $0 \leq \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} \leq 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$, et calculez la limite de la suite (I_n) .

EXERCICE 11

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} ; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} \, dx ; K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} \, dx$$

1. Calcul de I : soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$

a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2+2}$

b) En déduire la dérivée f' de f

c) Calculer I

2. Calcul de J et K

a) Sans calculer explicitement J et K , vérifier que $J+2I=K$

b) A l'aide d'une intégration par parties dans K (on écrira que $\sqrt{x^2+2} = 1 \times \sqrt{x^2+2}$) montrer que $K = \sqrt{3} - J$

c) En déduire les valeurs de J et K .

CHAPITRE 7: EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE 1

Considérons l'équation différentielle (E) : $y' + y = x - 1$

1. Trouver une fonction affine u solutions de (E)
2. Démontrer que la fonction v est solution de (E) si et seulement $v-u$ est solution de (E') : $y' + y = 0$
3. Résoudre (E')
4. En déduire les solutions de (E)
5. Déterminer la solution h de (E) vérifiant $h(0)=1$

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.
3. Montrer qu'une fonction v définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si, $v - u$ est solution de (E_0) .
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la fonction f_2 solution de (E) qui prend la valeur 2 en 0.

EXERCICE 3

On considère l'équation différentielle (E) définie par : $(E) : \frac{1}{2}y' + y = 3e^{-2x} + 2$.

1. Déterminer le réel a , tel que la fonction v définie par $v(x) = axe^{-2x} + 2$ soit une solution de l'équation (E).
2. Donner les solutions de l'équation (E') : $\frac{1}{2}y' + y = 0$.
3. a) Montrer que u est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E').
b) En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière h de l'équation (E) vérifiant $h(0)=0$.

EXERCICE 4

Une masse m , mobile sur un axe $(0; \vec{i})$ à sa position représentée sur cet axe par le point M . Cette masse est soumise à une force d'attraction $\vec{F}$ telle que l'abscisse $Y(t)$ du point M exprimée comme fonction du temps t vérifie l'équation différentielle $Y'' + \frac{9\pi^2}{4} Y = 0$

1. Donner la solution générale de cette équation différentielle

2. a) Montrer que la solution vérifiant les conditions $Y(0)=1$ et $Y'(0)=-\frac{3\pi}{2}$ s'exprime pour $t \geq 0$ par $Y(t)=\cos\left(\frac{-3\pi^2}{2}t\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$

b) Déterminer le nombre réel α compris entre 0 et 1 tel que pour $t \geq 0$, $y(t) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{3\pi}{2}(t+2)\right]$

3. En utilisant la question 2b)

a) Donner la valeur positive de t pour laquelle le point M passe pour la première fois au point O .

b) Combien de fois le point M passe-t-il en O dans l'intervalle de temps $[0; 4]$?

EXERCICE 5

On considère l'équation différentielle suivante $9y'' + 4y = 0$ (E)

1.a) Déterminer la solution générale de (E)

b) Déterminer la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0)=0$ et $\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1$

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$. Etudier et représenter graphiquement φ sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

3. Soit D la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives $x = 0$; $x = \frac{3\pi}{4}$; $y = 0$ et la courbe de φ .

a) Calculer l'aire de D

b) La rotation de D autour de l'axe des abscisses engendre un solide de révolution. Calculer le volume de ce solide.

EXERCICE 6

Un point matériel M se déplace dans un repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ du plan. Les coordonnées $(X; Y)$ de M en fonction du temps t exprimé en seconde vérifient le système d'équations différentielles :

$$(S) \begin{cases} X' = X + Y & (1) \\ Y' = -5X - Y & (2) \end{cases}$$

Où X' et Y' sont respectivement la dérivée de X et la dérivée de Y par rapport à t . On se propose de déterminer les fonctions coordonnées $X=X(t)$ et $Y=Y(t)$ du point M

1. a) Dériver l'équation (1). On obtient l'équation (3)
- b) En éliminant X' et Y' montrer que l'équation (3) se ramène à l'équation (4) : $X''+4X=0$
- c) Dédire la forme générale de X et de Y

2. Déterminer les fonctions coordonnées de X et Y de M , sachant qu'à $t=0$, M se trouve en $M_0(3; 1)$

EXERCICE 7

Soit l'équation différentielle $f''(x) + \frac{25}{4}f(x) = 0$ (1)

1. Donner la solution générale f de (1)
2. Déterminer la solution φ de (1) sachant que sa courbe représentative (C) passe par $A(0; \sqrt{3})$ et que tangente à (C) passant par A est parallèle à la droite (Δ) d'équation $5x - 2y - 1 = 0$
- 3- a) Mettre $\varphi(x)$ sous la forme $\alpha \sin(wx + l)$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$ $w \in \mathbb{Q}$ et $l \in [0; \pi]$. Donner les abscisses de éventuels points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 8

Soit E l'équation différentielle : $y' + 2y = 3e^{-3x}$

1. Démontrer que toute fonction U , telle que la fonction $x \mapsto U(x)e^{-3x}$ soit solution de (E) vérifie l'équation différentielle $(E') : y' - y = 3$
2. a) Démontrer que la fonction constante : $x \mapsto -3$ est solution de (E')
- b) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si la fonction $g: x \mapsto f(x) + 3$ est solution de $y' - y = 0$
- c) Résoudre l'équation différentielle $y' - y = 0$, puis l'équation (E')
- d) Déterminer la solution de E nulle en 0.
3. Soit h la fonction définie par $h(x) = 3(e^{-2x} - e^{-3x})$
- a) Etudier le sens de variation de h . calculer $h(\ln \frac{3}{2})$
- b) Déterminer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$
- c) Représenter graphiquement h dans un repère

EXERCICE 9

1. Une population de poisson d'une certaine espèce croît au cours des années selon la loi :

$5g' = g$ (1) ; où g désigne la quantité de poissons (exprimée en milliers) dépendant du temps t (exprimé en années).

a) Résoudre l'équation différentielle (1)

b) Sachant qu'à une date $t=0$ la population comprend un millier de poissons, trouver l'expression de $g(t)$

c) Au bout de combien d'années la population dépassera-t-elle pour la première fois 4 milliers de poissons ?

2. En réalité, un prédateur de cette espèce empêche une telle croissance, tuant chaque année une certaine quantité de poissons (dépendant de l'effectif total).

La population suit une loi : $g' = \frac{g}{5} - \frac{g^2}{15}$ (2)

a) On pose $h = \frac{g}{3-g}$ et on suppose que pour tout t , on a $g(t) \neq 3$.

Montrer que g est solution de (2) si et seulement si h est solution de (1).

b) Trouver les fonctions h solutions de (1), puis les fonctions g solutions de (2).

c) Trouver la fonction g solutions de (2) telle que $g(0)=1$.

d) Vers quelle limite tend la population de poissons ?

EXERCICE 10

1. Résoudre l'équation différentielle : (E) $9y'' + \pi^2 y = 0$

2. On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthogonal passe par le point $P(1; -\sqrt{2})$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

a) En utilisant les données de l'énoncé, préciser $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Déterminer f

c) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2} \cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$

3. a) Montrer que f est périodique de période 6.

b) Calculer la valeur efficace de f c'est-à-dire le réel positif l défini par : $l^2 = \frac{1}{6} \int_0^6 (f(x))^2 dx$

EXERCICE 11

Un bloc métal est déposé dans un four dont la température constante est de 1000°C . la température θ est une fonction du temps (en heure) qui vérifie l'équation différentielle (E) : $\theta'(t) = k(1000 - \theta(t))$, $k \in \mathbb{R}_+$

1. On pose : $Y'(t) = \theta(t) - 1000$. Ecrire une équation différentielle (F) satisfaite par y .
 2. Résoudre (F) puis (E)
 3. Le bloc, initialement à 40°C , est déposé dans le four au temps $t_0 = 0$. Sa température est 160°C au bout d'une heure. En déduire l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement.
 4. a) Calculer la température du bloc au temps $t=3$ heures
b) Déterminer le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C .
- on donne : $\left(\frac{7}{8}\right)^3 \simeq 0,7$; $\ln\left(\frac{7}{8}\right) \simeq -0,13$; $\ln\left(\frac{25}{48}\right) \simeq -0,65$.

CHAPITRE 8 : COURBES PLANES PARAMETREES

EXERCICE 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 1cm)

Soit (Γ) l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ tels que :
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t + \cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. a) Comparer les points $M(t)$ et $M(t+2\pi)$
b) Comparer les coordonnées de $M(t)$ et $M(-t)$
c) Déduire qu'il de connaître (Γ) pour $t \in [0; \pi]$ pour connaître entièrement (Γ)
2. Etudier les variations conjointes de x et y pour $t \in [0; \pi]$
3. a) Construire (Γ) pour $t \in [0; \pi]$.
b) Construire alors (Γ) pour $t \in [-\pi; 0]$.

EXERCICE 2.

Le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 2cm). Soit (Γ) la courbe paramétrée définie par :
$$\begin{cases} x(t) = t(3 - t^2) \\ y(t) = t \ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right) \end{cases} \quad t \in [-2; 2]$$

1. Comparer $M(t)$ et $M(-t)$ pour $t \in [-2; 2]$ et en déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude de (Γ) à $[0; 2]$
2. Etudier le sens de variation de x sur $[0; 2]$
3. a) Montrer que pour $t \in [0; 2]$, $\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right) \geq 0$
b) Etudier le sens de variation de y sur $[0; 2]$

4. Dresser le tableau de variation conjoint de x et y .
5. Déterminer les points d'intersection de (Γ) avec l'axe des ordonnées.
6. Tracer (Γ) . On donne $\ln 5 \approx 1,60$; $\ln 2 \approx 0,69$; $\ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1,31$; $\sqrt{3} \approx 1,73$.

EXERCICE 3

Soit (C) la courbe définie par le système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = -2\cos t \\ y(t) = \cos t - \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

- a) Déterminer la période commune des fonctions x et y , comparer la position des points $M(t)$ et $M(t+\pi)$ puis en déduire un élément de symétrie de (C) . Justifier le choix de $[0; \pi]$ comme ensemble d'étude
- b) Etudier les fonctions x et y sur $[0; \pi]$ et dresser leur tableau de variation conjointe.
- c) Représenter la courbe (C) dans un repère orthonormal $(0; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2cm). on précisera les tangentes particulières ainsi que les tangentes en O .

NB : $\sqrt{2} \approx 1,4$.

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(0; \vec{i}; \vec{j})$ ($\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 3\text{cm}$)

On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = t - 2 \sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

A tout instant t , $M(t)$ est le point de (C) de coordonnées $(x(t); y(t))$

1. Montrer que le point $M(t + 2\pi)$ est l'image du point $M(t)$ par une translation dont on précisera le vecteur de translation.
2. Montrer que $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

3. Calculer $x'(t)$ et montrer que : $\begin{cases} x'(t) \leq 0 \text{ pour } t \in [0; \frac{\pi}{3}] \\ x'(t) > 0 \text{ pour } t \in [\frac{\pi}{3}; \pi] \end{cases}$

4. Etudier les variations de x et y et donner leurs variations dans un tableau commun, pour $t \in [0; \pi]$

5. Tracer la partie (C_1) de (C) correspondant à $t \in [-\pi; \pi]$

6. Dire comment à partir de (C_1) on peut obtenir la partie (C_2) de (C) correspondant à $t \in [-\pi; 3\pi]$. on donne $\frac{\pi}{2} - 2 \approx -0,4$ et $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0,7$

EXERCICE 5

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, d'unité graphique 2cm, la courbe (Γ) c
représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = e^{\sin t} \\ y(t) = \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1. Montrons que les fonctions numériques x et y de la variable réelle t sont périodiques de périodes 2π
2. a) Comparer les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ où M est un point de (Γ)
b) Montrer que pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $(\pi - t) \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ et en déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
3. Etudier et dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y pour t appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
4. Tracer la courbe (Γ) . On donne $e \simeq 2,72$ et $e^{-1} \simeq 0,37$

EXERCICE 6

Soit (C) la courbe définie paramétriquement par : $\begin{cases} x(t) = \frac{\cos t}{1 + \sin t} \\ y(t) = \frac{\sin t}{1 + \sin t} \end{cases}$

1. Comparer d'une part $x(t)$ et $x(\pi - t)$, puis d'autre part $y(t)$ et $y(\pi - t)$. En déduire une propriété géométrique de (C)
2. Faire l'étude conjointe des variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
3. Tracer (C) .

CHAPITRE 9 : STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

EXERCICE 1

Le tableau suivant donne les résultats d'une étude réalisée sur un produit P ; x représente le prix de vent unitaire du produit exprimé en FCFA, y représente la quantité du produit P disponible sur le marché, exprimée en milliers.

x_i en FCFA 30 35 45 60 80 1000

y_i en milliers 12,5 13 13 15 15,5 16

1. On considère l'ensemble des points M_i de coordonnées (x_i, y_i) où $1 \leq i \leq 6$.
a) Construire le nuage de points M_i (1,5cm représenteront 10 FCFA en abscisse et 1cm représentera 1000 en ordonnées).
b) Un ajustement affine de ce nuage semble-t-il raisonnable ? Justifier la réponse.

2. a) Construire la droite (Δ) d'ajustement affine obtenue par la méthode de Mayer. On prendra pour premier sous nuage les tiers premiers points et pour le deuxième les trois derniers.

b) Déterminer une équation de (Δ) sous la forme $y = ax + b$, a et b étant deux réels à préciser

3. En utilisant l'équation de (Δ), estimé :

- la quantité de produit P disponible sur le marché pour un prix de 150 FCFA.

- la prix de vente si la quantité du produit P disponible sur le marché est de 20.000.

EXERCICE 2

Le tableau suivant donne le montant des prêts octroyés par une banque à des associations féminines entre 2002 et 2007.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x	1	2	3	4	5	6
Montant des prêts en millions de FCFA y	4,5	5	5,2	5,8	6,3	7,1

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal. On prendra 1cm pour une unité en abscisse et 1cm pour un million en ordonnée.

2. Soit (Δ) la droite d'ajustement de Mayer obtenue par un regroupement des trois premiers points et des trois derniers points du nuage. Soit G_1 le point moyen des trois premiers points et G_2 celui des trois derniers points du nuage

a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 .

b) Construire la droite (Δ).

c) Déterminer l'équation réduite de (Δ).

3. On suppose que l'évolution du montant des prêts faits aux associations féminines reste la même au cours des années à venir. A partir de qu'elle année le montant des prêts sera-t-il strictement supérieur au double de celui de 2009 ?

EXERCICE 3

Une entreprise fabrique des vêtements. Dans le tableau suivant on a indiqué pour les sept premiers mois de l'année 2008 la production journalière moyenne de pulls.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
------	---------	---------	------	-------	-----	------	---------

Rang de l'année xi	1	2	3	4	5	6	7
Production journalière	200	210	260	265	270	300	315

La direction devra fermer l'atelier de fabrication de pulls si la production moyenne journalière n'atteint pas 350 pulls à la fin de l'année 2008. On considère le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ associé au tableau ci-dessus, relativement à un repère orthonormal $(0; \vec{i}; \vec{j})$; on prendra pour unités :

Abscisse : 1cm par rang de mois ;

Ordonnées : 1cm pour 20 pulls produits

1.a) Représenter le nuage de points dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

b) Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point.

2.a) Calculer les coordonnées du point moyen G_1 associé aux quatre premiers points du tableau, puis celles du point moyen G_2 associé aux trois derniers points.

b) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) et la tracer.

3. On admet que (G_1G_2) réalise un ajustement du nuage de points.

a) Déterminer par le calcul la production journalière moyenne de pulls en décembre 2008.

b) Comment peut-on retrouver graphiquement ce résultat ?

4. L'atelier de fabrication de pulls a-t-il été fermé en fin décembre 2008 ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4

Dans le tableau suivant figure les résultats d'une enquête réalisée dans un magasin pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures en fonction de son prix de vente.

Prix en francs x_i	350	400	450	500	550	600
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	140	120	100	90	80	55

1. Représenter les nuages de points $M_i(x_i; y_i)$ correspondant à cette série statistique dans un repère orthonormal $(0; \vec{i}; \vec{j})$ tel que 1cm représente 100 francs sur l'axe des abscisses et 1cm représente 20 acheteurs sur l'axe des ordonnées.

2. On appelle G_1 et G_2 les points moyens des sous nuages constitués d'une part par les trois premiers points, d'autre part les trois derniers points.

a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 .

b) Placer les points G_1 et G_2 sur la figure et tracer la droite $(G_1 G_2)$.

c) Déterminer une équation de la forme $y = mx + p$ de la droite $(G_1 G_2)$

3. Dédurre du 2-c une estimation :

a) du nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures vendu 650F.

b) du prix d'un modèle dont le nombre d'acheteurs potentiels est 150.

CHAPITRE 10 : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

EXERCICE 1

Dans l'espace muni d'un repère ortho normal $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ on considère les points A (1 ; 0 ; 0) B (0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Soit I le point de coordonnées (1 ; 2 ; 3).

2. Calculer la distance de I au plan (ABC). Les points A, B, C et I sont-ils coplanaires ?

3. a) Calculer A_1 l'aire du triangle ABC en unité d'aire.

b) Déterminer de volume V (en unité de volume) de la pyramide de sommet I et de base le triangle ABC.

4. Soit D le point de coordonnées (1 ; -2 ; 3).

a) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

b) Calculer l'aire A_2 du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 2

L'espace muni d'un repère orthonormal direct $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, unité graphique 2cm.

Soient les points A (-2 ; 1 ; -4) ; B (2 ; 3 ; 1) ; C (2 ; 2 ; -1) et D (-3 ; -1 ; 3). Soient les points E, F, G et H tel que ABFCDEGH soit un parallélépipède.

1. Déterminer les coordonnées du point F.

2. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire l'aire du parallélogramme ABFC et du triangle ABC en cm^2 .

3. Calculer la distance d du point D au plan (ABC).

4. Calculer en cm^3 le volume de la pyramide de sommet D et de base ABFC.

5. Calculer le volume V' du parallélépipède de ABFCDEGH.

EXERCICE 3

L'espace étant rapporté au repère orthonormal direct $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ unité de longueur 1cm, on considère les points A(3 ; 2 ; 4) ; B(0 ; 3 ; 5) ; C(0 ; 2 ; 1) ; D(3 ; 1 ; 0) et F(1 ; 2 ; 3).

1. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.
2. Soit E le point défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$. Calculer les coordonnées de E.
3. Calculer l'aire A en cm^2 du parallélogramme ABCD.
4. Calculer le volume V en cm^3 du prisme droit de base ABCD et de hauteur $[AE]$.
5. Le point F appartient-il à la droite (AB) ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ unité de longueur 1cm. On donne les points A (0 ; 6 ; 0) ; B (0 ; 0 ; 8) et C (4 ; 0 ; 8).

1. Faire une figure.
2. Démontrer que : a) les droites (BC) et (AB) sont orthogonales.
b) les droites (BC) et OA) sont orthogonales.
c) En déduire que la droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).
3. Déterminer le volume V en Cm^3 du tétraèdre OABC.
4. Calculer la distance d du point O au plan (ABC).
5. Calculer l'aire du triangle ABC. Retrouver le volume V calculé à la question 3.

EXERCICE 5

1. Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace. Déterminer l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
2. Soient (Δ) et (Δ') deux droites de même vecteur directeur $\vec{u}$ et H un point de (Δ) . On désigne par H' le projeté orthogonal de H sur (Δ') .
a) Démontrer que pour tout point A de (Δ) et pour tout point A' de (Δ') $\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u}$
b) En déduire que : $HH' = \frac{\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$
c) Application numérique :
Soient A (-1 ; 2 ; 5) et A' (4 ; -1 ; 9) ; soient (Δ) et (Δ') les droites de vecteur directeur $\vec{u}(-2 ; 2 ; 1)$ contenant respectivement A et A'. Calculer la distance (Δ) à (Δ') .

CHAPITRE 11 : DENOMBREMENT – PROBABILITE

DENOMBREMENT

EXERCICE 1

Dans une classe tous les élèves apprennent au moins une langue suivante : anglais, allemand ou espagnol.

2 apprennent l'anglais, l'allemand et l'espagnol ; 15 apprennent au moins l'anglais et l'allemand ;

7 apprennent au moins l'allemand et l'espagnol ; 10 apprennent au moins l'anglais et l'espagnol ;

26 apprennent au moins l'anglais ; 22 apprennent au moins l'allemand ; 16 apprennent au moins l'espagnol

1. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?
2. Combien y a-t-il d'élèves n'apprenant qu'une seule langue ?
3. Combien y a-t-il d'élèves apprenant deux langues exactement ?

EXERCICE 2

On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est composé de 4 couleurs : trèfle, carreau, cœur, pique, et dans chacune de ces couleurs, de huit cartes qui sont :

As, roi, dame, valet, dix, neuf, huit, sept.

On choisit 5 cartes dans un jeu de 32 cartes

Déterminer le nombre de résultats comportant :

- a) exactement deux valets ; b) aucun as ; c) au moins 3 dames ; d) 2 trèfles et 3 carreaux ;
- e) 2 cartes d'une couleur et 3 d'une autre ; f) au moins un roi.

EXERCICE 3

On jette trois fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure.

Déterminer le nombre de résultats :

- a) comportant trois chiffres identiques ; b) comportant trois chiffres distincts ;
- c) comportant deux chiffres identiques ; d) pour lesquels la somme des chiffres obtenue est égale à 6 ;
- e) comportant au moins un 6.

EXERCICE 4

On tire successivement 4 boules d'un sac contenant 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes.

Déterminer le nombre de tirage comportant :

- a) 4 boules jaunes ; b) 4 boules vertes ; c) 3 jaunes et une verte, dans cet ordre ; d) 3 jaunes et une verte ;

e) 2 jaunes et 2 vertes dans cet ordre ; f) 2 jaunes et 2 vertes ; g) au moins 3 vertes ; h) au plus 3 jaunes

On distinguera deux cas suivant que le tirage est effectué avec ou sans remise.

EXERCICE 5

Une association de 15 personnes, 9 hommes et 6 femmes doit élire un bureau de 3 personnes comportant un président, un secrétaire et un trésorier

1. Combien de bureaux différents peut-on constituer ?
2. Combien y en a-t-il sachant que le poste de secrétaire doit être occupé par une femme ?
3. Combien y en a-t-il sachant que le président est une femme et le secrétaire un homme ?
4. Combien y en a-t-il de bureaux dans lequel siège M. Alpha ?
5. Combien y en a-t-il de bureaux sachant que Mme Bêta refuse de siéger avec Mr Lambda ?
6. Combien peut-on constituer de bureaux dans lesquels siège au moins une femme ?

EXERCICE 6

Une urne contient dix boules numérotées de 0 à 9. On tire successivement et sans remise quatre boules et l'on forme un nombre de quatre chiffres (même commençant par 0)

1. Combien de nombres différents peut-on obtenir ?
2. Combien de ces nombres commencent par le chiffre 4 ?
3. Combien de ces nombres comportent le chiffre 4 ?
4. Combien de ces nombres commencent par 43 ? Comportent la séquence 43 dans leur écriture ?

EXERCICE 7

Un sac contient les 26 lettres de l'alphabet. On en extrait successivement et sans remise cinq lettres et l'on place dans l'ordre du tirage, pour former un mot de cinq lettres.

1. Combien de mots peut-on obtenir ?
2. Combien de ces mots commencent par Z ?
3. Combien de ces mots comportent la lettre W ?
4. Combien de ces mots commencent par ZY ?
5. Combien de ces mots comportent la séquence ZY dans leur écriture ?

PROBABILITE

Exercice 1

Une enquête portant sur les élèves d'un lycée a donné les résultats :

- * 60% des élèves ont redoublé au moins une classe ;
- * 75% de ceux qui n'ont jamais redoublé sont admis au baccalauréat ;
- * Le pourcentage de succès au baccalauréat est de 55% chez les redoublants. On note A l'évènement « être admis au baccalauréat » et R l'évènement « avoir redoublé au moins une classe »

1°) Calculer la probabilité des évènements suivants :

B : « un redoublant est admis au baccalauréat » ;

C : « un non redoublant est admis au baccalauréat »

En déduire la probabilité de l'évènement A.

2°) Sachant qu'un élève est reçu au baccalauréat, quelle est la probabilité pour qu'il n'est jamais redoublé une classe.

3°) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

4°) Calculer la probabilité pour qu'un élève échoue au baccalauréat sachant qu'il est redoublant.

Exercice 2

Un jeu consiste à lancer trois fois de suite un dé cubique équilibre à 6 faces, numéroté de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure.

1°) Démontrer que la probabilité d'obtenir trois chiffres identique est $\frac{1}{36}$

2°) Calculer la probabilité d'obtenir trois chiffres dont la somme est égale à 6.

3°) Démontrer que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$.

4°) Le droit de participation au jeu est de 3 000 francs.

- Si le joueur obtient trois chiffres identiques, il reçoit 5 000 francs ;
- S'il obtient trois chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3 000 francs ;
- S'il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur au cours d'une partie. On appelle gain algébrique d'un joueur la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'Esperance mathématique de X. Le jeu est-il équitable ?

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits.
Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1) On note : A_1 l'évènement : « la personne est absente au premier appel »

R_1 l'évènement : « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel »

Calculer la probabilité de R_1

2) Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.

Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter

On note : A_2 l'évènement : « la personne est absente lors du second appel »

R_2 l'évènement : « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel »

R l'évènement : « la personne accepte de répondre au questionnaire »

Montrer que la probabilité de R est 0,176

3) Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait lieu lors du premier appel ?

4) On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants.

Un enquêteur a une liste de 20 personnes à contacter. Quelle est la probabilité pour qu'une personne au moins des 20 personnes de cette liste accepte de répondre au questionnaire ?

Exercice 4

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 10 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1°) Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer l'Esperance mathématique de X

2°) Un second jeu est organisé de tel sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les évènements suivants :

C_1 : l'enfant choisit la boîte cubique ; C_2 : l'enfant choisit la boîte cylindrique ; R : l'enfant prend une bille rouge ; V : l'enfant prend une bille verte.

a) Calculer la probabilité de l'évènement R .

b) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3°) L'enfant reproduit n fois de suite son second jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a) Exprimer en fonction de n la probabilité P_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $P_n \geq 0,99$

On donne : $\ln(0,01) = -4,6$ et $\ln\left(\frac{73}{182}\right) = -0,91$.

EXERCICE 5

Un sac contient 5 jetons rouges et 2 jetons blancs tous indiscernables au toucher.

Un jeu consiste à tirer au hasard un jeton du sac. Si le jeton est rouge, le jeu s'arrête ; sinon on tire un second jeton sans remettre le premier dans le sac. La mise du jeu est de 50F. Le tirage d'un jeton blanc rapporte 200F, tandis que celui d'un jeton rouge ne rapporte rien.

Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque jeu associe le gain algébrique du joueur.

1. a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X

c) Déterminer la fonction de répartition de X , puis représenter la graphiquement.

2. Soit l'évènement A : " le joueur a un gain positif". Montrer que $P(A) = 2/7$

3. Un joueur réalise successivement de façon indépendante 5 jeux. Il remet à la fin de chaque jeu les jetons dans le sac.

Soit Y la variable aléatoire qui à ces 5 jeux, associe le nombre de fois où l'évènement A est réalisé. Justifier que Y suit une loi binomiale et calculer la probabilité que le joueur obtienne au moins une fois un gain positif au cours des 5 jeux.

EXERCICE 6

Une case contient 12 souris : 5 souris blanches (2 femelles et 3 mâles) et 7 souris grises (3 femelles et 4 mâles).

1. Au cours d'une expérience au laboratoire on choisit au hasard une souris et on désigne par B, G, M et F les événements suivants :

B : « La souris choisie est blanche »

G : « La souris choisie est grise »

M : « La souris choisie est mâle »

F : « La souris choisie est femelle »

a) Calculer les probabilités des événements B, G, M et F

b) Sachant que la souris choisie est blanche, calculer la probabilité pour qu'elle soit mâle. Les événements B et M sont-ils indépendants ?

2. On choisit n fois de suite une souris ($n \geq 1$) en remettant à chaque fois la souris tirée.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une souris blanche et mâle seulement au $n^{\text{ième}}$ tirage ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir une souris blanche et mâle exactement une fois au cours des n tirages ?

c) Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une souris blanche et mâle au cours des n tirages ?

d) A partir de quelle valeur n_0 a-t-on $Q_n \leq 0,2$?

3. On suppose $n=6$

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de souris blanches et mâle tiré au cours des 6 tirages

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique de X

On donne : $\ln 0,2 \approx -1,6$ et $\ln(0,75) \approx -0,3$

EXERCICE 7

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On s'intéresse au nombre porté par la face cachée.

Pour $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ on note P_k la probabilité d'obtenir le nombre K sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres P_1 ; P_2 ; P_3 et P_4 dans cet ordre forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $P_4=0,4$; montrer que $P_1=0,1$; $P_2=0,2$ et $P_3=0,3$

2. On lance le dé trois (3) fois de suite. On suppose que les lances sont deux à deux indépendants

a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1 ; 2 ; 4 et 3 ?

b) Quelles est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

3. On lance dix (10) fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.

a) Pour $0 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement ($X=i$)

b) Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter le résultat obtenu.

c) Calculer la probabilité de l'évènement ($X \geq 1$). On donnera une valeur arrondie au millième.

4. On lance n fois le dé, les lancers étant supposés indépendants. On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au $n^{\text{ième}}$ lancer.

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique et quelle converge.

b) Calculer $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n puis étudier la convergence de la suite (S_n) .

c) Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n \geq 0,999$.

NB : on donne : $(0,6)^{10} \approx 0,00604$; $\ln(0,001) \approx -6,90$; $\ln(0,6) \approx -0,51$.

EXERCICE 8

Dans un certain pays l'âge à partir duquel on peut prendre sa retraite est de 60 ans. Pour bénéficier d'une pension de retraite à taux plein, il faut avoir cotisé pendant 43 ans. Une étude statistique a permis d'obtenir les informations suivantes :

- La proportion des retraités bénéficiant d'une pension de retraite à taux plein parmi ceux ayant pris leur retraite à 60 ans est de 30%.
- La proportion des retraités bénéficiant d'une retraite incomplète parmi ceux n'ayant pas pris leur retraite à 60 ans est de 40%.
- 20% des retraités ont pris leur retraite à 60 ans. On interroge au hasard un retraité. On désigne par S l'évènement «le retraité a pris sa retraite à 60 ans» et par T l'évènement «la pension du retraité est à taux plein».

1. Construire un arbre pondéré représentant cette situation

2. En utilisant cet arbre montrer que $P(T)=0,54$.

3. En déduire la probabilité qu'un retraité ait pris sa retraite à 60 ans sachant que sa pension est à taux plein.

4. On interroge au hasard de façon indépendante trois retraités. Calculer la probabilité pour que deux d'entre eux aient leur pension de retraite à taux plein.

EXERCICE 9

A l'occasion du FESPACO passé, un groupe de 22 élèves avait décidé de voir deux films identifiés A et B qui passent le même jour.

- Le premier jour, 8 personnes ont vu le film A et les autres ont regardé le film B.
- Le deuxième jour, 4 personnes ont revu le film A, 2 ont revu le film B et les autres ont regardé le film qu'ils n'avaient vu le premier jour.

Après la deuxième séance, on a interrogé au hasard une personne du groupe. On considère les événements suivants :

A_1 : «La personne interrogée a vu le film A le premier jour»

A_2 : «La personne interrogée a vu le film A le deuxième jour»

B_1 : «La personne interrogée a vu le film B le premier jour»

B_2 : «La personne interrogée a vu le film B le deuxième jour»

1. a) Calculer les probabilités suivantes : $P(A_1)$ et $P(A_2)$

b) Calculer les probabilités suivantes : $P(A_2/A_1)$ et $P(A_2/B_1)$

c) Calculer la probabilité $P(A_1 \cap A_2)$

2. Le prix du billet pour le film A était de 1000F et celui du film B était à 1500F. On appelle x la variable aléatoire égale au coût total pour la personne interrogée après les deux séances de cinéma.

a) Quelles sont les valeurs prises par x ?

b) Déterminer la loi de probabilité de x

c) Calculer l'espérance mathématique la variance et l'écart type de la variable x .

d) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire x et la représenter.

EXERCICE 10

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible. Le matériel d'un jeu est composé de deux boîtes identiques désignées par les lettres A et B et de 20 billes, indiscernables au toucher, dont 14 sont rouges et 6 vertes. Le jeu se déroule en deux étapes. La première consiste à choisir l'une des deux boîtes. Ensuite à la deuxième étape, il s'agit de tirer simultanément 2 billes dans la boîte qui a été choisie précédemment. Le tableau ci-dessous donne la répartition des billes dans la boîte.

	Billes rouges	Billes vertes	Total
Boîte A	9	3	12
Boîte B	5	3	8
Total	14	6	20

On admet que lors de la première étape, le choix d'une boîte est pondéré par le nombre de billes qu'elle contient. Autrement dit, la probabilité de choisir une boîte donnée est égale à la probabilité de choisir sur l'ensemble des billes, une bille provenant de ladite boîte.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

- a. «La boîte A est choisie»
- b. «La boîte B est choisie»
- c. «On a tiré 2 billes rouges de la boîte A»
- d. «On a tiré 2 billes vertes de la boîte B»
- e. «On a choisi la Boîte A et on y a tiré 2 billes vertes»

2. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de billes rouges obtenues après les deux étapes du jeu ;

- a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant aux valeurs de X à la fin du jeu ;
- b) Calculer la probabilité de l'évènement $X=1$.

EXERCICE 11

On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note a le résultat du premier lancer b le résultat du second lancer. On considère alors l'équation du second degré $x^2 + ax + b = 0$

Calculer la probabilité pour que cette équation admette des solutions (distinctes ou confondues).

EXERCICE 12

On dispose d'un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Lorsqu'on lance ce dé, on suppose que la probabilité d'apparition d'une face dont le numéro est pair est le double de la probabilité d'apparition d'une face dont le numéro est impair.

1. Calculer les probabilités d'obtenir chaque face

2. Une personne qui lance le dé obtient les résultats suivants :

- si la face 1 ou la face 6 apparaît elle gagne 1000f
- si la face 3 apparaît elle ne gagne rien
- si une autre face apparaît elle gagne 500f. On considère la variable aléatoire X "gain du joueur"

a) Donner la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X

c) Donner et représenter la fonction de répartition de X

EXERCICE 13

Une entreprise de bateaux propose chaque jour une croisière sur un paquebot. Les relevés météorologiques permettent d'affirmer que dans la région :

- L'évènement N : «le temps est nuageux sans pluie» se réalise 120 jours par an.
- L'évènement B : «le temps est au beau fixe» se réalise 180 jours par an ;
- L'évènement P : «le temps est pluvieux» se réalise 65 jours par an. On suppose qu'une année compte 365 jours. On choisit un jour au hasard.

1. Calculer les probabilités $P(B)$, $P(N)$, $P(P)$ pour que ce jour-là, le temps soit respectivement beau, nuageux sans pluie, pluvieux.

2. Soit V le nombre de billet vendu ce jour-là. On considère les évènements :

A_1 : « $0 \leq V \leq 15$ » ; A_2 : « $15 < V \leq 30$ » ; A_3 : « $30 < V \leq 50$ ». On dispose des renseignements suivants :

Probabilité conditionnelle	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$P(A_i/B)$	$1/8$	$3/8$	$4/8$
$P(A_i/N)$	$2/8$	$3/8$	$3/8$
$P(A_i/P)$	$5/8$	$2/8$	$1/8$

Calculer $P(A_1)$; $P(A_2)$; $P(A_3)$

3. On considère quelle bilan quotidien de l'entreprise est positif si elle a vendu au moins seize billets.

- Calculer la probabilité pour que le bilan soit positif
- Si le bilan est positif, quelle est la probabilité pour que le temps ait été nuageux ?

EXERCICE 14

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 rouges ; 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne

1. calculer la probabilité des évènements suivants :

A : «les trois boules sont rouges»

B : «les trois boules sont de la même couleur»

C : «les trois boules sont toutes de couleur différentes»

2. On appelle X la variable aléatoire qui a chaque tirage on associe le nombre de couleurs obtenues

- Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer $E(X)$; $V(X)$; $\sigma(X)$.

c) Déterminer et représenter la fonction de répartition de X .

NB : Donner tous les résultats sous forme de fraction irréductibles.

EXERCICE 15

Dans une population donnée, 90% des personnes vivent en milieu rural. Parmi celles qui vivent en milieu rural 95% pratiquent l'agriculture. Parmi celles qui ne vivent pas en milieu rural 5% pratiquent l'agriculture.

Pour une personne prise au hasard dans cette population, on note les événements suivants :

A : "la personne pratique l'agriculture"

R : "la personne vit en milieu rural"

1. On choisit une personne au hasard dans cette population. Calculer les probabilités des événements suivants :

a) la personne vit en milieu rural et pratique l'agriculture ;

b) la personne ne vit pas en milieu rural et pratique l'agriculture

c) la personne pratique l'agriculture

d) la personne ne pratique pas l'agriculture sachant qu'elle vit en milieu rural.

2. Soit E l'évènement suivant : "la personne choisie vit en milieu rural et ne pratique pas l'agriculture"

a) Etablir que $P(E) = \frac{9}{200}$

b) On interroge au hasard et successivement 10 personnes de cette population. On suppose que les choix de ces personnes sont indépendants.

Calculer la probabilité pour qu'on trouve parmi les personnes interrogés au moins une personne qui vit en milieu rural et qui ne pratique pas l'agriculture.

EXERCICE 16

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On dit qu'on obtient un « **double** » si les deux faces supérieures des dés portent des chiffres identiques.

A chaque lancer, si le joueur fait « **double** » il gagne 500 francs ; sinon, il perd 100 francs

1. On lance les dés une fois. Calculer la probabilité de gagner 500 francs.

2. On lance les dés trois fois. Soit X la variable aléatoire associée à la somme gagnée ou perdue après les trois lancers.

a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?

b) Etablir la loi de probabilité de X .

3. On lance les dés n fois.

a) Calculer en fonction de n , la probabilité notée q_n de ne jamais faire un double

b) Calculer en fonction de n , la probabilité, notée p_n de faire au moins un double

c) Quelle est la valeur minimum de n pour que l'on ait : $p_n \geq 0$,

EXERCICE 17

1. Une urne contient 3 boules jaunes, 2 boules rouges et 5 boules noires. On extrait simultanément 2 boules de l'urne. Quel est le nombre de résultats possibles ?

2. Le tirage d'une boule jaune fait gagner 2 points, celui d'une boule rouge fait gagner 1 point, celui d'une boule noire fait perdre 3 points. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de points obtenus à l'issue d'un tirage simultané de 2 boules. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .

3. En supposant les tirages équiprobables, déterminer la loi de probabilité de X ;

4. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

N.B : on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

EXERCICE 18

On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et quatre boules vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

J = "tirer une boule jaune"

B = "tirer une boule bleue"

R = "tirer une boule rouge"

V = "tirer une boule verte"

2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante : si la boule tirée est : rouge, on gagne 10 € ; verte, on gagne 2 € ; Jaune ou bleue, on gagne 3 €

Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.

a. Dédire de la question 1) : $P(X=2)$, $P(X=3)$ et $P(X=10)$.

b. Calculer l'espérance mathématique de X , sa variance puis son écart - type. (Arrondir l'écart-type à 10^{-2}) a)

3. Maintenant, on gagne toujours 10 € si la boule tirée est rouge, 2 € si elle est verte mais on gagne 3 € si elle est jaune et m € si elle est bleue ; m désignant un réel positif. Calculer m pour que le gain moyen espéré soit de 4,5 €.

EXERCICE 19

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : quatre boules vertes et deux boules jaunes.

1. On tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire, qui à chaque tirage de deux boules, associe le nombre de boules vertes tirées. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer son espérance.

2. on tire au hasard, deux fois de suite, deux boules simultanément. Les boules n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C, D les événements suivants :

A : « aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de deux boules »

B : « une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de deux boules »

C : « deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de deux boules »

D : « une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de deux boules ».

a) Calculer les probabilités conditionnelles $P(D/A), P(D/B), P(D/C)$.

b) En déduire les probabilités des événements $D \cap A, D \cap B, D \cap C$

c) Calculer la probabilité de l'événement D .

EXERCICE 20

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties. La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2. Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- S'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05
- S'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1. on appelle :

E_1 l'événement « le joueur perd la première partie »

E_2 l'événement « le joueur perd la deuxième partie »

E_3 l'événement « le joueur perd la troisième partie »

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties. On pourra s'aider d'un arbre.

a) Quelles sont les valeurs prises par X .

b) Montrer que $p(X=2)=0,031$ et que $p(X=3)=0,002$.

c) Déterminer la loi de probabilité de X .

d) Calculer l'espérance mathématique de X .

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'évènement ; "le joueur perd la n -ième partie", $\overline{E_n}$ l'évènement contraire, et on note p_n la probabilité de l'évènement E_n .

a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n , les probabilités des évènements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n .

b) En déduire que $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$ pour tout naturel n non nul

4. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - \frac{1}{19}$

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, U_n puis p_n en fonction de n .

c) Calculer la limite p_n quand n tend vers $+\infty$.

PROBLEMES DE SYNTHESE

PROBLEME 1

Le plan P est muni d'un repère orthogonal $(O ; I ; J)$ d'unité graphique : $OI=1\text{cm}$ et $OJ=5\text{cm}$. Dans ce problème on s'intéresse à deux fonctions f et g , dérivables sur l'intervalle $[0; +\infty[$. La fonction g est définies à l'aide d'une intégrale : $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan P .

Partie A

1- Le tableau de variation de la fonction f est donné ci-dessous :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-2	-	
$f(x)$	1	$\frac{1}{2e}$	0

a) Préciser les asymptotes de la courbe (C)

b) Ecrire une équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $x = 0$. Cette droite est appelée (D) ;

c) Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le repère. On indique en complément que $f(2) = \frac{1}{3e^2}$

2- Donner la valeur de $g(0)$ et le signe de $g(x)$ pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$

3- Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$

4- a) Interpréter graphiquement la valeur de $g(1)$ et la mettre en relief sur le graphique ;

b) Justifier que $g(1)$ est compris entre $\frac{1}{2e}$ et 1.

Partie B

On admet que $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x}$

1-a) Démontrer que pour tout réel x positif : $f(x) = (1-x)e^{-x} + x^2 f(x)$;

b) En déduire que : $g(1) = \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx + \int_0^1 x^2 f(x) dx$

2-a) A l'aide d'une intégration par parties calculer les intégrales $A = \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx$ et $B = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$;

b) Démontrer que : $\int_0^1 \frac{x^2 e^{-x}}{2} dx \leq \int_0^1 x^2 f(x) dx \leq \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

c) En déduire un encadrement de $g(1)$ entre deux nombres décimaux d'ordre 1.

3- a) Justifier que pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{e^{-t}}{2} dt$;

b) Démontrer que pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 : $0 \leq \int_1^x f(t) dt \leq \frac{1}{2e}$

c) En déduire que g est une fonction majorée ;

d) Justifier que g admet une limite finie en $+\infty$

PROBLEME 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - \ln|x|$ et (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2cm.

Partie A

1.a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f

b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

2. a) Démontrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point A dont on notera son abscisse α et vérifier que $\alpha \in]-1; -\frac{1}{2}[$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$.

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1.

d) Tracer (D) , (T) et (C)

3. a) Pour tout $k \in]0; 1[$, calculer : $A(k) = 4 \int_k^1 f(x) dx$

b) Calculer $\lim_{k \rightarrow 0^+} A(k)$. Interpréter graphiquement le résultat.

4. a étant un nombre réel non nul quelconque, on note M et M' les points de (C) d'abscisses respectives a et $-a$, (T) et (T') les tangentes respectives à (C) en M et M'

a) Exprimer à l'aide de a les coordonnées de N point d'intersection de (T) et (T') .

b) Quel ensemble décrit N lorsque $a \in \mathbb{R}_+^*$?

Partie B

On définit la fonction φ sur $[-1; -\frac{1}{2}]$ par : $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

1- a) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation : $x \in [-1; -\frac{1}{2}] ; \varphi(x) = x$

b) Vérifier que $\forall x \in [-1; -\frac{1}{2}]$ on a : (i) $\varphi(x) = \frac{x}{x-1} (\ln|x| - 1)$; (ii) $\varphi'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} f(x)$

c) Etudier le sens de variation de φ sur $[-1; -\frac{1}{2}]$ et donner une valeur approchée de $\varphi(-\frac{1}{2})$

d) Démontrer que : $\forall x \in [\alpha; -\frac{1}{2}], \varphi(x) \in [\alpha; -\frac{1}{2}]$

e) Démontrer que : $\forall x \in [\alpha; -\frac{1}{2}], \varphi(x) \leq \frac{1}{9}$

2- On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = -\frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [\alpha; -\frac{1}{2}]$

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_n - \alpha|$

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^n$

d) Justifier que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite

e) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée à 10^{-2} près de α .

On donne $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$; $\ln 5 \approx 1,6$

Problème 3

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = [-\frac{1}{2}, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

1) Démontrer que, pour tout t de I on a : $g'(t) = \frac{-t^3}{1+t}$

2) En déduire que, pour tout t de I , on a : $\begin{cases} -2t^3 \leq g'(t) \leq 0, \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \leq g'(t) \leq -2t^3, \text{ si } -\frac{1}{2} \leq t \leq 0 \end{cases}$ puis, en intégrant,

démontrer que, pour tout x de I , on a : $\frac{-1x^4}{2} \leq g(x) \leq 0$

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $] -1; +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}, \text{ si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ si } x = 0 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2cm)

1) a) Vérifier que, pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[- \{0\}$, $f(x) = \frac{-g(x)}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$

b) En utilisant l'inégalité trouvée en A) 2), démontrer que f est dérivable en 0

et déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0

c) f est-elle continue en 0 ? justifier.

2) Soit h la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{-x^2 - 2x}{1+x} + 2 \ln(1+x)$

a) Étudier le sens de variation de h . Calculer $h(0)$ et en déduire le signe de h sur $] -1; +\infty[$

b) Démontrer que, pour tout x appartenant à $] -1, 0 [\cup] 0, +\infty [$, on a : $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$

c) Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition et les asymptotes éventuelles à (C)

3) Construire la tangente (T) , les asymptotes et la courbe (C)

4) k est la fonction définie par $k(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

a) Déterminer les réels a et b tels que : $k(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

b) Calculer, en cm^2 , l'aire $A(\lambda)$ du domaine délimité par les droites d'équations

$x = 1$ et $x = \lambda$ ($\lambda > 1$), l'axe des abscisses et la courbe (C)

c) Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

Partie C

1) a) Montrer que la fonction φ définie sur $] -1; +\infty[$, par $\varphi(x) = f(x) - x$ est continue et strictement décroissante.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $] -1; +\infty[$ et que $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq 1$

2) Sachant que pour tout $x \geq 0$, on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$, démontrer que pour tout réel

$x \geq 0$, on a : $\frac{-1}{1+x} \leq f'(x) \leq 0$ puis que pour tout x de l'intervalle $J = \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{5}$

3) Démontrer que $f(I) \subset J$

4) Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5} |u_n - \alpha|$ puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{3}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite

d) Déterminer l'entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, u_n est une valeur approchée de α à 10^{-1} près

on donne : $\ln 2 = 0,7$ $\ln \frac{4}{5} = -0,22$ $\ln \frac{4}{30} = -2,01$ $\ln \frac{5}{4} = 0,22$

PROBLEME 4

Les trois parties sont, dans une large mesure, indépendantes

Partie A

Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $q(x) = \frac{x}{e^x}$

1°) a) Calculer les limites de q en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Déterminer $q'(x)$ et étudier son signe.

c) En déduire le sens de variation de q puis dresser son tableau de variation.

2°) a) Montrer que pour tout réel x on a $q(x) < 1$; en déduire que pour tout réel x ;

on a $x \neq e^x$

b) Montrer que si $x \geq 0$ alors $0 \leq \frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$

1°) a) Déterminer, à l'aide de la question A) 2) a), l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variation.

2°) Préciser les asymptotes et tracer avec soin la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique : 5cm)

3°) Montrer que si $x \geq 0$ alors $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$.

Partie C

1°) Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \left(-\frac{1x^2}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) e^{-2x} \text{ est une primitive de la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } g(x) = x^2 e^{-2x}.$$

2°) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^4 x e^{-x} dx$. En déduire la valeur de $I_1 = \int_0^4 \left(1 + \frac{x}{e^x} \right) dx$

3°) Déduire des résultats précédents la valeur de $I_2 = \int_0^4 \left(1 + \frac{x}{e^x} + \left(\frac{x}{e^x} \right)^2 \right) dx$.

Partie D

On propose de trouver un encadrement de $J = \int_0^4 f(x) dx$. (on ne demande pas de calculer J) x étant

un réel donné, on considère la suite $(S_n(x), n \geq 1)$ définie par : $S_n(x) = 1 + \left(\frac{x}{e^x} \right) + \left(\frac{x}{e^x} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{e^x} \right)^n$.

1°) Montrer que $S_n(x) = \left(1 - \left(\frac{x}{e^x} \right)^{n+1} \right) f(x)$.

2°) a) En utilisant les encadrements obtenus dans A et B, démontrer que pour $x \geq 0$, on a $0 \leq f(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{e-1} \times \frac{1}{e^n}$.

b) En déduire un encadrement de $J - I_n$ ou $I_n = \int_0^4 S_n(x) dx$; puis en utilisant la valeur de I_2

trouvée dans la partie C, donner un encadrement de J .

PROBLEME 5

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 . Quelle interprétation géométrique peut-on en déduire?

2°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique de cette dernière limite.

3°) Soit φ la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $\varphi(x) = x + \ln(x-1)$

a- Etudier le sens de variation de φ et dresser son tableau de variation.

b- Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1,27 < \alpha < 1,28$.

c- Donner le signe de $\varphi(x)$.

3°) a- Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ puis étudier le sens de variation de f .

b- Vérifier que $f(\alpha) = 1 - \alpha$.

c- Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C) .

PARTIE B

1°) a) Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique β dans l'intervalle $[4; 5]$.

b) Montrer que les équations $f(x) = 1$ et $e^{\frac{x}{x-1}} + 1 = x$ sont équivalentes.

2°) Soit g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{x-1}} + 1$.

a) Etudier le sens de variations de g .

b) Démontrer que pour tout $x \in [4; 5]$; $g(x) \in [4; 5]$.

3°) On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = g(U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n \in [4; 5]$

b) Montrer que g' est strictement croissante sur $[4; 5]$

c) Montrer que pour tout $x \in [4; 5]$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

d) En utilisant l'inégalité de moyenne, montrer que pour tout x élément de $[4; 5]$, $|g(x) - \beta| \leq \frac{1}{2} |x - \beta|$

e) En déduire que pour tout entier naturel n , on a $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2} |U_n - \beta|$.

f) Démontrer alors que pour tout entier naturel n , on a $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2^n}$.

g) Déduire de ce qui précède que (U_n) est convergente et préciser sa limite.

h) Pour quelle valeur de n , U_n est elle une valeur approchée de β à 10^{-2} près?

On donne : $\ln(0,27) = -1,30$ $\ln(0,28) = -1,27$ $\ln 2 = 0,7$ $\ln 3 = 1,1$ $\ln 5 = 1,6$ $e^{\frac{4}{3}} = 3,79$ $e^{\frac{5}{4}} = 3,49$

en de
imite

8

PROPOSITION

DE

EN.

| < 11

CORRIGE

NOMBRES COMPLEXES

Corrigé exercice n°1

$$P(z) = z^4 - 2(4-i)z^3 + (26-9i)z^2 - (43-15i)z + 32-4i$$

1.
résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation: $u^2 - (-11+i)u + 32-4i = 0$

$$\Delta = (-11+i)^2 - 4(32-4i)$$

$$\Delta = 121 - 22i - 1 - 128 + 16i$$

$$\Delta = 121 - 129 + 16i - 22i$$

$$\Delta = -8 - 6i$$

posons $\delta^2 = \Delta / \delta = x + iy$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \quad x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow 2y^2 = 18 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = 3 \text{ ou } y = -3$$

$$\delta_1 = 1 - 3i; \delta_2 = -1 + 3i$$

$$u_1 = \frac{-11+i+1-3i}{2} \quad u_1 = \frac{-10-2i}{2} = -5-i \quad u_2 = \frac{-11+i-1+3i}{2} \quad u_2 = \frac{-12+4i}{2} = -6+2i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-5-i; -6+2i\}$$

2. Démontrons que pour tout nombre complexes z l'on a :

$$p(z) = [z^2 - (4-i)z]^2 - (-11+i)[z^2 - (4-i)z] + 32-4i$$

$$[z^2 - (4-i)z]^2 - (-11+i)[z^2 - (4-i)z] + 32-4i = z^4 - 2z^2[(4-i)z] + [(4-i)z]^2 - (-11+i)z^2 + (-11+i)(4-i)z + 32-4i =$$

$$z^4 - 2z^2(4z - iz) + (4-i)^2 z^2 - (-11+i)z^2 + (-11+i)(4-i)z + 32-4i =$$

$$z^4 - 8z^3 + 2iz^3 + [16-8i-1]z^2 + (11-i)z^2 + (-44+11i+4i+1)z + 32-4i =$$

$$z^4 + (2i-8)z^3 + [(15-8i) + (11-i)]z^2 + (-43+15i)z + 32-4i =$$

$$z^4 - 2(4-i)z^3 + (26-9i)z^2 + (-43+15i)z + 32-4i =$$

$$z^4 - 2(4-i)z^3 + (26-9i)z^2 - (43-15i)z + 32-4i = P(z)$$

Donc $P(z) = [z^2 - (4-i)z]^2 - (-11+i)[z^2 - (4-i)z] + 32-4i$

b. Utilisons les résultats précédents pour résoudre

$$P(z) = 0$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow [z^2 - (4-i)z]^2 - (-11+i)[z^2 - (4-i)z] + 32-4i = 0$$

Posons $U = z^2 - (4-i)z$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow U^2 - (-11+i)U + 32-4i = 0$$

D'après 1. $S_{\mathbb{C}} = \{-5-i; -6+2i\}$

$$U_1 = -5-i \Leftrightarrow z^2 - (4-i)z = -5-i$$

$$\Leftrightarrow z^2 - (4-i)z + 5+i = 0 \quad (1)$$

$$\Delta_1 = (4-i)^2 - 4(5+i)$$

$$\Delta_1 = 16 - 8i - 1 - 20 - 4i$$

$$\Delta_1 = 15 - 20 - 12i$$

$$\Delta_1 = -5 - 12i$$

Posons $\delta = x + iy$ avec $\delta^2 = \Delta_1$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}; 2x^2 = 8; x^2 = 4; x = 2 \text{ ou } x = -2$$

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}; 2y^2 = 18; y^2 = 9; y = 3 \text{ ou } y = -3$$

$$\delta_1 = 2-3i; \delta_2 = -2+3i$$

$$z_1 = \frac{4-i+2-3i}{2} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$$

$$z_1 = \frac{4-i-2+3i}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

$$s_{1c}: \{3-2i; 1+i\}$$

$$u_2 = -6+2i \Leftrightarrow z^2 - (4-i)z = -6+2i$$

$$z^2 - (4i-i)z + 6-2i = 0 \quad (2)$$

$$\Delta_2 = (4-i)^2 - 4(6-2i) = 16-8i-1-24+8i$$

$$\Delta_2 = 15-24 = -9$$

$$\Delta_2 = (\pm 3i)^2$$

$$z_1 = \frac{4-i-3i}{2} = \frac{4-4i}{2}$$

$$z_2 = \frac{4-i-3i}{2} = \frac{4+2i}{2}$$

$$z_1 = 2-2i$$

$$z_2 = 2+i$$

$$s_{2c}: \{2-2i; 2+i\}$$

$$s_c: s_{1c} \cup s_{2c} = \{3-2i; 1+i; 2-2i; 2+i\}$$

$$3) A(1+i); B(2+i); C(2-2i)$$

a) Déterminons une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \arg \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \arg(-3i)$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \arg(-3i) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$$

b) Donnons une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC

le triangle ABC est rectangle en B donc [AC]

est l'hypoténuse de ABC. Soit I le milieu de AC.

$$Z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1+i+2-2i}{2} = \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$Z_I = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \quad AC = |z_C - z_A| = |2-2i-1-i| = |1-3i|$$

$$AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \Rightarrow \text{le rayon du cercle vaut } r = \frac{AC}{2} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$(c): \left\{ \Omega = I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right); r = \frac{\sqrt{10}}{2} \right\}$$

a pour équation cartésienne

$$(C): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$$

$$4.) Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$$

$$a) \text{Vérifions que si } z \neq 1, \text{ alors } Z = \frac{1-z^5}{1-z}$$

$$\text{si } Z = \frac{1-z^5}{1-z} \text{ alors } (1-z)Z = 1-z^5 \\ = (1-z)(1+z+z^2+z^3+z^4) = 1+z+z^2+z^3+z^4 - z - z^2 - z^3 - z^4 - z^5 = 1-z^5 \text{ donc } Z = \frac{1-z^5}{1-z} \text{ avec } z \neq 1$$

b) Calculons

$$Z, \left(z = e^{\frac{i2\pi}{5}}\right)$$

$$Z = \frac{1-z^5}{1-z} = \frac{1 - \left(e^{\frac{i2\pi}{5}}\right)^5}{1 - e^{\frac{i2\pi}{5}}} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{\frac{i2\pi}{5}}} = \frac{1-1}{1 - e^{\frac{i2\pi}{5}}} = 0 \text{ car } e^{\frac{i2\pi}{5}} \neq 1$$

$$Z=0$$

Corrigé exercice n°2

$$f(z) = z' = \frac{iz+1-3i}{z-2i} = i \frac{z-i-3}{z-2i}$$

On pose $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$

Exprimons x' et y' en fonction de x et y . $Z' =$

$$\frac{-y+1+(x-3)i}{x+(y-2)i} = \frac{[(-y+1)+(x-3)i][x-(y-2)i]}{x^2+(y-2)^2} = \frac{x(-y+1)+(x-3)(y-2)+(-y+1)i(x-(y-2)i)}{x^2+(y-2)^2}$$

$$Z = \frac{-x-3y+6}{x^2+(y-2)^2} + i \frac{x^2+y^2-3x-3y+2}{x^2+(y-2)^2}$$

$$\text{Comme } Z' = x' + iy' \text{ alors } x' = \frac{-x-3y+6}{x^2+(y-2)^2}$$

$$y' = \frac{x^2+y^2-3x-3y+2}{x^2+(y-2)^2}$$

$$b) z' \in R^* \Leftrightarrow y' = 0 \text{ et } z' \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2}{x^2 + (y-2)^2} = 0 \text{ et } z \neq 3 + i$$

$$\begin{cases} (x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{10}{4} \\ (x, y) \neq (0; 2) \\ (x, y) \neq (3; 1) \end{cases}$$

L'ensemble des points $M(z)$ tel que $z' \in$

R^* est le cercle de centre $\Omega(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$

privée des points A et B.

2. a Points invariants.

$$M = M' \Leftrightarrow Z' = Z$$

$$\Leftrightarrow \frac{iz + 1 - 3i}{z - 2i} = Z$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 3iz - 1 + 3i = 0$$

$$\Delta = -9 - 4(-1 + 3i) = -5 + 12i.$$

Soit $\delta = x + iy$ ou $(x, y) \in R^2$ une racine carrée de Δ .

Alors $\delta^2 = \Delta$

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 13 \quad (2) \\ xy = -6 \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 2y^2 = 18 \Leftrightarrow y = 3 \text{ ou } y = -3$$

$xy < 0$ donc les racines carrées de Δ sont: $\delta_1 = -2 +$

$3i$ et $\delta_2 = 2 - 3i$

$$Z_1 = \frac{3i - 2 + 3i}{2} = -1 + 3i$$

$$Z_2 = \frac{3i + 2 - 3i}{2} = 1$$

Les points invariants de f sont les points du plan d'affixes respectives $Z_1 = -1 + 3i$ et $Z_2 =$

b) Calculons les affixes de E'' et F''

$$E' = f(E) \Leftrightarrow Z_{E'} = \frac{iZ_E + 1 - 3i}{Z_E - 2i}$$

$$\Leftrightarrow Z_{E'} = \frac{i(1-i) + 1 - 3i}{1 - i - 2i} = \frac{1 + 1 + 1 - 3i}{1 - 3i} = \frac{(2-2i)(1+3i)}{10} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$Z_{E'} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

Comme $E'' = S_{(0; \vec{u})}(E')$ alors

$$Z_{E''} = \overline{Z_{E'}} \text{ donc}$$

$$Z_{E''} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$F' = f(F) \Leftrightarrow Z_{F'} = \frac{iZ_F + 1 - 3i}{Z_F - 2i}$$

$$\Leftrightarrow Z_{F'} = \frac{i(-1+2i) + 1 - 3i}{-1 + 2i - 2i} = \frac{-1 - 4i}{-1} = 1 + 4i$$

$$\Leftrightarrow Z_{F'} = 1 + 4i$$

Comme $F'' = S_{(0; \vec{u})}(F')$ alors $Z_{F''} = \overline{Z_{F'}}$ donc

$$Z_{F''} = 1 - 4i$$

3)a) Interprétons géométriquement.

$|Z'|$ et $\arg Z'$

$$|Z'| = |i| \left| \frac{z-i-3}{z-2i} \right| = |i| \left| \frac{z-z_A}{z-z_B} \right| = \frac{AM}{BM}$$

Donc

$$|Z'| = \frac{AM}{BM}$$

$$\arg Z' = \arg \left(i \left(\frac{z-i-3}{z-2i} \right) \right) + 2k\pi$$

$$= \arg(i) + \arg \left(\frac{z-z_A}{z-z_B} \right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \arg(z-z_A) - \arg(z-z_B) + 2k\pi$$

$$= \frac{\pi}{2} + (\widehat{(\vec{u}; \vec{AM})}) - (\widehat{(\vec{u}; \vec{BM})}) + 2k\pi$$

$$= \frac{\pi}{2} + (\widehat{(\vec{BM}; \vec{u})}) + (\widehat{(\vec{u}; \vec{AM})}) + 2k\pi$$

$$\arg Z' = \frac{\pi}{2} + (\widehat{(\vec{BM}; \vec{AM})}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Déterminons (Δ) et (Δ')

$$|Z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM$$

$\Leftrightarrow M$ décrit la médiatrice du segment $[AB].$

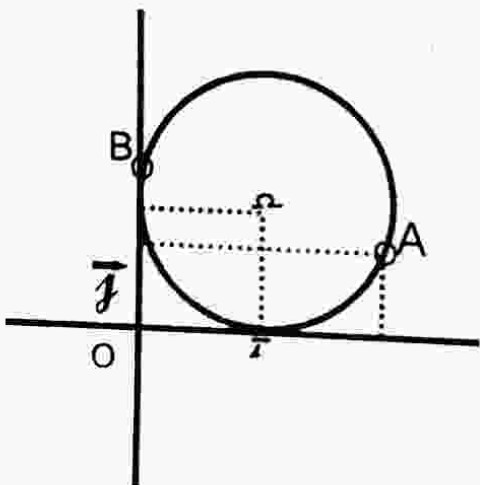
Donc (Δ) est la médiatrice du segment $[AB]$.

$$\begin{aligned} Z' \in i\mathbb{R}^* &\Leftrightarrow \arg Z' = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + (\widehat{BM; AM}) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow (\widehat{BM; AM}) = -k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow M$ décrit la droite (AB) privée de A et B .

L'ensemble (Δ') des points M tel que $Z' \in i\mathbb{R}^*$ est la droite (AB) privée des points A et B .

4) construction. Schéma 1



Corrigé exercice n°4

I.1 Ecrivons sous formes trigonométriques u, v et $w = \frac{u}{v}$

$$\begin{aligned} u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] \end{aligned}$$

$$u = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$v = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$v = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} w = \frac{u}{v} &= \frac{\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]}{\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]} = e^{\frac{-i\pi}{6}} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}} \\ &= e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Déduisons les réels $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$\begin{aligned} w = \frac{u}{v} &= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{1-i} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ w = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\begin{aligned} (\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x &= 2 \Leftrightarrow \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos x + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12}\cos x + \sin\frac{\pi}{12}\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{12} - x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{12} - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ -x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} -x = \frac{4\pi - \pi}{12} + 2k\pi \\ -x = \frac{-4\pi - \pi}{12} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$z \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$S_R \left\{ \frac{-\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right\} k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{II. } W = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$1. \text{ vérifions que } \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{w^2 + 1}{w}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i\frac{4\pi}{5}} + 1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}} \right]$$

$$= \left(e^{i\frac{4\pi}{5}} + 1 \right) e^{-i\frac{2\pi}{5}}$$

$$= \frac{e^{i\left(\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right)} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}}{2}$$

$$= \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}}{2}$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$$

$$2^\circ) \text{ Montrons que } W^5 - 1 = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$$

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \frac{W^5 - 1}{w - 1}$$

$$= \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5}{1 - e^{i\frac{2\pi}{5}}}$$

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \frac{0}{1 - e^{i\frac{2\pi}{5}}} = 0$$

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0 = W^5 - 1$$

$$\text{Vérifions que } X^2 + X - 1 = 0$$

$$X = w + \frac{1}{w}$$

$$X^2 + X - 1 = \left(w + \frac{1}{w}\right)^2 + \left(w + \frac{1}{w}\right) - 1$$

$$= w^2 + 2\left(w \times \frac{1}{w}\right) + \frac{1}{w^2} + w + \frac{1}{w} - 1$$

$$= w^2 + 2 + \frac{1}{w^2} + w + \frac{1}{w} - 1$$

$$= \frac{w^4 + w^3 + w^2 + w + 1}{w^2}$$

or d'après II 2)

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0 \text{ donc}$$

$$\frac{w^4 + w^3 + w^2 + w + 1}{w^2} = 0 \text{ car}$$

$$w^2 \neq 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (1)

$$X^2 + X - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-1) = 5$$

$$X_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$S_R = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$\text{Or } X = w + \frac{1}{w} = 2\cos\frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{Car } \frac{2\pi}{5} \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

Corrigé exercice n°5

a) Exprimons $\bar{w}$ à l'aide de w

$$w = \bar{b}c - b\bar{c} \Leftrightarrow \bar{w} = \overline{\bar{b}c - b\bar{c}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{w} = \overline{\bar{b}c} - \overline{b\bar{c}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{w} = \bar{\bar{b}}\bar{c} - \bar{b}\bar{\bar{c}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{w} = b\bar{c} - \bar{b}c$$

$$(\text{Car } \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}; \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}; \bar{\bar{z}} = z)$$

$$\bar{w} = -(b\bar{c} - b\bar{c})$$

$$\bar{w} = -w$$

Déduisons-en que w est un nombre imaginaire pur.

Le nombre complexe z est imaginaire pur si :

$$z + \bar{z} = 0 \text{ or } w + \bar{w} = w - w = 0$$

Donc w est un nombre imaginaire pur.

b) Montrons à l'aide a) que $(b+c)(\bar{b} - \bar{c})$ et $\frac{b+c}{b-c}$ sont des imaginaires purs.

$$*(b+c)(\bar{b} - \bar{c}) = b\bar{b} - b\bar{c} + c\bar{b} - c\bar{c}$$

$$= |b|^2 - |c|^2 + \bar{b}c - b\bar{c}$$

$$= \bar{b}c - b\bar{c} \text{ car } |b| = |c|$$

$$(b+c)(\bar{b} - \bar{c}) = w \text{ donc } (b+c)(\bar{b} - \bar{c})$$

est un nombre imaginaire pur car w est imaginaire pur d'après a)

$$* \frac{b+c}{b-c} = \frac{(b+c)(\bar{b} - \bar{c})}{(b-c)(\bar{b} - \bar{c})} = \frac{(b+c)(\bar{b} - \bar{c})}{(b-c)(\bar{b} - \bar{c})} \text{ (car } \bar{\bar{z}} = z - z')$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{w}{|b-c|^2} \in i\mathbb{R} \text{ car } w \in i\mathbb{R} \text{ d'après 1)a et } |b-c|^2 \in \mathbb{R}^{**}$$

Donc $\frac{b+c}{b-c}$ est un nombre imaginaire pur.

2. a) Exprimons en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\vec{AH}$ et $\vec{CB}$

Soit $Z_{\vec{AH}}$ et $Z_{\vec{CB}}$ les affixes des vecteurs $\vec{AH}$ et $\vec{CB}$:

$$Z_{\vec{AH}} = (a + b + c) - a$$

$$Z_{\vec{CB}} = b - c$$

$$Z_{\vec{AH}} = b + c; \quad Z_{\vec{CB}} = b - c$$

b) Montrons que (AH) est la hauteur passant par A du triangle ABC .

Si (AH) est la hauteur de ABC passant par A alors on a :

$$\vec{AH} \perp \vec{CB}$$

Vérifions si $\vec{AH} \perp \vec{CB}$: $\frac{Z_{\vec{AH}}}{Z_{\vec{CB}}} = \frac{b+c}{b-c}$ (d'après 2.a) $Z_{\vec{AH}} =$

$$b+c \text{ et } Z_{\vec{CB}} = b-c; \quad \frac{Z_{\vec{AH}}}{Z_{\vec{CB}}} = \frac{b+c}{b-c} \in i\mathbb{R}$$

(D'après 1.b)

Comme $\frac{Z_{\vec{AH}}}{Z_{\vec{CB}}} \in i\mathbb{R}$ alors les vecteurs $\vec{AH}$ et $\vec{CB}$ sont orthogonaux par suite $\vec{AH} \perp \vec{CB}$ donc (AH) est la hauteur du triangle ABC passant par A .

C) Expliquons pourquoi H est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC .

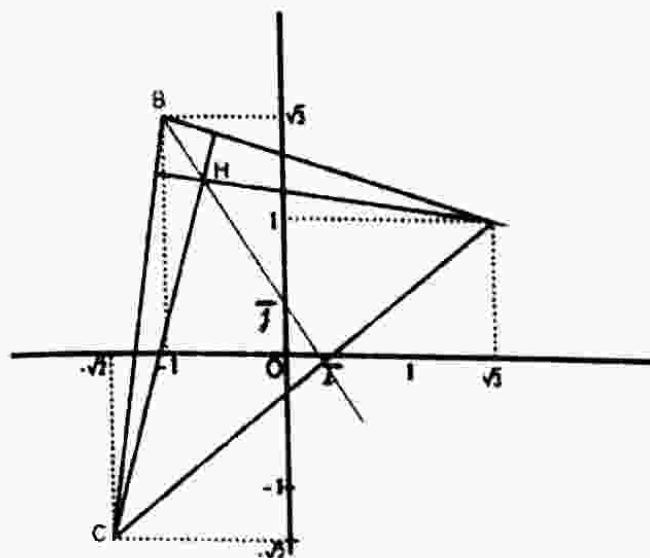
En posant $w' = \bar{b}a - b\bar{a}$ et par analogie au 1)a et 1)b on montre que $w' \in i\mathbb{R}$ et $(b+a)(\bar{b} - \bar{a}) \in i\mathbb{R}$ et que $\frac{b+a}{b-a} \in i\mathbb{R}$. Toujours par analogie au 2)a) et b) on montre que les vecteurs $\vec{CH}$ et $\vec{AB}$ sont orthogonaux. (CH) est donc la deuxième hauteur du triangle ABC passant par B .

(AH) hauteur de ABC passant par A et (CH) hauteur de ABC passant par C donc H est le point d'intersection de (AH) et de (CH) . Par suite H est le point d'intersection

des trois hauteurs du triangle car les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un même point.

3) Plaçons les points A, B, C et H dans le plan π .

Figure... Schéma 2



EXERCICE n°6

1) a) $z \neq 0$ tel que $z^3 + \bar{z} = 0$

(i) Montrons que $|z| = 1$.

$$z^3 + \bar{z} = 0 \Rightarrow z^3 = -\bar{z}$$

$$\Rightarrow |z^3| = |-\bar{z}|$$

$$\Rightarrow |z|^3 = |-\bar{z}|$$

$$\Rightarrow |z|^3 = |z| \text{ car } |-\bar{z}| = |z|$$

$$\Rightarrow |z|^2 = 1 \text{ car } |z| \neq 0$$

$$\Rightarrow |z| = 1 \text{ car } |z| > 0$$

$$\text{donc } |z| = 1$$

(ii) Montrons que : $|z|^4 + 1 = 0$

$$z^3 + \bar{z} = 0 \Rightarrow z(z^3 + \bar{z}) = 0 \times z$$

$$\Rightarrow z^4 + z\bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow z^4 + |z|^2 = 0$$

$$\text{or } |z| = 1 \text{ d'où } |z|^2 = 1$$

$$\text{donc } |z|^4 + 1 = 0$$

$$|z|^4 + 1 = 0$$

b) Montrons que :

* si z est un nombre complexe tel que

$$|z|^4 + 1 = 0 \text{ alors } |z| = 1$$

$$|z|^4 + 1 = 0 \Rightarrow |z|^4 = -1$$

$$\Rightarrow |z^4| = 1$$

$$|z|^4 = 1$$

$$\Rightarrow |z|^2 = 1 \text{ car } |z|^2 > 0$$

$$\text{donc } |z| = 1 \text{ car } |z| > 0$$

* Montrons que : $z^3 + \bar{z} = 0$

$$z^4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow z^4 + |z|^2 = 0$$

$$\Rightarrow z^4 + z\bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow z(z^3 + \bar{z}) = 0$$

$$\text{or } z \neq 0 \text{ donc } z^3 + \bar{z} = 0$$

2. Vérifions que : $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $-a$ sont

des racines de $P(z)$.

$$P(a) = a^4 + 1$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right)^4 + 1 = \left(\frac{1}{2}(2i) \right)^2 + 1$$

$$= \frac{1}{4}(-4) + 1 = -1 + 1$$

$$P(a) = 0 \text{ donc } a \text{ est une racine de } P(z)$$

$$P(-a) = (-a)^4 + 1 = a^4 + 1 \\ = P(a)$$

$$\text{or } P(a) = 0$$

car a est une racine de $P(z)$ donc

$$P(-a) = 0$$

d'où $-a$ est une racine de $P(z)$

b) Déterminons $g(z)$ tel que

$$P(z) = (z - a)g(z).$$

Par la division euclidienne on obtient $g(z)$

$$g(z) = z^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z^2 + iz + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

Factorisons $g(z)$

On sait que $-a$ est une racine de $P(z)$

donc $-a$ est une racine de $g(z)$ d'où $g(z)$ est factorisable par $z + a$.

Par la division euclidienne

$$\text{on a : } g(z) = z^2 + i.$$

$$\text{donc } g(z) = (z + a)(z^2 + i)$$

Factorisons $z^2 + i$.

$$z^2 + i = z^2 - (-i)$$

$$= z^2 - \frac{1}{2}(-2i)$$

$$= z^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1-i)^2$$

$$= z^2 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]^2$$

$$= \left[z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right] \left[z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right] \\ = (z - \bar{a})(z + \bar{a})$$

En définitive :

$$g(z) = (z + a)(z - \bar{a})(z + \bar{a})$$

c) Solutions de $P(z) = 0$

$$P(z) = (z - a)g(z)$$

$$P(z) = (z - a)(z + a)(z - \bar{a})(z + \bar{a})$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = a \text{ ou } z = -a \text{ ou } z = \bar{a} \text{ ou } z = -\bar{a}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{a; -a; \bar{a}; -\bar{a}\}$$

Les solutions de l'équation $P(z)=0$ sont :
 $a; -a; \bar{a}; -\bar{a}$

d) Déduisons en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 + \bar{z} = 0$

De la question 1.a) et b) on déduit que les équations $P(z)=0$ et $z^3 + \bar{z} = 0$ sont

équivalentes donc elles ont les memes solutions. Par conséquent ;

Les solutions de l'équation $z^3 + \bar{z} = 0$ sont : $a; -a; \bar{a}; -\bar{a}$

EXERCICE n°7

A- 1) Calculons $(4 + 3i)^2$;

$$(4 + 3i)^2 = 7 + 24i$$

2) Résolvons l'équation (E) : Soit $z_0 = a \in \mathbb{R}$ la solution réelle, on a :

$$a^3 - (4 - 5i)a^2 - 11(1 + i)a + 2 - 42i = 0$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a^3 - 4a^2 - 11a + 2 = 0 & (1) \\ 5a^2 - 11a - 42 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$5a^2 - 11a - 42 = 0$$

$$\Delta = 961 \text{ et } \sqrt{\Delta} = 31$$

$$a = \frac{11-31}{10} = -2 \text{ ou } a = \frac{11+31}{10} = \frac{21}{5} \text{ et}$$

$a = -2$ vérifie l'équation (1) mais pas

$$a = \frac{21}{5} \text{ donc la solution réelle est } z_0 = -2$$

$$P(z) = (z + 2)q(z) \text{ avec}$$

$$\deg q = 2 \text{ donc}$$

$$P(z) = (z + 2)(z^2 + bz + c)$$

$$= z^3 + (b + 2)z^2 + (c + 2b)z + 2c \text{ avec } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}, \text{ par identification on a :}$$

$$\begin{cases} b + 2 = -4 + 5i \\ 2c = 2 - 42i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6 + 5i \\ c = 1 - 21i \end{cases}$$

$$P(z) = (z + 2)(z^2 + (-6 + 5i)z + 1 - 21i) = 0$$

$$z + 2 = 0 \text{ ou } z^2 + (-6 + 5i)z + 1 - 21i = 0$$

Résolvons l'équation

$$z^2 + (-6 + 5i)z + 1 - 21i = 0$$

$$\Delta = (-6 + 5i)^2 - 4(1 - 21i) = 36 - 60i - 25 - 4 + 84i$$

$$\Delta = 7 + 24i = (4 + 3i)^2$$

$$z_1 = \frac{6 - 5i - 4 - 3i}{2} = \frac{2 - 8i}{2} = 1 - 4i$$

$$z_2 = \frac{6 - 5i + 4 + 3i}{2} = \frac{10 - 2i}{2} = 5 - i$$

$$S_C = \{-2; 1 - 4i; 5 - i\}$$

A- 1) Calculons $Z = \frac{c-a}{b-a}$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{-2 - 1 + 4i}{5 - i - 1 + 4i} = \frac{-3 + 4i}{4 + 3i} \\ &= \frac{(-3 + 4i)(4 - 3i)}{16 + 9} \\ &= \frac{-12 + 9i + 16i + 12}{25} = \frac{25i}{25} = i \end{aligned}$$

$$Z = i$$

Nature exacte du triangle ABC

$$\begin{cases} |Z| = 1 \\ \arg Z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \\ \begin{cases} AC = AB \\ \text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

Donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

2) Déterminons l'abscisse d du point D.

$$t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Rightarrow z_B - z_A = d - z_C$$

$$\Rightarrow d = z_B - z_A + z_C$$

$$d = 5 - i - 1 + 4i - 2$$

$$d = 2 + 3i$$

3) Déterminons la nature précise du quadrilatère ABDC

$$t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ donc ABDC}$$

est un parallélogramme.

$$\begin{cases} AB = AC \\ \text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ et ABDC est}$$

un parallélogramme donc ABDC est un carré.

EXERCICE n°8

1) Montrons que $z' = \frac{z-1+4i}{-z+2+3i}$

$$z' = \frac{(1-i)z + 3 + 5i}{-(1-i)z + 5 + i}$$

$$= \frac{(1-i) \left[z + \frac{3+5i}{1-i} \right]}{(1-i) \left[-z + \frac{5+i}{1-i} \right]} = \frac{z-1+4i}{-z+2+3i}$$

2) a) Déterminons les réels X et Y

Après tout calcul fait, on trouve :

$$z' = \frac{-x^2+3x-y^2-y+10}{(x-2)^2+(y-3)^2} + i \frac{y-7x+11}{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} X = \frac{-x^2+3x-y^2-y+10}{(x-2)^2+(y-3)^2} \\ Y = \frac{y-7x+11}{(x-2)^2+(y-3)^2} \end{cases}$$

b) Déduisons et représentons :

i) (Γ) des points $M(z)$ tels que $M' \in (0; \vec{v})$

$$M' \in (0; \vec{u}) \Leftrightarrow X=0 \text{ et}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - y^2 - y + 10 = 0 \text{ et } (x; y) \neq (2; 3)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \text{ et } (x; y) \neq (2; 3) \text{ donc } (\Gamma) \text{ est le cercle de centre}$$

$$\Omega \left(\frac{3}{2}; \frac{-1}{2}\right) \text{ et de rayons } R = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ privé du point } F.$$

ii) (Γ') des points $M(z)$ tels que $M' \in (0; \vec{u})$

$$M' \in (0; \vec{u}) \Leftrightarrow Y = 0 \text{ et}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y - 7x + 11 = 0 \text{ et } (x; y) \neq (2; 3)$$

$$\Leftrightarrow y = 7x - 11 \text{ et } (x; y) \neq (2; 3)$$

(Γ') est la droite $(D): y = 7x - 11$

privé du point F.

3) a) Interprétation géométrique de $|z'|$ et $\arg(z')$

$$|z'| = \left| \frac{z-1+4i}{-z+2+3i} \right| = \frac{|z-z_E|}{|z-z_F|} = \frac{ME}{MF}$$

$$\arg(z) = \arg\left(-\frac{z-z_E}{z-z_F}\right)$$

$$= \arg(-1) + \arg\left(\frac{z-z_E}{z-z_F}\right)$$

$$\arg(z') = \pi + \text{mes}(\overrightarrow{MF}; \overrightarrow{ME})$$

b) Déduisons et représentons l'ensemble :

i) (Γ_1) des points $M(z)$ tels que $z' \in i\mathbb{R}$,

$$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \neq z_F \text{ et } z' = 0 \text{ et } \arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow z \neq z_F \text{ et } z = z_E \text{ et}$$

$$\pi + \text{mes}(\overrightarrow{MF}; \overrightarrow{ME}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow z \neq z_F \text{ et}$$

$$z = z_E \text{ et } \text{mes}(\overrightarrow{MF}; \overrightarrow{ME}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

(Γ_1) est le cercle de diamètre $[FE]$ privé de F.

ii) (Γ_2) des points $M(z)$ tels que $z' \in \mathbb{R}$

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \neq z_F \text{ et } z' = 0 \arg(z') = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z \neq z_F \text{ et } z = z_E \text{ et } \text{mes}(\overrightarrow{MF}; \overrightarrow{ME}) = k\pi \Leftrightarrow M \neq F \text{ et } M = E \text{ et } \text{mes}(\overrightarrow{MF}; \overrightarrow{ME}) = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

(Γ_2) est la droite $[FE]$ privé du point F.

iii) (Γ_3) des points $M(z)$ tels que $M' \in \mathbb{C}(0; 1)$

$$M' \in C(0;1) \Leftrightarrow OM' = 1$$

$$\Leftrightarrow |z'| = 1$$

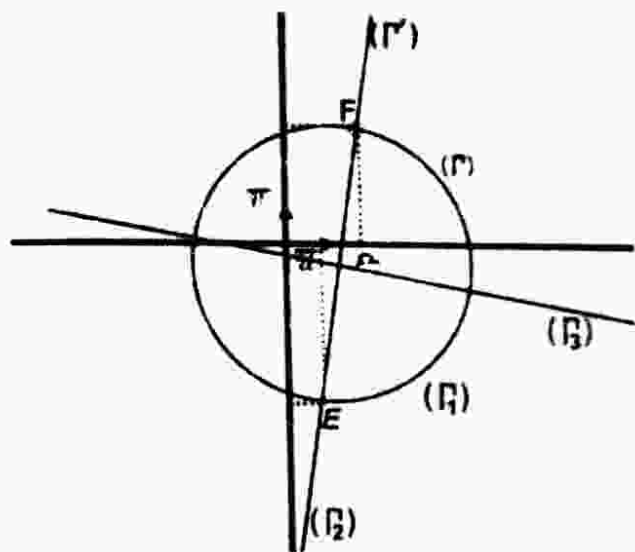
$$\Leftrightarrow \frac{ME}{MF} = 1$$

$$\Leftrightarrow ME = MF$$

(Γ_3) est la médiatrice du segment $[EF]$.

Représentons les différents ensembles :

FIGURE Schéma 3



EXERCICE n°9

1) Déterminons l'afixe de F en fonction de r et θ

OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant

$$(\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} OE = OF \\ \arg \frac{z_F}{z_E} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_F}{z_E} \right| = 1 \\ \arg \frac{z_F}{z_E} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

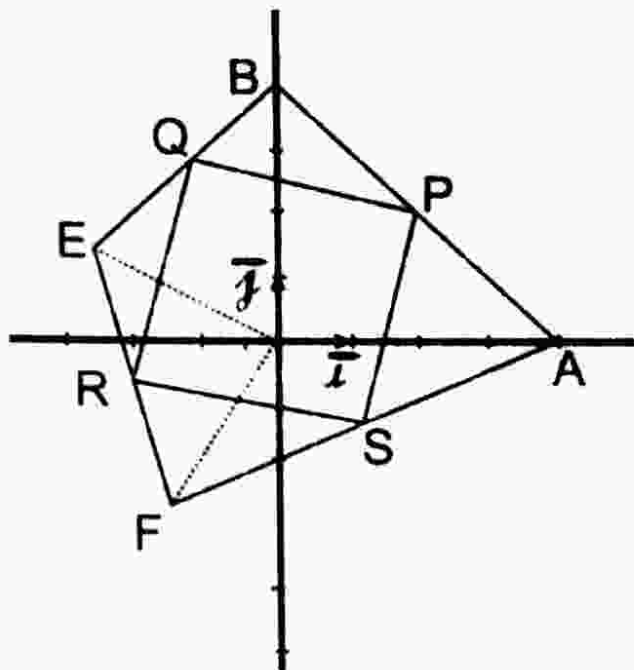
$$\Leftrightarrow \frac{z_F}{z_E} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$\Leftrightarrow z_F = iz_E = ire^{i\theta}$$

donc

$$z_F = re^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

2) Figure à compléter. Schéma 4



3)a) Prouvons que PQRS est un parallélogramme.

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= \vec{PB} + \vec{BQ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BE} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BE}) \end{aligned}$$

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{AE}$$

$$\begin{aligned} \vec{SR} &= \vec{SF} + \vec{FR} \\ &= \frac{1}{2}\vec{AF} + \frac{1}{2}\vec{FE} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{AF} + \vec{FE}) \end{aligned}$$

$$\vec{SR} = \frac{1}{2}\vec{AE}$$

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{AE} \text{ et } \vec{SR} = \frac{1}{2}\vec{AE}$$

Donc $\vec{PQ} = \vec{SR}$ d'où le quadrilatère

PQRS est un parallélogramme.

b) Déterminons le module et un argument de

$$Z = \frac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}$$

$$Z = \frac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P} = \frac{\frac{z_E + z_P}{2} - \frac{z_E + z_B}{2}}{\frac{z_E + z_B}{2} - \frac{z_B + z_A}{2}} = \frac{z_P - z_B}{z_E - z_A} = \frac{iz_E - iz_A}{z_E - z_A} = i$$

$$Z = i$$

$$|z| = |i| = 1 \text{ donc}$$

$$|Z| = 1$$

$$\arg(Z) = \arg i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ Donc}$$

$$\text{un argument de } Z \text{ est } \frac{\pi}{2}$$

Déduisons en que PQRS est un carré

$$* |Z| = \left| \frac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P} \right| = \frac{|z_R - z_Q|}{|z_Q - z_P|} = \frac{RQ}{QP}$$

$$|Z| = 1 \Leftrightarrow RQ = QP \text{ donc}$$

le triangle PQR est isocèle (i)

$$* \arg Z = \arg \left(\frac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{PQ}; \overrightarrow{QR}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ donc}$$

PQR est rectangle en Q (ii)

De (i) et (ii) on déduit que PQR est rectangle

isocèle en Q or d'après 3. a) PQRS est

un parallélogramme donc PQRS est un carré.

4) a) Calculons les affixes de P et Q en fonction de r et θ

$$P \text{ est milieu de } [AB] \text{ donc } z_P = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$$

$$z_P = 2 + 2i$$

$$Q \text{ est milieu de } [BE] \text{ donc } z_Q = \frac{z_B + z_E}{2}$$

$$= \frac{4i + r(\cos\theta + i\sin\theta)}{2}$$

$$z_Q = \frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{1}{2}(4 + r\sin\theta)i$$

b) Aire du carré PQRS

PQRS étant un carré, son aire est : $A = PQ^2$ en unité d'aire

$$A = |z_Q - z_P|^2 = \left| \frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{1}{2}(4 + r\sin\theta)i - 2 - 2i \right|^2$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2}r\cos\theta - 2 \right) + \left(\frac{1}{2}r\sin\theta \right)i \right|^2$$

$$A = \frac{1}{4}r^2 - 2r\cos\theta + 4$$

c) Déterminons la valeur de θ pour laquelle cette aire est maximale.

Soit f la fonction définie sur $[0; 2\pi[$ par

$$f(\theta) = A = \frac{1}{4}r^2 - 2r\cos\theta + 4$$

; r est un réel fixe.

f est dérivable sur $[0; 2\pi[$ et

$$\forall \theta \in [0; 2\pi[, f'(\theta) = 2r\sin\theta$$

$\forall \theta \in [0; \pi], f'(\theta) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0; \pi]$

$$\forall \theta \in [\pi; 2\pi[, f'(\theta) \leq 0$$

donc f est décroissante sur $[\pi; 2\pi[$

on en déduit que f admet sur $[0; 2\pi[$

un maximum atteint en $\theta_0 = \pi$ Donc

pour $\theta = \pi$, l'aire A est maximale.

L'affixe de E est alors : $z_E = re^{i\pi} = -r$

$$z_E = re^{i\pi} = -r$$

EXERCICE n°10

Z et z sont des nombres complexes tels que
: $Z = z^2 - 2\bar{z} + 1$

a) On pose : $z = x + iy$ (avec x et y des réels).
Calculons, en fonction de x et de y , la partie réelle X et la partie imaginaire Y de Z .

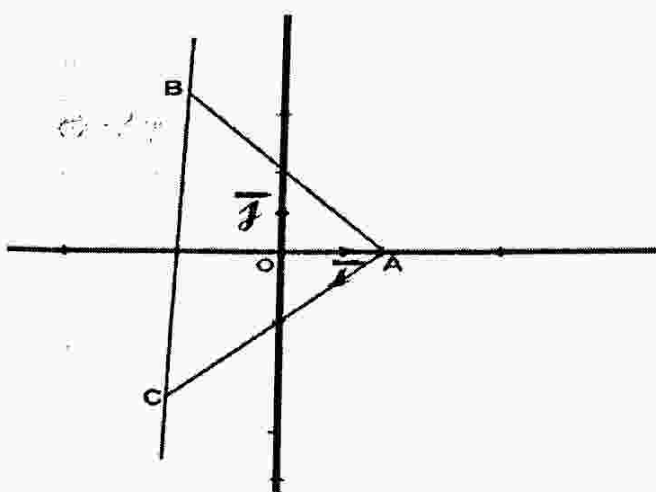
$$Z = (x + iy)^2 - 2(x - iy) + 1 = x^2 + 2ixy - y^2 - 2x + 2iy + 1 = x^2 - y^2 - 2x + 1 + i(2xy + 2y)$$

$$\text{Donc } X = x^2 - y^2 - 2x + 1 \text{ et } Y = 2xy + 2y$$

b) Trouvons et représentons dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points dont l'affixe z est tel que Z soit réel.

Z est un réel signifie que $Y = 0$, c'est-à-dire que $y = 0$ ou $x = -1$; l'ensemble cherché est la réunion des droites d'équation $x = -1$ et $y = 0$ (axe des abscisses)

FIGURE Schéma 5



c) Trouvons l'ensemble des complexes z tels que $z = 0$.

$$Z = 0 \text{ équivaut à } x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \text{ et } 2y(x + 1) = 0$$

; après résolution on trouve que l'ensemble cherché est $S = \{-1 + 2i; -1 - 2i; 1\}$

d) A , B et C sont les images respectives des nombres complexes : 1 ; $-1 + 2i$; $-1 - 2i$.

Plaçons les points A , B et C (voir figure)

Montrons que le triangle ABC est isocèle rectangle.

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i \text{ qui a pour module } 1 \text{ et pour argument } -\frac{\pi}{2} \text{ donc } ABC \text{ est un triangle isocèle et rectangle en } A.$$

LIMITE ET CONTINUITE

Corrigé exercice 2

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 2}{x - 1}$$

1) Etudions la limite de f en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 3x^2 - 4}{(x - 1)(\sqrt{1 + 3x^2} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 1)}{(x - 1)(\sqrt{1 + 3x^2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x + 1)}{\sqrt{1 + 3x^2} + 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} 3(x + 1) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1 + 3x^2} + 2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2}$$

b) f est prolongeable par continuité en 1 car f admet une limite finie en 1.

Déterminons son prolongement par continuité.

Soit g le prolongement par continuité de f en 1.

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq 1 \\ g(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$2^*) g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0$$

$$g(0) = 0$$

a) Montrons que g est continue en 0.

Pour

$$x \neq 1, \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^* \text{ et on a : } -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\text{par suite } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$$

donc g est continue en 0

b) Montrons que g est dérivable en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{pour } x \neq 0, \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^* \text{ et } -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(théorème des gendarmes)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0 \text{ et } 0 \in \mathbb{R}$$

donc g est dérivable en 0

c) Déterminons $g'(x)$ pour tout $x \neq 0$.

$$\text{pour } x \neq 0, g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en

tant que fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composé de fonctions dérivables.

La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonction dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

$$g'(x) = (x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right))'$$

$$= (x^2)' \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 (\sin\left(\frac{1}{x}\right))'$$

$$= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left[-\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

CALCUL DIFFERENTIEL

Exercice n°4

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)\sqrt{1-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^3-1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A

1) Etudions la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

Continuité

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2)\sqrt{1-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3-1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 = f(1)$$

donc f est continue en 1.

dérivabilité.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-2)\sqrt{1-x}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-2)(1-x)}{-(1-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-2)}{-\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{0^-} \end{aligned}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$$

donc f n'est pas dérivable à gauche en 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x^3 - 1}{x^2}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x^2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2(x - 1)} = \frac{3}{1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3$$

donc f est dérivable à droite en 1

f n'est donc pas dérivable en 1

2) Etudions les variations de f .

sur $]-\infty; 1]$

$f(x) = (x-2)\sqrt{1-x}$, f est dérivable sur $]-\infty; 1]$

en tant que produit de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)' \sqrt{1-x} + (\sqrt{1-x})' (x-2) = \\ &= \sqrt{1-x} - \frac{(x-2)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x) - (x-2)}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{2 - 2x - x + 2}{2\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{-3x + 4}{2\sqrt{1-x}}$$

le signe de f' est celui de $-3x + 4$

$$-3x + 4 > 0 \Leftrightarrow -3x > -4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$$

pour $x \in]-\infty; 1]$ $f'(x) > 0$

donc f est strictement croissante.

sur $]1; +\infty[$

$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$, f est dérivable sur $]1; +\infty[$

en tant que fonction rationnelle.

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 1)'(x^2) - (x^2)(x^3 - 1)'}{x^4}$$

$$= \frac{3x^2(x^2) - 2x(x^3 - 1)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 2x^4 + 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^4}$$

$\forall x \in]1; +\infty[$ $f'(x) > 0$

donc f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

Tableau de variation.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	$+\infty$	3
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)\sqrt{1-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2} = +\infty$$

3) Montrons que la droite $(D): y = x$

est une asymptote oblique à (C) de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{x^2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$$

donc (D): $y = x$ est une asymptote oblique à

(C) en $+\infty$.

4) Construction de (D) et (C)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)\sqrt{1-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)}{x} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = 1 \times (+\infty) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= +\infty \end{aligned}$$

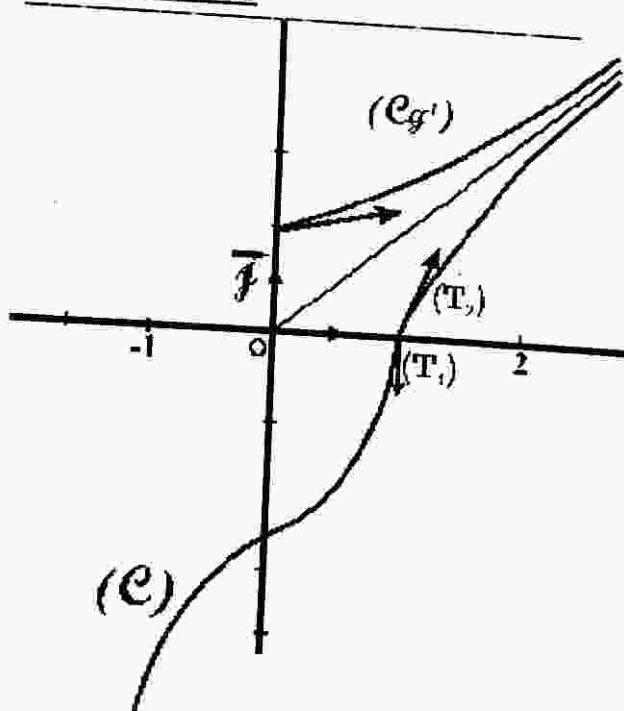
donc (C) admet une branche parabolique de direction (yy') en $-\infty$

Demi-tangentes

$$(T_1): \begin{cases} x = 1 \\ y < 1 \end{cases} \quad (T_2): \begin{cases} x > 1 \\ y = 3(x-1) \end{cases}$$

(figure) Schéma 6

Corrigé exercice 5



Problème

Partie 1 :

$$g(x) = 4x^3 - 3x - 8$$

a) Etudions le sens de variation de g puis dressons son T.V.

b) g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 12x^2 - 3 \\ \Leftrightarrow g'(x) &= 3(4x^2 - 1) \\ \Leftrightarrow g'(x) &= 3(2x-1)(2x+1) \\ g'(x) = 0 &\Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

* Pour $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$ $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$

* pour $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ $g'(x) < 0$ Donc g est strictement décroissante sur $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$.

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	0	+
$g(x)$	$-\infty$	-7	-9	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -7 ; g\left(\frac{1}{2}\right) = -9$$

c) Montrons que $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α .

D'après le tableau de variation de g , on constate que g admet un maximum local sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ dont la valeur

est -7 ; par suite l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty; \frac{1}{2}]$

*Toujours d'après le tableau de variation de g on constate que g est continue et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[\frac{1}{2}; +\infty[$ vers $g([\frac{1}{2}; +\infty[) = [-9; +\infty[$ or $0 \in [-9; +\infty[$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique dans $[-9; +\infty[$

Finalement $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vérifions que $1,4 < \alpha < 1,5$

$$g(1,4) = 4(1,4)^3 - 3(1,4) - 8$$

$$g(1,4) = 10,976 - 12,2$$

$$g(1,4) = -1,224$$

$$g(1,5) = 4(1,5)^3 - 3(1,5) - 8$$

$$g(1,5) = 3,375 \times 4 - 4,5 - 8$$

$$g(1,5) = 1$$

$$g(1,4) < g(\alpha) < g(1,5)$$

$\Rightarrow 1,4 < \alpha < 1,5$ car g est strictement croissante.

d) Déterminons le signe de $g(x)$.

$$\text{pour } x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$$

$$\text{pour } x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$$

$$\text{pour } x = \alpha, g(x) = 0$$

Partie 2

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{2-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1° Déterminons le domaine de définition D de f puis calculons les limites de f aux bornes de D .

$$\text{Soit } f_1(x) = x\sqrt{2-x} - 1; x \leq 0$$

$$D_{f_1}: \{x \in \mathbb{R} / 2-x \geq 0 \text{ et } x \leq 0\}$$

$$2-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0]$$

$$D_{f_1} =]-\infty; 0]$$

$$\text{Soit } f_2(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1};$$

$$D_{f_2}: \{x \in \mathbb{R} / 4x^2-1 \neq 0 \text{ et } x > 0\}$$

$$4x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2} \text{ et } x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x \in]0, +\infty[\\ x \neq \frac{1}{2} \text{ et } x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$D_{f_2}:]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$D = D_{f_1} \cup D_{f_2} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Calcul des limites aux bornes de D .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{2-x} - 1 = -\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x^3+1}{4x^2-1} = \frac{\frac{9}{8}+1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$
---	---

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2) a) continuité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -1$$

donc f est continue en 0.

b) Etudions la dérivabilité de f en 0
puis interprétons le résultat obtenu.

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x\sqrt{2-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{2-x} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1} + 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 1 + 4x^2 - 1}{x(4x^2 - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 4x^2}{x(4x^2 - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4x}{4x^2 - 1} = 0$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 4x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^2 - 1 = -1 \end{cases}$$

$$f'_g(0) = \sqrt{2} \text{ et } f'_d(0) = 0$$

donc f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique.

f admet deux demi-tangentes en 0

Une demi-tangente de coefficient directeur $\sqrt{2}$ à gauche et une demi-tangente horizontale à droite.

3)a) Etudions le sens de variation de f.

$$* x \in]-\infty; 0], f(x) = x\sqrt{2-x} - 1$$

f est dérivable sur $]-\infty; 0]$ en tant

que composée; produit et somme de fonctions dérivables.

$$f'(x) = (x\sqrt{2-x} - 1)'$$

$$f'(x) = \sqrt{2-x} + x \left(\frac{-1}{2\sqrt{2-x}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{2(2-x) - x}{2\sqrt{2-x}}$$

$$f'(x) = \frac{-3x + 4}{2\sqrt{2-x}} \text{ avec } x \leq 0$$

Pour $x \leq 0$, $2\sqrt{2-x} > 0$ donc le signe de f' est celui de $-3x + 4$.

$$-3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow x \in]-\infty; \frac{4}{3}]$$

$$\text{or }]-\infty; 0] \subset]-\infty; \frac{4}{3}]$$

$$\text{donc pour } x < 0, -3x + 4 > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0$$

donc f est strictement croissante

$$* x \in]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1}$$

f est dérivable sur

$$]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$$

en tant que fonction rationnelle

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1} \right)'$$

$$= \frac{3x^2(4x^2 - 1) - 8x(x^3 + 1)}{(4x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{12x^4 - 3x^2 - 8x^4 - 8x}{(4x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{4x^4 - 3x^2 - 8x}{(4x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{4x^4 - 3x^2 - 8x}{(4x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(4x^3 - 3x^2 - 8)}{(4x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(4x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(4x^2 - 1)^2}$$

$$x \in]0, +\infty[\setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow x > 0.$$

$$x > 0 \text{ et } (4x^2 - 1)^2 > 0$$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.
D'après partie 1)c)

• pour $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; \alpha\right[$ $g(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2}; \alpha\right[$

• pour $x \in]\alpha; +\infty[$ $g(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$
donc f est strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$

b) Démontrons que : $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 + 1}{4\alpha^2 - 1}$$

$$\text{or } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 4\alpha^3 - 3\alpha - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow 4\alpha^3 = 3\alpha + 8$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{3\alpha + 8}{4}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{3\alpha + 8}{4\alpha}$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha^2 = \frac{3}{4} + \frac{2}{\alpha}$$

Remplaçons α^3 et α^2 par leurs expressions dans $f(\alpha)$. On obtient

$$f(\alpha) = \frac{\frac{3\alpha + 8}{4} + 1}{4\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{\alpha}\right) - 1}$$

$$f(\alpha) = \frac{\frac{3\alpha + 8}{4} + 1}{\frac{12}{4} + \frac{8}{\alpha} - 1} = \frac{\frac{3\alpha + 12}{4}}{\frac{11}{4} + \frac{8}{\alpha} - 1} \times \frac{\alpha}{2\alpha + 8} \\ = \frac{3(\alpha + 4)}{4} \times \frac{\alpha}{2(\alpha + 4)} = \frac{3}{8}\alpha$$

$$f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$$

Déduisons-en un encadrement de $f(\alpha)$ par deux décimaux à 10^{-1} près.

$$f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$$

$$1,4 < \alpha < 1,5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}(1,4) < \frac{3}{8}\alpha < \frac{3}{8}(1,5)$$

$$\Leftrightarrow 0,52 < \frac{3}{8}\alpha < 0,56$$

$$\Leftrightarrow 0,52 < f(\alpha) < 0,56$$

c) Dressons le tableau de variation de f (confère 3a)

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\sqrt{2}$	0	-	+
$f(x)$			-1		
	$-\infty$			$+\infty$	$+\infty$

4)a) Trouvons les réels a, b, c et d tel que pour tout réel $x \in]0, +\infty[$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-1} + \frac{d}{2x+1}$$

$$f(x) = \frac{(ax+b)(4x^2-1) + c(2x+1) + d(2x-1)}{4x^2-1}$$

$$f(x) = \frac{4ax^3 - ax - 4bx^2 - b + 2cx + c + 2dx - d}{4x^2-1}$$

$$f(x) = \frac{4ax^3 + 4bx^2 + (2c+2d-a)x + c-b-d}{4x^2-1}$$

Par identification des coefficients des monômes de

même degré, on a : $\begin{cases} 4a = 1 \\ 4b = 0 \\ 2c + 2d - a = 0 \text{ etc } -b - d = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c + d = \frac{1}{8} \text{ et } c - d = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c + d = \frac{1}{8} \\ c - d = 1 \end{cases} \quad c = 1 + d$$

$$1 + d + d = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2d = \frac{-7}{8}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{-7}{16}$$

$$c = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

$$a = \frac{1}{4}; b = 0; c = \frac{9}{16} \text{ et } d = \frac{-7}{16}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{\frac{9}{16}}{2x-1} - \frac{\frac{7}{16}}{2x+1}$$

b) Dédudons en que (C) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $+\infty$

Posons (Δ) : $Y = \frac{1}{4}x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{9}{16}}{2x-1} - \frac{\frac{7}{16}}{2x+1} \right) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0$$

donc la droite (Δ) : $Y = \frac{1}{4}x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

Position de (C) par rapport à (Δ) voir figure

$$f(x) - y = \frac{\frac{9}{16}}{2x-1} - \frac{\frac{7}{16}}{2x+1} = \frac{x+4}{4(2x-1)(2x+1)}$$

$$\text{Pour } x \in]0, \frac{1}{2}[, f(x) - y < 0 \Leftrightarrow$$

$f(x) < y$. Donc (C) est en-dessous de (Δ)

Pour $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[, f(x) - y > 0 \Leftrightarrow f(x) > y$. Donc (C) est au-dessus de (Δ)

5) Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

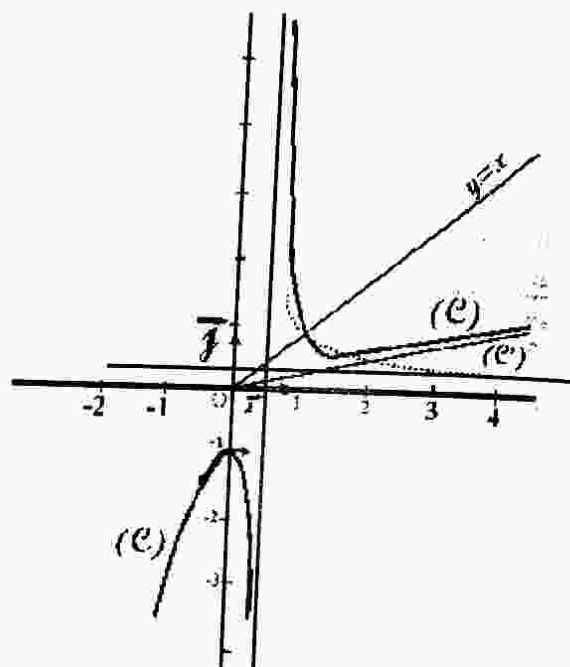
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2-x} - \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ donc la courbe (C)}$$

admet une branche parabolique de direction (yy') au voisinage de $-\infty$

6) Traçons (Δ) et la courbe (C): Schéma 7



7) Montrons que h admet une bijection réciproque h^{-1}

D'après le tableau de variation de f, on constate que h : la restriction de f à $]\frac{1}{2}; \alpha[$ est continue et strictement décroissante sur $]\frac{1}{2}; \alpha[$. elle réalise donc une bijection de $]\frac{1}{2}; \alpha[$ sur $h(]\frac{1}{2}; \alpha[) = [f(\alpha); +\infty[$ h admet donc une bijection réciproque h^{-1} définie de $[f(\alpha); +\infty[$ vers $]\frac{1}{2}; \alpha[$.

b) construction de (C') de h^{-1} (confère graphique)

Justification : (C') est l'image du symétrique de la restriction de (C) à l'intervalle $]\frac{1}{2}; \alpha[$ par rapport à la 1^{ère} bissectrice ($y = x$)

Exercice n°7

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+2x}{x+1} & x \leq 0 \\ f(x) = x\sqrt{-x+4} & 0 \leq x \leq 4 \\ f(x) = \frac{x-4}{2x-11} & x > 4 \end{cases}$$

1°) Déterminons l'ensemble de définition D_f de la fonction f .

Posons $f_1(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}$, si $x \leq 0$

$$D_{f_1} : \{ x \leq 0 \mid x+1 \neq 0 \},$$

$$x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

$$D_{f_1} =]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$$

Posons $f_2(x) = x\sqrt{-x+4}$, si $0 \leq x \leq 4$

$$D_{f_2} : \{ 0 \leq x \leq 4 \mid -x+4 \geq 0 \}$$

$$-x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq 4$$

$$D_{f_2} = [0, 4] \text{ posons}$$

$$f_3(x) = \frac{x-4}{2x-11} \quad x > 4$$

$$D_{f_3} : \{ x > 4 \mid 2x-11 \neq 0 \}$$

$$2x \neq 11 \Leftrightarrow x \neq \frac{11}{2}$$

$$D_{f_3} : \left] 4; \frac{11}{2} \right[\cup \left] \frac{11}{2}; +\infty \right[$$

$$\text{Finalement } D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup D_{f_3}$$

$$=]-\infty; -1[\cup]-1; 0] \cup [0, 4] \cup \left] 4; \frac{11}{2} \right[\cup \left] \frac{11}{2}; +\infty \right[$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -1; \frac{11}{2} \right\}$$

2°) Etudions la continuité de f en 0 et en 4

Continuité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+2x}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x\sqrt{-x+4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

donc f est continue en 0

Continuité en 4

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x\sqrt{-x+4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{2x-11} = \frac{0}{8-11} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) = 0 \text{ donc } f \text{ est continue en 4}$$

3°) Etudions la dérivabilité de f sur D_f

Dérivabilité en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2x}{x(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{x+1} = 2 \end{aligned}$$

donc f est dérivable à gauche en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{-x+4}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{-x+4} = 2 \end{aligned}$$

donc f est dérivable à droite en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &\neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en 0} \end{aligned}$$

Dérivabilité en 4

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x\sqrt{-x+4}}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x(-x+4)}{(x-4)\sqrt{-x+4}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-x}{\sqrt{-x+4}} = \frac{-4}{0^+} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = -\infty$$

Exercice n°7

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x}{x+1} & x \leq 0 \\ x\sqrt{-x+4} & 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{x-4}{2x-11} & x > 4 \end{cases}$$

1°) Déterminons l'ensemble de définition D_f de la fonction f .

Posons $f_1(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}$, si $x \leq 0$

$$D_{f_1}: \{x \leq 0 \mid x+1 \neq 0\},$$

$$x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

$$D_{f_1} =]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$$

Posons $f_2(x) = x\sqrt{-x+4}$, si $0 \leq x \leq 4$

$$D_{f_2}: \{0 \leq x \leq 4 \mid -x+4 \geq 0\}$$

$$-x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq 4$$

$$D_{f_2} = [0, 4] \text{ posons}$$

$$f_3(x) = \frac{x-4}{2x-11} \quad x > 4$$

$$D_{f_3}: \{x > 4 \mid 2x-11 \neq 0\}$$

$$2x \neq 11 \Leftrightarrow x \neq \frac{11}{2}$$

$$D_{f_3}: \left]4; \frac{11}{2}\right[\cup \left]\frac{11}{2}; +\infty\right[$$

$$\text{Finalement } D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup D_{f_3}$$

$$=]-\infty; -1[\cup]-1; 0] \cup [0, 4] \cup \left]4; \frac{11}{2}\right[\cup \left]\frac{11}{2}; +\infty\right[$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; \frac{11}{2}\right\}$$

2°) Etudions la continuité de f en 0 et en 4

Continuité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+2x}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x\sqrt{-x+4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

donc f est continue en 0

Continuité en 4

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x\sqrt{-x+4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{2x-11} = \frac{0}{8-11} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) = 0 \text{ donc } f \text{ est continue en 4}$$

3°) Etudions la dérivabilité de f sur D_f

Dérivabilité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+2x}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{x+1} = 2$$

donc f est dérivable à gauche en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{-x+4}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{-x+4} = 2$$

donc f est dérivable à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en 0}$$

Dérivabilité en 4

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x\sqrt{-x+4}}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x(-x+4)}{(x-4)\sqrt{-x+4}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-x}{\sqrt{-x+4}} = \frac{-4}{0^+}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = -\infty$$

donc f n'est pas dérivable à gauche en 4. La courbe (C) admet une demi -

tangente verticale (T_1) d'équation $\begin{cases} x = 4 \\ y > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x - 4}{(2x - 11)(x - 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{2x - 11} = \frac{1}{8 - 11} = \frac{1}{-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \frac{-1}{3}$$

donc f est dérivable à droite en 4.

La courbe (C) admet donc une demi -

tangente (T_2) d'équation $\begin{cases} x > 4 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \end{cases}$

Finalement l'ensemble de dérivabilité de f est

$$R \setminus \left\{ -1; 4; \frac{11}{2} \right\}$$

4°) Etudions les variations de f

pour $x \leq 0$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2x)'(x + 1) - (x^2 + 2x)(x + 1)'}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{(2x + 2)(x + 1) - (x^2 + 2x)}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 - x^2 - 2x}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 2x + 1) + 1}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1)^2 + 1}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1)^2 + 1}{(x + 1)^2} > 0$$

donc f est strictement croissante

sur $] -\infty; -1[$ et sur $] -1; 0]$

Pour $0 \leq x \leq 4$, $f(x) = x\sqrt{-x + 4}$

$$f(x) = x\sqrt{-x + 4}$$

$$f'(x) = (x)' \sqrt{-x + 4} + (x)(\sqrt{-x + 4})'$$

$$= \sqrt{-x + 4} + \frac{-1x}{2\sqrt{-x + 4}} = \frac{2(-x + 4) - x}{2\sqrt{-x + 4}}$$

$$= \frac{-3x + 8}{2\sqrt{-x + 4}}$$

$$f'(x) = \frac{-3x + 8}{2\sqrt{-x + 4}}$$

le signe de $f'(x)$ dépend de $-3x + 8$

$$-3x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -8 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{3}$$

* Pour $x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$ $-3x + 8 \geq 0$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0$ donc f est croissante

* Pour $x \in \left[\frac{8}{3}; 4\right]$ $f'(x) \leq 0$

f est donc décroissante.

Pour $x > 4$

$$f(x) = \frac{x - 4}{2x - 11}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x - 4}{2x - 11} \right)'$$

$$= \frac{(x - 4)'(2x - 11) - (x - 4)(2x - 11)'}{(2x - 11)^2}$$

$$= \frac{2x - 11 - 2(x - 4)}{(2x - 11)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 11 - 2x + 8}{(2x - 11)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(2x - 11)^2}$$

$\forall x > 4$, $f'(x) < 0$ donc f strictement est décroissante sur $\left]4; \frac{11}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{11}{2}; +\infty\right[$

5°) Calculons les limites de f aux bornes de D_f

puis dressons le tableau de variation de f .

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x + 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x}{x + 1} = \frac{-1}{0^-}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x}{x + 1} = \frac{-1}{0^+}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{11}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{11}{2}} \frac{x - 4}{2x - 11} = \frac{\frac{3}{2}}{0^-}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{11}{2}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{11}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{11}{2}^+} \frac{x - 4}{2x - 11} = \frac{\frac{3}{2}}{0^+}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{11}{2}^+} f(x) = +\infty$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{8}{3}$	4	$\frac{11}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	○	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	-	-
$f(x)$	$+\infty$			$\frac{16}{3\sqrt{3}}$			$\frac{1}{2}$

6.) Etudions les branches infinies en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x(x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x + 1} - x$$

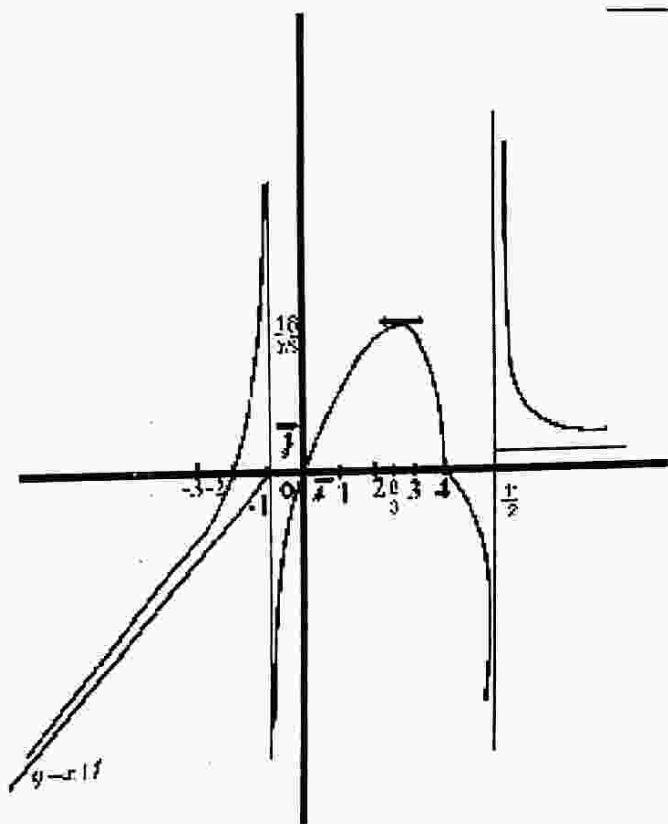
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - x(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x - x}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x + 1} = 1$$

Donc la droite d'équation $y = x + 1$

est une asymptote oblique pour C_f en $-\infty$

7) Construction **Schéma 8**



(Figure)

puis dressons le tableau de variation de f .

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x + 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x}{x + 1} = \frac{-1}{0^-}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x}{x + 1} = \frac{-1}{0^+}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{11}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{11}{2}} \frac{x - 4}{2x - 11} = \frac{\frac{3}{2}}{0^-}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{11}{2}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{11}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{11}{2}^+} \frac{x - 4}{2x - 11} = \frac{\frac{3}{2}}{0^+}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{11}{2}^+} f(x) = +\infty$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{8}{3}$	4	$\frac{11}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	○	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	-	-
$f(x)$	$+\infty$			$\frac{16}{3\sqrt{3}}$			$\frac{1}{2}$

6.) Etudions les branches infinies en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x(x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x + 1} - x$$

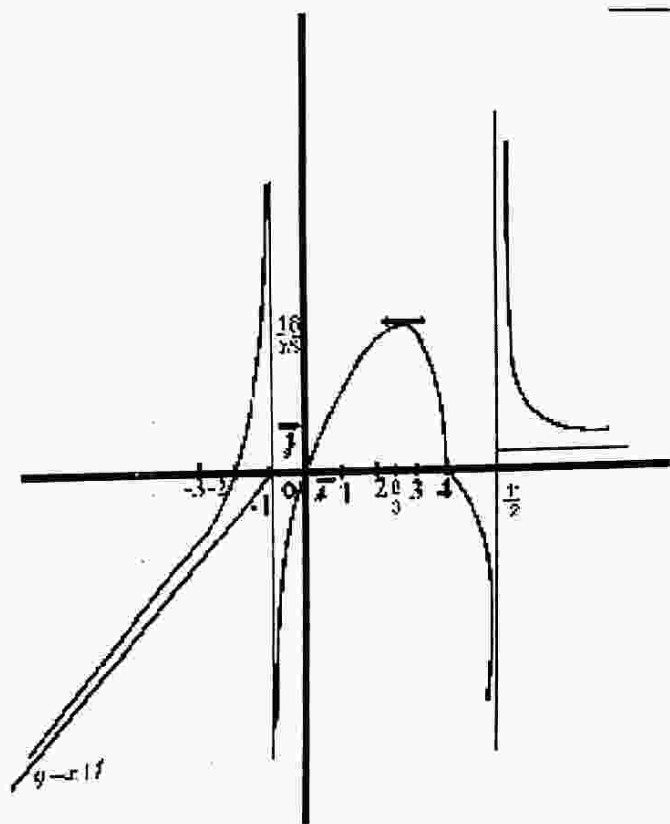
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - x(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x - x}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x + 1} = 1$$

Donc la droite d'équation $y = x + 1$

est une asymptote oblique pour C_f en $-\infty$

7) Construction **Schéma 8**



(Figure)

$$(T_1) \begin{cases} x = 4 \\ y > 0 \end{cases} \quad (T_2) y = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}$$

$$f(0) = 0; \quad f(4) = 0$$

8.) Discutons graphiquement suivant les valeurs de m le nombre de solution de l'équation

$$f(x) = m$$

Pour $m \in]-\infty; \frac{1}{2}]$ $f(x) = m$ admet 3 solutions.

Pour $m \in]\frac{1}{2}; \frac{16}{3\sqrt{3}}[$ $f(x) = m$ admet 4 solutions.

Pour $m = \frac{16}{3\sqrt{3}}$ $f(x) = m$ admet 3 solutions

Pour $m \in]\frac{16}{3\sqrt{3}}; +\infty[$ $f(x) = m$ admet 2 solutions.

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

EXERCICE n°1

1°) Vérifions que l'on peut réduire l'ensemble d'étude de f à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f existe donc $D_f = \mathbb{R}$.

$x \mapsto \cos 2x$, est périodique de période $T_1 = \pi$

$x \mapsto 2\sin x$, est périodique de période $T_2 = 2\pi$ d'où f est périodique de période

de période $T = \text{PPCM}(T_1; T_2)$

donc $T = 2\pi$. Comme f est périodique

de période 2π , on peut étudier f

sur un intervalle de longueur 2π ,

soit par exemple sur

$$E_f = D_f \cap [-\pi; \pi] = [-\pi; \pi]$$

2°) Démontrons que, pour tout réel

x , $f'(x)$ est du signe de $4\cos x \left(\frac{1}{2} - \sin x\right)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = -2\sin 2x + 2\cos x$$

$$= -4\sin x \cos x + 2\cos x$$

$$f'(x) = 4\cos x \left(\frac{1}{2} - \sin x\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de

$$4\cos x \left(\frac{1}{2} - \sin x\right)$$

3°) Étudions les variations de f sur $[-\pi; \pi]$

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos x \left(\frac{1}{2} - \sin x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2}$$

sur $[-\pi; \pi]$, on a : $x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

$f'(x) \leq 0$ sur $[-\pi; -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{5\pi}{6}; \pi]$ et

$f'(x) \geq 0$ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}]$

par conséquent, f est décroissante sur

$[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$ sur $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$ et sur $[\frac{5\pi}{6}; \pi]$

f est croissante sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}]$ et sur $[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}]$

Tableau de variation

4°) D'après le tableau de variation de f , -3 est un minimum global (absolu); 1 est un minimum local et un maximum local; $\frac{3}{2}$ est un maximum absolu (global)

5°) Démontrons que (C_f) admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f'(x)$	-2	-	+	-	+	-
$f(x)$	1		$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	1

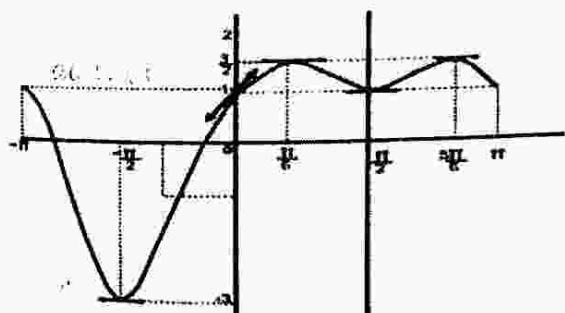
$\forall x \in \mathbb{R}, 2 \times \frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$ et
 $f(2 \times \frac{\pi}{2} - x) = f(\pi - x)$
 $= \cos(2(\pi - x)) + 2 \sin(\pi - x)$
 $= \cos(2\pi - 2x) + 2 \sin(\pi - x)$
 $= \cos(-2x) + 2 \sin(\pi - x)$
 $\forall x \in \mathbb{R}, \pi - x \in \mathbb{R}$ et
 $f(\pi - x) = \cos 2x + 2 \sin x = f(x)$
 donc (Cf) admet la droite d'équation
 $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

6°) Equation de la tangente à (Cf.) au point d'abscisse 0

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$(T): y = 2x + 1$$

7°) Construisons (Cf.) schéma 9



FONCTION LOGARITHME

Exercice n°4

Problème

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{x} \ln(1 + \frac{1}{x}), \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A

1°) Etudions la continuité de f en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \\ &= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1 - x^2} = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(1 + \frac{1}{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [\sqrt{x} \ln(1 - x) - \sqrt{x} \ln x] = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ \lim_{0^+} \ln(1 + x) = 0 \\ \lim_{0^+} \sqrt{x} \ln x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ &= f(0) \text{ donc } f \text{ est continue en } 0
 \end{aligned}$$

2°) Etudions la dérivabilité de f en 0 puis donnons une interprétation géométrique.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \frac{1}{2}$$

$f'_g(0) = \frac{1}{2}$ donc f est dérivable à gauche en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \ln(1 + \frac{1}{x})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}} = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0^+$$

$$\boxed{f'_d(0) = +\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0}$$

f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation :

$f'_g(0) = \frac{1}{2} \neq +\infty = f'_d(0)$ donc f admet une demi-tangente à gauche de 0 d'équation

$$(T_1): y = \frac{1}{2}x$$

f admet une demi-tangente verticale

à droite de 0 d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ y > 0 \end{cases}$

3°) Etudions la dérivabilité de f en -1

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \frac{\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + 1}{x + 1} \\ &= \frac{x + 1 + \sqrt{1 - x^2}}{(x + 1)(1 + \sqrt{1 - x^2})} \\ &= \frac{(x + 1)^2 - (1 - x^2)}{(x + 1)(1 + \sqrt{1 - x^2})[(x + 1) - \sqrt{1 - x^2}]} \\ &= \frac{[(x + 1) - (1 - x)]}{(x + 1) - \sqrt{1 - x^2} + (x + 1)\sqrt{1 - x^2} - (1 - x^2)} \\ &= \frac{2x}{(x + 1) + x\sqrt{1 - x^2} + (x^2 - 1)} \\ &= \frac{2x}{x[(x + 1) + \sqrt{1 - x^2}]} = \frac{2}{(x + 1) + \sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{(x + 1) + \sqrt{1 - x^2}} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) + \sqrt{1 - x^2} = 0^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = +\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en } -1.$$

4°) Etudions les variations de f sur $[-1; 0]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right)' \\ &= \frac{x'(1 + \sqrt{1 - x^2}) - x(1 + \sqrt{1 - x^2})'}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{1 - x^2} - x \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \right)}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{1 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2} \\ &= \frac{1 + \frac{1 - x^2 + x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1}{\sqrt{1 - x^2}(1 + \sqrt{1 - x^2})^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}(1 + \sqrt{1 - x^2})} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}(1 + \sqrt{1 - x^2})}}$$

$\forall x \in]-1; 0[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[-1; 0]$

Partie B

1°) Etudions les variations de g sur $]0; +\infty[$.

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x + 1}$$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que fonction composée et somme de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x + 1} \right)' = \ln'\left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)' - 2 \left(\frac{-(x + 1)'}{(x + 1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \times \left(\frac{-1}{x^2} \right) + \frac{2}{(x + 1)^2} = \frac{1}{x + 1} \times \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{-1}{x(x + 1)} + \frac{2}{(x + 1)^2} = \frac{-1 + x}{x(x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{-1 + x}{x(x + 1)^2}}$$

$\forall x \in]0; +\infty[\quad x > 0; x + 1 > 0 \Rightarrow (x + 1)^2 > 0 \Rightarrow x(x + 1)^2 > 0$ donc le signe de g' dépend de

celui du numérateur $-1+x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Pour $x \in]0; 1[$ $-1+x < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$
 0 donc g est strictement décroissante sur $]0; 1[$

Pour $x \in]1; +\infty[$, $-1+x > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$ donc

g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

2°) Calculons les limites de g en $+\infty$ et en 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x+1} = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x+1}$$

$$= +\infty \quad \text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x+1} = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

3°) a) Dressons le tableau de variation de g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(1)$	0

b) Dédudons que l'équation $g(x) = 0$ admet

une solution unique α et que $0.25 < \alpha < 0.26$.

D'après le tableau de variation de g , la fonction g est continue et strictement décroissante sur $]0; 1[$; elle réalise une bijection de $]0; 1[$ vers $[g(1); +\infty[$ or $0 \in [g(1); +\infty[$ car $g(1) < 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet

une unique solution $\alpha \in]0; 1[$ sur $]1; +\infty[$,

g est continue et strictement croissante;

elle réalise une bijection de $[1; +\infty[$

vers $g([1; +\infty[) = [g(1); 0[$ or $0 \notin [g(1); 0[$ donc l'équation $g(x) =$

0 n'admet pas de solution dans $[1; +\infty[$

Finalement l'équation $g(x) =$

0 admet une unique solution $\alpha \in]0; 1[$

Vérifions que $\alpha \in]0.25; 0.26[$

$$g(0.25) = \ln\left(1 + \frac{1}{0.25}\right) - \frac{2}{0.25+1} = \ln 5 - 1.6 = 1.609 - 1.6 = 0.009$$

$$g(0.25) = 0.009$$

$$g(0.26) = \ln\left(1 + \frac{1}{0.26}\right) - \frac{2}{0.26+1}$$

$$= \ln(4.846) - 1.587 = -0.008$$

$$g(0.26) = -0.008$$

$$g(0.25) \times g(0.26) = 0.009 \times (-0.008)$$

$$g(0.25) \times g(0.26) < 0 \text{ donc}$$

$$0.25 < \alpha < 0.26$$

4°) Déterminons le signe de g suivant les valeurs de x

Pour $x \in]0; \alpha[$, $g(x) > 0$

Pour $x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) < 0$

Pour $x = \alpha$ $g(x) = 0$

5°) a) Démontrons que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} g(x)$.

Pour $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

f est dérivable en tant que composée et produit de fonctions dérivables.

$$f'(x) = \left(\sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)'$$

$$= (\sqrt{x})' \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)'$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{x} \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{2\sqrt{x}(x+1)} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x+1} \right]
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} g(x).$$

b) Dédisons le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$

Pour $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} g(x)$.

Le signe de f' dépend du signe de $g(x)$ car $\frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

pour $x \in]0; +\infty[$

Pour $x \in]0; \alpha[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; \alpha[$

Pour $x \in]\alpha; +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$

6°) Calculons les limites de f en $+\infty$ puis dressons le tableau de variation de f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ posons } X = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

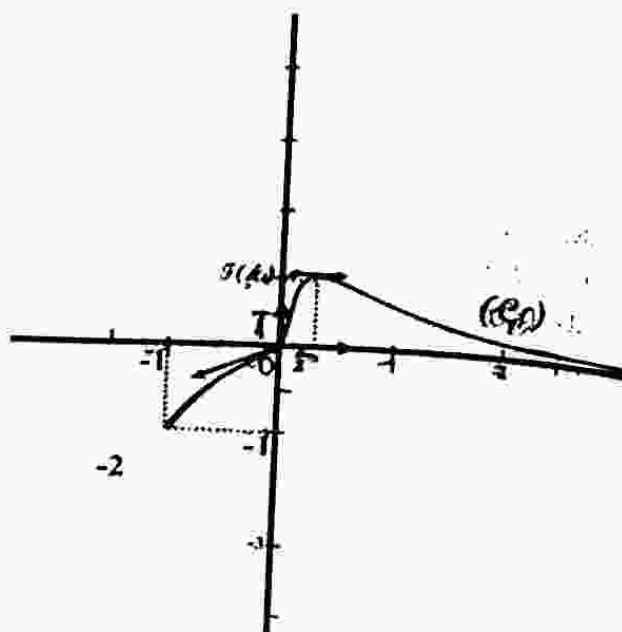
$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sqrt{X}}{X} \ln(1 + X) = 0 \text{ car } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Tableau de variation

x	-1	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	-1		$f(\alpha)$	0

7°) Construction de (C) schéma 10



Partie C

1°) a) Montrons que h est bijective

D'après le tableau de variation de f , la restriction de f à l'intervalle $I =]-1; 0]$ est strictement croissante. Elle réalise une bijection de I vers $h(I) =]-1; 0] = J$. h est donc bijective de I vers $h(I) = J$

b) Dressons le tableau de variation de h^{-1} .

x	-1	0
$h^{-1}(x)$	-1	0

Construction de h^{-1} (voir courbe)

c) Déterminons $h^{-1}(x)$

$$f(x) = \frac{x}{1 - \sqrt{1-x^2}} \text{ si } x \leq 0$$

$$\text{soit } m \in [-1; 0]$$

$$f(x) = \frac{x}{1 - \sqrt{1-x^2}} = \frac{x(1 + \sqrt{1-x^2})}{1 - (1-x^2)} = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$f(x) = m \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} = m$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-x^2} = xm \Leftrightarrow 1 - xm = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2xm + x^2m^2 = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow -2xm = -x^2 - x^2m^2$$

$$\Leftrightarrow 2xm = x^2(m^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2m = x(1 + m^2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2m}{1 + m^2}$$

$$h^{-1}: J \rightarrow I$$

$$x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

FONCTION LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

EXERCICE n°1

1°) On considère le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$

a) Calculons $P(1)$.

$$P(1) = 1^3 - 2(1)^2 - 1 + 2$$

$$P(1) = 0$$

Mettons $P(X)$ sous forme de produit de facteurs du premier degré.

A l'aide de la division euclidienne on montre que : $X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X-1)(X^2 - X - 2)$

$$P(X) = (X-1)(X^2 - X - 2)$$

$$X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$$

$$P(X) = (X-1)(X+1)(X-2)$$

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(X)=0$ puis l'inéquation $P(X) > 0$

$$* P(X) = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X+1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -1 \text{ ou } X = 2$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-1; 1; 2\}$$

$$* P(X) > 0 \Leftrightarrow (X-1)(X^2 - X - 2) > 0$$

$$P(X) > 0 \Leftrightarrow (X-1)(X+1)(X-2) > 0$$

A l'aide d'un tableau de signe on montre que

$$P(X) > 0 \Rightarrow x \in]-1; 1[\cup]2; +\infty[$$

$$S_{\mathbb{R}} =]-1; 1[\cup]2; +\infty[$$

2°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

$$a) e^{2x} - 2e^x - 1 + 2e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^3 - 2(e^x)^2 - e^x + 2 = 0 \text{ En posant } X = e^x, \text{ on a : } X^3 - 2X^2 - X + 2 = 0 \text{ de } 1^\circ) a)$$

$$X = -1 \text{ ou } X = 1 \text{ ou } X = 2$$

$$X = e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = -1 \text{ ou } \\ e^x = 1 \text{ ou } \\ e^x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \{ \} \\ x = 0 \\ x = \ln 2 \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{0; \ln 2\}$$

$$b) (\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0$$

$$\text{Posons } X = \ln x$$

$$\text{L'équation devient } X^3 - 2X^2 - X + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -1 \text{ ou } X = 2$$

$$\Leftrightarrow X = \ln x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln x = -1 \\ \ln x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e \\ x = e^{-1} \\ x = e^2 \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{e^{-1}; e; e^2\}$$

$$c) e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 > 0$$

$$\text{Posons, } e^x = X$$

l'inéquation devient

$$X^3 - 2X^2 - X + 2 > 0$$

$$X \in]-1; 1[\cup]2; +\infty[$$

$$\Rightarrow e^x < 1 \text{ ou } e^x > 2$$

$$\Rightarrow x < \ln 1 \text{ ou } x > \ln 2$$

$$x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 2; +\infty[$$

$$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 0[\cup]\ln 2; +\infty[$$

$$d) (-1 + \ln x)^3 - 2(-1 + \ln x)^2 + 3 - \ln x > 0 \Leftrightarrow (-1 + \ln x)^3 - 2(-1 + \ln x)^2 - (-1 + \ln x) + 2 > 0 \text{ Posons } X = -1 + \ln x \text{ L'inéquation devient}$$

$$X^3 - 2X^2 - X + 2 > 0$$

$\Rightarrow$

$$X \in]-1; 1[\cup]2; +\infty[$$

$$\Rightarrow -1 < -1 + \ln x < 1 \text{ ou } -1 + \ln x > 2$$

$$\Rightarrow 0 < \ln x < 2 \text{ ou } e^{\ln x} > e^3$$

$$\Rightarrow 1 < x < e^2 \text{ ou } x > e^3$$

$$\Rightarrow X \in]1; e^2[\cup]e^3; +\infty[$$

$$S_{\mathbb{R}} =]1; e^2[\cup]e^3; +\infty[$$

EXERCICE n°2

PARTIE A

$$g(x) = 1 - x - 2\ln x$$

1°) Etudions le sens de variation de g.

g est dérivable sur]0; +\infty[en tant que somme de fonction dérivables sur]0; +\infty[

$$g'(x) = (1 - x - 2\ln x)'$$

$$g'(x) = -1 - \frac{2}{x}$$

$$g'(x) = \frac{-x - 2}{x}$$

$$x \in]0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x - 2}{x} < 0$$

$g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur]0; +\infty[

2°) Calculons g(1) et déterminons le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

$$g(1) = 1 - 1 - 2\ln 1 \quad g(1) = 0$$

g est décroissante sur]0; +\infty[

$$\text{et } g(1) = 0$$

$$\text{donc } \forall x \in]0; 1[\quad g(x) > 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad g(x) < 0$$

PARTIE B

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1} - x, & \text{si } x < 1 \\ \frac{x + \ln x}{x^2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1°) a) Etudions la continuité de f en 1.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2e^{x-1} - x =$$

$$1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} 2e^{x-1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} -x = -1 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + \ln x}{x^2} = 1$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} x + \ln x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

donc f est continue en 1.

b) Calculons les limites de f en

$-\infty$ et en $+\infty$ et déduisons

l'existence d'une asymptote

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{x-1} - x = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{x-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$$

$$= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$= 0 \text{ donc l'axe des abscisses}$$

est une asymptote horizontale à (C)

en $+\infty$

2°) a) Etudions la dérivabilité de f en 1 et précisons la nature du point $A(1; 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2e^{x-1} - x - 1}{x - 1}$$

$$\text{Posons } X = x - 1, x = X + 1$$

$$\text{Quand } x \rightarrow 1^-; X \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2e^X - (X + 1) - 1}{X}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \left(\frac{e^X - 1}{X} \right) - 1$$

$$= 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^X - 1}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x + \ln x}{x^2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + \ln x - x^2}{x^2(x - 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(1 - x)}{x^2(x - 1)} + \frac{\ln x}{x^2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} \times \frac{\ln x}{x - 1} = 0$$

$$\bullet \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2} \times \frac{\ln x}{x - 1} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$$

$$f'_g(1) = 1 \neq 0 = f'_d(1)$$

donc f n'est pas dérivable en 1.

f admet deux demi-tangentes

au point $A(1; 1)$ une demi tangente

de coefficient directeur 1 à gauche de 1

et une demi tangente horizontale

à droite de 1.

b) Calculons la fonction dérivée f' de f sur les intervalles où f est dérivable.

$$x \in]-\infty; 1[\quad f(x) = 2e^{x-1} - x$$

$$f \text{ est dérivable sur }]-\infty; 1[$$

en tant que composée et somme

de fonctions dérivables sur $]-\infty; 1[$.

$$f'(x) = 2e^{x-1} - 1, \quad \forall x < 1$$

$$x \in [1; +\infty[; f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$$

f est dérivable sur $]1; +\infty[$

en tant que somme et quotient

de fonctions dérivables sur $]1; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{x + \ln x}{x^2} \right)' \\
 &= \frac{(x + \ln x)'(x^2) - (x^2)(x + \ln x)}{x^4} \\
 &= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x^2 - 2x^2 - 2x \ln x}{x^4} \\
 &= \frac{-x^2 + x - 2x^2 - 2x \ln x}{x^4} \\
 &= \frac{-x^2 + x - 2 \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - x - 2 \ln x)}{x^4}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} \quad \forall x \in [1; +\infty[$$

3°) Etudions le signe de $f'(x)$

- $x < 1; f'(x) = 2e^{x-1} - 1$
 $f'(x) > 0$

$$\Leftrightarrow 2e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{x-1} > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - 1 > -\ln 2$$

$$\Leftrightarrow x > 1 - \ln 2$$

Pour $x \in]-\infty; 1 - \ln 2[$ $f'(x) < 0$

Pour $x \in]1 - \ln 2; 1[$ $f'(x) > 0$

Pour $x = 1 - \ln 2$ $f'(x) = 0$

- $x \geq 1 \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

$$x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 \geq 1 \Leftrightarrow x^3 > 0$$

le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

d'après Partie A 2°)

Pour $x \in]1; +\infty[$ $g(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Sens de variation de f

sur $] -\infty; 1 - \ln 2[$ $f'(x)$

< 0 donc f est strictement décroissante

sur $] -\infty; 1 - \ln 2[$

Sur $]1 - \ln 2; 1[$ $f'(x)$

> 0 donc f est strictement croissante

sur $]1 - \ln 2; 1[$

Sur $]1; +\infty[$ $f'(x)$

< 0 donc f est strictement décroissante

sur $]1; +\infty[$

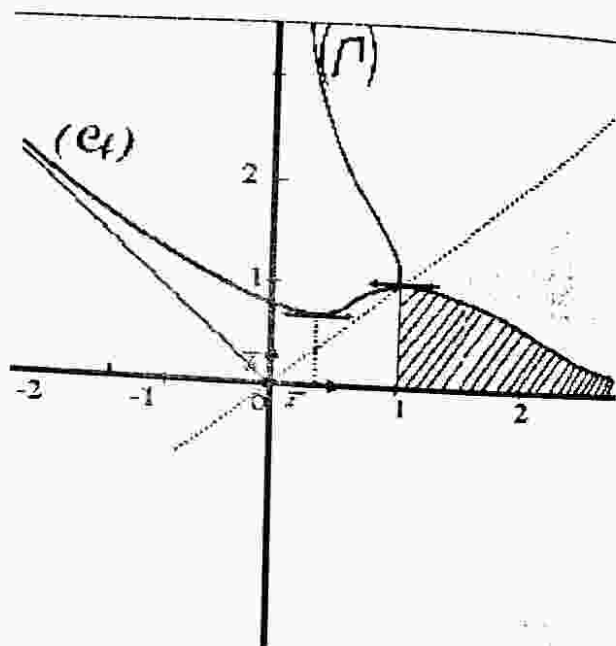
Tableau de variation

x	$-\infty$	$1 - \ln 2$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$+\infty$		1	0

Diagramme du tableau de variation : La courbe $f(x)$ descend de $+\infty$ à $1 - \ln 2$, monte de $1 - \ln 2$ à 1, et descend de 1 à $+\infty$. Les points $\ln 2$ et 0 sont indiqués sur l'axe des ordonnées.

4°) Construction de la courbe (C) et ses asymptotes.

CONSTRUCTION schema 11



PARTIE C

1°) Montrons que h est bijective de $]1; +\infty[$ sur un intervalle k à préciser.

D'après le tableau de variation de f , f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$ elle réalise

une bijection de $[1; +\infty[$ sur $k =]0; 1]$. Comme h est la restriction de f sur $[1; +\infty[$ alors h est bijective de $[1; +\infty[$ sur $k =]0; 1]$.

2°) Déterminons les variations de h^{-1} et son tableau de variation.

h étant décroissante sur $[1; +\infty[$ alors la bijection réciproque de h notée h^{-1} est également décroissante sur son ensemble de définition

$$D_{h^{-1}} =]0; 1]$$

Tableau de variation

x	0	1
$h^{-1}(x)$		—
$h(x)$	$+\infty$	1

3°) Construisons la courbe (Γ) de h^{-1} dans le même repère.

Expliquons la construction

(Γ) est la symétrique de la portion de la courbe (C) des points d'abscisse appartenant à l'intervalle $[1; +\infty[$ par rapport à la première bissectrice.

PARTIE D

1°) Calculons la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = \frac{-1-\ln x}{x}$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$g'(x) = \frac{(-1-\ln x)'x - (-1-\ln x)x'}{x^2} = \frac{-\frac{1}{x} \times x + 1 + \ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

2°) Dédisons une primitive de f sur $[1; +\infty[$.

$$\forall x \in [1; +\infty[\quad f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$$

Soit F une primitive de f sur $[1; +\infty[$

$$F(x) = \ln x - \frac{1 + \ln x}{x}$$

3°) Calculons l'aire en cm^2 de la partie délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C). Les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$

$$A = \int_1^e f(x) dx \text{ UA} = \int_1^e \frac{x + \ln x}{x^2} dx \text{ UA}$$

$$A = \left[\ln x - \frac{1 + \ln x}{x} \right]_1^e \text{ UA}$$

$$A = \left(\ln e - \frac{1 + \ln e}{e} \right) - \left(\ln 1 - \frac{1 + \ln 1}{1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1+1}{e} + 1$$

$$= 2 - \frac{2}{e} = 2(1 - e^{-1}) \text{ UA}$$

$$A = 8(1 - e^{-1}) \text{ cm}^2$$

PROBLEME 3

PARTIE A

$$x \in]0; +\infty[\quad g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$$

1°) a) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x \\ &= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$$

b) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x \\ &= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{x^2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty}$$

2°) a) Déterminons la fonction dérivée de g .

g est dérivable sur

$]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions

dérivables sur $]0; +\infty[$

$$g'(x) = \left(-\frac{2x+1}{x^2} + \ln x \right)'$$

$$g'(x) = -\frac{(2x+1)'(x^2) - (2x+1)(x^2)'}{x^4} + (\ln x)'$$

$$= -\frac{2x^2 - 2x(2x+1)}{x^4} + \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{2x^2 - 4x - 2x}{x^4} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x + x^3}{x^4}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3} \quad \forall x \in]0; +\infty[}$$

b) Déduisons en le sens de variation de g .

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad x^3 > 0$$

et $x^2 + 2x + 2 > 0$ donc $g'(x)$

$$> 0 \text{ car } \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3} > 0$$

d'où g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

c) Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3°) a) Démontrons que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α .

D'après le tableau de variation de g ,

g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ elle réalise une

bijection de $]0; +\infty[$ sur $g(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$;

or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$

admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$.

b) Justifions que $2,5 < \alpha < 2,6$

$$g(2,5) =$$

$$g(2,6) =$$

$$g(2,5) \times g(2,6) < 0 \text{ donc } 2,5 < \alpha < 2,6$$

c) Déduisons en le signe de $g(x)$

Pour $x \in]0; \alpha[$ $g(x) < 0$

Pour $x \in]\alpha; +\infty[$ $g(x) > 0$

PARTIE B

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}$$

1° a) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis donnons

une interprétation graphique du résultat.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x} \\ &= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) = +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Interprétation graphique ; la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à (C).

b) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis donnons une interprétation graphique du résultat.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} - \frac{\ln x}{e^x} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Interprétation graphique ; La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à (C).

2°) Déterminons que $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - \ln \alpha\right)e^{-\alpha} \text{ or } g(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow g(\alpha) = -\frac{2\alpha+1}{\alpha^2} + \ln \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$$

remplaçons $\ln \alpha$ par son expression dans $f(\alpha)$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha} = \frac{\alpha - 2\alpha - 1}{\alpha^2}e^{-\alpha} \\ &= -\frac{\alpha+1}{\alpha^2}e^{-\alpha} \end{aligned}$$

$$f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$$

3° a) Exprimons $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant

que somme et produit de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{-x})' \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) + e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)' \\ &= -e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) + e^{-x} \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) \\ &= e^{-x} \left(-\frac{1}{x} + \ln x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) \\ &= e^{-x} \left(-\frac{2x+1}{x^2} + \ln x\right) \end{aligned}$$

$$f'(x) = e^{-x}g(x)$$

b) Dédisons en les variations de f .

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad e^{-x} > 0$$

donc f' est du signe de g .

$\forall x \in]0; \alpha[, f'(x) < 0$ car $g(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; \alpha[$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) > 0$ car $g(x) > 0$ donc f est strictement croissante

sur $]\alpha; +\infty[$

c) dressons le tableau de variation de

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$ 0		

4°) Déterminons une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en $x_0 = 1$

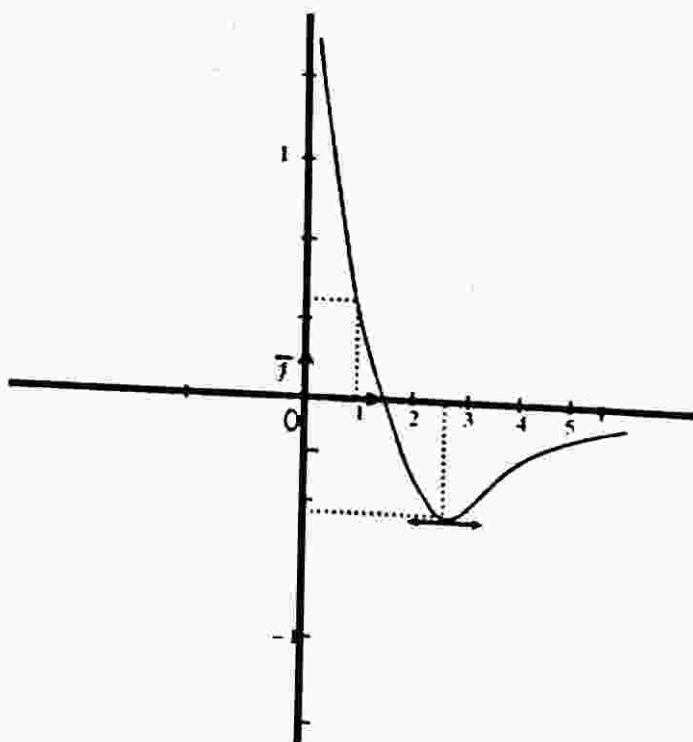
$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = -3e^{-1}(x - 1) + e^{-1}$$

$$y = (-3x + 4)e^{-1}$$

$$y = -3e^{-1}x + 4e^{-1}$$

5°) Construction de la courbe. Schéma 12



PARTIE C

1°) $D_h =]0; +\infty[$, $h(x) = e^{-x} \ln x$

Démontrons que h est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Si h est une primitive de f sur $]0; +\infty[$ alors $h'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} h'(x) &= (e^{-x} \ln x)' \\ &= (e^{-x})' \ln x + (e^{-x})(\ln x)' \\ &= -e^{-x} \ln x + e^{-x} \times \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$h'(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) = f(x)$$

$$h'(x) = f(x), \text{ pour } x \in]0; +\infty[$$

donc h est une primitive de f sur $]0; +\infty[$

2°) a) Calculons en cm^2 et en fonction de λ l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (O) et les droites d'équation $x=3$ et $x=\lambda$.

$$A(\lambda) = \int_3^\lambda f(t) dt \times 20 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= [-h(t)]_3^\lambda = [-h(t) + h(3)] 20 \text{ cm}^2 \\ &= \left(\frac{\ln 3}{e^3} - \frac{\ln \lambda}{e^\lambda} \right) 20 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$A(\lambda) = \left(\frac{\ln 3}{e^3} - \frac{\ln \lambda}{e^\lambda} \right) 20 \text{ cm}^2$$

b) Calculons $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 20 \left(\frac{\ln 3}{e^3} + \frac{\ln 3}{e^3} \right) = 20 \frac{\ln 3}{e^3}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = 20 \frac{\ln 3}{e^3}$$

$$\text{Car } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda}{\lambda} = 0$$

PROBLEME 4

PARTIE A

$$x \in \mathbb{R}, g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$$

1°) Déterminons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{1-x} - 1 = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^{1-x} - 1$$

Posons $X=1-x$ qd $x \rightarrow +\infty, X \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X - 1 = -1$$

car $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$$

2°) Etudions les variations de g et dressons son tableau de variation.

$$g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1 ; x \in \mathbb{R}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composé, produit et somme de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} g'(x) &= [(1-x)e^{1-x} - 1]' \\ &= (1-x)'e^{1-x} + (1-x)(e^{1-x})' \\ &= -e^{1-x} + (1-x)(-e^{1-x}) \\ g'(x) &= e^{1-x}(-2+x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, e^{1-x} &> 0 \end{aligned}$$

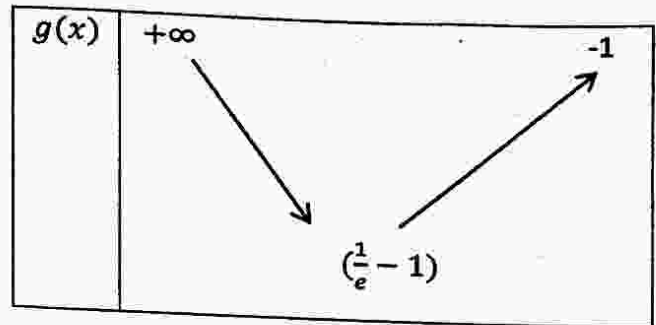
donc le signe de $g'(x)$ est celui de $(-2+x)$

• Pour $x \in]-\infty; 2[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 2]$.

• Pour $x \in]2; +\infty[, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $[2; +\infty[$

Tableau de variation

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	○	+



3°) a) Démontrons que $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

D'après le tableau de variation de g ,

g est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$, elle est strictement décroissante

sur $]-\infty; 2]$, donc elle réalise une

bijection de $]-\infty; 2]$ sur $g(]-\infty; 2]) =$

$$\left[\frac{1}{e} - 1; +\infty \right]. \text{ Or } 0 \in \left[\frac{1}{e} - 1; +\infty \right]$$

donc l'équation $g(x) =$

0 admet une solution unique α sur $]-\infty; 2]$.

Toujours d'après le tableau de variation de g , g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[2; +\infty[$, elle réalise donc une bijection

$$\text{de } [2; +\infty[\text{ sur } g([2; +\infty[) = \left[\frac{1}{e} - 1; -1 \right].$$

Or $0 \notin \left[\frac{1}{e} - 1; -1 \right]$ Donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution dans $[2; +\infty[$

En conclusion, $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty; 2]$

b) Justifions que $0,4 < \alpha < 0,5$

$$g(0,4) =$$

$$g(0,5) =$$

$$g(0,4) \times g(0,5) < 0 \text{ donc } \alpha \in]0,4; 0,5[$$

c) Signe de $g(x)$.

$$\text{Pour } x \in]-\infty; \alpha[\quad g(x) > 0$$

Pour $x \in]\alpha; +\infty[$ $g(x) < 0$

PARTIE B

$$f(x) = xe^{1-x} - x + 2$$

1°) Déterminons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}) \\ &= -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + \frac{2}{x} = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}) \\ &= -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{2}{x} = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

2°) a) Démontrons que f est une primitive de g .

Si f est une primitive de g alors $f'(x) = g(x)$.

Vérifions l'égalité $f'(x) = g(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (xe^{1-x} - x + 2)' \\ &= e^{1-x} + (-xe^{1-x}) - 1 \\ &= e^{1-x}(1-x) - 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = (1-x)e^{1-x} - 1 = g(x)$$

$f'(x) = g(x)$. donc f est une primitive de g .

b) Etudions les variations de f puis dressons son tableau de variation.

$$f'(x) = g(x) \text{ d'après partie A. 3°) c)}$$

Pour $x \in]-\infty; \alpha[$, $f'(x) > 0$ car $g(x) > 0$
donc f est strictement croissante sur

$]-\infty; \alpha]$

Pour $x \in]\alpha; +\infty[$, $f'(x) < 0$ car $g(x) < 0$
donc f est strictement décroissante

sur $]\alpha; +\infty[$

Tableau de variation

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

3°) a) Démontrons que la droite $(D): y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x + 2) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e \times e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \left(\frac{x}{e^x} \right) \\ &= 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$$

donc $(D): y = -x + 2$

est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Etudions la position relative de (D) et (C) .

$$f(x) - y = xe^{1-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$ le signe
de $f(x) - y$ est celui de x .

- Pour $x \in]-\infty; 0[$ $f(x) - y < 0 \Leftrightarrow f(x) < y$ la courbe (C) est

en dessous de (D)

- Pour $x \in]0; +\infty[$ $f(x) - y > 0 \Leftrightarrow f(x) > y$ la courbe (C) est au

dessus de (D).

4°) Démontrons que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{1-x} - x + 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x} = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + \frac{2}{x} = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$= +\infty$ donc (C) admet une branche parabolique de direction $(0; \vec{j})$ en $-\infty$.

5°) Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$f'(1) = -1, f(1) = 2$$

$$(T): y = -x + 3$$

6°) Démontrons que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha)e^{1-\alpha} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}; f(\alpha) = \alpha e^{1-\alpha} - \alpha + 2$$

$$= \frac{\alpha}{1-\alpha} - \alpha + 2$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} - \alpha + 2 - 1$$

$$f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$$

7°) Justifions que pour tout nombre réel $f(-x + 2) = e^{x-1}f(x)$

$$\begin{aligned} f(-x + 2) &= (-x + 2)e^{1-(-x+2)} - (-x + 2) + 2 \\ &= (2 - x)e^{x-1} + x \\ &= e^{x-1}[(2 - x) + xe^{1-x}] \\ &= e^{x-1}(xe^{1-x} - x + 2) \end{aligned}$$

$$f(-x + 2) = e^{x-1}f(x)$$

$$\text{Car } f(x) = xe^{1-x} - x + 2$$

8°) Déterminons la deuxième solution en fonction de β avec $f(\beta) = 0$

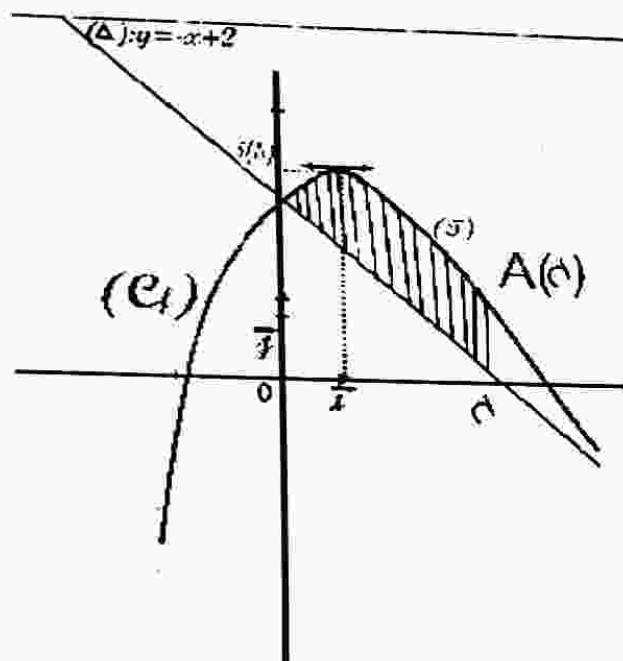
β étant solution de l'équation $f(x) = 0$ alors $f(\beta) = 0 \Leftrightarrow e^{\beta-1}f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(-\beta + 2) = 0$ donc $-\beta + 2$ est également solution

de l'équation $f(x) = 0$. Posons $\vartheta = -\beta + 2$

ϑ est donc la deuxième solution de $f(x) = 0$

9°) Traçons (D), (T) et (C)

CONSTRUCTION schéma 13



PARTIE C

1°) Calculons $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par partie.

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda [f(x) - (-x + 2)] dx \times 4\text{cm}^2$$

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda x e^{1-x} dx \times 4\text{cm}^2$$

posons $u(x) = x$; $u'(x) = 1$

$$v'(x) = e^{1-x}; v(x) = -e^{1-x}$$

$$A(\lambda) = \left([-x e^{1-x}]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{1-x} dx \right) 4\text{cm}^2$$

$$= (-\lambda e^{1-\lambda} + [-e^{1-x}]_0^\lambda) 4\text{cm}^2$$

$$= (-\lambda e^{1-\lambda} - e^{1-\lambda} + e) 4\text{cm}^2$$

$$A(\lambda) = (-(1 + \lambda)e^{1-\lambda} + e) 4\text{cm}^2$$

2°) Déterminons $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (-(1 + \lambda)e^{1-\lambda} + e) 4\text{cm}^2$$

$$= 4e\text{cm}^2$$

$$\text{car } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -(1 + \lambda)e^{1-\lambda} = 0$$

PROBLEME 6

$$g(x) = e^x - \ln x - 1 \quad Dg:]0; +\infty[$$

1°) Calculons $g'(x)$ et $g''(x)$ pour $x > 0$

$$g'(x) = e^x - \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{x e^x - 1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{x e^x - 1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{x e^x - 1}{x}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{x e^x - 1}{x} \right)' = \frac{(x e^x - 1)' x - (x e^x - 1)}{x^2} \\ &= \frac{(e^x + x e^x) x - x e^x + 1}{x^2} \\ &= \frac{x e^x + x^2 e^x - x e^x + 1}{x^2} \end{aligned}$$

$$g''(x) = \frac{x^2 e^x + 1}{x^2}$$

2°) Tableau de variation de g'

$$g''(x) = \frac{x^2 e^x + 1}{x^2}$$

$$\forall x > 0, x^2 > 0 \text{ et } e^x > 0 \text{ donc } \frac{x^2 e^x + 1}{x^2} > 0$$

$$\Rightarrow g''(x) > 0$$

donc g' est croissante sur $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^x - \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0 \end{cases}$$

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$g''(x)$		+
$g'(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3°) Montrons que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution notée α et que $0.56 < \alpha < 0.57$.
D'après le tableau de variation de g' , g' est continue et strictement croissante sur

$]0; +\infty[$. Elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $g'([0; +\infty)) = \mathbb{R}$. or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique

solution $\alpha \in]0; +\infty[$.

- Vérifions que $\alpha \in]0.56; 0.57[$

$$g'(0.56) = \frac{0.56 e^{0.56} - 1}{0.56} = \frac{0.56 \times 1.75 - 1}{0.56}$$

$$g'(0.56) = \frac{-0.02}{0.56} = -0.035$$

$$g'(0.57) = \frac{0.57 \times 1.77 - 1}{0.57} = 0.015$$

$$g'(0.56) = -0.035 \text{ et } g'(0.57) = 0.015$$

$$g'(0.56) \times g'(0.57) < 0 \text{ donc}$$

$$0.56 < \alpha < 0.57$$

4*) Etudions le signe de $g'(x)$ pour $x > 0$

$$\forall x \in]0; \alpha[\quad x < \alpha \Rightarrow g'(x) < g'(\alpha)$$

car g' est croissante.

Comme $g'(\alpha) = 0$ alors $g'(x) < 0 \quad \forall x \in]0; \alpha[$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[\quad x > \alpha \Rightarrow g'(x) > g'(\alpha)$$

comme

$$g'(\alpha) = 0 \text{ alors } g'(x) > 0 \quad \forall x \in]\alpha; +\infty[\quad g'(x) = 0 \text{ pour } x = \alpha$$

$$g'(x) < 0 \text{ sur }]0; \alpha[$$

$$g'(x) > 0 \text{ sur }]\alpha; +\infty[$$

$$g'(x) = 0 \text{ pour } x = \alpha$$

5*) Calculons les limites de g aux bornes de D_g et dressons le tableau de variation de g .

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \ln x - 1) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \ln x + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$$

Tableau de variation de g

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\alpha)$	$+\infty$

6*) Montrons que $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha - 1$ et donnons

un encadrement de $g(\alpha)$ à 10^{-1} près

$$g(x) = e^x - \ln x - 1 \Rightarrow g(\alpha) = e^\alpha - \ln \alpha - 1$$

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha e^\alpha - 1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

$$g(\alpha) = e^\alpha - \ln \alpha - 1 \Rightarrow g(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \ln \alpha - 1$$

$$\alpha e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{e^\alpha}$$

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} - \ln \alpha - 1 \Rightarrow g(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \ln \left(\frac{1}{e^\alpha} \right) - 1 \\ &= \frac{1}{\alpha} - \ln 1 - \ln e^\alpha - 1 \end{aligned}$$

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha - 1$$

Encadrement

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha - 1 \text{ et } 0.56 < \alpha < 0.57 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.57} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0.56}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.56 < \alpha < 0.57 \\ \frac{1}{0.57} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0.56} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.57} + 0.56 < \frac{1}{\alpha} + \alpha < \frac{1}{0.56} + 0.57$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.57} + 0.56 - 1 < \frac{1}{\alpha} + \alpha - 1 < \frac{1}{0.56} + 0.57 - 1$$

$$\Rightarrow 2.314 - 1 < g(\alpha) < 2.35 - 1$$

$$\Rightarrow 1.3 < g(\alpha) < 1.35$$

$$\boxed{1.3 < g(\alpha) < 1.4}$$

7°) Montrons que pour tout $x \in]0; +\infty[$ $g(x) > 0$

D'après le tableau de variation de g , g admet un minimum atteint en α et

ce minimum est $g(\alpha) \in]1.3; 1.4[$; $g(x) > 0$

$$\boxed{\forall x \in]0; +\infty[\quad g(x) > 0}$$

PARTIE B

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-e^x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = e^x - x \ln x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1°) Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1-e^x} = 0 \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} 1 - e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = \sqrt{1-e^0} = \sqrt{1-e^0} = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - x \ln x - 1 = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ donc } f \text{ est continue en } 0}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{1-e^x}$ est définie et continue sur $]-\infty; 0[$ en tant que composée de

fonctions dérivables. La fonction $x \mapsto e^x - x \ln x - 1$ est également

définie et continue sur $]0; +\infty[$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables

sur $]0; +\infty[$. Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}$

2°) a) Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1-e^x}{x\sqrt{1-e^x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-e^x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1-e^x}} = -\infty \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-e^x}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{1-e^x}} = +\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - x \ln x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} - \ln x = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$$

b) Interprétation du résultat

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$. (Cf) admet une demi-tangente verticale à gauche

$$\text{en } 0 \text{ d'équation } \begin{cases} x = 0 \\ y \geq f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$$

(Cf) admet une demi-tangente verticale

$$\text{à droite en } 0 \text{ d'équation } \begin{cases} x = 0 \\ y \geq f(x) \end{cases}$$

3°) Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - e^x} = 1 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x \ln x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\ln x}{x} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0 \end{cases}$$

4°) Déterminons la dérivée f' de f

$$\forall x \in]-\infty; 0], f(x) = \sqrt{1 - e^x}$$

$$f'(x) = \frac{-e^x}{2\sqrt{1 - e^x}}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[f(x) = e^x - x \ln x - 1$$

$$f'(x) = e^x - (\ln x + 1) = e^x - \ln x - 1$$

$$f'(x) = e^x - \ln x - 1$$

5°) Etude du sens de variation de f

$$\forall x \in]-\infty; 0], f'(x) = \frac{-e^x}{2\sqrt{1 - e^x}}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0] -e^x < 0 \text{ et}$$

$$2\sqrt{1 - e^x} > 0 \text{ donc } f'(x) < 0 \text{ d'où } f \text{ est décroissante sur }]-\infty; 0]$$

$$\forall x \in]0; +\infty[f'(x) = e^x - \ln x - 1 = g(x)$$

$$\text{Comme } g(x) > 0 \text{ sur }]0; +\infty[\text{ alors } f'(x) > 0 \text{ sur }]0; +\infty[. \text{ Donc } f \text{ est croissante sur }]0; +\infty[$$

$$6°) \text{ Montrons que } f(\alpha) = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha} - 1$$

$$f(\alpha) = e^\alpha - \alpha \ln \alpha - 1$$

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{e^\alpha} \\ e^\alpha = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha} - 1$$

7°) Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$		$+\infty$	$+$
$F(x)$	1		0	$+\infty$

$f(\alpha)$

8°) Construction de la courbe

* Complément pour la construction de (Cf)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x \ln x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{e^x}{x^3} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^3} \right) \end{aligned}$$

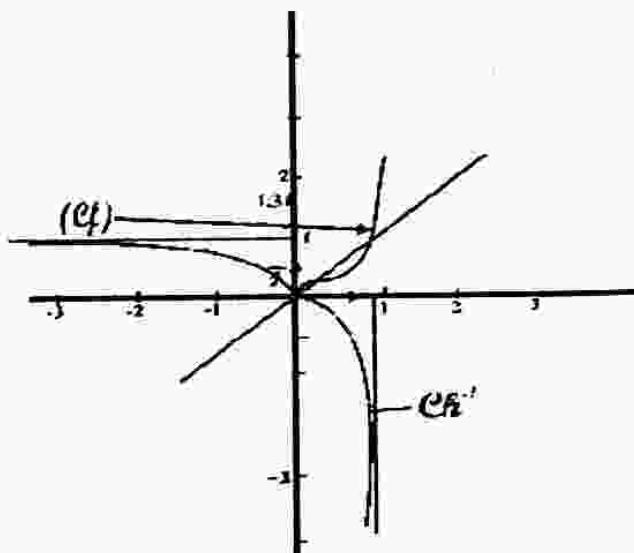
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^3} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

(Cf) admet une branche parabolique de direction (yy')

x	$\alpha = 0.56$	1	2
$F(x)$	$f(\alpha) = 0.25$	1.71	5

schema14



PARTIE C

1°) Montrons que h est bijective de I sur un intervalle J à préciser.

D'après le tableau de variation de la fonction f , f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ donc elle

réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ vers $f(]-\infty; 0]) = [0; 1] = J$

$$J = [0; 1]$$

2°) Déterminons les variations de la bijection réciproque h^{-1}

h est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$

vers $[0; 1]$ donc h^{-1} est strictement

croissante sur $[0; 1]$ vers $]-\infty; 0]$

Tableau de variation

x	0	1
$h^{-1}(x)$		
$h^{-1}(x)$	0	$-\infty$

3°) Déterminons l'expression de h^{-1}

$$h(x) = m \Rightarrow \sqrt{1 - e^x} = m$$

$$\Rightarrow 1 - e^x = m^2$$

$$\Rightarrow e^x = 1 - m^2$$

$$\Rightarrow x = \ln(1 - m^2)$$

$$h^{-1}: [0; 1[\rightarrow]-\infty; 0]$$

$$x \mapsto \ln(1 - x^2)$$

4°) Confère courbe

SUITES NUMERIQUES

EXERCICE n°2

$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{2} \\ V_{n+1} = \frac{n+1}{2n} V_n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1°) Calculons $V_2; V_3; V_4$

$$V_{n+1} = \frac{n+1}{2n} V_n$$

$$V_2 = \frac{1+1}{2 \times 1} V_1 = \frac{2}{2} V_1 = V_1 = \frac{1}{2}$$

$$V_2 = \frac{1}{2}$$

$$V_3 = \frac{2+1}{2 \times 2} V_2 = \frac{3}{4} V_2$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$V_3 = \frac{3}{8}$$

$$V_4 = \frac{3+1}{2 \times 3} V_3 = \frac{4}{6} V_3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

$$V_4 = \frac{1}{4}$$

2°) a) Démontrons que pour tout entier naturel $n > 0$, $V_n > 0$

Démontrons par récurrence ;

Soit P_n la propriété définie sur $\mathbb{N}^*$ par : « $V_n > 0$ ».

Vérifions que P_1 est vraie

$$V_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} > 0 \quad \text{donc} \quad V_1 > 0$$

d'où P_1 est vraie.

supposons P_n vraie puis montrons que P_{n+1} est vraie

$$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n+1 \geq 2 \\ 2n > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n} > 0$$

D'après l'hypothèse de

récurrence $V_n > 0$

$$\frac{n+1}{2n} > 0 \quad \text{et} \quad V_n > 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2n} V_n > 0$$

donc $V_{n+1} > 0$ d'où P_{n+1} est vraie.

$$\begin{cases} P_1 \text{ vraie} \\ P_n \text{ vraie} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vraie} \end{cases}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad V_n > 0$

b) Démontrons que la suite (V_n) est convergente.

$$V_{n+1} = \frac{n+1}{2n} V_n \Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$n \geq 1 \Leftrightarrow n+n \geq 1+n \Leftrightarrow 2n \geq 1+n > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2n} < 1 \Leftrightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq 1$$

La suite (V_n) est donc décroissante ;

(V_n) étant décroissante et minorée par 0 alors (V_n)

converge.

3°) Montrons que la suite (U_n) est géométrique

$$U_n = \frac{V_n}{n} \Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{V_{n+1}}{n+1} \Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{V_{n+1}}{n+1}}{\frac{V_n}{n}} = \frac{V_{n+1}}{V_n} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{nV_{n+1}}{(n+1)V_n} \Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n(\frac{n+1}{2n}V_n)}{(n+1)V_n} \Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2}$$

La suite (U_n) est géométrique

de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $U_1 = \frac{1}{2}$

b) Exprimons U_n puis V_n en fonction de n .

$$U_n = U_1 q^{n-1} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\Leftrightarrow$

$$U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$V_n = nU_n \Rightarrow$$

$$V_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\text{Car } \frac{1}{2} \in]-1; 1[$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln V_n = \ln \left[n \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$= \ln n + n \ln \left(\frac{1}{2}\right) = \ln n - n \ln 2 = n \left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2\right)$$

$$= e^{\ln V_n} = e^{n(\frac{\ln n}{n} - \ln 2)} = V_n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n(\frac{\ln n}{n} - \ln 2)}$$

$$= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\frac{\ln n}{n} - \ln 2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

EXERCICE n°3

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

1°) a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n \leq 1$.

Soit P_n la propriété définie par

$$"0 \leq U_n \leq 1"$$

Vérifions que P_0 est vraie. $U_0 = 0$ et $0 \leq 0 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq U_0 < 1 \Rightarrow 0 \leq U_0 \leq 1$ donc P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie

puis montrons que P_{n+1} est vraie.

$$P_n \text{ vraie} \Leftrightarrow 0 \leq U_n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq U_n + 1 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1+U_n} \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1$$

donc P_{n+1} est vraie.

$$\begin{cases} P_0 \text{ vraie} \\ P_n \text{ vraie} \end{cases} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vraie, donc } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1.$$

b) Montrons que $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(-2U_n - 1)}{\sqrt{2}\sqrt{1+U_n} + 2U_n}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n} - U_n$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1+U_n) - U_n^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n} + U_n}$$

$$= \frac{1+U_n-2U_n^2}{\sqrt{2}\sqrt{1+U_n}+2U_n}$$

$$= \frac{-2U_n^2+U_n-1}{\sqrt{2}\sqrt{1+U_n}+2U_n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(-2U_n - 1)}{\sqrt{2}\sqrt{1+U_n} + 2U_n}$$

Déduisons en le sens de variation de la suite (U_n) .

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(-2U_n - 1)}{\sqrt{2}\sqrt{1+U_n} + 2U_n}$$

$$0 \leq U_n \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\sqrt{1+U_n} > 0 \\ 2U_n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{1+U_n} + 2U_n > 0$$

$$0 \leq U_n \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq U_n - 1 \leq 0 \\ -2U_n - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (U_n - 1)(-2U_n - 1) \geq 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sqrt{1+U_n} + 2U_n > 0 \\ (U_n - 1)(-2U_n - 1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(U_n - 1)(-2U_n - 1)}{\sqrt{2}\sqrt{1+U_n} + 2U_n} \geq 0$$

$$U_{n+1} - U_n \geq 0 \Leftrightarrow U_{n+1} \geq U_n$$

donc (U_n) est une suite croissante.

Montrons que (U_n) converge

(U_n) est croissante et majorée

donc elle converge.

c) Déterminons la limite l de la suite (U_n) .

La suite (U_n) étant convergente elle admet une limite finie l solution de l'équation $f(x) = x$

où f est la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+x}$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+x} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1+x) = x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{1-3}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1+3}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow l \in [0; 1]$$

$$\text{donc } l = 1$$

$$2^\circ) x \in [0; \pi]; \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

a) Montrons que $\forall n, \in \mathbb{N}$, on a

$$U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

Démontrons par récurrence que $\forall n, \in \mathbb{N}$, $U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

Soit P_n la propriété définie par P_n : " $U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ "

Vérifions que P_0 est vraie.

$$U_0 = 0 \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{2^{0+1}}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$U_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2^{0+1}}\right) \text{ donc } P_0 \text{ est vraie.}$$

Supposons

P_n vraie puis montrons que P_{n+1} est vraie.

$$P_n \text{ vraie} \Leftrightarrow U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + u_n} = \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + U_n}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}}$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \text{ car}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \text{ donc } P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

$$\begin{cases} P_0 \text{ vraie} \\ P_n \text{ vraie} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vraie} \end{cases}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

b) Retrouvons ainsi la limite l de la suite (U_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \cos 0 = 1$$

$$\text{donc } l = 1$$

EXERCICE n°6

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_n = \frac{2}{V_n} \end{cases} \quad U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$$

1°) Calculons $V_0; U_1; V_1; U_2; V_2$

$$V_0 = \frac{2}{U_0} \Leftrightarrow$$

$$V_0 = 1$$

$$U_1 = \frac{U_0 + V_0}{2} \Leftrightarrow U_1 = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$U_1 = \frac{3}{2}$$

$$V_1 = \frac{2}{U_1} \Leftrightarrow V_1 = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$V_1 = \frac{4}{3}$$

$$U_2 = \frac{U_1 + V_1}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12}$$

$$U_2 = \frac{17}{12}$$

$$V_2 = \frac{2}{U_2} \Leftrightarrow V_2 = \frac{2}{\frac{17}{12}} = \frac{24}{17}$$

$$V_2 = \frac{24}{17}$$

2°) Démontrons que les suites (U_n) et (V_n) sont majorées par 2 et minorées par 1.

Démontrons par récurrence.

Soit P_n et q_n les propriétés définies par : P_n : « $1 \leq U_n \leq 2$ » et q_n : « $1 \leq V_n \leq 2$ ».

Vérifions que P_0 et q_0 sont vraies.

$$U_0 = 2 \text{ et } V_0 = 1$$

$$1 < 2 \leq 2 \text{ et } 1 \leq 1 < 2$$

$1 < U_0 \leq 2$ et $1 \leq V_0 < 2$ donc

P_0 et q_0 sont vraies.

Supposons

P_n et q_n vraies puis montrons que P_{n+1} et q_{n+1}

$$\text{sont vraies. } \begin{cases} P_n \text{ vraie} \\ q_n \text{ vraie} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq U_n \leq 2 \\ 1 \leq V_n \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \leq U_n + V_n \leq 4$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{U_n + V_n}{2} \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq 2 \text{ donc } P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

$$\text{De même, } 1 \leq U_n \leq 2 \text{ et } 1 \leq V_n \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{U_{n+1}} \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{2}{U_{n+1}} \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq V_{n+1} \leq 2 \text{ donc } q_{n+1} \text{ est vraie}$$

$$\begin{cases} P_0 \text{ et } q_0 \text{ vraie} \\ P_n \text{ et } q_n \text{ vraie} \Rightarrow P_{n+1} \text{ et } q_{n+1} \text{ vraie} \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq U_n \leq 2 \text{ et } 1 \leq V_n \leq 2$$

3°) Montrons que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - V_{n+1} &= \frac{U_n + V_n}{2} - \frac{2}{\frac{U_n + V_n}{2}} \\ &= \frac{U_n + V_n}{2} - \frac{4}{U_n + V_n} \\ &= \frac{(U_n + V_n)^2 - 8}{2(U_n + V_n)} \\ &= \frac{(U_n + V_n)^2 - 4U_n V_n}{2(U_n + V_n)} \end{aligned}$$

$$\text{Car } U_n \cdot V_n = 2 \Rightarrow 4 U_n \cdot V_n = 8$$

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{U_n^2 + V_n^2 + 2U_n V_n - 4U_n V_n}{2(U_n + V_n)}$$

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{U_n^2 - 2U_n V_n + V_n^2}{2(U_n + V_n)} \quad (1)$$

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} \quad (1)$$

4°) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq V_n$.

Démontrons par récurrence que : « $U_n \geq V_n$ »

Soit P_n la propriété définie par :

« $U_n \geq V_n$ ». vérifions que P_0 est vraie.

$$U_0 = 2 \text{ et } V_0 = 1$$

$$2 > 1 \Rightarrow U_0 > V_0 \text{ donc } P_0 \text{ est vraie.}$$

Supposons P_n vraie puis montrons que P_{n+1}

est vraie.

$$\begin{aligned} 2 \geq U_n \geq V_n \geq 1 &\Rightarrow \begin{cases} (U_n - V_n)^2 \geq 0 \\ 2(U_n + V_n) > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} \\ &\geq 0 \Rightarrow U_{n+1} - V_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geq V_{n+1} \text{ donc } P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

$$\begin{cases} P_0 \text{ vraie} \\ P_n \text{ vraie} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vraie} \end{cases} \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}; U_n \geq V_n$$

5°) Montrons que

(U_n) est décroissante et (V_n) croissante.

$$\bullet \quad U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + V_n}{2} - U_n$$

$$= \frac{U_n + V_n - 2U_n}{2} = \frac{-U_n + V_n}{2}$$

$$U_n \geq V_n \Rightarrow -U_n \leq -V_n$$

$$\Rightarrow -U_n + V_n \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-U_n + V_n}{2} \leq 0$$

$$U_{n+1} - U_n \leq 0 \Rightarrow U_{n+1}$$

$\leq U_n$ la suite (U_n) est décroissante.

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2}{U_{n+1}} - V_n = \frac{4}{U_n + V_n} - V_n$$

$$= \frac{4 - V_n U_n - V_n^2}{U_n + V_n}$$

$$= \frac{2V_n U_n - V_n U_n - V_n^2}{U_n + V_n}$$

$$\text{car } V_n U_n = 2 \Rightarrow 4 = 2V_n U_n$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{V_n U_n - V_n^2}{U_n + V_n}$$

$$= \frac{V_n(U_n - V_n)}{U_n + V_n}$$

$$U_n \geq V_n$$

$$\Rightarrow U_n - V_n \geq 0$$

$$\begin{cases} 1 \leq U_n \leq 2 \\ 1 \leq V_n \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_n > 0 \\ U_n + V_n > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_n - V_n \geq 0 \\ V_n > 0 \\ U_n + V_n > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{V_n(U_n - V_n)}{U_n + V_n} \geq 0$$

$$\Rightarrow V_{n+1} - V_n \geq 0$$

$$\Rightarrow V_{n+1} \geq V_n$$

donc (V_n) est une suite croissante.

6°) Montrons que pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n - V_n \leq 1$.

$$\begin{cases} 1 \leq U_n \leq 2 \\ 1 \leq V_n \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq U_n \leq 2 \\ -2 \leq -V_n \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1 \leq U_n - V_n \leq 1 \text{ or } U_n \geq V_n \Rightarrow U_n - V_n \geq 0$$

par suite

$$0 \leq U_n - V_n \leq 1$$

Déduisons en que $(U_n - V_n)^2 \leq U_n - V_n$.

$$\begin{cases} 0 \leq U_n - V_n \leq 1 \\ U_n - V_n \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq (U_n - V_n)^2 \leq U_n - V_n$$

$$(U_n - V_n)^2 \leq U_n - V_n \quad (2)$$

7°) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(U_n - V_n)$$

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} \quad (1)$$

D'après (2) on a : $(U_n - V_n)^2 \leq U_n - V_n$

$$1 \leq U_n \leq 2 \text{ et } 1 \leq V_n \leq 2$$

$$\Rightarrow 2 \leq U_n + V_n \leq 4$$

$$\Rightarrow 4 \leq 2(U_n + V_n) \leq 8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2(U_n + V_n)} \leq \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} 0 \leq (U_n - V_n)^2 \leq U_n - V_n \\ \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2(U_n + V_n)} \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} \leq \frac{1}{4}(U_n - V_n)$$

$$\text{or } U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} \text{ donc}$$

$$U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(U_n - V_n)$$

Déduisons en que : $U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(U_n - V_n)$$

Pour $n=0$;

$$U_1 - V_1 \leq \frac{1}{4}(U_0 - V_0)$$

Pour $n=1$;

$$U_2 - V_2 \leq \frac{1}{4}(U_1 - V_1)$$

Pour $n=2$;

$$U_3 - V_3 \leq \frac{1}{4}(U_2 - V_2)$$

A l'ordre n-1 ;

$$U_n - V_n \leq \frac{1}{4}(U_{n-1} - V_{n-1})$$

Tous les termes étant positifs car $U_n - V_n \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$; alors par multiplication membre à membre et après simplification on a :

$$U_n - V_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n (U_0 - V_0)$$

$$U_n - V_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{Car } U_0 - V_0 = 1$$

8°) Montrons que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite et donnons leur limite commune.

$$U_n \geq V_n \Rightarrow U_n - V_n \geq 0$$

$$\begin{cases} U_n - V_n \geq 0 \\ U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{cases} \Rightarrow 0 \leq U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$$

Donnons leur limite commune.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n V_n = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 2$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l \text{ donc } l^2 = 2 \text{ par suite } l = \sqrt{2} \text{ ou } l = -\sqrt{2}$$

$$U_n \geq 1 \Rightarrow l \geq 1 \Rightarrow l = \sqrt{2}$$

La limite commune est $l = \sqrt{2}$

EXERCICE n°11

$$U_0 = \frac{1}{2} ; v_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3} u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + \frac{\sqrt{3}}{3} v_n \\ z_n = u_n + i v_n \end{cases}$$

1°) Calculons $|z_0|$ puis $|z_{n+1}|$ en fonction de $|z_n|$

$$z_0 = u_0 + i v_0 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|z_0| = \left| \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1$$

$$|z_0| = 1$$

$$z_n = u_n + i v_n \Rightarrow |z_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$$

$$z_{n+1} = u_{n+1} + i v_{n+1}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} u_n - v_n \right) + i \left(u_n + \frac{\sqrt{3}}{3} v_n \right)$$

$$|z_{n+1}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} u_n - v_n \right)^2 + \left(u_n + \frac{\sqrt{3}}{3} v_n \right)^2}$$

=

$$\sqrt{\frac{3}{9} u_n^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} u_n v_n + v_n^2 + u_n^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} u_n v_n + \frac{3}{9} v_n^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} u_n^2 + u_n^2 + \frac{1}{3} v_n^2 + v_n^2} = \sqrt{\frac{4}{3} (u_n^2 + v_n^2)}$$

$$|z_{n+1}| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} |z_n|$$

$$|z_{n+1}| = \frac{2\sqrt{3}}{3} |z_n|$$

Déduisons en fonction de n une expression de $|z_n|$

$$|z_0| = 1 \text{ et } |z_{n+1}| = \frac{2\sqrt{3}}{3} |z_n| \text{ donc } |z_n|$$

est une suite géométrique de 1er terme $|z_0| = 1$ et de raison $q = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$|z_n| = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n$$

2°) a) Exprimons z_{n+1} en fonction de z_n .

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= u_{n+1} + iv_{n+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}u_n - v_n + i\left(u_n + \frac{\sqrt{3}}{3}v_n\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}u_n + i\frac{\sqrt{3}}{3}v_n - v_n + iu_n \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}(u_n + iv_n) + i(u_n + iv_n) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right)(u_n + iv_n) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right)z_n \end{aligned}$$

$$z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right)z_n$$

b) Trouvons un argument de $\frac{\sqrt{3}}{3} + i$

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{posons } \theta = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right)$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right) = \frac{\pi}{3}$$

c) Dédisons un argument θ_{n+1} de z_{n+1} en fonction d'un argument θ_n de z_n

$$\begin{aligned} \arg(z_{n+1}) &= \arg\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right)z_n\right] \\ &= \arg\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right)\right] + \arg z_n \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \theta_n$$

$$\arg z_{n+1} = \theta_{n+1} = \frac{\pi}{3} + \theta_n$$

d) Trouvons un argument de z_0 puis une

expression de θ_n en fonction de n

$$z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \arg z_0 = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg z_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg z_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{\pi}{3} \quad \text{donc } \theta_n \text{ est une suite}$$

arithmétique de 1er terme $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ et de raison $r = \frac{\pi}{3}$

$$\theta_n = \frac{\pi}{3} + n\frac{\pi}{3} = (n+1)\frac{\pi}{3}$$

$$\theta_n = (n+1)\frac{\pi}{3}$$

3°) Exprimons u_n et v_n en fonction de n

$$z_n = |z_n| e^{i\theta} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n e^{i(n+1)\frac{\pi}{3}}$$

$$z_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^n \cos\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right] +$$

$$i\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^n \sin\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right] \quad \text{Or}$$

$$z_n = u_n + iv_n \quad \text{Par identification}$$

$$u_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^n \cos(n+1)\frac{\pi}{3}$$

$$v_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^n \sin(n+1)\frac{\pi}{3}$$

CALCUL INTEGRAL

EXERCICE n°4

$$I = \int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx \text{ et } J = \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$$

1°)a) Montrons que l'inégalité I peut s'écrire sous la forme :

$$I = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx \Leftrightarrow I = \int_0^{\pi} (\cos^2 x)^2 \, dx$$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^{\pi} \cos^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx$$

b) A l'aide d'une intégration par partie montrons que : $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3}J$

$$I = \int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx$$

$$\text{Posons : } u(x) = \cos x ; u'(x) = -\sin x$$

$$v'(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x ;$$

$$v(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$$

$$I = [\cos x (\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\sin x (\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x) \, dx$$

$$I = 0 + \int_0^{\pi} (\sin^2 x - \frac{1}{3} \sin^4 x) \, dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3}J$$

$$\text{Car } J = \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$$

c) Montrons que : $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3}I$

$$J = \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x (\sin x - \sin x \cos^2 x) \, dx$$

$$\text{Posons : } u(x) = \sin x ; u'(x) = \cos x$$

$$v'(x) = \sin x - \sin x \cos^2 x ;$$

$$v(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$$

$$J = [\sin x (-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x (-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x) \, dx$$

$$J = 0 + \int_0^{\pi} \cos^2 x - \frac{1}{3} \cos^4 x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$$

$$J = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3}I$$

2°)a) Montrons que : $I+J = \frac{3\pi}{4}$ et $I-J = 0$

$$I+J = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3}J + \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3}I$$

$$= \int_0^{\pi} (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx - \frac{1}{3}(I+J)$$

$$(I+J) + \frac{1}{3}(I+J) = \int_0^{\pi} dx = [x]_0^{\pi} = \pi$$

$$\frac{4}{3}(I+J) = \pi \Rightarrow$$

$$I+J = \frac{3\pi}{4}$$

$$I-J = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3}J - \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx + \frac{1}{3}I$$

$$I-J = \int_0^{\pi} (\sin^2 x - \cos^2 x) \, dx - \frac{1}{3}(J-I)$$

$$(I-J) - \frac{1}{3}(I-J) = \int_0^{\pi} -\cos 2x \, dx$$

$$\frac{2}{3}(I-J) = [-\frac{1}{2} \sin 2x]_0^{\pi} = 0$$

$$I - J = 0$$

b) Dédisons en les valeurs exactes des Intégrales I et J.

$$\begin{cases} I + J = \frac{3\pi}{4} \\ I - J = 0 \end{cases} \Rightarrow 2I = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{3\pi}{8}$$

$$J = \frac{3\pi}{4}$$

Corrigé exercice n°6

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx$$

1) Calculons la valeur de u_0

$$u_0 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = [\ln(1+e^x)]_0^1$$

$$u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

2) Montrons que $u_0 + u_1 = 1$

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^x + 1}{1+e^x} dx = [x]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

$$u_0 + u_1 = 1$$

Dédisons u_1

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 &= 1 \Leftrightarrow u_1 = 1 - u_0 \\ &= 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \end{aligned}$$

$$u_1 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$u_1 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

3) Montrons que la suite (u) est positive

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0; 1]$ on a

$$e^x > 0; e^{nx} > 0 \text{ et}$$

$$1 + e^x > 0 \text{ donc } \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx > 0 \text{ d'après la positivité de l'intégrale.}$$

$$4) K(x) = f_{n+1}(x) + f_n(x)$$

a) Montrons que pour tout x réel,

$$K(x) = \frac{1+e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$$

$$\begin{aligned} K(x) &= f_{n+1}(x) - f_n(x) \\ &= \frac{e^x}{e^{(n+1)x}(1+e^x)} - \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} \\ &= \frac{1}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} \end{aligned}$$

$$K(x) = \frac{1-e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$$

b) Etudions le signe de $K(x)$ pour $x \in [0; 1]$

$$K(x) = \frac{1-e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$$

$\forall x \in [0; 1] \quad e^{nx} > 0$ et $(1+e^x) > 0$

donc le signe de K dépend de celui de $1-e^x$

$$x \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow e^0 \leq e^x \leq e^1$$

$$\Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$$

$$\Rightarrow -e \leq -e^x \leq -1$$

$$\Rightarrow 1-e \leq 1-e^x \leq 0 \text{ donc}$$

$$1-e^x \leq 0 \Leftrightarrow K(x) \leq 0$$

$$\text{donc } K(x) \leq 0 \text{ pour } x \in [0; 1]$$

c) Dédisons que la suite (u) est décroissante.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^{(n+1)x}(1+e^x)} dx \\ &\quad - \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx \\ u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{1-e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx \\ &= \int_0^1 K(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{or } K(x) \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 K(x) dx \leq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 \Leftrightarrow$$

$u_{n+1} \leq u_n$ donc (u_n) Est décroissante

5°) a) Déterminons $u_{n-1} + u_n$

$$u_{n-1} + u_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{(n-1)x}(1+e^x)} dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx$$

$$u_{n-1} + u_n = \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^{(n-1)x}(1+e^x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{e^{(n-1)x}} dx$$

$$= \int_0^1 e^{(-n+1)x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{-n+1} e^{(-n+1)x} \right]_0^1$$

$$u_{n-1} + u_n = \frac{1}{-n+1} e^{-n+1} - \frac{1}{-n+1}$$

$$u_{n-1} + u_n = \frac{1}{1-n} [e^{1-n} - 1]$$

$$u_{n-1} + u_n = \frac{1}{1-n} [e^{1-n} - 1]$$

b) Calculons u_2

$$u_{n-1} + u_n = \frac{1}{1-n} (e^{1-n} - 1)$$

Pour $n = 2$

$$u_1 + u_2 = \frac{1}{1-2} (e^{1-2} - 1) = 1 - e^{-1} \Leftrightarrow$$

$$u_2 = 1 - e^{-1} - u_1$$

$$= 1 - e^{-1} - \left(1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \right)$$

$$u_2 = -e^{-1} + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$6^\circ) v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}$$

a) Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1-n} (e^{1-n} - 1)}{2}$$

$$= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1-n} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

b) Montrons que pour tout $n \geq 2$ on a $0 \leq u_n \leq v_n$

la suite (u_n) est une suite à termes positifs

et décroissante donc $u_n \geq 0 \quad n \in \mathbb{N}$ et $u_n \leq u_{n-1}$

$$\Leftrightarrow u_n + u_n \leq u_{n-1} + u_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{2u_n}{2} \leq \frac{u_{n-1} + u_n}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n \leq v_n$$

$$\begin{cases} u_n \geq 0 \\ u_n \leq v_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$0 \leq u_n \leq v_n \text{ pour } n \geq 2$$

c) Dédisons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$0 \leq u_n \leq v_n \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

EXERCICE n°7

$$U_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt \text{ et } U_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt$$

1°) Calculons U_0 et U_1

$$U_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt = \int_0^1 (1+t)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \left[\frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} (2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}$$

$$U_0 = \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}$$

$$U_1 = \int_0^1 t \sqrt{1+t} dt$$

$$\text{Posons } u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1$$

$$v'(t) = (1+t)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v(t) = \frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}}$$

$$U_1 = \int_0^1 t\sqrt{1+t} dt$$

$$= \left[\frac{2}{3} t(1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} dt$$

$$U_1 = \left[\frac{2}{3} t(1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \left[\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} (1+t)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1$$

$$U_1 = \frac{2}{3} (2)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{4}{15} (2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{15} \right)$$

$$U_1 = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{2} - \frac{16\sqrt{2}}{15} + \frac{4}{15}$$

$$U_1 = \frac{20\sqrt{2} - 16\sqrt{2} + 4}{15} = \frac{4\sqrt{2} + 4}{15}$$

$$U_1 = \frac{4\sqrt{2} + 4}{15}$$

2°) Montrons que la suite U est décroissante.

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1+t} dt - \int_0^1 t^n\sqrt{1+t} dt =$$

$$\int_0^1 (t^{n+1} - t^n)\sqrt{1+t} dt$$

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 (t-1)t^n\sqrt{1+t} dt$$

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} t-1 \leq 0 \\ t^n > 0 \\ \sqrt{1+t} > 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow (t-1)t^n\sqrt{1+t} \leq 0 \Rightarrow \int_0^1 (t-1)t^n\sqrt{1+t} dt \leq 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$$

La suite (U_n) est donc décroissante.

$$3^\circ) \text{ Établissons que : } \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq t+1 \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{t+1} \leq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow t^n \leq t^n\sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}t^n \quad \text{car } t^n > 0$$

Par intégration on a :

$$\int_0^1 t^n dt \leq \int_0^1 t^n\sqrt{1+t} dt \leq \int_0^1 \sqrt{2}t^n dt$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 \leq U_n \leq \sqrt{2} \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1$$

$$\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

4°) a) Montrons que pour tout $t \in [0; 1]$ on a : $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

$$t \in [0; 1] \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1+t \leq 2$$

$$1 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \leq \frac{1}{2}$$

Par intégration, on a :

$$\int_t^1 \frac{1}{2\sqrt{2}} dt \leq \int_t^1 \frac{1}{2\sqrt{1+t}} dt \leq \int_t^1 \frac{1}{2} dt$$

$$\left[\frac{1}{2\sqrt{2}} t \right]_t^1 \leq \left[\sqrt{1+t} \right]_t^1 \leq \left[\frac{1}{2} t \right]_t^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} t \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} t$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-t) \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$$

Car $1-t > 0$. Donc

$$0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$$

$$\text{b) Déduisons en : } \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

D'après a) pour $t \in [0; 1]$ on a :

$$0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq -\sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t) - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} - \frac{1}{2}(1-t) \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}$$

$$t^n \left[\sqrt{2} - \frac{1}{2}(1-t) \right] \leq t^n\sqrt{1+t} \leq t^n\sqrt{2}$$

car $t \geq 0$ et $t^n \geq 0$

Par intégration on a :

$$\int_0^1 t^n \left[\sqrt{2} - \frac{1}{2}(1-t) \right] dt \leq \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n \sqrt{2} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (\sqrt{2} - \frac{1}{2}) t^n + \frac{1}{2} t^{n+1} dt \leq U_n \leq \int_0^1 t^n \sqrt{2} dt$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\sqrt{2}+1}{n+1} t^{n+1} + \frac{1}{2} \frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 \leq U_n \leq \left[\sqrt{2} \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2+6n+4} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

or pour $n \in \mathbb{N}$, $2n^2 \leq 2n^2 + 6n + 4$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n^2} \geq \frac{1}{2n^2 + 6n + 4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2n^2} \leq -\frac{1}{2n^2 + 6n + 4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2 + 6n + 4}$$

par suite :

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}}$$

C) Déterminons la limite de la suite (nU_n)

D'après b) on a la double inégalité :

$$\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{n\sqrt{2}}{n+1} - \frac{n}{2n^2} \leq nU_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{2}}{n+1} - \frac{n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{2}}{n} - \frac{1}{2n} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{2}}{n+1} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \frac{n\sqrt{2}}{n+1} - \frac{n}{2n^2} \leq nU_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{2}}{n+1} - \frac{n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{2}}{n} - \frac{1}{2n} = \sqrt{2} \end{cases}$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n = \sqrt{2}}$$

EXERCICE n°11

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} ; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx ; K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

1°) Calcul de I.

a) Calculons la dérivée de la fonction :

$$x \mapsto x + \sqrt{x^2+2}$$

Posons $u(x) = x + \sqrt{x^2+2}$;

$$u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}$$

$$u'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \quad u'(x) = \frac{\sqrt{x^2+2} + x}{\sqrt{x^2+2}}$$

b) Dédisons en la dérivée f de f.

$$f'(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$$

$$f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2+2})'}{(x + \sqrt{x^2+2})} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+2} + x}{\sqrt{x^2+2}}}{x + \sqrt{x^2+2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2} + x}{\sqrt{x^2+2}} \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2+2}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \quad \forall x \in [0; 1]}$$

c) Calculons I

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = [\ln(x + \sqrt{x^2+2})]_0^1$$

$$I = \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$$

$$I = \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$$

2°) Calcul de J et K

a) Vérifions que $J + 2I = K$

$$J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx + 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

$$J + 2I = K$$

3°) A l'aide d'une intégration par partie montrons que :

$$K = \sqrt{3} - J$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx = \int_0^1 1 \times \sqrt{x^2+2} dx$$

$$\text{Posons } u(x) = \sqrt{x^2+2} ;$$

$$u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$v'(x) = 1 ; v(x) = x$$

$$K = [x\sqrt{x^2+2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$$

$$K = \sqrt{3} - J$$

c) Déduisons en les valeurs de J et K

$$\begin{cases} J + 2I = K \\ K = \sqrt{3} - J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J - K = -2I \\ J + K = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J - K = -2 \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\ J + K = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2J = -2 \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{3}$$

$$J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$K = \sqrt{3} - J \Rightarrow$$

$$K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

EQUATION DIFFERENTIELLE

EXERCICE n°2

$$(E): y' + y = e^{-x}$$

1) Déterminons les réels a et b tels que la

fonction U définie sur $\mathbb{R}$ par $U(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit solution de (E) .

$U(x) = (ax + b)e^{-x}$ U est dérivable sur $\mathbb{R}$

en tant que produit de fonctions dérivables

sur $\mathbb{R}$.

$$U'(x) = ae^{-x} - e^{-x}(ax + b)$$

$$= e^{-x}(a - ax - b)$$

U est solution de (E)

$$\Rightarrow U'(x) + U(x) = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}(a - b - ax) + (ax + b)e^{-x} = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow a - b - ax + ax + b = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

pour $a = 1$ et $b \in \mathbb{R}$

$U(x) = (x + b)e^{-x}$ est solution de (E) .

2°) Résolution de l'équation différentielle

$$(E_0): y' + y = 0$$

Les solutions de l'équation différentielle (E_0)

sont les fonctions : $x \mapsto ke^{-x}, k \in \mathbb{R}$.

3°) Montrons qu'une fonction V définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $V - U$ est solution de (E_0) .

• Supposons que V est solution de

(E) et montrons que

$V - U$ est solution de (E_0)

V est solution de (E) $\Rightarrow V'(x) + V(x) = e^{-x}$.

U est solution de (E) $\Rightarrow U'(x) + U(x) = e^{-x}$

$$\begin{cases} V'(x) + V(x) = e^{-x} \\ U'(x) + U(x) = e^{-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V'(x) + V(x) = U'(x) + U(x)$$

$$\Rightarrow V'(x) - U'(x) + V(x) - U(x) = 0$$

$$\Rightarrow (V - U)'(x) + (V - U)(x) = 0$$

$V - U$ est donc solution de (E_0)

- Réciproquement supposons maintenant V

$- U$ solution de (E_0) et montrons que V est solution de (E).

$V - U$ est solution de $(E_0) \Rightarrow$

$$(V - U)'(x) + (V - U)(x) = 0 \Rightarrow$$

$$V'(x) - U'(x) + V(x) - U(x) = 0$$

$$\Rightarrow V'(x) + V(x) = U'(x) + U(x)$$

Or d'après 1°) U est solution

de (E) c'est à dire

$$U'(x) + U(x) = e^{-x}$$

Par suite $V'(x) + V(x) = e^{-x}$

donc V est solution de (E)

On conclut finalement que V est solution de (E) si et seulement si

$V - U$ est solution de (E_0) .

4°) Déduisons en toutes les solutions de (E).

$V - U$ étant solution de (E_0)

alors $(V - U)(x) = ke^{-x} \Rightarrow V(x) - U(x)$

$$= ke^{-x} \Rightarrow V(x)$$

$$= ke^{-x} + U(x)$$

$$\Rightarrow V(x) = ke^{-x} + (x - b)e^{-x}$$

Les solutions de (E) sont les fonctions V :

$$x \mapsto ke^{-x} + (x + b)e^{-x}$$

avec $(k, b) \in \mathbb{R}^2$.

5°) Déterminons

f_2 solution de (E) prenant

la valeur 2 en 0.

$$V(x) = ke^{-x} + (x - b)e^{-x}$$

$$V(2) = 0$$

$$\Leftrightarrow ke^{-2} + (2 - b)e^{-2} = 0$$

$$e^{-2}(k + 2 + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -2 - b$$

$$f_2 : x \mapsto (-2 - b)e^{-x} + (x + b)e^{-x}$$

avec $b \in \mathbb{R}$

Corrigé exercice n°5

On considère l'équation différentielle

$$9y'' + 4y = 0$$

1°)a) Déterminons les solutions générales de (E) $9y'' + 4y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{4}{9}y = 0$. La solution

générale de (E) est

$$\varphi(x) = A \cos \frac{2}{3}x + B \sin \frac{2}{3}x$$

b) Déterminons la solution

φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1$

$$\varphi(0) = 0 \Leftrightarrow A \cos 0 + B \sin 0 = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$A = 0$$

$$\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow A \cos \frac{3\pi}{4} \times \frac{2}{3} + B \sin \frac{3\pi}{4} \times \frac{2}{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow A \cos \frac{\pi}{2} + B \sin \frac{\pi}{2} = 1 \Leftrightarrow B = 1$$

$$B = 1$$

$$\varphi(x) = \sin \frac{2}{3}x$$

2°) Représentons φ sur $[0; \frac{3\pi}{2}]$

$\varphi(x) = \sin \frac{2}{3}x$. φ est dérivable sur $[0; \frac{3\pi}{2}]$

$$\varphi'(x) = \frac{2}{3} \cos \frac{2}{3}x$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{2}{3}x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2}$$

$$S_{[0; \frac{3\pi}{2}]} = \left\{ \frac{3\pi}{4} \right\}$$

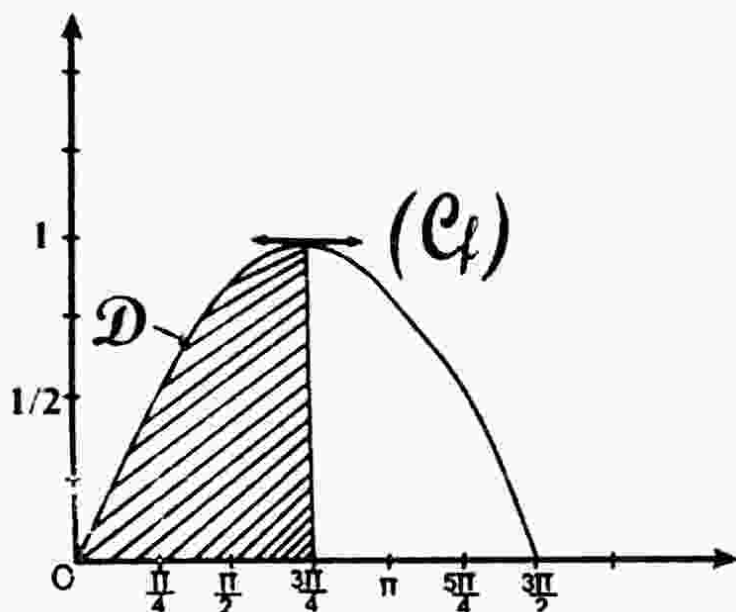
Tableau de signe

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos \frac{2}{3}x$		+	-

Tableau de variation

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\varphi'(x)$		+	-
$\varphi(x)$	0	1	0

Courbe schema15



3°) Calculons l'aire de D

$$D = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \varphi(x) dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 \frac{2}{3}x dx$$

$$D = \left[-\frac{3}{2} \cos \frac{2}{3}x \right]_0^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$D = \left[-\frac{3}{2} \cos \left(\frac{2}{3} \times \frac{3\pi}{4} \right) \right] + \left[\frac{3}{2} \cos \left(\frac{2}{3} \times 0 \right) \right]$$

$$D = \frac{3}{2} UA$$

b) Calculons le volume de ce solide

$$V = \pi \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \left(\sin^2 \frac{2}{3}x \right)^2 dx$$

$$\sin^2 \frac{2}{3}x = 1 - \cos^2 \frac{2}{3}x = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{4}{3}x \right]$$

$$\sin^2 \frac{2}{3}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{4}{3}x$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{4}{3}x \right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \sin \frac{4}{3}x \right) \right]_0^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{3}{8} \sin \frac{4}{3}x \right]_0^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \pi \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{3}{8} \sin \frac{4}{3} \times \frac{3\pi}{4} \right) - \pi(0) = \frac{3\pi^2}{8}$$

$$V = \frac{3\pi^2}{8} UV$$

EXERCICE n°6

$$(S) \begin{cases} X' = X + Y & (1) \\ Y' = -5X - Y & (2) \end{cases}$$

1°) a) Dérivons l'équation (1).

$$(1) : X' = X + Y \Rightarrow X'' = X' + Y' \quad (3)$$

b) Eliminons X' et Y' dans l'équation (3).

$$(3) : X'' = X' + Y'$$

$$(S) : \begin{cases} X' = X + Y \\ Y' = -5X - Y \end{cases} \Rightarrow X' + Y' = -4X$$

Remplaçons $X' + Y'$ par $-4X$ dans (3)

$$X'' = -4X \Rightarrow$$

$$X'' + 4X = 0 \quad (4)$$

c) Dédisons la forme générale de X et Y .

$$X'' + 2^2X = 0$$

La forme générale de X est la fonction : $t \mapsto$

$$A \cos 2t + B \sin 2t$$

$$X(t) = A \cos 2t + B \sin 2t$$

$$A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

$$(1) : X' = X + Y \Rightarrow Y = X' - X$$

$$\text{Or } X(t) = A \cos 2t + B \sin 2t$$

$$X'(t) = -2A \sin 2t + 2B \cos 2t$$

$$X'(t) - X(t) = -2A \sin 2t + 2B \cos 2t - (A \cos 2t + B \sin 2t)$$

$$X'(t) - X(t) = (2B - A) \cos 2t - (2A + B) \sin 2t$$

$$Y(t) = (2B - A) \cos 2t - (2A + B) \sin 2t$$

2°) Déterminons X et Y de M sachant qu'à $t=0$, M se trouve en $M_0(3; 1)$

$$M_0(3; 1) \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 3 \\ Y(0) = 1 \end{cases}$$

$$X(0)=3 \Rightarrow A \cos 0 + B \sin 0 = 3 \Rightarrow A=3$$

$$Y(0)=1$$

$$\Rightarrow (2B - A) \cos 0 - (2A + B) \sin 0 = 1 \Rightarrow 2B - A = 1$$

$$\begin{cases} A = 3 \\ 2B - A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ 2B = 1 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$X(t) = 3 \cos 2t + 2 \sin 2t$$

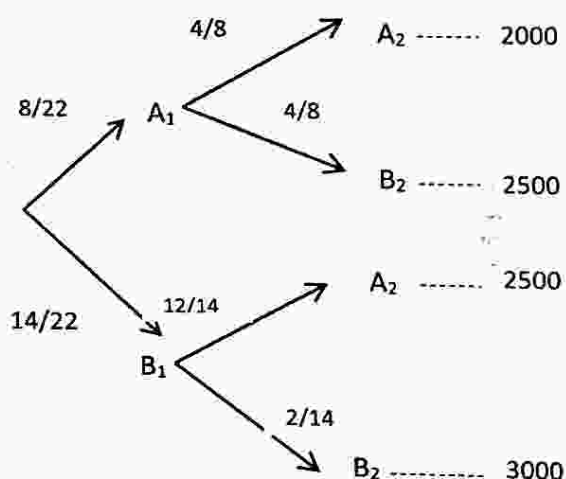
$$Y(t) = (2 \times 2 - 3) \cos 2t - (2 \times 3 + 2) \sin 2t$$

$$Y(t) = \cos 2t - 8 \sin 2t$$

PROBABILITE

Corrige Exercice n°9

Utilisons un arbre pondéré pour répondre aux questions.



1°) a) Calculons les probabilités suivantes

$$P(A_1) = \frac{4}{11}$$

$$P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap B_1)$$

$$= P(A_2/A_1) \times P(A_1) + P(A_2/B_1) \times P(B_1)$$

$$= \frac{4}{8} \times \frac{8}{22} + \frac{12}{14} \times \frac{14}{22}$$

$$= \frac{2}{11} + \frac{6}{11} = \frac{8}{11}$$

$$P(A_2) = \frac{8}{11}$$

b) Calculons les probabilités suivantes

$$P(A_2/A_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2/B_1) = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

c) Calculons les probabilités $P(A_1 \cap A_2)$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2/A_1) \times P(A_1),$$

$$= \frac{4}{22} = \frac{2}{11}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{11}$$

2°) a) Les valeurs prises par x

$$X(\Omega) = \{2000; 2500; 3000\}$$

b) loi de probabilité de X

X_i	2000	2500	3000
$P(X_i)$	$\frac{2}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{1}{11}$

c) Espérance mathématique $E(x)$

$$E(x) = \frac{2000 \times 2 + 2500 \times 8 + 3000}{11} = \frac{27000}{11}$$

$$E(x) = \frac{27000}{11}$$

La variance $V(x)$

$$V(x) = 2000^2 \times \frac{2}{11} + 2500^2 \times \frac{6}{11} + 3000^2 \times \frac{1}{11} - \left(\frac{27000}{11}\right)^2 = \frac{8 \cdot 10^6}{121}$$

$$V(x) = \frac{8 \cdot 10^6}{121}$$

Ecart type δx

$$\delta x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^6}{121}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 10^3}{11}$$

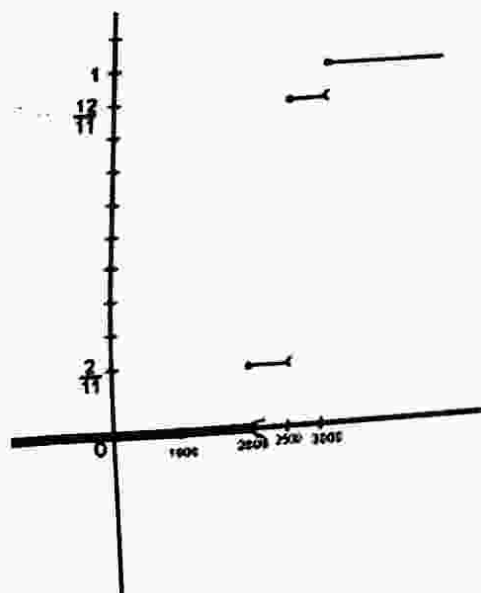
$$\delta x = \frac{2\sqrt{2} \cdot 10^3}{11}$$

d) La fonction de répartition F

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$$

$$X \mapsto F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty; 2000[\\ \frac{2}{11} & \text{si } x \in [2000; 2500[\\ \frac{10}{11} & \text{si } x \in [2500; 3000[\\ 1 & \text{si } x \in [3000; +\infty[\end{cases}$$

Représentation graphique. **Schéma 18**



Corrigé exercice n°13

L'univers est l'ensemble des 365 jrs d'où
card $\Omega = 365$

Le choix du jour se fait au hasard donc nous sommes
dans une situation d'équiprobabilité.

$$P(B) = \frac{180}{365} = \frac{36}{73}$$

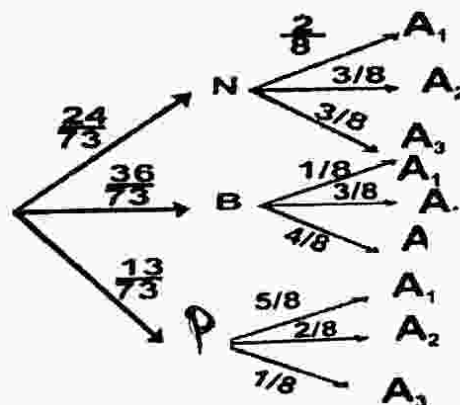
$$P(B) = \frac{36}{73}$$

$$P(N) = \frac{120}{365} = \frac{24}{73}$$

$$P(N) = \frac{24}{73}$$

$$P(p) = \frac{65}{365} = \frac{13}{73}$$

$$P(p) = \frac{13}{73}$$



- Calculons $P(A_1)$

$$A_1 = (A_1 \cap N) \cup (A_1 \cap B) \cup (A_1 \cap P)$$

Les évènements $A_1 \cap N$; $A_1 \cap B$; $A_1 \cap P$

Sont incompatibles donc

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1 \cap N) + P(A_1 \cap B) + P(A_1 \cap P) \\ &= P(N) \times P(A_1/N) + P(B) \times P(A_1/B) \\ &\quad + P(P) \times P(A_1/P) \\ &= \frac{24}{73} \times \frac{2}{8} + \frac{36}{73} \times \frac{1}{8} + \frac{13}{73} \times \frac{5}{8} \\ &= \frac{48 + 36 + 65}{584} \end{aligned}$$

$$P(A_1) = \frac{149}{584}$$

- Calculons A_2

$$A_2 = (A_2 \cap N) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_2 \cap P)$$

Les évènements $(A_2 \cap N)$; $(A_2 \cap B)$; $(A_2 \cap P)$
sont indépendants donc

$$\begin{aligned}
 P(A_2) &= P(A_2 \cap N) + P(A_2 \cap B) + P(A_2 \cap P) \\
 &= P(N) \times P(A_2/N) + P(B) \times P(A_2/B) + P(P) \\
 &\quad \times P(A_2/P) \\
 &= \frac{24}{73} \times \frac{3}{8} + \frac{36}{73} \times \frac{3}{8} + \frac{13}{73} \times \frac{2}{8} = \frac{72+108+26}{584} = \frac{206}{584}
 \end{aligned}$$

$$P(A_2) = \frac{103}{292}$$

- Calculons $P(A_3)$

$$A_3 = (A_3 \cap N) \cup (A_3 \cap B) \cup (A_3 \cap P)$$

$$(A_3 \cap N); (A_3 \cap B); (A_3 \cap P)$$

sont incompatibles donc

$$P(A_3) = P(A_3 \cap N) + P(A_3 \cap B) + P(A_3 \cap P)$$

$$P(A_3) = P(N) \times P(A_3/N) + P(B) \times P(A_3/B) + P(P) \times P(A_3/P)$$

$$= \frac{24}{73} \times \frac{3}{8} + \frac{36}{73} \times \frac{4}{8} + \frac{13}{73} \times \frac{1}{8} = \frac{72 + 144 + 13}{584}$$

$$P(A_3) = \frac{229}{584}$$

- 3°) a- soit l'évènement

$D \ll \text{Le bilan est positif} \gg$ D est réalisé si A_2 est réalisé ou A_3 est réalisé $P(D) = P(A_2) + P(A_3)$ car A_2 et A_3

sont incompatibles

$$P(D) = \frac{206}{584} + \frac{229}{584} = \frac{435}{584}$$

$$P(D) = \frac{435}{584}$$

La probabilité pour que le bilan soit positif est : $\frac{435}{584}$

- b) Il s'agit de calculer $P(N/D)$

$$\begin{aligned}
 P(N/D) &= \frac{P(N \cap D)}{P(D)} \\
 &= \frac{P(N) \times [P(A_2/N) + P(A_3/N)]}{P(D)} \\
 &= \frac{\frac{24}{73} \times (\frac{3}{8} + \frac{3}{8})}{\frac{435}{584}} = \frac{24 \times 6}{435} = \frac{48}{145}
 \end{aligned}$$

$$P\left(\frac{N}{D}\right) = \frac{48}{145}$$

PROBLEMES DE SYNTHESE

Problème 1

- 1°) a) Précisons les asymptotes de la courbe (C)

D'après le tableau de variation de la fonction f , on constate : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc la

droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe (C).

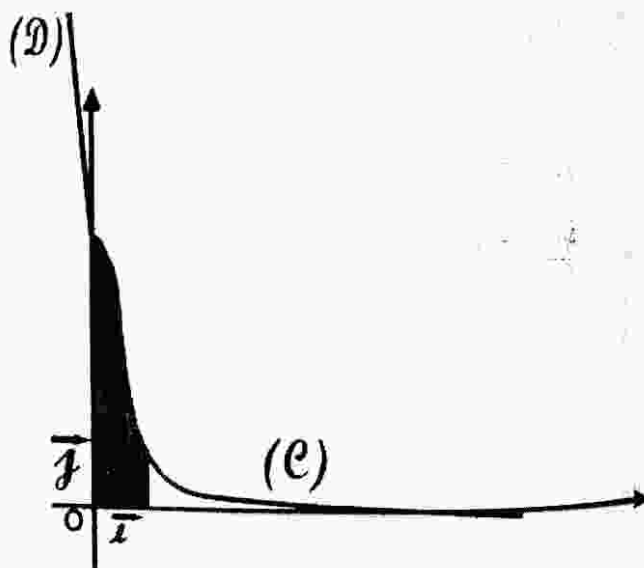
- b) Equation de la tangente à (C) en $x = 0$

$$(D) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$f'(0) = -2 ; f(0) = 1$$

$$(D) : y = -2x + 1$$

- c) Traçons la droite (D) et la courbe (C) dans le repère.
schema16



- 2°) Donnons la valeur de $g(0)$ et le signe de $g(x)$ pour $x \in [0 ; +\infty[$

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \quad g \text{ est la primitive de la}$$

fonction f prenant la valeur 0 en 0

$$g(0) = 0$$

Signe de $g(x)$; $x \in [0 ; +\infty[$

La fonction x

$\rightarrow f(x)$ est définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

De plus d'après le tableau de variation de f ,

$\forall x \in [0 ; +\infty[f(x) > 0$. D'après la positivité

de l'intégrale

on peut écrire que: $\int_0^x f(t)dt \geq 0$ donc $g(x) \geq 0$

$\forall x \in [0 ; +\infty[$

3°) Sens de variation de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$.

g étant la primitive de f prenant

la valeur 0 en 0 alors $g'(x) = f(x)$.

Pour $x \in [0 ; +\infty[f(x) > 0$ donc

g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

4°) a- Interprétons graphiquement la valeur de $g(1)$

$g(1)$ représente l'aire du plan délimité par (C)

l'axe des abscisses les droites équations

$x = 0 ; x = 1$ en unité d'aire.

Mise en relief (confère graphique)

b- Justifions que $g(1)$ est compris entre $\frac{1}{2e}$ et 1.

D'après le tableau de variation de la fonction f on constate que pour $x \in [0 ; 1]$,

$$\frac{1}{2e} \leq f(x) \leq 1$$

f étant continue sur $[0 ; 1]$ on a

$$\int_0^1 \frac{1}{2e} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 1 dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2e} x \right]_0^1 \leq g(1) \leq [x]_0^1$$

$$\frac{1}{2e} \leq g(1) \leq 1$$

PARTIE B

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x}$$

1°) a-Démontrons que pour tout réel

x positif, $f(x) = (1-x)e^{-x} + x^2 f(x)$

$$\text{on sait que: } f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x} \Leftrightarrow e^{-x} = (1+x)f(x)$$

$$\Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = (1-x)(1+x)f(x)$$

$$\Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = (1-x^2)f(x)$$

$$\Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = f(x) - x^2 f(x)$$

$$\Leftrightarrow (1-x)e^{-x} + x^2 f(x) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (1-x)e^{-x} + x^2 f(x)$$

b-Déduisons en que :

$$g(1) = \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx + \int_0^1 x^2 f(x) dx.$$

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow g(1) = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 [(1-x)e^{-x} + x^2 f(x)] dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx + \int_0^1 x^2 f(x) dx$$

$$g(1) = \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx + \int_0^1 x^2 f(x) dx$$

2°) A l'aide d'une intégration par partie, calculons

$$A = \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx \text{ et } B = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

$$A = \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx$$

$$\text{posons } u(x) = (1-x) \Rightarrow u'(x) = -1$$

$$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$$

$$A = [-(1-x)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= 1 - [-e^{-x}]_0^1$$

$$= 1 + (e^{-1} - 1) = \frac{1}{e}$$

$$A = \frac{1}{e}$$

$$B = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \text{ posons } u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$$

$$B = [-x^2 e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2x e^{-x} dx$$

$$\text{posons } u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$$

$$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$$

$$B = [-x^2 e^{-x}]_0^1 + [-2x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx$$

$$B = [-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x}]_0^1 + [-2e^{-x}]_0^1$$

$$B = [-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x}]_0^1$$

$$B = (-e^{-1} - 2e^{-1} - 2e^{-1}) - (-2) = -5e^{-1} + 2$$

$$= 2 - \frac{5}{e}$$

$$B = 2 - \frac{5}{e}$$

b) Démontrons que :

$$\int_0^1 \frac{x^2 e^{-x}}{2} dx \leq \int_0^1 x^2 f(x) dx \leq \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x}$$

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \text{ or}$$

$$\forall x \in [0; 1] \quad e^{-x} > 0 \text{ et } x^2 \geq 0. \text{ Par suite}$$

$$\frac{e^{-x}}{2} \leq \frac{e^{-x}}{x+1} \leq e^{-x} \Leftrightarrow \frac{x^2 e^{-x}}{2} \leq \frac{x^2 e^{-x}}{x+1} \leq x^2 e^{-x}$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_0^1 \frac{x^2 e^{-x}}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^2 e^{-x}}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

c) Dédudons en un encadrement de $g(1)$ entre deux nombres décimaux d'ordre 1

$$\int_0^1 \frac{x^2 e^{-x}}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^2 e^{-x}}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

$$\frac{1}{2}B \leq \int_0^1 x^2 f(x) dx \leq B$$

$$A + \frac{1}{2}B \leq \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx + \int_0^1 x^2 f(x) dx \leq A + B$$

$$e^{-1} + \frac{2 - 5e^{-1}}{2} \leq g(1) \leq e^{-1} + 2 - 5e^{-1}$$

$$0.446 \leq g(1) \leq 0.524$$

$$0.4 \leq g(1) \leq 0.6$$

3°) a) Justifions que pour tout réel $x \geq 1$ on a :

$$0 \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{e^{-t}}{2} dt. \quad \forall t > 1 \text{ on a : } t+1 > 2$$

$$t+1 > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{t+1} < \frac{1}{2} \text{ or } e^{-t} > 0 \Leftrightarrow \frac{e^{-t}}{t+1} < \frac{e^{-t}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt \leq \int_1^x \frac{e^{-t}}{2} dt \text{ or } \frac{e^{-t}}{t+1} > 0$$

$$0 \leq \int_1^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt \leq \int_1^x \frac{e^{-t}}{2} dt$$

b) Démontrons que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 :

$$0 \leq \int_1^x f(t) dt \leq \frac{1}{2e}$$

$$\text{on sait que : } 0 \leq \int_1^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt \leq \int_1^x \frac{e^{-t}}{2} dt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^x f(t) dt \leq \left[\frac{-1}{2} e^{-t} \right]_1^x$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^x f(t) dt \leq \frac{-1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2e}$$

posons $u(x) = \frac{-1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2e}$, $x \in [1; +\infty[$ $u'(x) = \frac{1}{2} e^{-x} > 0$ donc u est strictement croissante

x	1	$+\infty$
$u'(x)$		+
$u(x)$	0	$\frac{1}{2e}$

D'après le tableau de u on constate que $u(x) < \frac{1}{2e}$

$$\forall x \in [0; +\infty[$$

$$\text{donc } 0 \leq \int_1^x f(t)dt \leq u(x) < \frac{1}{2e} \text{ d'ou}$$

$$0 \leq \int_1^x f(t)dt \leq \frac{1}{2e}$$

c) Dédisons en que g est une fonction majorée

$$g(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt$$

$$\text{or } 0 \leq \int_1^x f(t)dt \leq \frac{1}{2e}$$

$$\text{et } e^{-1} + \frac{2-5e^{-1}}{2} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq e^{-1} + 2 - 5e^{-1}$$

En additionnant membre à membre on obtient

$$e^{-1} + \frac{2-5e^{-1}}{2} \leq \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt \leq \frac{1}{2e} + e^{-1} + 2 - 5e^{-1}$$

$$\frac{1}{e} + 1 - \frac{5}{2e} \leq \int_0^x f(t)dt \leq \frac{1}{2e} + \frac{1}{e} + 2 - \frac{5}{e}$$

$$-\frac{3}{2e} + 1 \leq g(x) \leq \frac{3}{2e} - \frac{10}{2e} + 2$$

$$1 - \frac{3}{2e} \leq g(x) \leq 2 - \frac{7}{2e} \text{ avec } x \geq 1$$

g étant bornée alors elle est majorée par $2 - \frac{7}{2e}$

d) Justifions que g admet une limite finie en $+\infty$.

g est une fonction strictement croissante sur $[0; +\infty[$ de plus, pour $x \geq 1$

$$1 - \frac{3}{2e} \leq g(x) \leq 2 - \frac{7}{2e}$$

g étant croissante et majorée alors elle converge. Donc g admet une limite finie en $+\infty$.

PROBLEME 2

PARTIE A

$$1^a) Df = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \ln(-x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{\ln(-x)}{x}\right) = -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln |x| = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

b) Variation de f

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-1}{x} \quad \forall x \in Df$$

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} \quad \forall x \in Df$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0$$

donc f est strictement croissante

sur $] -\infty; 0[$ et sur $[1; +\infty[$

$\forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; 1]$

Tableau de variation : $f(1) = 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$

2°) a) Montrons que (C) coup (ox) en un seul point

f est continue (car dérivable)

sur $] - \infty; 0[$ et strictement croissante sur $] - \infty; 0[$. Donc elle réalise une bijection de $] - \infty; 0[$ vers $\mathbb{R}$. De plus $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $] - \infty; 0[$. On en déduit que (Cf) coup (ox) en un point d'abscisse appartenant $] - \infty; 0[$.

- f est continue

Sur $]0; +\infty[$ f admet un minimum en 1 donc, $f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 1 > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution de $]0; +\infty[$. On en déduit que (C_f) et (ox) n'ont pas de point d'intersection dans $]0; +\infty[$. En définitive (Cf) coup (ox) en un seul point A d'abscisse α .

- Vérifions que $\alpha \in] - 1; -\frac{1}{2}[$

$$f(-1) = -1 - \ln 1 = -1$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \ln 2 \approx 0.2$$

$$f(-1) < 0 \text{ et } f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0 \text{ donc } f(-1) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0. \text{ Ainsi } \alpha \in] - 1; -\frac{1}{2}[$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0. \text{ Ainsi } \alpha \in] - 1; -\frac{1}{2}[$$

b) Position de (C_f) par rapport a(D) : $y = x$

$$f(x) - x = -\ln |x|$$

$$\ln |x| < 0 \Rightarrow |x| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < x < 1, x \neq 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
-----	-----------	------	-----	-----	-----------

$\ln x $	+	-	-	+
$-\ln x $	-	+	+	-

$\forall x \in] - \infty; -1[\cup]1; +\infty[, f(x) - x < 0$
donc (Cf) est en dessous de (D)

$\forall x \in] - 1; 0[\cup]0; 1[, f(x) - x > 0$

donc (Cf) est au dessus de (D)

Tracer (D) ; (T) ; (C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln |x| = -\infty$$

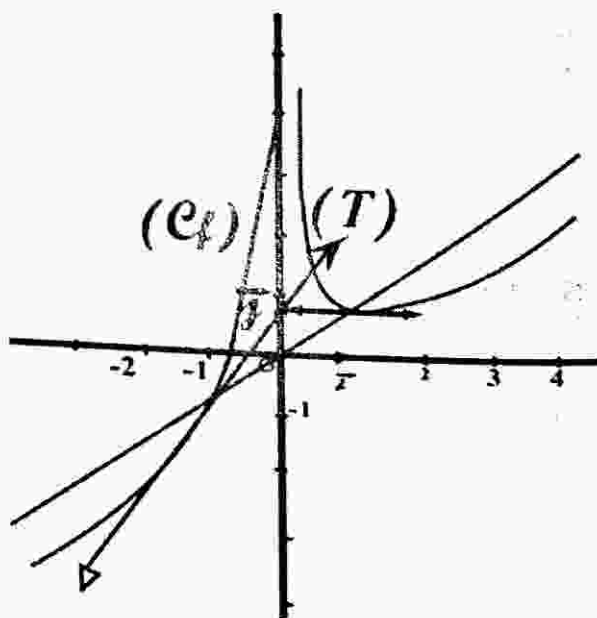
donc (Cf) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (D)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(-x)}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln(-x)) = -\infty$$

donc (Cf) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (D)

Représentation graphique



$$(T): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) = 2(x + 1) - 1$$

$$(T): y = 2x + 1$$

$$(T): y = 2x + 1$$

$$3^\circ) a) A(k) = 4 \int_k^1 f(x) dx$$

$$A(k) = 4 \int_k^1 (x - \ln x) dx = 4 \int_k^1 x dx - 4 \int_k^1 \ln x dx$$

$$I = \int_k^1 \ln x dx$$

$$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \quad v = x$$

$$I = [x \ln x]_k^1 - \int_k^1 1 dx = -k \ln k - [x]_k^1 = -k \ln k - 1 + k$$

$$\int_k^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_k^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} k^2$$

$$A(k) = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} k^2 + k \ln k + 1 - k \right)$$

$$= 2 - 2k^2 + 4k \ln k + 4 - 4k$$

$$= 4k \ln k - 2k^2 - 4k + 6$$

$$A(k) = 4k \ln k - 2k^2 - 4k + 6$$

$$b) \lim_{k \rightarrow 0} 4k \ln k = 0, \lim_{k \rightarrow 0} (-2k^2) = \lim_{k \rightarrow 0} 4k = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} A(k) = 6$$

I.G:

$\lim_{k \rightarrow 0} A(k) = 2$ est l'aire en cm^2 du domaine

limité par (Cf) l'axe des abscisses et

les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

$$4^\circ) (T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$= \frac{a-1}{a} (x - a) + a - \ln |a|$$

$$= \frac{a-1}{a} x - a + 1 + a - \ln |a|$$

$$(T): y = \frac{a-1}{a} x + 1 - \ln |a|$$

$$(T'): y = f'(-a)(x + a) + f(-a)$$

$$= \frac{-a-1}{-a} (x + a) - a - \ln |a|$$

$$= \frac{a+1}{a} x + a + 1 - a - \ln |a|$$

$$(T'): y = \frac{a+1}{a} x + 1 - \ln |a|$$

$$\Rightarrow \frac{a-1}{a} x + 1 - \ln |a|$$

$$= \frac{a+1}{a} x + 1 - \ln |a|$$

$$\Rightarrow \frac{a-1}{a} x - \frac{a+1}{a} x = 0 \Rightarrow x = 0$$

donc $T(0; 0)$

$$(T) \cap (T') = \{I(0; 1 - \ln |a|)\}$$

$$5^\circ) a \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |a| = a$$

donc I a pour coordonné $(0; 1 - \ln a)$

donc I $\in$ (oy) par conséquent $a \in \mathbb{R}_+^*$

, N décrit l'axe des ordonnées

PARTIE B

$$\text{Sur } [-1; \frac{-1}{2}], \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

1°) a) Démontrons que

α est solution de $\varphi(x) = x$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \varphi(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

d'après 2°) a) α est solution de $f(x) =$

$$0 \text{ donc } f(\alpha) = 0 \text{ Ainsi } f(\alpha) - \alpha = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} =$$

$$0 \text{ donc } \varphi(\alpha) = \alpha$$

par conséquent α est l'unique solution de $\varphi(x) = x$

$$b) \text{ Vérifions que } \forall x \in [-1; \frac{-1}{2}]$$

$$i) \varphi(x) = \frac{x}{x-1} (\ln |x| - 1)$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x - \ln |x|}{\frac{x-1}{x}}$$

$$x - \frac{x}{x-1} (x - \ln |x|) = \frac{x(x-1) - x(x - \ln |x|)}{x-1}$$

$$\varphi(x) = \frac{x}{x-1} (x - 1 - x + \ln |x|)$$

$$\varphi(x) = \frac{x}{x-1} (-1 + \ln |x|) \text{ donc}$$

$$\varphi(x) = \frac{x}{x-1} (\ln |x| - 1)$$

$$ii) \varphi'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} f(x)$$

$$\varphi'(x) = \left(\frac{x}{x-1} \right)' (\ln |x| - 1) + \frac{x}{x-1} \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2} (\ln |x| - 1) + \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(x-1)^2} (-\ln |x| + 1 + x - 1) \\
 &= \frac{1}{(x-1)^2} (-\ln |x| + x) \\
 \varphi'(x) &= \frac{1}{(x-1)^2} (x - \ln |x|) \text{ or } x - \ln |x| \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

donc

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} f(x)$$

$$\forall x \in [-1; \frac{-1}{2}]$$

c) Sens de variation de φ

$$* \forall x \in [-1; \frac{-1}{2}], \frac{1}{(x-1)^2} > 0$$

donc $\varphi'(x)$ a le meme signe que $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 \forall x \in [-1; \alpha], f(x) \leq 0 &\Rightarrow \varphi'(x) \\
 &\leq 0 \text{ donc } \varphi \text{ est décroissante} \\
 &\text{sur } [-1; \alpha]
 \end{aligned}$$

$$\forall x \in [\alpha; \frac{-1}{2}], f(x) \geq 0 \Rightarrow \varphi'(x)$$

$$\geq 0 \text{ donc } \varphi \text{ est croissante sur } [\alpha; \frac{-1}{2}]$$

$$\begin{aligned}
 * \varphi\left(\frac{-1}{2}\right) &= \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-1}{2} - 1} (-\ln 2 - 1) \\
 &= \frac{1}{3} (-0.7 - 1) = -0.566
 \end{aligned}$$

$$\varphi\left(\frac{-1}{2}\right) \approx 0.566$$

$$\text{Montrons que } \forall x \in [\alpha; \frac{-1}{2}], \varphi(x) \in [\alpha; \frac{-1}{2}]$$

Sur $[\alpha; \frac{-1}{2}]$, φ est croissante donc

$$\alpha \leq x \leq \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\alpha) \leq \varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \leq \varphi(x) \leq -0.566 \leq \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \leq \varphi(x) \leq \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) \in [\alpha; \frac{-1}{2}] \text{ donc}$$

$$\forall x \in [\alpha; \frac{-1}{2}], \varphi(x) \in [\alpha; \frac{-1}{2}]$$

Démontrons que $\forall x \in [\alpha; \frac{-1}{2}], |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{9}$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} f(x)$$

$$x \in [\alpha; \frac{-1}{2}] \Leftrightarrow \alpha \leq x \leq \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 \leq x - 1 \leq \frac{-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq (x-1)^2 \leq (\alpha-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\alpha-1)^2} \leq \frac{1}{(x-1)^2} \leq \frac{4}{9} \quad (1)$$

$$x \in [\alpha; \frac{-1}{2}] \Leftrightarrow f(\alpha) \leq f(x) \leq f\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{-1}{2} + \ln 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 0.2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{5} \quad (2)$$

Par produit membre à membre de (1) et (2) on a :

$$0 \leq \frac{1}{(x-1)^2} f(x) \leq \frac{1}{9} \times \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9} \leq 0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{1}{9} \times \frac{4}{5} \leq \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{9} \leq \varphi'(x) \leq \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{9}$$

donc

$$\forall x \in [\alpha; \frac{-1}{2}], |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{9}$$

$$2^\circ) \begin{cases} u_0 = \frac{-1}{2} \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$

a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\alpha; \frac{-1}{2}]$

Soit P la positivité : « $u_n \in [\alpha; \frac{-1}{2}]$ » $u_0 = \frac{-1}{2} \in [\alpha; \frac{-1}{2}]$

donc P est vraie au rang 0.

Supposons P vraie au rang n

$$\text{ie } u_n \in [\alpha; \frac{-1}{2}]$$

D'après B. 1°) d) $\forall x \in [\alpha; \frac{-1}{2}], \varphi(x) \in [\alpha; \frac{-1}{2}]$. Or

$$u_n \in [\alpha; \frac{-1}{2}] \text{ donc}$$

$\varphi(u_n) \in \left[\alpha; \frac{-1}{2}\right]$ et comme
 $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ alors
 $u_{n+1} \in \left[\alpha; \frac{-1}{2}\right]$ donc P est vraie
 au rang

$n + 1$. Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\alpha; \frac{-1}{2}\right]$$

$b) \varphi'$ est continue sur $\left[\alpha; \frac{-1}{2}\right]$ donc
 continue sur $[\alpha; u_n]$ car

$u_n \in \left[\alpha; \frac{-1}{2}\right]$ Par application du théorème
 de l'inégalité de la moyenne

à φ' sur $[\alpha; u_n]$ on a :

$$\left| \int_{\alpha}^{u_n} \varphi'(x) dx \right| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha|$$

$$|[\varphi(x)]_{\alpha}^{u_n}| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha|$$

$$|\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha|$$

or $\varphi(\alpha) = \alpha$ et $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ donc

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

c) Remplaçons n par $0, 1, 2, \dots, n-1$

On a les identités suivantes :

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_1 - \alpha|$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_{n-1} - \alpha|$$

Par somme membre à membre et après simplification

$$\text{on a : } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\alpha \in \left]-1; \frac{-1}{2}\right[\Leftrightarrow -1 < \alpha < \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < -\alpha < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} < \frac{-1}{2} - \alpha < \frac{-1}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{-1}{2} - \alpha < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |u_0 - \alpha| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha| < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

$$\text{Car } \left(\frac{1}{9}\right)^n > 0. \text{ Par suite } \Leftrightarrow |u_n - \alpha| < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

$$|u_n - \alpha| < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

d) Justifions que la suite (u_n) est convergente
 et précisons sa limite.

$$|u_n - \alpha| < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^n \text{ Et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^n = 0$$

(Car $-1 < \frac{1}{9} < 1$) donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$. La suite (u_n) est
 convergente et converge vers α .

e) Déterminons le plus petit entier naturel
 p tel que U_p soit une valeur approchée à
 10^{-2} près de α .

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^n \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^n \leq 2 \cdot 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow -n \ln 9 \leq \ln 2 - 2 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2 - 2 \ln 10}{-2 \ln 3}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln 2 - 2 \ln 5}{-2 \ln 3}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2 + 2 \ln 5}{2 \ln 3}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{2 \ln 3}{2 \ln 3}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 1.77$$

$$p = 2$$

Handwritten text: $\frac{1}{2}$ - 11, 11 - 11, 11 - 11