

Situations complexes



I Comment transformer une situation d'évaluation en une situation complexe ?

- Une situation d'évaluation est constituée d'un contexte, d'une (ou des) circonstance(s) et d'une (ou des) consigne(s). On dit qu'une situation d'évaluation a trois constituants.
- Une situation complexe est constituée d'un contexte, d'un (ou des) support(s) ; d'une (ou des) fonction(s), et d'une (ou des) consigne(s) (indépendantes). On dit qu'une situation complexe a quatre constituants.

Situation complexe

Situation d'évaluation	Situation complexe
un contexte : il décrit l'environnement (lieu, moment, ...) dans lequel on se situe	● Un contexte : il décrit l'environnement (lieu, moment, ...) dans lequel on se situe. ● Des supports : c'est l'ensemble des éléments matériels, virtuels ou réels, qui sont présentés à l'apprenant : texte écrit, illustration, photo..., et dont il doit effectuer un traitement pour résoudre la situation.
Des circonstances : Elles précisent dans quel(s) but(s) la production est réalisée. La plupart du temps, cette fonction est une fonction sociale.	Des fonctions : Elles précisent dans quel(s) but(s) la production est réalisée. La plupart du temps, cette fonction est une fonction sociale.
Une ou des consigne(s) : Ce sont des instructions de travail qui sont données à l'apprenant de façon explicite. La situation d'évaluation doit comporter une à trois consignes. Les consignes ne sont forcément indépendantes.	Une ou des consigne(s) : Ce sont des instructions de travail qui sont données à l'apprenant de façon explicite. La situation complexe doit comporter 1 à 3 consignes indépendantes.

Une situation complexe est une situation d'évaluation. Une situation d'évaluation est par nature complexe. La Commission Nationale Pédagogique de Mathématiques de Côte d'Ivoire a décidé en 2020 d'utiliser le terme de situation d'évaluation au premier cycle et celui de situation complexe au second cycle. Pour cette dernière une condition supplémentaire a été ajoutée pour s'aligner aux exigences du BAC UEMOA.

La situation complexe doit comporter **1 à 3 consignes indépendantes.**

Pour passer de la situation d'évaluation à la situation complexe, il suffit de rendre les consignes indépendantes ou de poser une consigne.

Résolution d'une situation complexe

La rédaction d'une situation doit faire apparaître :

- une introduction

L'élève doit citer l'outil qu'il va utiliser et donner les étapes de sa production

- un développement

L'élève fait montre de ses connaissances mathématiques. Il utilise avec précision les

outils mathématiques.

Il doit annoncer chaque étape de son raisonnement pour que le correcteur puisse le suivre.

- une conclusion

C'est le retour au problème pour donner un avis ou répondre à une préoccupation

Nous donnons ici des exemples :

II Exemple de situations complexes

Leçon 1 ÉTUDE DE FONCTIONS POLYNÔMES ET DE FONCTIONS RATIONNELLES

Situation complexe 1

Lors d'une visite dans une entreprise qui fabrique entre 9 et 18 machines à coudre par jour, le directeur affirme que toute la production est vendue au prix de 122 000 F l'unité.

Le coût de production de x machines à coudre exprimé en milliers de francs est modélisé par la fonction f définie par : $f(x) = 2x^3 - 54x^2 + 458x$.

L'entreprise souhaite déterminer le nombre de machine à coudre à fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal. Il te sollicite.

Utilise tes connaissances sur les fonctions pour déterminer le nombre de machines à coudre à produire pour que le bénéfice soit maximal.

Situation complexe 2

L'entreprise du père d'un élève produit et commercialise entre 4 et 16 tonnes d'engrais par jour. On admet que toute sa production est vendue.

Le bénéfice total (exprimé en millions de francs CFA) réalisé pour une production de x tonnes d'engrais, est modélisé à l'aide de la fonction B définie par :

$$B(x) = -x^2 + 20x - 64.$$

Le bénéfice unitaire $b(x)$ pour une production de x tonnes d'engrais est donné par :

$$b(x) = \frac{B(x)}{x}.$$

Le père veut savoir si le bénéfice total et le bénéfice unitaire sont maximaux pour la même production d'engrais.

Réponds à la préoccupation du père de l'élève à l'aide d'une production argumentée.

Leçon 2 PROBABILITÉ

Situation complexe

À la fête de la promotion Terminale, un jeu consiste à tirer deux enveloppes parmi dix dont une contient un billet de 2 000 F, deux contiennent chacune un billet de 1 000 F et les autres sont vides. Le chef d'une classe de Terminale A dit à ses camarades de classe que tout participant à ce jeu a 60% de chance de gagner. Son voisin affirme que les chances de gagner à ce jeu sont inférieures à 55%.

Départage-les.

Leçon 3 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Situation complexe 1

Un homme place un capital dans une banque avec un intérêt composé au taux de 5%. Le capital après n année est donnée par la formule $C_n = C_0 \times 1,05^n$, où C_0 est le capital placé.

Il souhaite doubler son capital pour s'acheter une machine, mais ne sait pas quand cela arrivera.

Détermine le nombre d'années qu'il faudra à cet homme pour acheter cette machine.

Situation complexe 2

Pendant une visite de votre classe dans un centre d'étude du son à Abidjan, vous avez les informations suivantes :

- Le son se manifeste par des variations de pression de l'air. L'unité de mesure de la pression de l'air est le Pascal. La pression de l'air s'exerce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à 20×10^{-6} Pascals s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine

perçoit un son dont le niveau se mesure en décibels.

- On note : $p_0 = 20 \times 10^{-6}$.

Pour une pression de p Pascals s'exerçant sur le tympan, avec $p \geq p_0$, le niveau sonore perçu est égale à :

$$f(p) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50\,000p).$$

On a constaté que le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 10. L'on sait aussi qu'à partir d'un niveau sonore de 120 décibels, on ressent une douleur. Vous décidez d'en savoir plus.

Vous voulez comprendre.

1. Justifie que le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 10.
2. Détermine la pression p correspondant au niveau sonore qui provoque des douleurs à l'oreille.

Leçon 4 FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

Situation complexe

Monsieur Yavo est un comptable dans une entreprise qui fabrique un matériau éphémère par mois. On admet que toute la production est vendue.

Il s'est rendu compte que lorsque la production dépasse une certaine quantité, les dirigeants affirment que les bénéfices diminuent. Il n'arrive pas à comprendre cette situation.

Selon le comptable, une étude a prouvé que lorsque l'entreprise fabrique x matériaux en millier de ce type, avec $x \geq 0,5$; le bénéfice qu'elle réalise est modélisé par la fonction f définie par : $f(x) = (4 - 2x)e^x$.

À l'aide de tes connaissances sur les fonctions explique les variations du bénéfice en fonction du nombre de matériels fabriqués.

Leçon 5 STATISTIQUE

Situation complexe

Le Club santé du lycée Mami Fatai de Bingerville s'est spécialisé dans la fabrication de cache-nez et accessoires de protection pour les élèves dudit établissement contre la COVID-19. La production est vendue au-delà du lycée et à travers toute la ville de Bingerville. Le tableau ci-dessous donne les chiffres d'affaires trimestriels, en milliers de francs, pour les années 2020 et 2021 du club de santé. (on admet que la prévision du club de 238 000 F sera réalisée pour le dernier trimestre de 2021).

	2020				2021			
Rang du trimestre : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires trimestriel (y_i)	330	325	305	290	282	285	260	238

Le Club veut prévoir son chiffre d'affaires pour le premier trimestre de l'année 2022 si la tendance reste la même ».

Par une production mathématique argumentée, détermine le chiffre d'affaire du club au premier trimestre 2022.

Leçon 6 PRIMITIVES ET CALCUL INTÉGRAL

Situation complexe

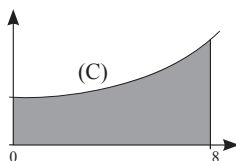
La coopérative d'un lycée a reçu le terrain représenté ci-dessous par la zone hachurée pour cultiver de la tomate.

Le géomètre qui a travaillé sur le lot du lycée affirme que la courbe (C) représentée ci-dessous est celle de la fonction f définie par :

$$f'(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{4} + 12, x \text{ est exprimé en mètres.}$$

Les élèves de la promotion terminale souhaitent connaître l'aire de leur terrain pour acheter les semences de tomate nécessaires. Il te sollicite pour cela.

En utilisant tes connaissances sur les outils mathématiques au programmes, détermine l'aire du terrain.



Leçon 7 SUITES NUMÉRIQUES

Situation complexe

Pendant les vacances scolaires, un élève en classe de Tle A a trouvé un emploi. Son patron lui a promis une rémunération de 10 000 F par semaine. Constatant que l'élève a bien travaillé la 1^{ère} semaine, le patron lui a donné 10 000 F et lui a proposé une augmentation de sa rémunération. Il lui a demandé de choisir entre deux options.

Option A : une augmentation fixe de la rémunération de 2 000 F chaque semaine.

Option B : une augmentation de 3 % de la rémunération hebdomadaire.

Il a choisi l'option A et a travaillé pendant les 3 mois de vacances.

Pendant l'année scolaire suivante, il explique cela à ses camarades de classe. Sa voisine dit alors que l'option B lui aurait permis de gagner plus.

Une discussion s'engage et les élèves décident tous de vérifier l'affirmation de la voisine par des calculs.

Départage les élèves.

Leçon 8 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Situation complexe 1

Pour la Kermesse du lycée, les élèves de terminale veulent fabriquer 2 types de yaourts à la banane A et B à partir de banane, de lait et de sucre.

Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières.

	A	B
Banane	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

On dispose de 8 kg de banane, 7 kg de lait et 3 kg de sucre.

La vente de 1 kg de yaourt A et B rapporte respectivement 4 000 F et 5 000 F.

Les fabricants cherchent à maximiser leur profit. Ne sachant pas comment le faire, ils te sollicitent. Détermine le nombre de yaourts du type A et le nombre de yaourts du type B qu'ils doivent fabriquer.

Situation complexe 2

Le conseil de la promotion terminale A d'un lycée a décidé d'organiser une sortie détente sur Assinie pour les élèves, les professeurs et le personnel administratif. Le président du conseil contacte donc deux sociétés de transports : CT Confiance et ST Sud-Est. Il obtient de ces compagnies les conditions de

transports suivantes pour le même type de car :

	Prix Adultes	Prix élèves	Prix total
CT Confiance	2800 F	2000 F	67200 F
ST Sud-est	3200 F	1600 F	57600 F

Malheureusement, au cours des négociations, il a oublié de noter le nombre de places disponibles pour les élèves et celles disponibles pour les adultes (Professeurs et personnel administratif), ce qui entrave l'organisation du convoi.

Tu es élève en terminale A, très intéressé par ce voyage, tu aimerais que les inscriptions pour la sortie commencent sans délai.

Aide le président en déterminant le nombre de places disponibles pour chaque catégorie de voyageurs.

III Corrigés et barème critérié

Leçon 1 ÉTUDE DE FONCTIONS POLYNÔMES ET DE FONCTIONS RATIONNELLES

Situation complexe 1

Pour résoudre le problème.

Il faut déterminer le bénéfice puis calculer la dérivée de la fonction liée au bénéfice et enfin rechercher la valeur qui rend maximal le bénéfice.

Déterminons le bénéfice

Soit $B(x)$ le bénéfice

$$B(x) = 122x - (2x^3 - 54x^2 + 458x) \\ = -2x^3 + 54x^2 - 336x$$

Calculons la dérivée de B

$$B'(x) = -6x^2 + 108x - 336$$

$$B'(x) = 6(-x^2 + 18x - 56)$$

Recherchons les extremums

$$B'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 14 \text{ ou } x \in [9; 18], \\ \text{donc } x = 14.$$

Tableau de variation

x	9	14	18
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$			

B admet un maximum en 14.

Il faut produire 14 machines par jour pour avoir un bénéfice maximal.

• Barème critérié

Critères	Indicateurs	Barème de notation
CM1 : Pertinence	- Recherche du bénéfice - Calcul de la dérivée - Recherche d'extremum	0,75 points 1 ind sur 3 → 0,5 2 ind sur 3 → 0,75 Règle des 2/3
CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques en situation	Déterminons le Bénéfice Soit $B(x)$ le bénéfice $B(x) = 122x - (2x^3 - 54x^2 + 458x)$ $= -2x^3 + 54x^2 - 336x$ Calculons la dérivée de B $B'(x) = -6x^2 + 108x - 336$ $B'(x) = 6(-x^2 + 18x - 56)$	2,5 points 1 ind sur 3 → 1 2 ind sur 3 → 1,5 Règle des 2/3

	Recherchons les extremums $B'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 14 \text{ or } x \in [9 ; 18]$ Tableau de variation <table><tr><td>x</td><td>9</td><td>14</td><td>18</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>392</td><td></td></tr></table> B admet un maximum en 14.	x	9	14	18	$f(x)$	+	0	-	$f'(x)$		392		
x	9	14	18											
$f(x)$	+	0	-											
$f'(x)$		392												
CM3 : Cohérence de la réponse	Il faut produire 14 machines par jour pour avoir un bénéfice maximal. • Le résultat produit est conforme au résultat attendu (on trouve un nombre entier naturel compris entre 9 et 18) • Le résultat produit est en adéquation avec la démarche (formules sont juste même si le modèle est faux) • La qualité des enchainements de la démarche	1,25 points 1 ind sur 3→0,75 2 ind sur 3→1,25												
CP : Critère de perfectionnement (Concision, originalité, bonne présentation)	• Présentation : Propreté de la production (Présence des titres des étapes, pas de rature et de surcharge)	0,5 points 1 ind sur 3→0,25 2 ind sur 3→0,5 Règle des 2/3												

Situation complexe 2

Il faut déterminer la valeur qui rend maximal le bénéfice total et le bénéfice unitaire.

Pour étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle $[4 ; 16]$, il suffit d'étudier le signe de $B'(x)$ sur ce même intervalle.

Or, $B'(x) = -2x + 20$ (qui s'annule pour $x = 10$).

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	4	10	16
$B(x)$	+	0	-
$B'(x)$	0	36	0

Un bénéfice total maximal est obtenu pour une production de 10 tonnes d'engrais.

Le bénéfice total correspondant est 36 millions, c'est-à-dire 36 000 000

1. Par définition, on a, pour tout $x \in [4 ; 16]$,

$$b(x) = \frac{B(x)}{x} = \frac{-x^2 + 20x - 64}{x}$$

On étudie les variations de la fonction.

$$b'(x) = \frac{(-2x + 20)x - (-x^2 + 20x - 64)}{x^2}$$

$$b'(x) = \frac{-x^2 + 64}{x^2}$$

x	4	8	16
$b'(x)$	+	0	-
$b(x)$	0	4	0

Le bénéfice total et le bénéfice unitaire ne sont donc pas maximaux pour la même production d'engrais puisque le bénéfice total est maximal pour 10 tonnes d'engrais produites tandis que le bénéfice unitaire est maximal pour 8 tonnes d'engrais produites.

Leçon 2 PROBABILITÉ

Situation complexe

Il faut calculer la probabilité de gagner une somme quelconque à ce jeu.
Les gains possibles sont : 1 000 F, 2 000 F et 3 000 F.

La probabilité de ne rien gagner est : $\frac{C_7^2}{C_{10}^2}$

La probabilité de gagner est : $P(G) = 1 - \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{15} \simeq 53\%$.
C'est bien le voisin qui a raison.

Leçon 3 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Situation complexe 1

Il faut déterminer le temps de doublement du capital c'est-à-dire $C_n = 2C_0$.
Nous allons alors résoudre une équation comportant la fonction $\ln$.

$$C_n = C_0 \times 1,05^n$$

$$2C_0 = C_0 \times 1,05^n$$

$$2 = 1,05^n$$

$$n \ln(1,05) = \ln 2$$

$$n = 14,2$$

Il faut donc 15 ans pour que le capital double.

Situation complexe 2

1. Il faut calculer $f(10p)$ et démontrer que $f(10p) = f(p) + 20$

$$\begin{aligned} f(10p) &= \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000(10p)) \\ &= \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000p \times 10) \\ &= \frac{20}{\ln(10)} [\ln(50000p) + \ln 10] \\ &= \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000p) + \frac{20}{\ln(10)} \times \ln 10 \\ &= \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000p) + 20 \\ &= f(p) + 20 \end{aligned}$$

2. Il faut trouver la valeur de p pour laquelle $f(p) = 120$

$$f(p) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000p) = 120$$

$$\ln(50\,000p) = 6 \ln(10) = \ln(10^6)$$

$$50\,000p = 10^6. \text{ On a } 5p = 10^2.$$

$$\text{Donc } p = 20 \text{ Pascals}$$

Leçon 4 FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

Situation complexe

Pour expliquer les variations du bénéfice en fonction du nombre de matériel fabriqués, nous allons étudier la fonction f sur $[0,5 ; +\infty[$.

$$f(x) = (4 - 2x)e^x.$$

$$f'(x) = -2xe^x + (4 - 2x)e^x.$$

$$f'(x) = 4(1 - x)e^x.$$

La fonction est croissante sur $[0,5 ; 1[$ et décroissante de $]1 ; +\infty[$.

Le maximum est atteint pour $x = 1$.

Le bénéfice augmente pour des productions comprises entre 500 et 1 000 matériaux éphémères.

Le bénéfice est maximal pour 1000 matériaux.

Le bénéfice diminue lorsque la production dépasse 1000 matériaux.

Leçon 5 STATISTIQUE

Situation complexe

- série A2

Nous allons déterminer par la méthode de Mayer la droite d'ajustement relative à cette série puis nous allons utiliser cette droite pour déterminer le chiffre d'affaire du club au premier trimestre 2022.

$$\bar{X} = \frac{1 + 2 + 3 + 4}{4} = 2 ;$$

$$\bar{Y} = \frac{330 + 325 + 305 + 290}{4} = 312,5$$

$$G_1(2 ; 312,5).$$

$$\bar{X} = \frac{5 + 6 + 7 + 8}{4} = 6,5 ;$$

$$\bar{Y} = \frac{282 + 285 + 260 + 238}{4} = 266,25$$

$$G_1(6,5 ; 266,25).$$

Droite de Mayer

$$\frac{y - 312,5}{x - 2} = \frac{266,25 - 312,5}{6,5 - 2} = \frac{-46,25}{4,5}$$

$$= -10,28$$

$$y = -10,28x + 312,5 + 20,55$$

$$y = -10,28x + 333,05$$

Le premier trimestre 2022 correspond au 9e trimestre. Et pour $x = 9$ on a :

$$y = -10,28x + 333,05 = 240,53$$

Au premier trimestre 2022 le chiffre d'affaire serait de 234,34.

- série A1

Nous allons déterminer par la méthode des moindres carrés la droite d'ajustement relative à cette série puis nous allons utiliser cette droite pour déterminer le chiffre d'affaire du club au premier trimestre 2022.

$$\bar{X} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8}{8} = 4,5$$

$$\bar{Y} = \frac{330 + 325 + 305 + 290 + 282 + 285 + 260 + 238}{8}$$

G(4,5 ; 289,375)

	2020				2021				Total
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	36
y_i	330	325	305	290	282	285	260	238	2315
x_i^2	1	4	9	16	25	36	49	64	204
y_i^2	108900	105625	93025	84100	79524	81225	67600	56644	676643
$x_i y_i$	330	650	915	1160	1410	1710	1820	1904	9899

$$\text{Cov}(X ; Y) = \frac{9899}{8} - 4,5 \times 289,375$$

$$= -64,81$$

$$V(X) = \frac{204}{8} - (4,5)^2 = 5,25$$

$$V(Y) = \frac{676643}{8} - (289,375)^2 = 842,48$$

$$r = \frac{-64,81}{\sqrt{5,25 \times 842,48}} = -0,97$$

[r] > 0,87 Donc il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y.
Nous pouvons bien déterminer la droite des moindres carrés.

$$y = \frac{-64,81}{5,25}x + b$$

$$y = -12,34x + b$$

$$b = 289,375 + 12,34 \times 4,5$$

$$b = 344,90$$

$$y = -12,34x + 344,90$$

Le premier trimestre 2022 correspond au 9e trimestre. Et pour $x = 9$ on a :

$$y = -12,34 \times 9 + 344,90 = 233,84$$

Au premier trimestre 2022 le chiffre d'affaire serait de 233,84.

Leçon 6 PRIMITIVES ET CALCUL INTÉGRAL

Situation complexe

Il s'agit de calculer l'aire en m^2 de la partie hachurée.

$$A = \int_0^8 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{4} + 12 \right) dx \\ = \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{8} + 12x \right]_0^8 = 144,88 \text{ m}^2$$

Le terrain a une aire de $144,88 \text{ m}^2$.

Leçon 7 SUITES NUMÉRIQUES

Situation complexe

Pour les départager :

Il faut déterminer le salaire sur 3 mois avec l'option A et il faut déterminer le salaire sur 3 mois avec l'option B.

Puis comparer les deux résultats.

Pour l'option A

Le salaire hebdomadaire est une suite arithmétique de raison 2000.

$$u_n = 10000 + 2000n$$

$$S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 \\ + u_9 + u_{10} + u_{11}$$

$$= \frac{12}{2} (u_0 + u_{11})$$

$$S_1 = 6(10\,000 + 32\,000)$$

$$S_1 = 254\,000 \text{ F}$$

Pour l'option B

$$v_n = 10000(1,03)^n$$

Le salaire hebdomadaire est une suite géométrique de raison 1,03.

$$S_2 = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + \\ v_9 + v_{10} + v_{11}$$

$$S_2 = 10000 \left(\frac{1 - (1,03)^{12}}{1 - 1,03} \right) = 141,920$$

$S_1 > S_2$; l'option A est donc la meilleure.

La voisine n'a pas raison.

Leçon 8 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Situation complexe 1

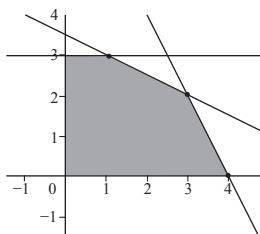
Nous allons mettre en équation les contraintes et les représenter pour déterminer la zone qui respecte toutes les contraintes.

Dans cette zone nous allons rechercher les solutions qui permettent de maximiser le profit.

Notons x le nombre de yaourt de type A et y le nombre de yaourt de type B.

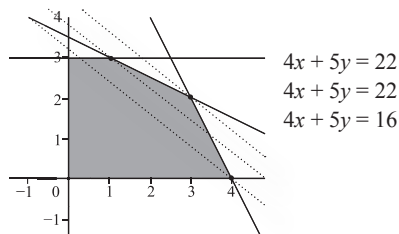
$$\text{On a : } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 8 \\ x + 2y \leq 7 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

ces contraintes donnent la figure suivante :



La partie en gris représente les couples de solutions possibles.

L'équation du profit est $4x + 5y = b$.



Le profit est maximal lorsque $4x + 5y$ est maximal.

En faisant passer les droites de coefficient directeur $-\frac{4}{5}$ passant par les sommets du polygone en jaune on obtient que le maximum est obtenu pour $x = 3$ et $y = 2$.

Situation complexe 2

Nous allons utiliser un système pour résoudre ce problème.

Notons x le nombre d'équation et y le nombre d'élèves qui doivent prendre part à cette sortie détente.

On a les équations suivantes :

$$2800x + 2000y = 67200$$

$$3200x + 1600y = 57600$$

On résout le système suivant :

$$\begin{cases} 28x + 20y = 672 \\ 32x + 16y = 576 \end{cases}$$

On trouve $x = 4$ et $y = 28$

Il y a donc 4 adultes et 28 élèves.

Dans la même collection



Situations complexes




Vallesse

I Comment transformer une situation d'évaluation en une situation complexe ?

- Une situation d'évaluation est constituée d'un contexte, d'une (ou des) circonstance(s) et d'une (ou des) consigne(s). On dit qu'une situation d'évaluation a trois constituants.
- Une situation complexe est constituée d'un contexte, d'un (ou des) support(s) ; d'une (ou des) fonction(s), et d'une (ou des) consigne(s) (indépendantes). On dit qu'une situation complexe a quatre constituants.

Situation complexe

Situation d'évaluation	Situation complexe
un contexte : il décrit l'environnement (lieu, moment, ...) dans lequel on se situe	● Un contexte : il décrit l'environnement (lieu, moment, ...) dans lequel on se situe. ● Des supports : c'est l'ensemble des éléments matériels, virtuels ou réels, qui sont présentés à l'apprenant : texte écrit, illustration, photo..., et dont il doit effectuer un traitement pour résoudre la situation.
Des circonstances : Elles précisent dans quel(s) but(s) la production est réalisée. La plupart du temps, cette fonction est une fonction sociale.	Des fonctions : Elles précisent dans quel(s) but(s) la production est réalisée. La plupart du temps, cette fonction est une fonction sociale.
Une ou des consigne(s) : Ce sont des instructions de travail qui sont données à l'apprenant de façon explicite. La situation d'évaluation doit comporter une à trois consignes. Les consignes ne sont forcément indépendantes.	Une ou des consigne(s) : Ce sont des instructions de travail qui sont données à l'apprenant de façon explicite. La situation complexe doit comporter 1 à 3 consignes indépendantes .

Une situation complexe est une situation d'évaluation. Une situation d'évaluation est par nature complexe. La Commission Nationale Pédagogique de Mathématiques de Côte d'Ivoire a décidé en 2020 d'utiliser le terme de situation d'évaluation au premier cycle et celui de situation complexe au second cycle. Pour cette dernière une condition supplémentaire a été ajoutée pour s'aligner aux exigences du BAC UEMOA.

La situation complexe doit comporter **1 à 3 consignes indépendantes**.

Pour passer de la situation d'évaluation à la situation complexe, il suffit de rendre les consignes indépendantes ou de poser une consigne.

Résolution d'une situation complexe

La rédaction d'une situation doit faire apparaître :

- une introduction

L'élève doit citer l'outil qu'il va utiliser et donner les étapes de sa production

- un développement

L'élève fait montre de ses connaissances mathématiques. Il utilise avec précision les

outils mathématiques.

Il doit annoncer chaque étape de son raisonnement pour que le correcteur puisse le suivre.

- une conclusion

C'est le retour au problème pour donner un avis ou répondre à une préoccupation

Nous donnons ici des exemples :

II Exemple de situations complexes

Leçon 1 LIMITES ET CONTINUITÉ

Situation complexe

La maman d'un élève en terminale D au lycée moderne de Bouaflé désire une relance publicitaire auprès de ses meilleurs clients. Elle fait donc imprimer des dépliants qui lui coûtent 4 000 FCFA en frais fixes plus 100 FCFA par dépliant à l'exception de 20 copies qui ne seront pas distribuées. Elle est sûre que chaque dépliant sera lu par 20 personnes.

La commerçante voudrait déterminer le coût d'un dépliant par client pour une production de dépliants à long terme.

Détermine ce coût pour la maman.

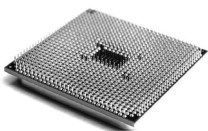
Leçon 2 PROBABILITÉ

Situation complexe 1

Dans le cadre de l'introduction des TIC à l'école, un établissement scolaire a organisé une visite d'étude dans une usine de fabrication de microprocesseurs.

Le directeur de la fabrique informe les élèves que 4% de la production journalière est défectueuse.

Le service de contrôle qualité a mis en place un système de vérification



systématique des microprocesseurs.

Cette vérification n'est pas parfaite, elle ne détecte que 95% des microprocesseurs défectueux et déclare défectueux 2% des microprocesseurs qui ne présentent pourtant aucun défaut.

Étonnés de savoir qu'un appareil de contrôle n'est pas totalement fiable, les élèves veulent évaluer les marges d'erreur de cet appareil.

Détermine la probabilité qu'il y ait erreur lors de son contrôle.

Situation complexe 2

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match de la coupe d'Afrique des Nations. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match. L'objet de l'étude est de déterminer l'importance de l'émission d'analyse après le match.

On dispose des informations suivantes :

- 56 % des téléspectateurs ont regardé le match;
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission;
- 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission.

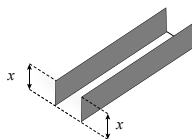
La chaîne veut savoir le pourcentage de téléspectateurs qui n'ont pas regardé l'émission mais qui ont regardé le match.

En utilisant tes connaissances mathématiques au programme détermine la probabilité qu'un téléspectateur qui n'a pas regardé l'émission ait regardé le match.

Leçon 3 DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Situation complexe

M. Bolou a acheté une feuille métallique de forme rectangulaire de 12 cm de largeur et 2 m de longueur. Il veut la modeler pour en faire une gouttière en pliant les deux longs côtés pour les relever perpendiculairement à la feuille. Il a du mal à trouver la hauteur des côtés relevés pour que la gouttière ait une contenance maximale. Il te sollicite pour l'aider. Propose-lui une solution argumentée.



Leçon 4 PRIMITIVES

Situation complexe

Un pâtissier commercialise des glaces d'un même type très prisées par les consommateurs. Il peut en produire entre 0 et 300 par jour dans sa petite entreprise familiale. Cette production est vendue dans sa totalité.

Lorsque x représente le nombre en centaines de glaces produites, on note $B(x)$, le bénéfice réalisé par le pâtissier pour la vente des x centaines de glaces.

D'après les données précédentes, l'artisan sait que :

- pour tout x de l'intervalle $[1 ; 3]$, on a : $B'(x) = -20x + 30$, où $B(x)$ est exprimé en milliers de francs et B' la fonction dérivée de B .

- Pour une centaine de glaces vendue, son bénéfice est 20 mille francs.

Il te sollicite pour l'aider à déterminer son bénéfice maximal.

Détermine son bénéfice maximal.

Leçon 5 FONCTIONS LOGARITHMES

Situation complexe

Au cours d'une conférence prononcée dans un lycée, le conférencier a donné, entre autres, les informations suivantes :

« Tant qu'un organisme est vivant, la quantité de carbone 14 qu'il contient est constante. Après la mort de l'organisme, cette quantité diminue. La mesure de la quantité de carbone 14 restant permet de dater les organismes qui contiennent du carbone, à condition qu'ils datent de moins de 50 000 ans.

On note x la fraction de carbone 14 dans un organisme fossilisé.

Une modélisation mathématique permet d'établir : $f(x) = 1 - 8310 \ln x$ où $f(x)$ est l'âge en années

d'un fossile. Des archéologues ont découvert récemment deux types de fragments d'os : un des types contient 35% de leur teneur en carbone et l'autre type est vieux de 15 000 ans. »

De retour en classe, le chef de classe d'une des classes de Terminale D affirme que selon lui, d'une part les os contenant 35% de leur teneur en carbone n'ont pas plus de 100 ans et d'autre part, il est impossible de déterminer la teneur en carbone 14 des os vieux de 15 000 ans. Ses amis cherchent à vérifier ces affirmations.

1. Calcule l'âge d'un fossile qui contient encore 35% de son carbone 14.

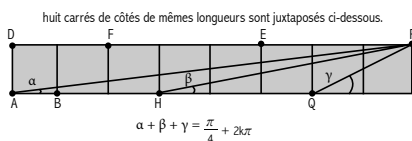
Arrondis à la centaine d'années.

2. Détermine la fraction de carbone 14 restant dans un fossile vieux de 15 000 ans.

Leçon 6 NOMBRES COMPLEXES

Situation complexe

Lors d'une exposition du club « Mathématiques » d'un lycée, des élèves d'une classe de Terminale D ont été très attentifs à l'image ci-dessous.



L'un d'eux affirme que l'égalité inscrite sur l'image change si la longueur de côté du carré augmente ou diminue. Son voisin prétend que si l'égalité est ainsi mentionnée, c'est qu'elle vraie dans tous les cas.

En utilisant les outils mathématiques au programme, départage les deux élèves.

Leçon 7 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

Situation complexe 1

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-à-dire sa concentration dans le plasma. On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en administration par voie intraveineuse. On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre ($\mu g.L^{-1}$), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse. Le modèle mathématique est : $f(t) = 20e^{-0,1t}$, avec $t \in [0; +\infty[$. La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\mu g.L^{-1}$.

La demi-vie du médicament (notée $t_{0,5}$) est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu g.L^{-1}$.

1. Détermine la demi-vie.
2. Détermine le temps à partir duquel le médicament est éliminé (Donne le résultat arrondi au dixième.)

Situation complexe 2

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-à-dire sa concentration dans le plasma.

On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en administration par voie orale.

On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre ($\mu g.L^{-1}$), au bout de t heures après ingestion par voie orale.

Les médecins souhaitent déterminer la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale.

Le modèle mathématique est : $g(t) = 20(e^{-0,1t} - e^{-t})$, avec $t \in [0; +\infty[$.

Détermine la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale.

Donne le résultat à la minute près.

Leçon 8 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

Situation complexe

(L'unité graphique est le centimètre)

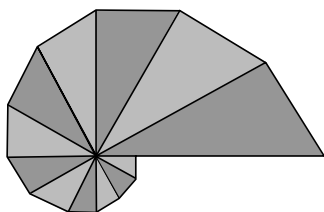
Un mathématicien peintre fait une

exposition vente dans son atelier près d'un lycée.

En sortie pédagogique dans l'atelier, le tableau ci-dessous attire l'attention des élèves d'une classe de première D.

Le chef de classe demande à l'artiste ce que cela représente. Ce dernier lui répond qu'il s'agit d'une représentation d'un escargot. Il précise les sommets des triangles qui forment la coquille sont des points A_n d'affixe z_n telle que $z_0 = 6$ et pour tout entier naturel n ,

$${}_n Z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) z_n$$



Ces élèves cherchent à acquérir le tableau pour le placer au fond de la classe mais ils n'ont pas les moyens financiers convenables. Le peintre leur dit que tout élève de terminale D peut reproduire le dessin.

En utilisant tes connaissances mathématiques, reproduis dessin.

Leçon 9 SUITES NUMÉRIQUES

Situation complexe 1

Lors d'une visite d'étude dans une usine, des élèves en classes de terminale ont constaté la présence de deux bassins d'eau. Interrogé par des élèves sur l'utilité de ces bassins pour l'entreprise, l'un des responsables leur a donné les informations suivantes.

« Un volume constant de 2 200 m³ d'eau est reparti entre les deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique, on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

Les échanges entre les deux bassins sont modélisés de la façon suivante :

Au départ, le bassin A contient 800 m³ d'eau et le bassin B en contient 1 400 m³.

- Chaque jour, 10% du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré dans le bassin B ;

- Chaque jour, 15% du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré dans le bassin A. »

Un élève affirme qu'après un certain nombre de jours, le bassin A aura plus d'eau que le bassin B.

Son voisin prétend que le bassin B contiendra toujours plus d'eau que le bassin A.

En utilisant tes connaissances mathématiques au programme, départage les deux élèves.

Leçon 10 CALCUL INTÉGRAL

Situation complexe 1

Lors d'une conférence prononcée dans un lycée par un médecin, des élèves de Terminale D ont noté les informations suivantes.

« La capacité pulmonaire d'un être humain est la quantité d'air présente dans les poumons, mesurée à des fins diagnostiques lors d'une exploration fonctionnelle respiratoire.

Elle est exprimée en litres et dépend de plusieurs facteurs dont l'âge.

On peut la modéliser par la fonction f définie par : $f(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$

où x désigne l'âge et $x \in [10 ; 90]$.

- La capacité pulmonaire reste supérieure à 4,5 L dans une certaine tranche d'âge.

- La capacité pulmonaire moyenne entre 20 et 70 ans n'atteint pas 5 L. »

Impressionnés, ces élèves cherchent à vérifier les deux dernières affirmations du médecin.

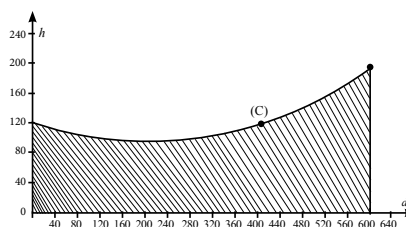
En utilisant tes connaissances mathématiques sur les intégrales, justifie les deux dernières affirmations du médecin.



Situation complexe 2

La coopérative d'un lycée a reçu le terrain représenté ci-dessous par la zone hachurée pour cultiver la tomate.

Le géomètre qui a travaillé sur le lot du lycée affirme que la courbe (C) représentée ci-dessous est celle de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{1600} - \frac{x}{4} + 124$; x est exprimé en mètres. Les élèves de la promotion terminale souhaitent connaître l'aire de leur terrain pour acheter les grains de tomate. Il te sollicite pour cela.



En utilisant tes connaissances sur le calcul intégral, détermine l'aire du terrain.

Leçon 11 STATISTIQUE À DEUX VARIABLES

Situation complexe

Des élèves en classe de Terminale dans un lycée, après leur formation sur l'entrepreneuriat, ont reçu un financement d'une ONG pour mener des activités dont le bénéfice servira à réhabiliter leur école. Pour cela, ils ont mis en place une petite

entreprise de distribution de cahiers dans la région. Après quelques années d'activités, ils cherchent à déterminer lequel des facteurs N (nombre de points de vente à installer) ou X (frais de la promotion) a influencé le plus leur chiffre d'affaires Y . Pour cela, ils ont fait le relevé statistique des cinq dernières années qui est consigné dans le tableau suivant :

Années	2013	2014	2015	2016	2017
Nombre de point de vente n_i	10	20	40	70	100
Frais de publicité en millions x_i	1	1,7	1,9	2	2,5
Chiffres d'affaires en millions y_i	37,5	61,5	97,5	180	270,4

Détermine la variable qui influence le chiffre d'affaires.

Leçon 12 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Situation complexe 1

Au cours d'une conférence prononcée dans un lycée, la conférencière a donné, entre autres, les informations suivantes :

« L'atmosphère terrestre contient de l'azote qui est transformé, en carbone 14, radioactif, noté ^{14}C . Les êtres vivants contiennent donc du ^{14}C qui est renouvelé constamment. À leur mort, il n'y a plus d'emprunt de ^{14}C à l'extérieur et le ^{14}C qu'ils contiennent se désintègre. Le temps écoulé depuis la mort d'un être peut donc être évalué en mesurant la proportion de ^{14}C qui lui reste.

On appelle période (ou demi-vie) d'un élément radioactif le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés.

Il a été démontré le nombre $N(t)$ d'atomes ^{14}C existant à l'instant t , exprimé en années, dans un échantillon de matière organique vérifie la relation :

$$N'(t) = -0,0001238N(t).$$

Des archéologues ont découvert récemment des fragments d'os ayant perdu 30% de leur teneur en carbone. »

De retour en classe, un élève de Terminale confie à ses amis que selon lui, il est impossible de déterminer la période du carbone ^{14}C et que les os découverts par les archéologues n'ont pas plus de 100 ans. Ses amis cherchent à vérifier ces affirmations.

Détermine l'âge des os découverts par les archéologues.

Situation complexe 2

En regardant un documentaire à la télévision, un élève en classe de Terminale D a appris que : « Dans une forêt africaine, la population de singes était de 512 en l'an 2000 et de 256 en 2016. La vitesse de diminution de cette population est, à chaque instant, proportionnelle à cette population. »

Cet élève rapporte cette information à ses amis de classe et le chef de classe affirme qu'il ne devrait plus avoir de singes dans cette forêt après l'an 2030.

N'étant pas convaincu par cette affirmation, certains élèves de la classe cherchent à la vérifier.

En utilisant tes connaissances mathématiques au programme, confirme ou infirme l'affirmation du chef de classe.

III Corrigés et barème critérié

Leçon 1 LIMITES ET CONTINUITÉ

Pour répondre au problème qui est posé, je vais utiliser les limites et la continuité. Je vais d'abord déterminer le coût de production $C(x)$ pour x clients puis calculer la limite de $C(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Notons x le nombre de dépliants à produire, où $x > 20$ et $C(x)$ le coût de production, par client, en FCFA.

Il faut déterminer le coût $C(x)$ et puis calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x)$.

Le coût de revient de x dépliants est $4000 + 100(x - 20)$

Le nombre de clients susceptibles de lire les dépliants est $20(x - 20)$.

$$C(x) = \frac{4000 + 100(x - 20)}{20(x - 20)} = 5 + \frac{200}{x - 20}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = 5$$

En définitive, le coût de production par client à long terme est 5 FCFA.

• Barème

Critères	Indicateurs	Barème de notation
CM1 : Pertinence	- Pour répondre au problème qui est posé, je vais utiliser les limites et la continuité. - Je vais d'abord déterminer $C(x)$. - Puis calculer la limite de $C(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.	0,75 points 1 ind sur 3 $\rightarrow$ 0,5 2 ind sur 3 $\rightarrow$ 0,75
CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques en situation	Déterminons le cout de production des dépliant par clients - Le cout de revient de x dépliant est : $4000 + 100(x - 20)$ Déterminons le nombre de clients potentiels - Le nombre de client susceptibles de lire le dépliant est $20(x - 20)$. Déterminons le coût de production par client - Le coût par client est : $C(x) = \frac{4000 + 1000(x - 20)}{20(x - 20)}$ $C(x) = 5 + \frac{200}{x - 20} \text{ ou } C(x) = \frac{100x + 3800}{20x - 400}$ Déterminons le coût de production par client à long terme. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{200}{x - 20} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = 5$ - En définitive, le coût de production par client à long terme est 5 FCFA.	2,5 points 1 ind sur 4 $\rightarrow$ 1 2 ind sur 4 $\rightarrow$ 1,5 3 ind sur 4 $\rightarrow$ 2,5 Règle des 2/3 (2/3) $\times$ 4 = 3
CM3 : Cohérence de la réponse	- Le résultat produit est conforme au résultat attendu (on trouve un nombre entier naturel supérieur à 20) - Le résultat produit est en adéquation avec la démarche (formules sont juste même si le modèle est faux) - La qualité des enchainements de la démarche	1,25 points 1 ind sur 3 $\rightarrow$ 0,75 2 ind sur 3 $\rightarrow$ 1,25
CP : Critère de perfectionnement (Concision; Originalité, Bonne presentation)	- Concision $C(x) = \frac{4000 + 100(x - 20)}{20(x - 20)}$ (non concis) $C(x) = 5 + \frac{200}{x - 20}$ (concis) $C(x) = \frac{100x + 3800}{20x - 400}$ (concis) - Originalité : $C(x) = 5 + \frac{200}{x - 20}$ - Présentation : Propreté de la production (Présence des titres des étapes, pas de rature et de surcharge)	0,5 points 1 ind sur 3 $\rightarrow$ 0,25 2 ind sur 3 $\rightarrow$ 0,5 Règle des 2/3

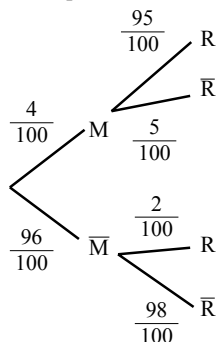
Leçon 2 PROBABILITÉ

Situation complexe 1

Pour résoudre le problème, je vais utiliser les probabilités. Considérons les événements :

M : « Le microprocesseur est défectueux »

R : « Le microprocesseur est accepté »



Il y a erreur si le microprocesseur est défectueux et accepté ou en bon état et rejeté.

Donc la probabilité qu'il y ait une erreur est :

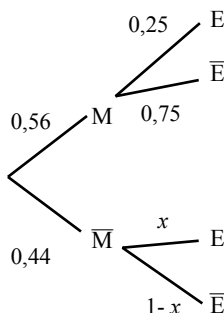
$$P(M \cap \bar{R}) + P(\bar{M} \cap R) = \frac{4}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{96}{100} \times \frac{2}{100} = 0,0212$$

Situation complexe 2

Pour résoudre le problème, je vais utiliser les probabilités. Considérons les événements :

M : « Le téléspectateur a regardé le match »

E : « Le téléspectateur a regardé l'émission »



$$2. P(M \cap E) = 0,56 \times 0,25$$

$$= 0,14$$

$$3. a) P(E) = P(M \cap E) + P(\bar{M} \cap E)$$

$$= 0,44x + 0,14$$

$$b) P(E) = 0,162 \Leftrightarrow 0,44x + 0,14 = 0,162$$

$$\Leftrightarrow 0,44x = 0,022$$

$$\Leftrightarrow x = 0,05$$

$$4. P_{\bar{E}}(M) = \frac{P(\bar{E} \cap M)}{P(\bar{E})} = \frac{0,44 \times 0,05}{1 - 0,162} = 0,02 = 2\%$$

Leçon 3 DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTIONS

a. Notons x la hauteur des bords relevés.

La gouttière obtenue a la forme d'un pavé droit dont les dimensions sont :

$$h = 200 \text{ cm} ; L = 12 - 2x \text{ cm} ; l = x \text{ cm}.$$

Donc le volume $V(x)$ est :

$$V(x) = l \times L \times h$$

$$V(x) = x(12 - 2x) \times 200.$$

$$\text{Soit } V(x) = 400(6x - x^2)$$

b. Déterminons le maximum de la fonction V .

$$D = [0; 6]$$

$$\forall x \in D, V'(x) = 800(3 - x)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

V est croissante sur $[0; 3]$

V est décroissante sur $[3; 6]$

Tableau de variation

x	0	3	6
$V'(x)$		+	0 -
$V(x)$	0	↗ 3600 ↘	0

Le maximum de V est 3600 cm^3 atteint pour $x = 3 \text{ cm}$.

Conclusion :

La hauteur des bords relevés pour obtenir un volume maximal est donc de 3 cm .

Leçon 4 PRIMITIVES

a. Pour tout x élément de $]1;3[$

$$B'(x) = -20(x - 1,5)$$

$$B'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,5; B'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1,5 \text{ et } B'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\forall x \in]1;1,5[, B'(x) > 0 \text{ et } \forall x \in]1,5;3[, B'(x) < 0$$

D'où, B atteint son maximum en $1,5$.

Donc, il devra fabriquer 1500 glaces par jour pour que le bénéfice soit maximal.

b. Pour tout x élément de $]1;3[$

$$B(x) = -10x^2 + 30x + c \text{ (} c \in \mathbb{R} \text{) et } B(1) = 20$$

$$B(1) = 20 \Leftrightarrow 20 + c = 20$$

$$\Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Doù, } \forall x \in [1; 3], B(x) = -10x^2 + 30x$$

$$B(1,5) = 22,5$$

Donc le bénéfice maximal est $22\,500 \text{ F}$.

x	1	1,5	3
$B'(x)$		+	0 -
$B(x)$	20	22,5	0

$$B(1,5) = 22,5$$

Donc le bénéfice maximal est $22\,500 \text{ F}$.

Leçon 5 FONCTIONS LOGARITHMES

1. Son âge est $f(0,35)$

On a :

$$f(0,35) = 1 - 8310 \ln(0,35) = 8725,0218$$

Un fossile qui contient encore 35% de son carbone 14 a environs 8725 ans.

2. Il s'agit de trouver x tel que :

$$f(x) = 15000$$

$$f(x) = 15000 \Leftrightarrow 1 - 8310 \ln x = 15000$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1 - 15000}{8310}$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{-14999}{8310}$$

$$\Rightarrow x = e^{\frac{-14999}{8310}}$$

$$\Rightarrow x = 0,1645 \text{ (par excès à } 10^{-4} \text{ près)}$$

Soit environ $16,45 \%$

Leçon 6 NOMBRES COMPLEXES

On se place dans le repère orthonormé direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$ tel que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{AD}$$

On considère les points E et F sur $[DP]$ tels que β et γ soient des mesures respectives de $((\vec{u}, \overrightarrow{AE}))$ et $((\vec{u}, \overrightarrow{AF}))$

On note z_p, z_e et z_f les affixes respectives des points P, E et F .

$$\text{On a } z_p = 8 + i, z_e = 5 + i \text{ et } z_f = 2 + i$$

$$\text{Donc } z_p \times z_e \times z_f = (8+i)(5+i)(2+i) = (39+13i)(2+i) = 13(1+i)(2+i) = 13(5+5i)$$

$$z_p \times z_e \times z_f = 65(1+i)$$

$$\text{On a } z_p \times z_e \times z_f = 65(1+i)$$

$$\text{Donc } \arg(z_p \times z_e \times z_f) = \arg(65(1+6i)) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\arg(z_p) + \arg(z_e) + \arg(z_f) = \arg(1+i) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Mes}(\vec{u}, \overrightarrow{AP}) + \text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + \text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

En conclusion, c'est le voisin ayant affirmé que l'égalité est vraie dans tous les cas qui a raison car quelle que soit la longueur du côté du carré, le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$ conduit toujours au résultat ci-dessous.

Leçon 7 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

Situation complexe 1

$$\begin{aligned}
 1. \quad f(t) &= \frac{1}{2}f(0) \\
 20e^{-0,1t} &= 10 \\
 e^{-0,1t} &= \frac{1}{2} \\
 -0,1t &= -\ln 2 \\
 t &= \frac{\ln 2}{0,1} \\
 t &= 6,93 \text{ (par défaut à } 10^{-2} \text{ près)}
 \end{aligned}$$

La demi-vie est environ 7h

$$\begin{aligned}
 2. \quad f(t) &< 0,2 \\
 20e^{-0,1t} &< 0,2 \\
 e^{-0,1t} &< 0,01 \\
 -0,1t &< \ln(0,01) \\
 t &> -\frac{\ln(0,01)}{0,1} \\
 t &> 46,1
 \end{aligned}$$

Le médicament est éliminé après 46,1h

$$\begin{aligned}
 \forall t \in [0, +\infty[; \\
 g'(t) &= 20((-0,1)e^{-0,1t} + e^{-t}), \\
 g'(t) \text{ a le même signe que } &((-0,1)e^{-0,1t} + e^{-t}), \\
 (-0,1)e^{-0,1t} + e^{-t} > 0 &\Leftrightarrow (-0,1)e^{-0,1t} + e^{-t} > 0 \\
 &\Leftrightarrow (-0,1)e^{-0,1t} > -e^{-t} \\
 &\Leftrightarrow (0,1)e^{-0,1t} < e^{-t} \\
 &\Leftrightarrow \ln(0,1) - 0,1t < -t \\
 &\Leftrightarrow 0,9t < -\ln(0,1) \\
 &\Leftrightarrow t < \frac{\ln(10)}{0,9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\ln(10)}{0,9} = 2,56 \text{ (par excès à } 10^{-2} \text{ près)} \right] \\
 \forall t \in \left] 0, \frac{\ln(10)}{0,9} \right[; g'(t) > 0 \text{ et} \\
 \forall t \in \left] \frac{\ln(10)}{0,9}; +\infty \right[; g'(t) < 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où, } g \text{ atteint son maximum en } &\frac{\ln(10)}{0,9} \\
 \frac{\ln(10)}{0,9} &= 2,56 \text{ (arrondi d'ordre 2)}
 \end{aligned}$$

La concentration plasmatique du médicament est maximale après 2,56 h

Leçon 8 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

Pour reproduire, je vais utiliser nombres complexes et géométrie du plan.

Je vais munir le plan complexe d'un repère orthonormé direct d'origine O. Puis justifier que le point A_{n+1} est l'image de A_n par la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

J'en déduis que triangle OA_nA_{n+1} est un demi triangle équilatéral, rectangle en A_n .

Le symétrique B_n du point A_n par rapport au point A_{n+1} est tel que le triangle OA_nB_n est équilatéral direct.

De ce fait, le point A_{n+1} est le milieu du côté $[A_nB_n]$.

- Justifions que pour tout entier naturel n , A_{n+1} est l'image de A_n par la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

z_{n+1} est de la forme az_n où a est un nombre complexe non nul.

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 |a| &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 a &= \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\theta} \text{ où } \theta = \text{Arg}(a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

D'où, A_{n+1} est l'image de A_n par la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

- A_{n+1} est l'image de A_n par la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

D'où, le triangle OA_nA_{n+1} est un demi triangle équilatéral, rectangle en A_n .

Leçon 10 CALCUL INTÉGRAL

Situation complexe 1

Pour justifier les deux affirmations, je vais utiliser le calcul intégral.

1. Affirmation 1

Étudions la fonction f afin de la comparer à 4,5

$$\forall x \in [10; 90], f'(x) = 110 \frac{3 - \ln x}{x^3}$$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [10; e^3]$ donc f est croissante sur $[10; e^3]$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [e^3; 90]$ donc f est décroissante sur $[e^3; 90]$

$$- f'(e^3) = \frac{110}{e^3} \approx 5,46$$

- sur $[10; e^3]$, f est continue et strictement croissante et $4,5 \in f([10; e^3]) = [3,3; 5,48]$ donc il existe $\alpha \in [10; e^3]$ tel que $f(\alpha) = 4,5$

de même il existe un $\beta \in [e^3; 90]$ tel que $f(\beta) = 4,5$

On déduit que pour tout $x \in [\alpha; \beta]$,

$$f(x) \leq 4,5$$

Conclusion : Dans la tranche d'âge $[\alpha; \beta]$, la capacité pulmonaire est supérieure à 4,5 L

2. Affirmation 2

Calculons la valeur moyenne f

$$m = \frac{1}{70 - 20} \int_{20}^{70} \frac{110(\ln x - 2)}{x} dx$$

$$m = \frac{110}{50} \int_{20}^{70} \frac{1}{x} (\ln x - 2) dx$$

$$m = \frac{11}{5} \left[\frac{1}{2} (\ln x - 2)^2 \right] \text{ (à corriger en mettant les bornes)}$$

$$m = \frac{11}{10} \left[\frac{1}{2} (\ln 70 - 2)^2 - (\ln 20 - 2)^2 \right]$$

$$m \approx 4,06 \text{ L}; 4,06 < 5.$$

Donc la valeur moyenne de la capacité pulmonaire entre 20 et 70 ans est inférieure à 5L.

Situation complexe 2

1. Déterminons une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 600]$.

$$f(x) = \frac{x^2}{1600} - \frac{x}{4} + 124$$

Une primitive F de f définie par:

$$F(x) = \frac{x^3}{3 \times 1600} - \frac{x^2}{8} + 124x$$

1. Déterminons l'aire de la partie limitée par la courbe et les droites d'équation

$$x = 0 \text{ et } x = 600$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{600} f(x) dx \text{ u.a} \\ &= (F(600) - F(0)) \text{ u.a} \\ &= (74400 - 0) \end{aligned}$$

$$= 74400 \text{ u.a}$$

- L'aire du terrain est 74400×1600 soit $119\,040\,000 \text{ m}^2$

Leçon 11 STATISTIQUE À DEUX VARIABLES

Pour répondre au problème posé, je vais utiliser les statistiques à deux variables.

1. Déterminons le coefficient de corrélation r entre N et Y :

$$\bar{N} = \frac{10 + 20 + 40 + 70 + 100}{5} = 48$$

$$\bar{Y} = \frac{37,5 + 61,5 + 97,5 + 180 + 270,4}{5} = 129,4$$

$$V(N) = \frac{10^2 + 20^2 + 40^2 + 70^2 + 100^2}{5} - 48^2 = 1096$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{37,5^2 + 61^2 + 97,5^2 + 180^2 + 270,4^2}{5} - 129,4^2 \\ &= 7302,9976 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(N, Y) &= \frac{10 \times 37,5 + 20 \times 61,5 + 40 \times 97,5 + 70 \times 180 + 100 \times 270,4}{5} - 48 \times 129,4 \\ &= 2819,76 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{Cov(N, Y)}{\sqrt{V(N)} \times \sqrt{V(Y)}} \\ &= \frac{2819,76}{\sqrt{1096} \times \sqrt{7302,9976}} \\ r_1 &= 0,99 \text{ (par défaut à } 10^{-2} \text{ près)} \end{aligned}$$

2. Déterminons le coefficient de corrélation r entre X et Y :

$$\bar{X} = \frac{1+1,7+1,9+2+2,5}{5} = 1,82$$

$$V(X) = \frac{1^2+1,7^2+1,9^2+2^2+2,5^2}{5} - 1,82^2 = 0,2376$$

$$Cov(X, Y) = \frac{1 \times 37,5 + 1,7 \times 61,5 + 1,9 \times 97,5 + 2 \times 130 + 2,5 \times 270,4}{5} - 1,82 \times 129,4 = 37,1884$$

$$r_2 = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{Y}} = \frac{2819,76}{\sqrt{1096} \times \sqrt{7302,9976}}$$

$$= 0,89 \text{ (par défaut à } 10^{-2} \text{ près)}$$

$$3. 0,87 \leq |r_2| < |r_1| < 1$$

D'où le nombre de points de vente influence plus que les frais publicitaire en millions de francs CFA.

Leçon 12 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Situation complexe 1

1. La fonction $N : t \mapsto N(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$f' = 0,0001238f.$$

$$\text{Donc, } N(t) = ke^{-0,0001238t}, k \in \mathbb{R}$$

$$N(0) = N_0 \Leftrightarrow ke^0 = N_0 \Leftrightarrow k = N_0$$

$$\text{Donc } N(t) = N_0 e^{0,0001238t}$$

2. Il faut trouver la valeur pour laquelle :

$$N(t) = \frac{1}{2} N_0$$

$$N(t) = \frac{1}{2} N_0 \Leftrightarrow N_0 e^{0,0001238t} = \frac{1}{2} N_0$$

$$\Leftrightarrow 0,0001238t = \ln(0,5)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,5)}{0,0001238} \approx 5599 \text{ ans}$$

La période (ou demi vie) du ^{14}C est 5599 ans.

3. Puisque les fragments ont perdu 30% de leur teneur en ^{14}C , il leur en reste 70%. Il faut trouver la valeur de t telle que :

$$N(t) = 0,7 N_0$$

$$N(t) = 0,7 N_0 \Leftrightarrow N_0 e^{0,0001238t} = 0,7 N_0$$

$$\Leftrightarrow 0,0001238t = \ln(0,7)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,7)}{-0,0001238} \approx 2281 \text{ ans}$$

Les fragments ont donc environ 2281 ans.

Situation complexe 2

1. La vitesse de diminution de la population est $p'(t)$, comme elle est à chaque instant proportionnelle à cette population, on a :

$$p'(t) = ap(t) \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{On a alors } p(t) = ke^{at}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ainsi : } p(0) = 512 \Leftrightarrow k = 512$$

$$\text{Donc } p(t) = 512e^{at}$$

$$\text{On a : } p(16) = 256 \Leftrightarrow 512e^{16a} = 256$$

$$\Leftrightarrow e^{16a} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow 16a = \ln(0,5)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{16} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Donc, } p(t) = 512e^{\frac{1}{16} \ln\left(\frac{1}{2}\right)t}$$

2. En l'an 2030, on a : $t = 30$

$$\text{On a : } p(30) = 512e^{\frac{1}{16} \ln\left(\frac{1}{2}\right)30} \approx 139,6$$

En l'an 2030 il y aura encore environ 139 singes.

L'affirmation du chef de classe n'est pas juste.

Dans la même collection

