



BUREAU DU CENTRE ACADEMIQUE



Mathématiques	NOMBRES COMPLEXES	Niveau : Terminales C-E Année : 2022-2023
----------------------	------------------------------	--

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté au repère ortho normé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$; $z_B = 2i$; $z_C = 2$ ainsi que le cercle (C) de centre A et de rayon 2.

La droite (OA) coupe le cercle (C) en deux points H et K tels que $OH < OK$. On désigne par z_H et z_K les affixes respectives des points H et K.

- Faire la figure
- Calculer la distance OA. En déduire les distances OK et OH.
- Justifier en utilisant le module et l'argument d'un nombre complexe que $z_K = (2\sqrt{2} + 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_H = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) Dans la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{-4}{z}$.

- Déterminer et placer les points images de B et C par f .
- On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image. Déterminer les points invariants par f .

3) a) Montrer que pour tout point M distinct de O, on a :

$$OM \times OM' = 4$$

- Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.

4) Soit K' et H' les images respectives de K et H par f .

a) Calculer OK' et OH'

b) Démontrer que $z_{K'} = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = (2\sqrt{2} + 2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Exercice 2

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation
(E) : $Z^2 - (2 + i\sqrt{3})Z - 2 + i\sqrt{3} = 0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f la transformation ponctuelle du plan (P) qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = \left(-\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\bar{Z} + \frac{5}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}}$

a) Montrer que f est un anti déplacement

b) Donner la nature exacte de f

c) Caractériser f

3) On désigne par Ω le point d'affixe $z_{\Omega} = -i\sqrt{3}$ et (E') l'ensemble des points M d'affixe Z du plan tel que $(E') : |Z + i\sqrt{3}| = 1$.

a) Déterminer et construire (E')

b) On note (φ) l'ensemble des points M d'affixe Z du plan tel que $(\varphi) : |Z - 1| = 1$.

Montrer que (φ) est l'image de (E') par f .

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Déterminer les racines carrées du complexe $\Delta = 3 - 4i$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2ie^{i\theta}z - 4(1 - i)e^{i\theta}$, avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

- a) Résoudre l'équation (E).
- b) Déterminer le module et un argument du complexe $z = -2(1 - i)e^{i\theta}$
- c) En déduire que pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, les points d'affixes z appartiennent à un cercle que l'on précisera.

3) On considère le point A d'affixe $2e^{i\theta}$.

Soit f la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe de A', image du point A par f

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i .

On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectives E et F et de même rayon 1.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0; 2\pi]$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

1) a) Calculer $z_{\overline{EM}}$ et $z_{\overline{FN}}$

b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0; 2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2 .

b) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2) Soit P le point d'affixe z_P telle que $z_P = (1 - i)\sin\theta \cdot e^{i\theta}$.

a) Montrer que $\frac{z_{\overline{EP}}}{z_{\overline{EM}}} = \sin\theta - \cos\theta$ et calculer $\frac{z_{\overline{EP}}}{z_{\overline{FN}}}$.

b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 5

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 5cm), on considère les points A et B d'affixes : $z_A = 1 + i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B .

2) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0; 2\pi[$. On considère l'application f qui à tout point M de (C), associe $f(M) = MA \times MB$.

a) Montrer, que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha} \sin \alpha$.

b) Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right) e^{i\alpha} \right|$

c) En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin \alpha \right)^2}$.

3) a) En utilisant 2.b, montrer qu'il existe deux points M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lesquels f(M) est minimal. Donner cette valeur minimale.

b) En utilisant 2.c, montrer qu'il existe un seul point M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lequel f(M) est minimal. Donner cette valeur minimale.

Exercice 6

Soit $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : Z^2 + (2\sin 2\theta)Z + \sin^2 2\theta + 4\cos^4 \theta = 0$$

1) a) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$. On notera Z_1 et Z_2 les solutions de (E), avec $\text{Im} Z_1 > \text{Im} Z_2$.

b) Trouver le module et un argument de Z_1 suivant les valeurs de θ .

c) En déduire le module et un argument de Z_2 .

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$,
On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$Z_A = -\sin 2\theta - 2i \cos^2 \theta, \quad Z_B = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta ; \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}.$$

a) Pour quelle valeur de θ le triangle OAB est-il rectangle isocèle en O et de sens direct ?

b) Pour quelle valeur de θ le triangle OAB est-il équilatéral de sens direct ?

Placer A et B pour la valeur de θ trouvée.

Exercice 7

Soit θ un réel de l'intervalle $[0; \pi]$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante :

$$Z^2 - 2(4 + 5\cos\theta)Z + (4\cos\theta + 5)^2 = 0$$

On notera Z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive, Z_2 l'autre solution.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le point M d'affixe Z_1 .

a) Montrer que les coordonnées x et y du point M, vérifient les relations

$$\begin{cases} x = 4 + 5\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in [0; \pi[$$

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (E) des points M du plan lorsque θ décrit l'intervalle $[0; \pi[$.

c) Tracer (E).

Exercice 8

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme P définie par :

$$P(Z) = Z^3 + (1 - e^{i\theta})Z^2 - e^{2i\theta}Z + e^{3i\theta} - e^{2i\theta} \text{ avec } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

- Calculer $P(\cos\theta + i\sin\theta)$ puis conclure.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $Z^2 + Z + e^{i\theta} - e^{i2\theta} = 0$
- Déterminer le polynôme Q tel que $P(Z) = (Z - e^{i\theta})Q(Z)$.
- En déduire les solutions de l'équation $P(Z) = 0$.

2) Soit S la transformation ponctuelle définie analytiquement par :

$$S \begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta - 1 \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta + \sin\theta \end{cases}$$

- Déterminer l'écriture complexe de S .
- Justifier que S est un antidéplacement.
- Donner la nature exacte de S .

Exercice 9

θ étant un réel de l'intervalle $[0; 2\pi[$; on pose pour tout nombre complexe z , $P_\theta(Z) = Z^2 - (1 + e^{i\theta})Z + (1 + i)(-1 + e^{i\theta})$

1) a) Vérifier que $P_\theta(1 + i) = 0$

b) En déduire les solutions Z_1 et Z_2 dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P_\theta(Z) = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A ; B et M d'affixes respectives -1 ; $i\sqrt{3}$ et $-1 + e^{i\theta}$.

- Montrer que lorsque θ varie dans $[0; 2\pi[$, M varie sur un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon r .
- Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle (C) .

Exercice 10

α est un nombre complexe non nul. On définit le polynôme P par :

$$P(\alpha) = \alpha^2 - 2i\alpha - 1$$

1) Factoriser $P(\alpha)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - \alpha(\alpha + i)Z + i\alpha^3 = 0$

3) On désigne par ρ et θ le module et un argument de Z_1 et Z_2 définis par : $Z_1 = \alpha i$ et $Z_2 = \alpha^2$.

a) Déterminer en fonction de ρ et θ le module et un argument de Z_1 et Z_2 .

b) Quelle condition faut-il donner à α pour que Z_1 soit un réel.

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit S_α la transformation ponctuelle qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \alpha iz + \alpha^2$

a) Existe-t-il une valeur de α pour laquelle S_α est l'identité du plan ?

b) Pour quelle valeur de α , S_α est-elle une rotation d'angle de mesure $\frac{5\pi}{6}$?

Exercice 11

1) Soit l'équation :

$$(E_\theta) : Z^2 - e^{i\theta}[2 + \sqrt{2}(-1 + i)]Z + 2\sqrt{2}(-1 + i)e^{2i\theta} = 0; \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

a) Vérifier que $Z_0 = 2e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ) .

b) Dédurre alors l'autre solution Z_1 de l'équation (E_θ)

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points M , M' et M'' d'affixes respectives :

$$Z = 2e^{i\theta}, Z' = \sqrt{2}(-1 + i)e^{i\theta} \text{ et } Z'' = i + 4e^{i\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)}.$$

a) Montrer que M' est l'image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

b) Montrer que M'' est l'image de M par une homothétie h que l'on précisera.

c) Déduire l'ensemble (Γ) des points M'' lorsque θ varie dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Soit l'équation $(E'_\theta): (\sqrt{2}Z - 1)^3 = (-2 + 2i)e^{i\theta}Z^3$

a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe

$$U = (-2 + 2i)e^{i\theta}$$

b) Soit $\alpha \in]0; 2\pi[$. Montrer que $\frac{\sqrt{2}Z-1}{Z} = \sqrt{2}e^{i\theta} \Leftrightarrow Z = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 + i \cotan \frac{\alpha}{2}\right)$

c) Résoudre alors dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E'_θ) . (Donner les solutions sous forme cartésienne).

Exercice 12

A) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + (2\cos\theta)Z + 1 = 0$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme :

$$P(Z) = Z^3 - (1 - 2\cos\theta)Z^2 + (1 - 2\cos\theta)Z - 1$$

a) Vérifier que $\overline{P(Z)} = P(\bar{Z})$ et déduire que si Z est une racine de $P(Z)$ alors $\bar{Z}$ est aussi une racine de $P(Z)$.

b) Montrer que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$.

3) On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives $e^{i(\pi+\theta)}$, $e^{i(\pi-\theta)}$ et 1 .

a) Montrer que $\frac{e^{i(\pi+\theta)}-1}{e^{i(\pi-\theta)}-1} = e^{i\theta}$

b) En déduire la nature du triangle ABC .

c) Déterminer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

B) On considère le polynôme g défini par :

$$g(Z) = (\cos\alpha)Z^2 - \left[\cos\alpha + i\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha + \sin\alpha\right) \right] Z + \frac{1}{2}i\sin 2\alpha - \sin^2\alpha$$

1) Calculer $g(isin\alpha)$ puis conclure.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $g(Z) = 0$.

3) Ecrire les solutions Z_0 et Z_1 de l'équation $g(Z) = 0$ sous forme exponentielle ($\text{Re}(Z_0) = 0$).

Exercice 13

Soit θ un réel non nul.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe.

- $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct.
- (C) est un cercle de centre O et de rayon 1
- E est le point de (C) tel que $(\vec{u}; \overrightarrow{OE}) \equiv \theta[2\pi]$;
- F et G sont les points d'abscisses, respectives, -1 et $1 + \sqrt{2}$;
- Γ est le demi-cercle de diamètre $[FG]$
- D est le point d'intersection de Γ et l'axe $(O, \vec{u})$

1) a) Vérifier que $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$.

b) Soit A le point d'abscisse $z_A = i\sqrt{1 + \sqrt{2}}e^{i\theta}$. Vérifier que $z_A = OD e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$. Construire alors A

2) On considère, dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$.

a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation (E) .

b) On désigne par B le point d'abscisse z_B , où z_B est la deuxième solution de (E) . Déterminer z_B .

3) a) Montrer que les points O , A et B sont alignés.

b) Placer le point C d'abscisse $z_C = OD e^{i\theta}$

c) Montrer que $\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

d) Construire alors le point B.