



## Série d'exercices - continuité -

Niveau : 2 BAC PC

Pr : Omar BACHAIN

### Exercice 1 ★★★★★

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(4) = 3 \\ f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x} - 8}{x - 4} ; x \neq 4 \end{cases}$$

Étudier la continuité de  $f$  au point  $a = 4$

### Exercice 2 ★★★★★

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2} ; x > 2 \\ f(2) = \frac{1}{3} \\ f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x - 2} ; x < 2 \end{cases}$$

- Montrer que  $f$  est continue à gauche au point  $a = 2$
- $f$  est-elle continue au point  $a = 2$

### Exercice 3 ★★★★★

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} ; x \leq 2 \\ f(x) = \frac{ax + 3}{x - 1} ; x < 2 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de  $a$  pour que la fonction  $f$  soit continue en 2

### Exercice 4 ★★★★★

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x + b}{x^2 + 1} ; x < 1 \\ f(1) = a \\ f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - 1} ; x > 1 \end{cases}$$

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- Déterminer les deux réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $f$  soit continue en 1

### Exercice 5 ★★★★★

Étudier la continuité de  $f$  sur  $D$  dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = \frac{x^2 - 2 \sin x}{x^2 + 4} ; D = \mathbb{R}$
- $f(x) = \sin(2 + \sqrt{x}) ; D = \mathbb{R}^+$
- $f(x) = (x^2 - 1) \sin\left(\frac{3}{x}\right) ; D = ]-\infty; -1[$

### Exercice 6 ★★★★★

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\sin(\pi x)}{4x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x + 3}{3x^2 + 4}\right)$

③ Déterminer  $f(]-\infty; -2[)$ ,  $f([-2; -1[)$ ,  $f(]-1; 0])$  et  $f([0; +\infty)$

④ Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $I = ]-\infty; -2]$

a Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer

b Montrer que :

$$(\forall x \in J), g^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$$

### Exercice 13

$f$  est définie sur  $I = ]-\infty; 3]$  par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

① Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , puis montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $I$

② Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J = [-1; +\infty[$

③ Montrer que :

$$(\forall x \in J), f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x + 1}$$

### Exercice 14

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - 2\sqrt{x + 1}$$

① Montrer que :  $D_f = [-1; 0[ \cup ]0; +\infty[$

② Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$

③ Montrer que  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

④ a Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$

b Vérifier que  $4\alpha^3 + 4\alpha^2 - 1 = 0$

### Exercice 15

$f$  est définie sur  $I = ]-\infty; -1]$  par :

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

① Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , puis montrer que  $f$  est continue sur  $I$ .

② Montrer que :  $(\forall x \in I), f'(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$  en déduire que  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

③ a Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J = [-1; 0[$

b Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$

### Exercice 16

$f$  est définie sur  $I = [4; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{-x^2}{4} + x\sqrt{x} - x + 1$$

① a Vérifier que pour tout  $x \in I$  :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{x})^2$$

b Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

② a Montrer que pour tout  $x \in I$ ,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) \text{ en déduire que } f \text{ est strictement décroissante sur } I.$$

b Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $I$  puis vérifier que  $\frac{64}{9} < \alpha < \frac{121}{16}$

③ a Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J = ]-\infty; 1]$

b Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$

c En déduire que :  $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$

③  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(\sqrt{x^2 + \pi x} + x)$

### Exercice 7 ★★☆☆

- ① Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{3}$$

Calculer  $f(-1)$ ,  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ,  $f(0)$  et  $f(1)$  puis en déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet trois solutions

- ② Montrer que l'équation  $x^3 + \sqrt{x} - 1 = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  telle que  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$

### Exercice 8 ★★☆☆

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$$

- ① Calculer  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variations de  $f$
- ② Soit  $g$  la fonction définie sur  $] -2; -1[$  par  $g(x) = f(x)$ 
  - a Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $I$  à déterminer
  - b Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in I$

### Exercice 9 ★★☆☆

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x} - 1}$$

- ① Déterminer  $D_f$  puis calcules les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$
- ② Montrer que  $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{(2\sqrt{x} - 1)^2}$  puis dresser le tableau de variations de  $f$

- ③ Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $I = [1; +\infty[$

- a Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer
- b Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$

### Exercice 10 ★★☆☆

Montrer que l'équation (E) :  $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]1; 2[$

### Exercice 11 ★★☆☆

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$$

- ① Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$
- ② Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$
- ③ Calculer  $f\left(-\frac{1}{4}\right)$  puis déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0.25
- ④ Montrer que  $\sqrt{\alpha+1} = \frac{-2\alpha}{\alpha+1}$  puis en déduire que  $\alpha < \frac{-1}{4\sqrt{2}}$

### Exercice 12 ★★☆☆

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

- ① Déterminer  $D_f$  puis calcules les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$
- ② a Montrer que :  $(\forall x \in D_f), f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ 
  - b Dresser le tableau de variations de  $f$  (Justifier votre réponse)

**Exercice 17** ★★☆☆

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois nombres réels strictement positifs tels que  $a + b \leq c$ . Montrer que :

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} \Rightarrow (a + b + c)^3 + 27abc = 0$$

**Exercice 18** ★★☆☆

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 3$$

- ① Dresser le tableau de variations de  $f$
- ② Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  telle que  $2 < \alpha < 3$

- ③ On pose  $a = \frac{\sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}}}{2}$ . Montrer que  $\alpha = a + \frac{1}{a}$

**Exercice 19** ★★☆☆

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

- ① Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $a$  dans  $[\sqrt[3]{2}; +\infty[$
- ② Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $b$  dans  $]a; +\infty[$
- ③ Montrer que :

$$c \in ]0; a[ , \sqrt[3]{c + 2} \cdot f(c) = 2c - a$$

**Exercice 20** ★★☆☆

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $I = [-1; 0[$  par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

- ① Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  puis montrer que  $f$  est continue sur  $I$
- ② Montrer que pour tout  $x \in ]-1; 0[$ ,

$$f'(x) = -\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}, \text{ en déduire que } f \text{ est strictement décroissante sur } I$$

- ③ Montrer que l'équation  $f(x) = x^3$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $I$  et que  $-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{1}{2}$

- ④
  - a Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer
  - b Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$
  - c Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(x) = f(x)$

**Exercice 21** ★★☆☆

- ① Calculer les nombres suivants :

$$\text{a } a = \sqrt[3]{27} \quad \text{c } c = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}$$

$$\text{b } b = \sqrt[4]{16} \quad \text{d } d = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{64}}}{\sqrt[5]{32}}$$

- ② Calculer :

$$\text{a } A = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}}$$

$$\text{b } B = \frac{a^{-\frac{4}{3}} \times \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{a^{-2}} \times \sqrt[3]{a^{-1}}}$$

- ③ Comparer les nombres  $a$  et  $b$  tels que :

$$a = \sqrt[4]{3} \text{ et } b = \sqrt[5]{4}$$

- ④ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$\text{a } x^3 + 27 = 0$$

$$\text{b } \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = 0$$

$$\text{c } \sqrt[3]{2x-1} = \sqrt{x}$$

$$\text{d } \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{4}$$

## Exercice 22 ★★☆☆

- ① Comparer les nombres suivants :

$$(\sqrt[4]{8})^2 \text{ et } \sqrt{\sqrt{81}} \text{ et } \sqrt[3]{\sqrt{2}}$$

- ② Montrer que :

$$\sqrt[4]{5} \times \sqrt[6]{5} = \sqrt[3]{5} \text{ et } \sqrt[4]{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{et que : } \frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{\sqrt{b^{-5}}}} \times \sqrt[12]{\frac{a^{-5}}{b^3}} = ab$$

- ③ On pose :

$$X = \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} \text{ et } Y = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$$

Rendre le dénominateur de  $X$  et  $Y$  un nombre entier

- ④ Simplifier :  $A = (27)^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{\sqrt[3]{8-1}} + \frac{\sqrt{2}}{4^{-\frac{5}{2}}}$

## Exercice 23 ★★☆☆

Calculer les limites suivantes :

①  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

③  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}$

②  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

④  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{x - 1}$

⑤  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3}}{x - 1}$

⑥  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}}$

⑦  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x} + 4}$

⑧  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}}{x}$

⑨  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{x}}$

⑩  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{x+2}}$

⑪  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{-x^3 + x + 1}}{x}$

⑫  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x + 1}}{x}$

⑬  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - x$

⑭  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - 2x$

⑮  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt{x^2 + 2}$

⑯  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^6 + 1} - \sqrt{4x^4 + 2}$

⑰  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt{x + 2}$

## Exercice 24 ★★☆☆

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-4; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

- ① Montrer que  $f$  est continue en 0
- ② Montrer que  $f$  est continue sur  $[-4; +\infty[$
- ③ Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- ④ Vérifier que pour tout  $x \in [-4; +\infty[$ ,  
 $-x - 8 + 4\sqrt{x+4} = -(\sqrt{x+4} - 2)^2$
- ⑤ a Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]-4; +\infty[$   
 b Dresser le tableau de variations de  $f$
- ⑥ Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer
- ⑦ Dresser le tableau de variations de  $f^{-1}$  (justifier votre réponse)
- ⑧ Calculer  $f(5)$  puis déterminer  $(f^{-1})'\left(\frac{1}{5}\right)$
- ⑨ Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$

**Exercice 25** ★★☆☆

- 1 Montrer que l'équation  $x^2 + x - 1$  admet au moins une solution dans  $[0; 1]$
- 2 Montrer que l'équation  $2 \sin(x) = x$  admet au moins une solution dans  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
- 3 Montrer que l'équation  $x^2 - 5\sqrt{x} + 1 = 0$  admet au moins une solution  $\alpha$  telle que  $1 < \alpha < 4$
- 4  $f$  est définie par :  $f(x) = x^4 + x - 1$   
Montrer que la courbe  $(C_f)$  coupe l'axe des abscisses dans l'intervalle  $[-1; 1]$
- 5 Soit  $f$  la fonction continue sur  $[1; 2]$  telle que  $f(1) < 1$  et  $f(2) > 2$   
Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution dans  $[1; 2]$
- 6 Soit  $f$  la fonction continue sur  $[a; b]$  telle que  $f(a) > ab$  et  $f(b) < b^2$   
Montrer que l'équation  $f(x) = bx$  admet au moins une solution dans  $[a; b]$
- 7 Soit  $f$  la fonction continue sur  $[0; 1]$  telle que  $f(0) = -4$  et  $f(b) < b^2$   
Montrer que l'équation  $(x - 1)f(x) = 2x$  admet au moins une solution dans  $[0; 1]$
- 8 Montrer que l'équation  $x^3 - 3x + 1 = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]1; 2[$  puis déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0.25
- 9 Montrer que l'équation  $x^3 + x - 11 = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; 1[$  puis déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0.25
- 10 Montrer que l'équation  $\sqrt{x} = \frac{1}{x-1}$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]1; 2[$  puis vérifier que  $\alpha^2(\alpha - 2) = 1 - \alpha$

**Exercice 26** ★★☆☆

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]a; b[$

$((a; b) \in \mathbb{R}^2)$  par :

$$f(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}$$

Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]a; b[$  sur  $\mathbb{R}$  et déterminer sa bijection réciproque  $f^{-1}$

**Exercice 27** ★★☆☆

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $] -1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

- 1 Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $] -1; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à déterminer
- 2 Soit  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$ . Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$
- 3 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$f^{-1}(x) = f(x)$$

**Exercice 28** ★★☆☆

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

- 1 Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $] -1; 1[$  sur  $\mathbb{R}$
- 2 Déterminer la bijection réciproque  $f^{-1}$

**Exercice 29** ★★☆☆

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  telle que  $f(a) = f(b)$

Montrer que l'équation  $f(x) = f\left(x + \frac{b-a}{2}\right)$  admet au moins une solution dans  $[a; b]$

**Exercice 30** ★★☆☆

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0; 1]$ .  
Montrer que :

$$(\exists c \in ]0; 1[), f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$$

**Exercice 31** ★★☆☆

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0; 1]$  et définie de  $[0; 1]$  vers  $[0; 1]$ .  
Montrer qu'il existe un réel  $x_0$  de  $[0; 1]$  tel que  $f(x_0) = x_0$