

EXERCICE N°1

- I) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$.
- 1) a) Vérifier que $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.
b) Montrer que $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$.
 - 2) dresser le tableau de variation de g .
 - 3) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.
- II) On donne la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}$ et on désigne par (φ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 1) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0, +\infty[$.
 - 2) a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.
b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1+\ln x}{x^2} = 0$. Puis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
c) Montrer que : la droite $(\Delta): y = x - 1$ est asymptote oblique à (φ_f) au voisinage de $(+\infty)$
 - 3) Déterminer l'équation de la tangente à (φ_f) au point d'abscisse 1.
 - 4) Tracer (φ_f) et (Δ) .
 - 5) a) Montrer que : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$.
b) Calculer l'aire de la partie du plan limité par (φ_f) et (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

EXERCICE N°2

- I) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$.
- 1) Montrer que $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$ puis donner le sens de variation de g .
 - 2) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

II) On donne la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$

et on désigne par (φ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Vérifier que : $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

c) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.

d) Montrer que (φ_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation : $y = x$ au voisinage de $(+\infty)$.

2) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$. Puis dresser le TV de f .

3) Tracer la courbe (φ_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) a) Montre que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limité par (φ_f) , l'axe des abscisse et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

EXERCICE N°3

I) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$.

1) Montrer que $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur $]0, 1]$.

En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0, 1]$.

2) Montrer que $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur $]1, +\infty[$.

En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]1, +\infty[$.

II) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (x^2 - 1) \ln x$.

et on désigne par (φ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne l'unité 3cm.

1) a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

En déduire que (φ_f) admet une branche parabolique

voisinage de $(+\infty)$ que l'on déterminera sa direction.

2) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

b) Puis dresser le TV de f .

3) Montrer que $\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x \, dx = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2)$.

4) b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (φ_f) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

EXERCICE N°4 :

I) On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

1) a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $[0, +\infty[$ puis déduire que g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

b) Déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$.

2) Montrer que : $0 < \ln(1+x) < x$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

II) On considère la fonction f définie par $f(x) = x + \ln \frac{x+1}{x-1}$ et on désigne par (φ_f) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

2) a) Montrer que f est une fonction impaire.

b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

3) a) Montrer que : $f'(x) = \frac{x^2-3}{x^2-1}$ pour tout x de D_f .

b) En déduire le sens de variation de f sur $]1, +\infty[$.

4) a) Montrer que : la droite $(\Delta): y = x$ est asymptote oblique à (φ_f) .

b) Etudier la position relative de (φ_f) et (Δ) puis tracer (φ_f) et (Δ)

5) a) Montrer que : $\int_2^4 \ln \frac{x+1}{x-1} \, dx = 5 \ln 5 - 6 \ln 3$ puis déduire l'aire de

la partie du plan limitée par (φ_f) , la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

EXERCICE N°5

I) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = x(1 + \ln^2 x) \text{ pour } x > 0.$$

(φ_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

2) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$,

en déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

3) a) Montrer que (φ_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1} .

b) construire la courbe (φ_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II) Soit la fonction F définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

1) a) Montrer que la fonction $H: x \rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$ est une primitive de la fonction $h: x \rightarrow x \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que : $(\forall x > 0) ; \int_1^x t \ln^2 t dt = \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \int_1^x t \ln t dt$.

c) En déduire que pour tout $x > 0$:

$$F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{x^2}{2} \ln^2(x).$$

2) a) Montrer que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$. En déduire $\int_0^1 f(t) dt$.