

Exercices – Limites Dérivation et Etude de Fonctions

Problème 1

11 points

Partie 1: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:
$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & ; x > 0 \\ f(x) = x + x^2 e^x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

Et soit (C_f) la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $(\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm})$

- | | |
|------|---|
| 0,5 | 1) Montrer que f est continue en 0 . |
| 0,75 | 2) Montrer que f est dérivable en 0 , puis interpréter les résultats obtenus géométriquement. |
| 0,75 | 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis en déduire que (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$. |
| 0,75 | 4) a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis montrer que la droite $(D) : y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$. |
| 0,5 | b. Montrer que (C_f) située au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $] -\infty; 1]$. |
| 0,75 | 5) a. Montrer que: $f'(x) = 1 - x - 2x \ln x$; $x > 0$ et $f'(x) = 1 - e^x + (x+1)^2 e^x$; $x \leq 0$ |
| 0,75 | b. Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty; 1]$ et qu'elle est strictement décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$. |
| 0,5 | c. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. (remarquer que $f'(1) = 0$) |
| 0,5 | 6) a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1; 2[$. |
| 0,25 | b. En déduire que $\ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ |
| 0,5 | 7) a. Montrer que : $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$ pour tout x l'intervalle $] -\infty; 0]$ |
| 0,5 | b. Vérifier que (C_f) admet deux points d'inflexions d'abscisses $-2 + \sqrt{2}$ et $-2 - \sqrt{2}$. |
| 1 | 8) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. |
| 0,75 | 9) a. A l'aide d'une intégration par partie montrer que : $\int_1^\alpha x^2 \ln x dx = \frac{3\alpha^2 - \alpha^3 + 1}{9}$ |
| 0,5 | b. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f) , la droite (D) . et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$ |

Partie 3 : Soit [illisible] la suite définie par : $u_0 = 0,2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- | | |
|------|---|
| 0,5 | 1) Montrer que $0 < u_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ |
| 0,5 | 2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente. |
| 0,75 | 3) Déterminer la limite de la suite (u_n) |

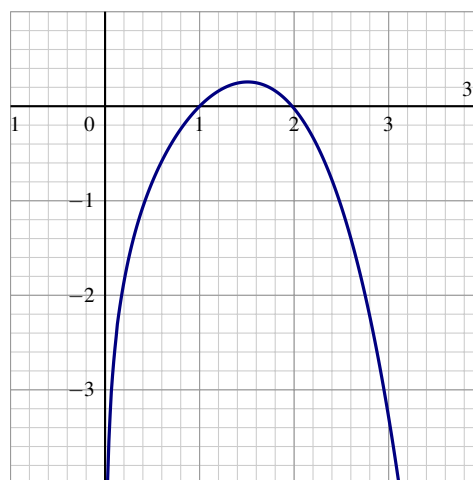
Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$

- 1) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$, puis déterminer la monotonie de g
- 2) Calculer $g(1)$, en déduire que $\forall x \in]0; 1] : g(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1; +\infty[: g(x) \geq 0$

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{x-1} - \ln(x)$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, puis interpréter le résultat géométriquement
- 2) **a-** Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
b- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat géométriquement
- 3) **a-** Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[f'(x) = g(x)$
b- Dresser le tableau des variations de f
c- Etudier la concavité de (C_f)
- 4) Construire (C_f) (on prend : $f(2) = 2$)
- 5) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation : $e^x = e \ln(xe^2)$
- 6) **a-** En utilisant une intégration par partie, Montrer que : $\int_1^2 \ln(x) dx = \ln(4) - 1$
b- Calculer l'aire du domaine délimité par (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$
- 7) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]0; 1]$
a- Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera
b- Construire $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
c- Calculer $(h^{-1})'(2)$
- 8) On considère t la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $t(x) = x - f(x)$
à partir de la courbe ci-contre de la fonction t
montrer que $\forall x \in [1, 2] f(x) \leq x$
- 9) Soit (u_n) une suite numériques définie comme par
:
 $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$
a- Montrer par récurrence que
 $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 2$
b- Montrer que (u_n) est décroissante
c- Déduire que (u_n) est convergente
d- Calculer la limite de la suite (u_n)



Problème 3 (10 points)

PARTIE A

- 1) Détermine les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $(E_1) : y'' + 2y' + y = 0$.
- 2) On considère l'équation différentielle $(E_2) : y'' + 2y' + y = x + 3$.
 - a) Vérifie que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + 1$ est solution de (E_2) .
 - b) Démontre qu'une fonction f est solution de (E_2) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E_1) .
 - c) En déduis les solutions de (E_2) .
 - d) Détermine la solution de (E_2) qui vérifie : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2cm)

- 1) a) Calcule pour tout réel x , $f'(x)$ et $f''(x)$.
 - b) Etudie le sens de variation de f' .
 - c) Démontre que pour tout réel x positif, $f'(x) > 0$.
 - d) Calcule la limite de f en 0 et $+\infty$.
 - e) Dresse le tableau de variation de f .
- 2) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
 - b) Précise la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D) .
 - c) La courbe $(\mathcal{C})$ admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D) .

Détermine les coordonnées de A.

- 3) Démontre que l'équation $f(x) = 2$ admet sur $[0; +\infty[$ une unique solution α , puis vérifie que $0 \leq \alpha \leq 1$.
- 4) Construis la droite (D) , le point A, la courbe $(\mathcal{C})$ et tangente en A à la courbe $(\mathcal{C})$.

PARTIE C

- 1) Démontre que sur $[0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 2$ équivaut à l'équation : $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$.
- 2) Soit la fonction h définie sur $[0; 1]$ par : $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.
 - a) Calcule $h'(x)$ et réalise son tableau de variation sur $[0; 1]$.
 - b) En déduis que $\forall x \in [0; 1], h(x) \in [0; 1]$.
 - c) Calcule $h''(x)$ et étudie le sens de variation h' sur $[0; 1]$.
 - d) En déduis que $\forall x \in [0; 1]$, on a : $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$.

PARTIE D

On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- 1) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0; 1]$.

2) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$.

3) En déduis que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, puis que la suite (U_n) converge vers α .

4) Détermine un entier p tel que U_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α et à l'aide de la calculatrice, propose une approximation décimale de U_p à 10^{-6} près. Que peut-on déduis de α ?

Problème 4 : (10 points)

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = \text{Log} \left(\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2} \right)$

A - 1) a - Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+$

b - Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$

c - Tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

2) a - Soit y un réel strictement positif. Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation en x : $e^x + e^{-x} - 2 = y$

b - Montrer que f admet sur $\mathbb{R}_+$ une fonction réciproque g , et déduire de ce qui précède l'expression de $g(x)$.

B - 1) Soit h une fonction numérique à variable réelle, dérivable et strictement monotone sur un intervalle I .

a - Montrer que h^{-1} admet des primitives sur $h(I)$.

b - Soit H une primitive de h^{-1} sur $h(I)$. Démontrer que $H \circ h$ est une primitive, sur I , de la fonction $x \mapsto x h'(x)$.

c - Soit (α, β) un couple de I^2 . Déduire de ce qui précède que $\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} h^{-1}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} t h'(t) dt$

2) a - Calculer $f(0)$ et $f\left(\frac{(e-1)^2}{e}\right)$

b - En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations

$$x = \frac{(e-1)^2}{e} \quad \text{et} \quad y = 0.$$

C - 1) a - Montrer que pour tout réel x positif, on a $\text{Log}(1+x) \leq f(x) \leq \text{Log}(2+x)$

b - Soit θ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\theta(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$

Montrer que θ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et en déduire que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ admet une solution unique γ dans $]1, 4[$

2) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(2u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \in [1, 2]$

b - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left| u_{n+1} - \frac{1}{2}\gamma \right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \left| u_n - \frac{1}{2}\gamma \right|$

c - En déduire la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Problème 5 (12 points) :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$
et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Première partie :

- 0,75 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.
- 0,5 b) Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$
- 0,5 c) Étudier la nature de la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
- 0,75 2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- 0,75 b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 0,75 3) a) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
- 0,75 b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \leq x$, puis interpréter ce résultat graphiquement.
- 0,5 4) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (On donne : $f(0) = 0$)

Deuxième partie :

- 0,75 1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- 0,5 2) Dresser le tableau de variations de la fonction f^{-1} .
- 0,75 3) Montrer que pour tout $x \in J$: $f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - 2x}}$.
- 0,75 4) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $(f^{-1})'(0)$.
- 0,5 5) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Troisième partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = -\frac{3}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- 1 1) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question 3)–b) deuxième partie)
- 1 b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \leq -\frac{3}{4}$ et que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sqrt{1 + u_n^2} - u_n \geq 2$
- 1 2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1}| \geq 2|u_n|$ et en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n| \geq \frac{3}{4} \times 2^n$.
- 0,5 3) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I :

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{1}{n}\}$ par : $f_n(x) = \frac{nx+1}{nx-1} e^{n^2x-n}$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^+} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^-} f_n(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Étudier les branches infinies de la courbe (C_{f_n}) au voisinage ∞ .

3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{n}\} \quad ; \quad f'_n(x) = \frac{n^4 e^{n^2x}}{e^n (nx-1)^2} \left(x - \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n^2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n^2} \right)$$

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n .

5. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{\pm \frac{1}{n}\} \quad ; \quad f_n(x) f_n(-x) = e^{-2n}$

Partie II :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R} - \{\pm \frac{1}{n}\}$ par :

$$g_n(x) = n^2x - n + \ln \left| \frac{nx+1}{nx-1} \right|$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}} g_n(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. En déduire que : $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{n}} g_n(x) = -\infty$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. Montrer que : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g_n(x) - (n^2x - n) = 0$, puis étudier les branches infinies de la courbe (C_{g_n}) au voisinage ∞ .

4. En déduire que $\Omega(0; -n)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_{g_n}) .

5. Montrer que il existe une fonction $G_n : \mathbb{R} - \{\pm \frac{1}{n}\} \rightarrow \mathbb{R}$, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{\pm \frac{1}{n}\} \quad ; \quad g'_n(x) = \frac{\left(x - \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n^2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n^2} \right)}{(nx+1)(nx-1)} G_n(x) \text{ avec } G_n \geq 0$$

6. Dresser le tableau de variation de la fonction g_n .

7. Étudier la position relative de la courbe (C_{g_n}) par rapport à la droite (Δ_n) , avec $(\Delta_n) : y = n^2x - n$.

8. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet unique solution α_n sur $\mathbb{R} - \{\pm \frac{1}{n}\}$, puis vérifier que $-\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{n}$.

9. Trace la courbe (C_{g_2}) et (C_{f_2}) . (On admet $\alpha_2 \approx 0,25$)

Partie III :

On considère la fonction h_n la restriction de f_n sur $] -\frac{1}{n}; \frac{1}{n}[$.

1. Montrer que h_n est bijectif sur $] -\frac{1}{n}; \frac{1}{n}[$ vers J à déterminer.

2. Déterminer $h_n^{-1}(-1)$ en fonction de n .

3. Vérifier que $(h_n^{-1})'(-1) < 0$.

Problème 7 10 points

Partie A :

Soit g définie par : $g(x) = (1 - x)e^{-x}$

- 1) Dresser le tableau de variations de g . 0,5pt
- 2) Calculer $g(0)$ puis en déduire le signe de $g(x)$. 0,75pt

Partie B

Soit f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 - x + xe^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ x(\ln x)^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- 1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ 0,5pt
- 2) Etudier la continuité de f en 0. 0,5pt
- 3) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats. 1pt + 0,75pt
- 4) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. 0,5pt + 0,5pt
- 5) Etudier les branches infinies de (Cf) . 0,5pt + 0,5pt
- 6) Dresser le tableau de variations de f . 1pt
- 7) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm (on précisera la tangente au point d'abscisse e^{-1} et on placera le point d'abscisse 1). 1pt

Partie C

Soit h la restriction de f à $]0; +\infty[$

- 1) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle à préciser. 0,5pt
- 2) Etudier la dérivabilité de h^{-1} . 0,5pt
- 3) Calculer $(h^{-1})'(2)$. 0,5pt
- 4) Tracer la courbe de h^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ 0,5pt

Problème 8 10 POINTS

Partie A

Soit la fonction définie par $g(x) = 2\ln x + 1 + \frac{1}{x}$

1. Déterminer le domaine de définition de g **0.25PT**
2. Calculer les limites aux bornes de Dg. **0.5PT**
3. Etablir le tableau de variations de f **0.5PT**
4. En déduire le signe de g(x) **0.25PT**

PARTIE B

Soit f la fonction définie
$$\begin{cases} f(x) = e^x(x+1) - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 \ln x + x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montre que le domaine de définition de f est IR. **0.25PT**
2. Calculer les limites aux bornes de Df. **0.5PT**
3. Etudier les branches infinies de Cf. **0.5PT**
4. Etudier la continuité de f en 0. **0.25PT**
5. Etudier la dérivabilité de f en 0, interpréter géométriquement les résultats obtenus. **1PT**
6. Dériver f sur $] -\infty; 0[$ **0.5PT**
7. Montrer pour tout $x > 0$; $f'(x) = xg(x)$ **0.5PT**
8. Etablir le tableau de variation de f. **0,75PT**
9. Donner l'équation de la tangente de (Cf) au point d'abscisse 1. **0.5PT**
10. Etudier la position relative entre (Cf) et la droite (D) : $y = -2$ sur $] -\infty; 0[$. **0.25PT**
11. Tracer (Cf) la courbe représentative de f dans un repère d'unité 1cm. **1.5PT**
12. Soit h la restriction de f sur $]0; +\infty[$
 - a. Montrer que h est une bijection de $]0; +\infty[$ vers J à préciser. **0.25PT**
 - b. Dresser le tableau de variations de sa bijection réciproque h^{-1} **0.25PT**
 - c. Calculer $h^{-1}(0)$ **0.5PT**
 - d. Tracer la courbe représentative de h^{-1} . **0.5PT**
13. Calculer l'aire du domaine défini par (**0,75PT**)

$$D = \{M(x;y) \in P \text{ tel que } -2 \leq x \leq -1 \text{ et } f(x) \leq y \leq -2\}$$

BONNE CHANCE

Problème 9 (12 points)

$$\text{Soit } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1}, & \text{si } x \in]-\infty; 1] \\ (x-1)e^{-x+1}, & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

PARTIE A

- 1) a) Montrer que pour tout x de $] -\infty; 1[$, $f(x) = \frac{(x-1)(-2x^2+x-3)}{2(x^2+1)}$.
 b) Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.
- 2) On admet que f est dérivable sur $] -\infty; 1[$ et sur $] 1; +\infty[$
 - a) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
 - b) Etudier la dérivabilité de f au point 1. Interpréter graphiquement ce résultat.
 Sur quel sous ensemble D de $\mathbb{R}$ f est-elle dérivable ?
 - c) Calculer $f'(x)$ pour tout x de D .
 - d) Etudier les variations de f . Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variation de f .
- 3) a) Montrer que (Cf) admet une asymptote oblique (D) en $-\infty$ dont vous préciserez une équation.
 b) Etudier la position de (Cf) par rapport à (D) sur $] -\infty; 1]$.
- 4) a) Donner une équation de la tangente (T) à (Cf) au point A d'abscisse 0.
 b) Etudier la position de (Cf) par rapport à (T) sur $] -\infty; 1]$.
 c) Déterminer le point B de (Cf) d'abscisse a , $a < 1$, en lequel la tangente (Δ) est parallèle à la droite (D) .
- 5) Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, placer les points A et B. Tracez les tangentes à (Cf) au point d'abscisse 1, puis tracez (D) ; (T) ; (Δ) et (Cf) .

PARTIE B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 1]$.

- 1) a) Montrer que g est une bijection de $] -\infty; 1]$ sur un intervalle que vous préciserez.
 b) Sans expliciter la bijection réciproque g^{-1} de g , dresser son tableau de variations.
- 2) Construisez dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe $(C_{g^{-1}})$ de g^{-1} , en expliquant la construction.
- 3) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par (Cf) , la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ et les axes du repère.

Exercice 10 (08 pts)

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x + \sin x}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ x\sqrt{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que pour tout réel $x < 0$ on a : $\frac{x-1}{\sqrt{-x}} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{\sqrt{-x}}$.

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2) Montrer que f est continue en 0.

3) Etudier la nature de la branche infinie à la courbe ζ_f au voisinage de $+\infty$.

4) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1 - \cos x}{x^3}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\sqrt{x} - x)}{\sqrt{x}}$.

5) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En déduire $f([0, +\infty[)$.

b) Montrer, alors que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet dans $[0, +\infty[$ une unique solution α et que $0 < \alpha < 1$.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin(2f(x) - 1)}{2f(x) - 1}$.

II) 1) a) Montrer que pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ on a : $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

b) En déduire que pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ on a : $x \leq f(x) \leq x + \frac{x^2}{2}$.

2) On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) Montrer, alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{n+1}{2n} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3}$.

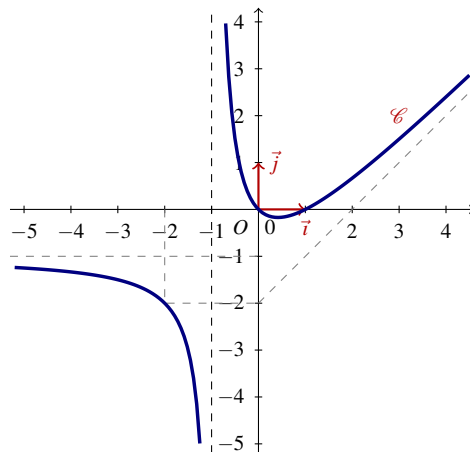
c) En déduire la limite de la suite (S_n) .

Exercice 11 (6 points)

La figure ci-dessous désigne la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et continue sur chacun des intervalles $] -\infty, -1[$ et $] -1, +\infty[$.

✓ Les droites d'équations respectives $x = -1$, $y = -1$ et $y = x - 2$ sont des asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.

✓ On donne $f(-2) = -2$.



① Par une lecture graphique :

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - x}$
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - x + 2}$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(f(x)) - f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)}$
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + f(x)}{1 + xf(x)}$.

c) Soit k un entier naturel non nul. Déterminer, en justifiant, l'image de l'intervalle $] -\infty, -1[$ par

$$\varphi_k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

② a) Montrer que pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ admet dans $] -1, 0]$ une unique solution a_n .

b) Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

③ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} f \circ f(x) & \text{si } x < -1 \\ \frac{2\cos(\pi x)}{|x| + 1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$. On désigne par Γ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

a) Étudier la continuité de g en -1 .

b) Vérifier que : $\forall x \in] -1, +\infty[, -\frac{2}{|x| + 1} \leq g(x) \leq \frac{2}{|x| + 1}$.

Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

④ a) Sachant que pour tout $x \in] -\infty, -1[, f(x) = \frac{ax}{x+b}$, où a et b sont deux réels.

Vérifier que : $a = -1$ et $b = 1$.

b) Déterminer alors l'expression de $g(x)$, pour tout $x \in] -\infty, -1[$.

⑤ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que : $\Re(z) < -1$ et $z^2 + (z - \bar{z}) + i(z + \bar{z}) \in \mathbb{R}$.