

Exercices – Logarithme et Exponentielle

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x} \ln x$ et on désigne par (C) sa courbe.

1. Etude d'une fonction auxiliaire

- a) Etudier les variations de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \ln x$.
- b) Vérifier que $g(1) = 0$.
- c) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

2. Etude de la fonction f .

- a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- b) Déduire de la question 1. le signe de $f'(x)$ et les variations de f .
- c) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- d) Dresser le tableau de variation de f .

3. Représentations graphiques

- a) Etudier suivant les valeurs de x la position relative de (C) par rapport à la courbe (Γ) d'équation $y = \ln x$.
- b) Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) - \ln x$. Interpréter graphiquement le résultat.
- c) Construire la courbe (Γ) , puis la courbe (C) dans le même repère.

4. Calcul d'aire.

Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan, limité par la courbe (Γ) , (C) , les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Problème 2

Partie A

Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$.

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g .
- b) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
- 2) a) Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, calcule $g'(x)$.
- b) Détermine le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x .
- c) Etudie les variations de g , puis dresse son tableau de variation.
- 3) a) Calcule $g(1)$ et $g(2)$. Démonstre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1; 2]$.
- b) En déduis un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.
- c) Justifie que :
$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$$
.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthogonal (O, I, J) .
(Unité graphique : $OI = 2 \text{ cm}$ et $OJ = 4 \text{ cm}$).

- 1) a) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- b) Interprète graphiquement les résultats ci-dessus.
- 2) a) Démonstre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$.

- b) En déduis les variations de f .
- c) Démontre que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$.
- d) Dresse le tableau de variation de f . On prendra $\alpha = 1,8$.
- e) Construis $(\mathcal{C})$.

Partie C

- 1) Démontre que pour tout $x \geq 1$, $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.
- 2) On pose $E_1 = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$ et $E_2 = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$.
 - a) Calcule E_1 , puis en utilisant une intégration par parties calcule E_2 .
 - b) En déduis un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$.
- 3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$.
 - a) Exprime $\mathcal{A}$ en fonction de K .
 - b) En déduis un encadrement de $\mathcal{A}$ en cm^2 .

Exercice 3

Première Partie :

17-01-2022

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = (x+2)e^{-\frac{2}{x}}$ si $x > 0$. Et soit $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

- 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.
- b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.
- c) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- 2) a) Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}^+) 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$
- c) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$
- d) En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ qu'on déterminera par une équation cartésienne.
- 3) Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

Deuxième Partie : n est un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}$ si $x > 0$

- 1) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0.
- 2) Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$.
- 3) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une unique solution a_n dans $\mathbb{R}^+$.
- b) Montrer que : $(\forall x > 0) (\forall n \in \mathbb{N}^*) f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$
- c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.

On note : $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

- d) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$
- e) Montrer que $a = 0$.

Exercice 4

Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2°) Démontrer que pour tout x de D_f $f(x) > x + |x|$.

3°) En déduire le signe de $f(x)$ sur D_f .

4°) Étudier la fonction et tracer sa courbe représentative (C_f).

5°) Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

a) résoudre l'équation $g(x) = -\ln(3 - 2\sqrt{2})$.

b) Démontrer que g est une fonction impaire ;

c) Étudier g et tracer sa courbe (C_g).

d) Démontrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; et que pour tout entier relatif n ,

$$g\left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right) = n.$$

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$.

1°) Étudier les variations de la fonction f ;

2°) Construire la courbe (C_f) de f dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 10cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées.

3°) On note λ un réel strictement positif.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\lambda}^1 \ln x dx$;

b) En déduire la valeur de $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

c) Déterminer la limite ℓ de $I(\lambda)$ quand λ tend vers 0^+ .

4°) Pour tout entier naturel n supérieure ou égal à 2 on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n}\right)$

a) En utilisant le sens de variation de f sur $]0; 1]$; démontrer que, pour p entier naturel vérifiant $1 \leq p \leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right).$$

b) En déduire que : $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$, puis que

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

Exercice 6

1°) a) Etudier les variations de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{2(x+1)} - \ln(1+x)$$

b) Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}.$$

c) Dédire des questions précédentes que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)} \quad (1)$$

d) Démontrer que pour tout $x > 0$, $\frac{x(x+2)}{2(x+1)} < x$. (2).

2°) a) Dédire de (1) et (2) que pour tout $y > 0$,

$$\frac{1}{1+y} < \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) < \frac{1}{y}.$$

b) Dédire de (1) et (2) que pour tout $z > 0$,

$$\frac{z-1}{z} < \ln z < z-1.$$

3°) Utiliser l'un de ces encadrements pour encadrer $\ln a$ dans chaque cas suivant :

$$a = 0,5 ; \quad a = 0,8 ; \quad a = 0,98 ; \quad a = 1,02 ; \quad a = 1,5.$$

Exercice 7

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{1}{x} (x^2 + 1 - \ln x)$ et construire sa courbe représentative C_f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique : 2 cm.

1°) Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g et ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule et que $1,30 \leq \alpha \leq 1,35$.

c) Etudier le signe de $g(x)$.

2°) a) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire le sens de variation de f .

3°) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe C_f .

b) Déterminer le point d'intersection A de C_f et (Δ) ; préciser la position de C_f par rapport à la droite (Δ) .

c) Construire la courbe C_f et la droite (Δ) , en précisant la tangente en A à C_f .

Exercice 8

Partie A : On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$$

1°) Etudier le sens de variations de g .

2°) a) Calculer $g(1)$ et $g(2)$. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0 ; +\infty[$.

b) Trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

3°) Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$$

On appelle (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unité Graphique 2 cm.

1°) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement ces limites.

2°) a) Montrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$.

b) En déduire les variations de f .

c) Montrer que, $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ et donner le tableau de variation de f .

3°) Construire la courbe (Cf) de f .

Partie C : On se propose de trouver un encadrement de l'aire A de l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

1°) Montrer que, pour tout $x \geq 1$: $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.

2°) a) Calculer $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$;

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

3°) a) Déduire un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$.

b) Exprimer A en fonction de K , puis déduire une valeur approchée de A en cm^2 .

Exercice 9

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions f_n ; $n \in \mathbb{N}^*$ définies sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = x - n - \frac{n \ln x}{x}$. La courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 2cm est notée (C_n) .

A) Etude des variations de f_n ; $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Soit, pour tout entier naturel non nul n , la fonction g_n définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$g_n(x) = x^2 - n + n \ln x.$$

a) Etudier le sens de variation de g_n et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n ; et que α_n appartient à $[1 ; 3]$.

2°) a) Etablir que, pour $x \in]0 ; +\infty[$: $f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}$.

b) Déterminer le signe de $g_n(x)$ et en déduire le sens de variation de f_n .

3°) a) Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (D_n) , d'équation $y = x - n$ est asymptote à la courbe (C_n) , puis étudier la position de (C_n) par rapport à (D_n) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

B) Etude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

1°) α_n étant le nombre définie en A) 1°) montrer que :

■ Pour $n = 1$, $\alpha_1 = 1$; Pour $n = 2$; $1,2 < \alpha_2 < 1,3$.

2°) En utilisant les règles sur les inégalités et l'encadrement de α_2 ci-dessus montrer que $f_2(\alpha_2) \geq -1,24$. En utilisant le sens de variation de f_2 ,

montrer que $f_2(\alpha_2) \leq -1,10$.

3°) Donner les tableaux de variations de f_1 et de f_2 .

4°) Représenter dans le même repère les droites (D_1) et (D_2) puis les courbes (C_1) et (C_2) .

C) Etude des positions relatives des courbes (C_n) .

1°) Pour tout entier naturel n , et pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, calculer la différence $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.

Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers $+\infty$.

2°) Soit d la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $d(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

a) Etudier les variations de d , préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Dédire de la question précédente que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique β et que β appartient à l'intervalle $]0; 1[$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a $f_n(\beta) = \beta$.

3°) A l'aide des résultats obtenus dans les questions C) 1°) et 2°), établir que toutes les courbes (C_n) se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, préciser les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) .

Problème 10 : 11 points

Les parties A et B du problème sont indépendantes.

PARTIE A : 8,5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \frac{e^x - 3}{e^x + 1}$ et on note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité sur les axes : 2cm)

1. (a) Calculer les limites de f à $-\infty$ et à $+\infty$. 0,5pt

(b) Montrer que la droite (D_1) d'équation $y = x + 3$ est asymptote à (C_f) à $-\infty$. 0,5pt

On admet que la droite (D_2) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C_f) à $+\infty$.

2. (a) Vérifier que pour tout réel x , on a : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$. 0,5pt

(b) Dresser le tableau de variations de f . 0,75pt

3. (a) Montrer que le point $I(0, 1)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_f) . 0,5pt

(b) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I . 0,25pt

4. Étudier la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = 1$. 0,5pt

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que

$$-2,8 < \alpha < -2,7.$$

0,5pt

6. Tracer (C_f) , ses asymptotes et la tangente (T) . 2pts
7. (a) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = x + 3 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$. 0,5pt
 (b) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$. 0,5pt
8. Soit λ un réel strictement positif. On note (E_λ) le domaine du plan limité par la courbe (C_f) , la droite (D_2) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.
 (a) Hachurer (E_2) sur le graphique de la question 4. 0,5pt
 (b) Calculer en cm^2 et en fonction de λ , l'aire $\mathcal{A}_\lambda$ de (E_λ) . 0,5pt
 (c) Calculer la limite quand λ tend vers $+\infty$ de $\mathcal{A}_\lambda$. 0,5pt

PARTIE B : 2,5 points

On considère les équations différentielles : $(E_1): 2y'' - y' - y = 2$; $(E_2): 2y'' - y' - y = 0$.

1. Montrer qu'il existe une fonction constante f_0 solution de (E_1) . 0,5pt
2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E_1) si, et seulement si, $f - f_0$ est solution de (E_2) . 0,5pt
3. Résoudre (E_2) . 1pt
4. En déduire les solutions de (E_1) . 0,5pt

Exercice 11

1^{ère} partie :

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - \ln x$

① - a - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

b - Etudier les variations de la fonction g .

② - En déduire que : $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

2^{ème} partie :

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x \ln x ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

① - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

② - a - Etudier la continuité de la fonction f à droite en 0.

b - Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.

③ - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis étudier la branche infinie de courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

④ - a - Montrer que : $\forall x > 0 : f'(x) = x + g(x)$

b - En déduire les variations de f sur D_f .

⑤ - a - Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point $A(1; 1)$.

b - Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ) .

⑥ - a - Calculer $f''(x)$ pour tout $x > 0$.

b - Déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un **point d'inflexion** que l'on précisera.

⑦ - Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

⑧ - a - Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b - Montrer que f^{-1} est dérivable sur J .

c - Calculer $(f^{-1})'(1)$.

d - Tracer $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3^{ème} partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$.

② - Montrer que la suite (u_n) est croissante.

③ - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 12

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^x - 2x + 3$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthogonal direct (O, I, J) .

Unités graphiques : $OI=1\text{cm}$ et $OJ=0,5\text{cm}$.

Partie A.

On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = x(x+2)e^x - 2$

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et justifier que $0 < \alpha < 1$.
b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

4. Démontrer que :
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$$

5. a) Déterminer la dérivée de $u(x) = x^2 e^x$.

b) En déduire la primitive G de g qui prend la valeur 3 en 0.

Partie B

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.

b) Démontrer que la droite $(D) : y = -2x + 3$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

c) Etudier les positions de (C_f) et (D) .

2. Démontrer que (C_f) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

3. a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = g(x)$.

b) En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4. a) Démontrer que $f(\alpha) = 3 - 2\alpha^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}$

b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ par deux décimaux d'ordre 2.

c) Déterminer le signe de $f(x)$ et en déduire les positions de (C_f) et la droite (OI) .

5. Démontrer que (D) est la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

6. Soit h la restriction de f à $]-\infty; \alpha[$.

- a) Démontrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera les ensembles, de départ et d'arrivée.
- b) Justifier que h^{-1} est dérivable en 3 et déterminer $(h^{-1})'(3)$

7. Tracer (T) ; construire (C_f) et $(C_{h^{-1}})$.

Exercice 13 (7 points)

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$
et $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

1/ a- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement

b- Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

c- Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) = 1 - \ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

d- Dédurre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement

2/ a- Montrer que : $f'(x) = \frac{1-x^2}{x+x^3}$, et dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$

b- Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β tel que $\alpha < 1 < \beta$

c- Sur la feuille annexe, On donne les points $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$ et $C(1, 1 - \ln(2))$. Tracer $(\mathcal{C}_f)$

3/ Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$ et $G(x) = F(\tan(x))$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

a- Vérifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$

b- Montrer que $G'(x) = \tan^2(x)$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

c- Dédurre que : $G(x) = \tan(x) - x + \frac{\pi}{4} - 1$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

d- Calculer alors $a = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2} dt$

4/ Soit $I = \int_1^{\sqrt{3}} \ln(1+t^2) dt$

a- Montrer par intégration par parties que : $I = (2\sqrt{3} - 1) \ln(2) - 2a$

b- Dédurre que $I = (2\sqrt{3} - 1) \ln(2) + 2(1 - \sqrt{3}) + \frac{\pi}{6}$

c- Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie limitée par $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = \sqrt{3}$

Calculer $\mathcal{A}$.

Exercice 14 : (7 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, toutes les courbes demandées seront tracées dans la figure annexe ci-jointe.

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Γ est sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°/ Montrer que f est une fonction impaire.

2°/ Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.

3°/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ Interpréter les résultats obtenus

4°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$.

5°/a) Dresser le tableau de variations de f ; en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J que l'on précisera.

6°/ Soit α étant un nombre réel appartenant à $] -1; 1[$,

a) Montrer que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une solution unique x_0 .

b) Justifier que $x_0 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)$. Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

B. 1°/ Déterminer une équation de la tangente Δ_1 à Γ au point d'abscisse 0.

2°/ Montrer que pour tout nombre t réel $f'(t) = 1 - [f(t)]^2$ En déduire un encadrement de $f'(t)$.

a) Pour tout $x > 0$, déterminer un encadrement de $\int_0^x f'(x) dt$

b) justifier alors que $0 \leq f(x) \leq x$ En déduire les positions relative de Γ et Δ_1 .

3°/ Déterminer une équation de la tangente Δ_2 à Γ au point A d'ordonnée $\frac{1}{2}$

4°/ Montrer que le point B de la courbe Γ , d'ordonnée positive, où le coefficient directeur de la tangente est égal à $\frac{1}{2}$ a pour coordonnées $\left(\ln(1 + \sqrt{2}); \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

5°/ On a placé les points A et B sur la figure 2. Tracer Γ , Δ_1 et Δ_2 .

B.1°/ Vérifier que $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ En déduire une primitive de f .

2°/ Calculer l'aire, en unités d'aire, de la surface comprise entre Γ , la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$?

3°/a) Calculer $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 x(1 - [f(x)]^2) dx = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} - \ln \left(\frac{e^2 + 1}{2e} \right)$

c) En déduire alors $\int_0^1 x[f(x)]^2 dx$

Problème 15

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = e^x + 2\ln x$

1. a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- b. Calculer $g'(x)$
- c. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
2. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$
- b. Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$.
- c. Démontrer que !

$$\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0;$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0.$$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x + 2x \ln x - 2x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 4 cm.

1. a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- b. Interpréter graphiquement les résultats.
2. a. Démontrer que f est continue en 0 .
- b. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$.
- c. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.
- d. Interpréter graphiquement le résultat de la question 2.b.
3. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
- a. Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.
- b. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
4. Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[0; 2]$.
(On prendra $\alpha = 0,45$ et on admettra que la courbe (C) coupe la droite (OI) en deux points d'abscisses respectives 0,3 et 0,6).
5. a. On pose $K = \int_1^2 x \ln x dx$.
A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $K = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.
- b. Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par la courbe , la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.
Calculer $\mathcal{A}$ puis donner l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

Exercice 16

I. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
2. a. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$
b. Dresser le tableau de variations de la fonction f
c. Dédire que pour tout x de $]0; +\infty[$: $g(x) > 0$

II. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $2x - 2 + \frac{\ln x}{x}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2. Déterminer les branches infinies de la courbe (C_f)
3. Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{1}{x^2} g(x)$
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f
5. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$
6. Déterminer le point d'inflexion de la courbe (C_f)
7. Construire la courbe (C_f)

(On prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$, $e^{\frac{3}{2}} \approx 4,5$ et $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \approx 7,3$)

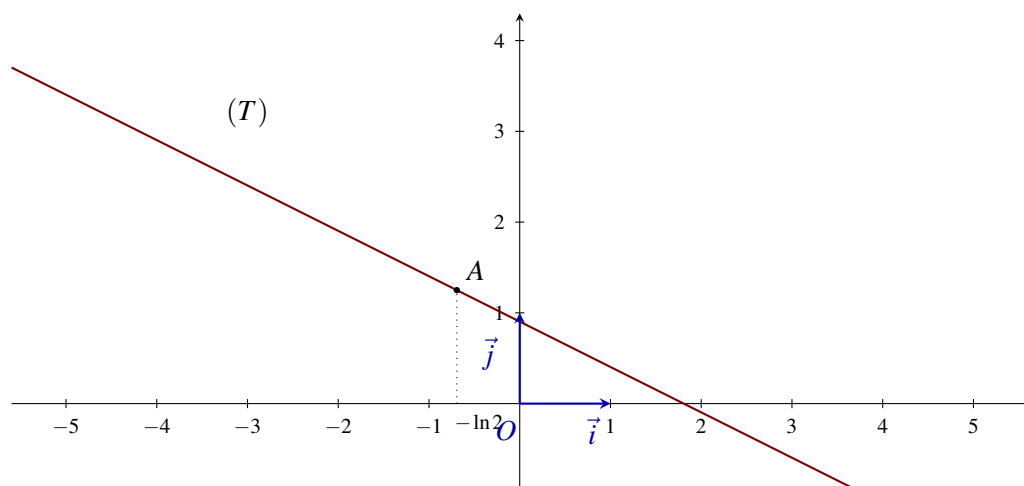
Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- 1 (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
- 2 (a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$.
(b) Dresser le tableau de variation de f .
- 3 (a) Montrer que pour tout réel x , $f''(x) = 2e^x(2e^x - 1)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de f .
(b) En déduire que le point $A\left(-\ln 2, \frac{5}{4}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.
- 4 On a tracé dans **la figure 2** de l'annexe ci-jointe la tangente T à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A .
(a) Vérifier que le point $B(\ln 2, 2)$ appartient à la courbe $(\mathcal{C})$ et le construire dans **figure 2**.
(b) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 5 Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. Montrer que $\mathcal{A} = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}$.
- 6 Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.
(a) Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.
(b) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $g^{-1}(x) = \ln(1 + \sqrt{x - 1})$.

- © Construire, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(\mathcal{C}')$ de la fonction réciproque g^{-1} de g .
- ④ En exploitant le graphique, calculer $\int_1^2 \ln(1 + \sqrt{x-1}) dx$.

Figure 2:



Problème 18

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2-x)e^x$ et on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . Unité 1 cm.

- 1) Calculer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.
- 3) a- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (1-x)e^x$.
b- Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f .
c- Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les axes (OI) et (OJ) .
- 5) Construire (C_f) . On prendra $e \approx 2,7$.

Problème 19

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + 2 + e^{-x}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité 1 cm).

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Justifier que pour tout nombre réel x , $f'(x) = -\frac{(e^x + 1)}{e^x}$.
b) Etudier les variations de f , puis dresser son tableau de variation.
c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[2 ; 3]$ une solution unique α .
d) Déterminer un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
3. a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.
b) Préciser la position relative de (C) par rapport à la droite (Δ) .
c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
4. Tracer les droites (Δ) ; (T) et la courbe (C) .

Problème 20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + e^{-x}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité 2 cm).

- 1 Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Justifier que pour tout nombre réel x , $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x}$.
b) Etudier les variations de f , puis dresser son tableau de variation.
3. a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.
b) Préciser la position relative de (C) par rapport à la droite (Δ) .
c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
4. Tracer les droites (Δ) ; (T) et la courbe (C) .

Exercice 21

I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(1 - x) + 1$.

- ① Étudier le sens de variation de g .
- ② Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1.27, 1.28]$ on note α cette solution.
- ③ Déterminer le signe de $g(x)$.

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- ① Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter.
- ②

a

 Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b

 Montrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à C .

c

 Étudier la position de C par rapport à D .
- ③

a

 Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g .

b

 Dresser le tableau de variations de f .
- ④ Tracer la courbe C ainsi que ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α .

III. Pour tout entier naturel n , tel que $n \geq 2$, on note D_n l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient $2 \leq x \leq n$ et $2 \leq y \leq f(x)$ et on appelle A_n son aire, exprimée en unités d'aire.

- ① Faire apparaître D_5 sur la figure.
- ② Montrer que pour tout réel $x \geq 2$, $\frac{7}{8}xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x + 1} \leq xe^{-x}$.
- ③ On pose $I_n = \int_2^n xe^{-x} dx$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n .
- ④ Écrire un encadrement de A_n en fonction de I_n .
- ⑤ Montrer que la suite (A_n) est croissante et majorée.
Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Problème 22 (11 points) :

I) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - (x^2 + 1)e^{-x}.$$

- 1) Montrer que $g'(x) = (x-1)^2 e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$**
- 2) Vérifier que : $g(0) = 0$ puis en déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $] -\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.**

II) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}.$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.**
b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$
 - c) Montrer que la courbe (C) est au-dessus de droite (D) sur $\mathbb{R}$**
 - 2) a) Vérifier que $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.**
b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.
 - 3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.**
b) En déduire que la fonction f est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
 - 4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$**
a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2; 3[$ (On prend : $f(2) \simeq 2.4$ et $f(3) \simeq 2.8$)
b) Montrer que (C) est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $] -\infty; \alpha]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$
 - 5) Construire (D); (Δ) et (C) dans le même repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$.**
 - 6) a) Montrer que la fonction $x \rightarrow (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow -x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-3}{e}$**
b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$
c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
- III) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.**
- 1) Montrer que $2 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$.**
 - 2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.**
(On pourra utiliser le résultat de la question II) 4. b))
 - 3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite**

Exercice 23

1^{ère} partie:

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = xe^x + e^x - 1$.

- ❶ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.
- ❷ Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction h .
- ❸ Calculer $h(0)$, puis déduire le signe de la fonction h .

2^{ème} partie:

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - x + 1$.

- ❶ Montrer que : $g'(x) = h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ❷ Étudier les variations de la fonction g .
- ❸ Calculer $g(0)$, puis déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) > 0$.
- ❹ a - Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) - e^x = (x-1)(e^x - 1)$
b - Déduire que $(\forall x \in [0; 1]) : g(x) \leq e^x$.

3^{ème} partie:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(xe^x - x + 1)$.

- ❶ a - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
b - Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$. puis dresser le tableau de variation de f
- ❷ a - Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(xe^x - x + 1)}{xe^x - x + 1} \left(e^x - 1 + \frac{1}{x} \right)$.
b - Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- ❸ a - Vérifier que $(\forall x \in]0; +\infty[) : f(x) = x + \ln x + \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x} \right)$.
b - Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
- ❹ Calculer $f(1)$ puis tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

4^{ème} partie:

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = \ln 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

- ❶ Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq U_n \leq 1$.
- ❷ Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
- ❸ En déduire que la suite (U_n) est convergente puis calculer sa limite.

Problème 24 : (8pts)

Partie A : Etude d'une famille des fonctions

Soit n un entier naturel non nul ; (C_n) est la courbe de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$

par : $f_n(x) = (1 - 2e^{-x})^n$.

1. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.
2. Suivant la parité de n ; calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$.
3. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$; la dérivée f'_n de f_n est : $f'_n(x) = 2ne^{-x}(1 - 2e^{-x})^{n-1}$.
b) Suivant la parité de n , dresser le tableau de variation de f_n .
4. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; et $x \in \mathbb{R}$; $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -2e^{-x}f_n(x)$.
b) En déduire que toutes les courbes (C_n) passent par un point commun dont on déterminera les coordonnées .
5. Etudier la position relative des courbes (C_1) et (C_2) .
6. Reproduire les tableaux de variations de f_1 et f_2 .
7. Construire les courbes (C_1) et (C_2) dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
8. Calculer l'aire du domaine du plan ; limité par les courbes (C_1) et (C_2) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \ln(2)$.

Partie B : Calcul de probabilité

Un enfant s'exerce à tirer sur une cible située à la distance x (x en mètre et $x \geq 1$) . La probabilité qu'il atteigne la cible est $p = 2e^{-x}$. L'enfant tire n fois vers la cible de façons identiques et Indépendantes .

On note : A_k l'événement : « **l'enfant atteint exactement k fois la cible** » . ($k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$)

1. Justifier que : la probabilité qu'il rate la cible est : $q = 1 - 2e^{-x}$.
2. a) Montrer que $p_k = p(A_k) = C_n^k p^k \times q^{n-k}$.
b) Justifier que $\sum_{k=0}^n p_k = p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.
c) En déduire que la probabilité de l'événement B_n : « **l'enfant atteint la cible au moins une fois** » est : $p_n = p(B_n) = 1 - f_n(x)$ où f_n est la fonction définie dans la partie A et $x \geq 1$.
3. Sachant que l'enfant se situe à 2m de la cible, déterminer le nombre minimal de tirs qu'il doit effectuer pour que la probabilité d'atteindre au moins une fois la cible dépasse 0,999.

Exercice 25

A/ Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = xe^x - e^x + 1$.

- ① a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $h(x) = \int_0^x te^t dt$.
b) Montrer alors que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\frac{1}{2}x^2 \leq h(x) \leq \frac{1}{2}x^2 e^x$.
c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x^2}$.
- ② Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = e^{\sqrt{x}} - (e+1)\sqrt{x}$. On désigne par (ξ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- [a] Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} \frac{h(\sqrt{x})}{x} - \frac{e}{\sqrt{x}}$.
- [b] Montrer alors que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- [c] Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- ③ [a] Dresser le tableau de variation de f .
- [b] Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β . Vérifier que $0 < \alpha < 1 < (\ln^2(e+1)) < \beta$.
- [c] On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$, $u(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$. Montrer que : $f(x) = 0 \iff u(x) = e + 1$.
- ④ Soit A l'aire de la partie du plan limitée par (ξ_f) et l'axe des abscisses.
- [a] Montrer que $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\sqrt{t}} dt = 2 \left(e^{\sqrt{\beta}}(\sqrt{\beta}-1) - e^{\sqrt{\alpha}}(\sqrt{\alpha}-1) \right)$.
- [b] En déduire la valeur de A .

B/ On donne ci-dessous, le tableau de variation de la fonction f_n pour tout n de $\mathbb{N}^*$ définie par : $f_n(x) = e^{\sqrt{x}} - \left(e + \frac{1}{n} \right) \sqrt{x}$.

- ① [a] Montrer que $f_n \left[\ln^2 \left(e + \frac{1}{n} \right) \right] < 0$.
- [b] Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_n et β_n . Vérifier que $0 < \alpha_n < 1 < \left(\ln^2 \left(e + \frac{1}{n} \right) \right) < \beta_n$.
- ② [a] Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$ et que $f_{n+1}(\beta_n) > 0$.
- [b] En déduire que la suite (α_n) est strictement croissante et que la suite (β_n) est strictement décroissante.
- [c] Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont convergentes.
- ③ [a] Montrer que les restrictions u_1 et u_2 de u respectivement à $I_1 =]0, 1]$ et $I_2 = [1, +\infty[$ réalisent des bijections de I_1 et I_2 sur des intervalles que l'on déterminera.
- [b] Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_1(\alpha_n) = e + \frac{1}{n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.
- [c] Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_2^{-1} \circ u_1(\alpha_n) = \beta_n$. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$.

Exercice 26

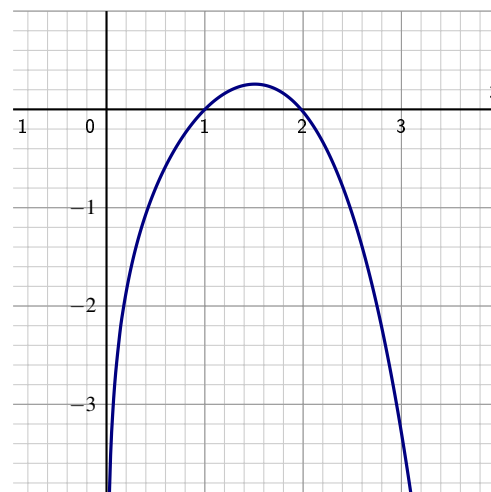
Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$

- 1) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$, puis déterminer la monotonie de g
- 2) Calculer $g(1)$, en déduire que $\forall x \in]0; 1]: g(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1; +\infty[: g(x) \geq 0$

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{x-1} - \ln(x)$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, puis interpréter le résultat géométriquement
- 2) a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- b- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat géométriquement

- 3) a- Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[f'(x) = g(x)$
 b- Dresser le tableau des variations de f
 c- Etudier la concavité de (C_f)
- 4) Construire (C_f) (on prend : $f(2) = 2$)
- 5) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation : $e^x = e \ln(xe^2)$
- 6) a- En utilisant une intégration par partie, Montrer que : $\int_1^2 \ln(x) dx = \ln(4) - 1$
 b- Calculer l'aire du domaine délimité par (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$
- 7) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]0; 1]$
 a- Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera
 b- Construire $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
 c- Calculer $(h^{-1})'(2)$
- 8) On considère t la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $t(x) = x - f(x)$
 à partir de la courbe ci-contre de la fonction t
 montrer que $\forall x \in [1, 2] f(x) \leq x$
- 9) Soit (u_n) une suite numériques définie comme
 par :
 $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$
 a- Montrer par récurrence que
 $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 2$
 b- Montrer que (u_n) est décroissante
 c- Dédire que (u_n) est convergente
 d- Calculer la limite de la suite (u_n)



Exercice 27

A/ Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(1 + \ln^2(x))x}$. On désigne par C_f la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

① a Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\left(\frac{1 + \ln x}{(1 + \ln^2(x))x}\right)^2$.

b Dresser le tableau de variation de f .

c Montrer que C_f coupe la droite $\Delta : y = x$ en un seul point à préciser. (On admet que ce point est un point d'inflexion de C_f .)

d Tracer C_f .

② a Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque de f .

③ Soit g la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = e^{\tan x}$.

a Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur $]0, +\infty[$.

b Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer $h'(x)$ en fonction de x .

c Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par C_f , $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$, $x = \frac{e}{2}$ et $y = 0$.

II/ On pose $I_0 = \int_1^e f(x) dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^e f(x)(\ln x)^{2n} dx$.

① a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2(2n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$.

b Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

② a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$.

b Montrer que la suite (I_n) est décroissante puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

③ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$.

a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n I_n - \frac{\pi}{4}$.

b Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 28

6.5 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}$.

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 ① Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

② Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2 ① Montrer que $f'(x) = \frac{3e^x}{(e^x + 1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

② Dresser le Tableau de variation de f

③ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α .
Vérifier que $-1 < \alpha < \frac{-1}{2}$.

④ Vérifier que $\alpha = -\ln(2)$.

3 Tracer $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4 ① Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

② Construire $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ la courbe de f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5 ① Vérifier que $f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 1} - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

② Vérifier que $F(x) = 3 \ln(e^x + 1) - x$ est une primitive de f .

6 Soit λ un réel strictement inférieur à -1 .

On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = -1$ et $x = \lambda$.

- Ⓐ Montrer que $A(\lambda) = 3\ln(e^\lambda + 1) - \lambda - 3\ln(1 + \frac{1}{e}) - 1$.
- Ⓑ Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.

Problème 29

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - (x^2 + 1)e^{-x}$$

- 1) Montrer que $g'(x) = (x-1)^2 e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
- 2) Vérifier que $g(0) = 0$ puis en déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- 1)
 - a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 - b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.
 - c) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessus de la droite (D) sur $\mathbb{R}$.
- 2)
 - a) Vérifier que $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.
- 3)
 - a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
 - b) En déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.
 - c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$.
 - a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2; 3[$. (On prend : $f(2) \approx 2,4$ et $f(3) \approx 2,8$).
 - b) Montrer que $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.
- 5) Construire (D) , (Δ) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 6)
 - a) Montrer que la fonction $x \mapsto -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto -x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$.
 - b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$.
 - c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C})$ et (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie III

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- 2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- 3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Problème 30 (08 points)

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = -4 + 2x(1 + \ln x)$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. (On donne $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$).
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $]0, +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$ telle que $1,4 < \alpha < 1,5$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = (-4 + 2x) \ln x$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. **a-** Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.
b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. **a-** Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
b- En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
3. Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.
4. Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
5. Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = (x^2 - 4x) \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 4x$$

- a-** Vérifier que F est une fonction primitive de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- b-** Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Problème 31

PARTIE A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm

1. Étudier la dérivabilité de f en 0 ; que peut-on en conclure pour la courbe $(\mathcal{C})$?
2. Montrer que pour $x > 0$; $f'(x) = \left(\frac{1-2x}{2x}\right) \times f(x)$. En déduire le sens de variations de f .
3. Étudier la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en conclure pour la courbe $(\mathcal{C})$ de f ?
4. Tracer soigneusement la courbe $(\mathcal{C})$.
5. On considère le domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ où λ est un réel positif.
 - a. Calculer le volume $\mathcal{V}(\lambda)$ en cm^3 du solide de révolution engendré par rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses.

- b. Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(\lambda)$

PARTIE B

Le but de cette partie est la résolution de l'équation $f(x) = x$ sur $]0; +\infty[$

1. On pose $g(x) = \ln x + 2x$
 - a. Montrer que sur $]0; +\infty[$, les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes.
 - b. Étudier les variations de g et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution sur $]0; +\infty[$ que l'on notera α .
 - c. Montrer que α appartient à l'intervalle $[0,4; 0,5]$.
2. En utilisant la courbe $(\mathcal{C})$ donner une interprétation de α
3.
 - a. Montrer que si $x \in [0,4; 0,5]$ on a $f(x) \in [0,4; 0,5]$.
 - b. Montrer que pour $x \in [0,4; 0,5]$, on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{8}$
4. On définit la suite (U_n) par $U_0 = 0,4$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$
 - a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n \in [0,4; 0,5]$.
 - b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{8}|U_n - \alpha|$
 - c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq 0,1 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$
 - d. En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.
5. A partir de quelle valeur n_0 de n est-on sûr que U_n représente une valeur approchée de α à 10^{-5} près?

PARTIE C

Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x \sqrt{t} \cdot e^{-t} dt$

On ne cherchera pas à calculer F .

1. Calculer $F'(x)$ pour tout $x \geq 0$. En déduire le sens de variation de F .
2.
 - a. Montrer que pour $t \geq 0$ on a : $\sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$
 - b. En déduire que $F(x) \leq \int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-t} dt$
 - c. Calculer $\int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-t} dt$
 - d. En déduire que $F(x) \leq \frac{5}{4}$

Exercice 32

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}$.

1. a) Etudier le signe de f'_n . En déduire le tableau de variation de f_n . On notera en particulier que f_n admet un maximum strictement positif que l'on calculera.
b) Montrer que la courbe C_n représentant f_n admet une asymptote dont on précisera l'équation. Tracer C_2 .
c) Démontrer que sur l'intervalle $] -\infty, 0[$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet une racine unique que l'on notera x_n .

On se propose dans la suite de montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ admet une limite l et de calculer l .

2. On considère la fonction φ définie sur $]1, +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.
a) Déterminer le signe de φ' . En déduire le signe de φ .
b) Montrer que $\varphi(n) < 0$ puis que $f_n(-2) < 0$. Déduire que $x_n > -2$.
3. a) Etablir l'égalité $f_n\left(2n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = \frac{2n}{n+1} \left[\frac{2n+1}{2n(n+1)} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \right]$
b) On considère la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = \frac{2x+1}{2x(x+1)} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.
Etudier le signe de h' . En déduire le signe de h , puis celui de $f_n\left(2n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$.
c) Montrer que $x_n < 2n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.
4. a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.
b) En déduire l'existence et la valeur de l .

Exercice 33

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 1cm).

① – Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.

② – a – Vérifier que pour tout x de $[0, +\infty[$ $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$.

b – En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c – Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$, $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$, puis en

déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

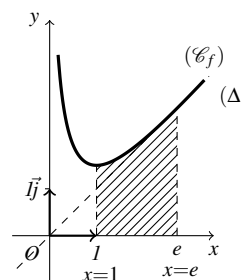
d – Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet au voisinage $+\infty$ de une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$.

③ – a – Montrer que pour tout x de $[0, 1]$: $(x-1) + \ln x \leq 0$,

et que pour tout x de $[1, +\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$.

b – Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$

c – Dresser le tableau de variations de la fonction f .



④ – **a** – Montrer que : $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$ pour tout x de $[0, +\infty]$.

b – En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

⑤ – **a** – Montrer que pour tout x de $[0, +\infty]$: $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ et en déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ) .

b – Tracer la droite (Δ) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

⑥ – **a** – Montrer que la fonction $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $[0, +\infty]$.

b – A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_0^c (\ln x)^2 dx = e - 2$.

c – Calculer en cm^2 , la surface de la partie comprise entre la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ) et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 34

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

On note ξ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A :

1. **a/** En appliquant les inégalités des accroissements finis, montrer que pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{1+x} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$

b/ Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0.

c/ Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 3x^2 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)} \right].$$

d/ Dresser le tableau de variation de f .

2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

a/ Vérifier que pour tout $x > 0$, $g'(x) = 2x^3 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)} \right]$.

b/ Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$.

3. Montrer que f admet une bijection réciproque h et tracer ξ .

Partie B :

On considère pour tout $n \geq 0$ la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in]0, \alpha[. \\ u_{n+1} = h(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < u_n < \alpha$.

2. **a/** Montrer que $g(]0, \alpha[) =]0, 1[$.

b/ En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante.

c/ Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie C:

On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction F par : $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$.

1. **a/** Etudier le signe de $F(x)$ pour tout $x \geq 0$.

b/ Déterminer le sens de variation de F .

c/ Montrer que pour tout $x \geq 1$, $F(x) \leq (1-x)\ln 2$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

2. a/ Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int_x^1 \frac{t^3}{1+t} dt$.

b/ En déduire que pour tout $x > 0$, $F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

3. Calculer l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan délimitée par ξ , l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives : $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 35 (6 points)

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

et soit C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

(b) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$.

Dresser le tableau de variation de f .

(c) Montrer que le point $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de C .

(d) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à C au point I .

2. (a) Montrer que pour tout réel t on a : $f'(t) \leq \frac{1}{2}$.

(b) En intégrant les deux membres de l'inégalité précédente, montrer que pour $x \geq 0$ on a : $f(x) \leq \frac{1}{2}(x+1)$.

(c) Déterminer alors la position de C par rapport à (T) .

3. Tracer (T) et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (annexe 1) de la page 4.

4. (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

(b) Exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x .

(c) Construire, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C') de f^{-1} .

5. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, en u.a, de la partie (E) du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

Montrer que $\mathcal{A} = 1 + \ln \sqrt{\left(\frac{2}{e^2 + 1}\right)}$

II. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$I_n = \int_{-1}^0 \frac{e^{2nt}}{1 + e^{2t}} dt.$$

1. Calculer $I_0 + I_1$. Déduire (I_0) .

2. (a) Montrer que (I_n) est décroissante et positive.

(b) En déduire que (I_n) est convergente.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a : $I_n \leq \frac{1}{2n}$.

4. Trouver la limite de la suite (I_n) .

Problème 36

Dans tout le problème on admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout entier naturel n .

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1. a) Calculer la limite de g en $+\infty$.
b) Vérifier que $g(x) = 1 - (1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})x^2 e^{-x}$ pour tout nombre réel $x \neq 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.
2. On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Calculer la dérivée g' de g et vérifier que $g'(x) = (x - 2)^2 e^{-x}$.
b) En déduire le signe de $g'(x)$.
3. Etablir le tableau de variation de g .
4. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.
b) On désigne par α cette solution.

Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α .

5. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall x \in]-\infty; \alpha[; g(x) < 0 \text{ et } \forall x \in]\alpha; +\infty[; g(x) > 0$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$.

1. a) Vérifier que $f(x) = x \left[1 - \frac{1}{x} + (x + \frac{2}{x})e^{-x} \right]$ pour tout réel $x \neq 0$.
En déduire la limite de f en $-\infty$.
b) Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = g(x)$ pour tout x réel.
3. En déduire, à l'aide de la partie A, les variations de f et donner son tableau de variation.
4. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$.
5. a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
b) Préciser la position de (C) par rapport à (Δ) .
6. Donner une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0.
7. Tracer (Δ) , (T) puis (C) .

Problème 37 (11 points)

Les deux parties I et II sont indépendantes .

Partie I (2,25 points)

Soit g la fonction numérique définie sur $] -1, +\infty[$ par :
$$g(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} + xe^{x-2}$$

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$. (0,5 pt)
- b) Montrer que pour tout $x \in] -1, +\infty[$: $g'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2} + (x+1)e^{x-2}$. (0,5 pt)
- 2) Vérifier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g . (0,75 pt)
- 3) On donne $g(0) = 0$. Déterminer le signe de la fonction g sur $] -1, +\infty[$. (0,5 pt)

Partie II (6 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $] -1, +\infty[$ par :
$$f(x) = x \ln(x+1) + (x-1)e^{x-2} + e^{-2}$$

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. (1 pt)
- b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat . (1 pt)
- c) Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de f . (0,5 pt)
- 2) a) Montrer que pour tout $x \in] -1, +\infty[$: $f(x) - x = x(\ln(x+1) - 1) + (x-1)e^{x-2} + e^{-2}$. (0,25 pt)
- b) En déduire que $f(x) \leq x$ pour tout $x \in]0, 1[$. (0,75 pt)
- c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$. (0,75 pt)
- 3) a) Montrer que pour tout $x \in] -1, +\infty[$: $f'(x) = g(x)$. (0,75 pt)
- b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $] -1, +\infty[$. (0,5 pt)
- 4) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (1 pt)
- 5) a) Vérifier que F est une primitive de f , sachant que :
$$F(x) = \frac{x^2-1}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + (x-2)e^{x-2} + xe^{-2}$$
. (0,75 pt)
- b) Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est :
$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} - \frac{1}{e} + \frac{3}{e^2}$$
. (0,75 pt)

Partie III (2,75 points)

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 \in]0, 1[$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ ($n \in \mathbb{N}$).

- 1) Montrer par récurrence que : $0 < U_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (0,75 pt)
- 2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante . (0,75 pt)
- 3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite . (1,25 pt)

Problème 38

I. Soit g_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x.$$

1. Étudier les variations de g_n . Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.

2. a. En déduire l'existence d'un réel positif a_n unique tel que $g_n(a_n) = 0$.

b. Montrer que : $1 < a_n < e^2$.

c. Montrer que : $\ln(a_n) = 2 - \frac{2}{n} a_n$.

Exprimer $g_{n+1}(a_n)$ en fonction de a_n et de n . En déduire que $a_{n+1} > a_n$.

3. a. Montrer que la suite de terme général a_n est convergente. On note ℓ sa limite.

b. En utilisant 2.c., calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a_n)$ et en déduire ℓ .

c. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

II. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

On appelle $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f et $\mathcal{C}_0$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$. Vérifier que $f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.

3. Dresser le tableau de variations de f .

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \sqrt{x}]$. Que peut-on déduire pour $\mathcal{C}$?

5. Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$.

6. Dessiner $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$.

III. Étude de la suite (U_n) définie par :

$$U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

1. Soit $J = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}} dx$.

a. Calculer $J = \int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b. En déduire J .

2. Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$.

En utilisant les variations de f sur $[1; +\infty[$, montrer que

:

$$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_1^{1+\frac{k}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right).$$

3. En déduire que :

$$\frac{f(2)}{n} < J < U_n < \frac{f(1)}{n}.$$

$$\text{Puis : } \frac{f(1)}{n} \leq U_n < J + \frac{f(2)}{n}.$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

Problème 39 (10 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$.

1) Étudier le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$ puis en déduire le tableau de variation de g .

2-a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$ et que $1,14 < \alpha < 1,15$. b) En déduire le signe de g suivant la valeur de x .

Partie B : 1-a) Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

2-a) Montrer que $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$, $\forall x \in [0; +\infty[$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) Montrer que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$.

4) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question (A-2), donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} .

5) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

6-a) Établir que $\forall x \in [0; +\infty[$, $f(x) = x + \frac{(x+1)U(x)}{xe^x + 1}$ avec $U(x) = e^x - xe^x - 1$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction U sur $[0; +\infty[$. En déduire le signe de $U(x)$. c) Déduire des résultats précédents la position relative de (C_f) par rapport à (T).

d) Représenter graphiquement (C_f) et la tangente (T).

Partie C : 1-a) Déterminer une primitive F de f sur $[0; +\infty[$.

On pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans la question (B-2).

2) On note (D) le domaine délimité par (C_f) , (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Calculer, en cm^2 l'aire A du domaine (D).

3) Pour tout entier $n \geq 0$, pose : $V_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

a) Calculer V_0 , V_1 et V_2 . b) Interpréter graphiquement V_n .

c) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$.

En déduire que $V_{n+1} \leq V_n$; étudier la monotonie de la suite (V_n) .

d) Déterminer la limite de la suite (V_n) .

On donne : $e \approx 2,72$; $e^{1,14} \approx 3,12$; $e^{1,15} \approx 3,16$.

Bonus : On marque n points sur un cercle ($n \geq 3$). On en choisit 2 au hasard. a) Quelle est la probabilité pour qu'ils soient consécutifs.

b) Même question lorsque les n points sont sur une droite.

« Bonne chance »

Exercice 40

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

PARTIE A

Etude de f et construction de (C_f)

- 1°) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
- 2°) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$ et préciser la position de (C_f) par rapport à (Δ) .
- 3°) a) Calculer la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' de f .
b) Etudier les variations de f' et dresser son tableau de variations.
c) Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x .
d) Dresser le tableau de variation de f .
- 4°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que $1,9 \leq \alpha \leq 2$ et $-0,6 \leq \beta \leq -0,5$.
- 5°) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$ puis tracer (Δ) et (C_f)

PARTIE B (Recherche d'une approximation de α)

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

- 1°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$ sur $]0; +\infty[$
- 2°) Etudier les variations de g
- 3°) Soit $I = [1,9; 2]$.

- a) Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$
- b) Montrer que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$
- 4°) Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n \in I$.
b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_n - \alpha|$, puis, que
 $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$
c) En déduire que la suite (U_n) converge et préciser sa limite.

PARTIE C (Calcul d'aire)

- 1°) En intégrant par parties, Calculer $J = \int_1^\alpha xe^{x-1} dx$
- 2°) a) Calculer en unité d'aire (ua), l'aire A de la portion du plan limitée par la courbe (C_f) ,
l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$
b) Montrer que $A = (\alpha - 1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)$

On donne $e \approx 2,72$; $e^{0,9} \approx 2,46$; $e^{-1,5} \approx 0,22$; $e^{-1,6} \approx 0,20$; $\ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0,92$ et $\ln\left(\frac{48}{19}\right) \approx 0,93$.

Problème 41 D'ANALYSE (FONCTIONS NUMÉRIQUES)

A) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$g(x) = 1 + x \ln x$$

1) Montrer que la fonction g est décroissante et l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ et croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; +\infty]$

3) En déduire que: $\forall x \in [0; +\infty[; g(x) > 0$

B) Soit f la fonction numérique définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+x \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) Est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm

1) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0

2) Montrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ puis interpréter le résultat géométriquement

3) a) Montrer que f est dérivable à droite de 0 puis en déduire que (C) admet une demi-tangente (T) d'équation $y = x$ au point 0

b) Montrer que la courbe (C) est au-dessus de (T) sur $[0; 1]$ et au-dessous de (T) sur l'intervalle $[1; +\infty]$

4) a) Montrer que : $(\forall x \in [0, +\infty[; f'(x) = \frac{1-x}{(1+x \ln x)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty]$ en justifiant votre réponse

5) Tracer (T) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

6) Déterminer graphiquement le nombre des solutions de l'équation

$$(E): 1 - 2x + x \ln x = 0, \text{ en justifiant votre réponse}$$

7) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[1; +\infty]$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b) Tracer (CH^{-1}) la courbe de h^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

8) Soit A l'aire en cm^2 du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

a) justifier que $(\forall x \in [0, +\infty]): f(x) \leq 1$

b) Montrer que $(\forall x \in [1, e]): 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$