

Nombres complexes – Forme trigonométrique d'un complexe

Exercices corrigés

Sont abordés dans cette fiche :

- **Exercice 1** : affixe d'un point, représentation d'un point-image dans le plan complexe, argument d'un complexe par lecture graphique
- **Exercice 2** : module et argument d'un complexe, transformation d'une forme algébrique en forme trigonométrique
- **Exercice 3** : reconnaissance d'une forme trigonométrique, propriétés des arguments
- **Exercice 4** : puissance d'un complexe, formule de Moivre, module et argument d'un produit
- **Exercice 5** : valeur exacte d'un angle orienté, partie réelle et partie imaginaire d'un complexe
- **Exercice 6** : résolution d'une équation de degré 2 à une inconnue dans l'ensemble des complexes
- **Exercice 7** : résolution d'une équation de degré 4 à une inconnue dans $\mathbb{C}$
- **Exercice 8** : détermination d'un lieu géométrique / caractérisation d'un ensemble de points (droite, demi-droite, cercle, demi-cercle...)

Remarque préliminaire :

Un nombre complexe peut généralement être présenté sous trois formes (algébrique, trigonométrique et exponentielle). Une forme trigonométrique sert essentiellement en géométrie aux calculs de distances et d'angles et s'avère très efficace pour le produit ou le quotient de complexes, le calcul de puissances...

1- Placer, dans le plan complexe, les points A, B, C, D, E, F, G et H d'affixes respectifs :

$$z_A = 3$$

$$z_C = 2i$$

$$z_E = 1 + i$$

$$z_G = 3 - 3i$$

$$z_B = -2$$

$$z_D = -3i$$

$$z_F = 1 - i$$

$$z_H = -2 - 2i$$

2- Préciser, sans calcul mais à l'aide de considérations géométriques ou par simple lecture graphique, un argument de chacun des nombres complexes $z_A, z_B, z_C, z_D, z_E, z_F, z_G$ et z_H .

Correction de l'exercice 1

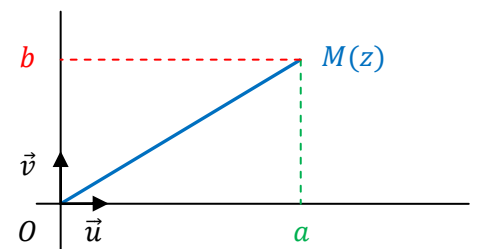
1- Plaçons, dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, les points A, B, C, D, E, F, G et H .

Rappel : Point-image d'un complexe et affixe d'un point

Soit $(O; \vec{u}; \vec{v})$ un repère orthonormal du plan.

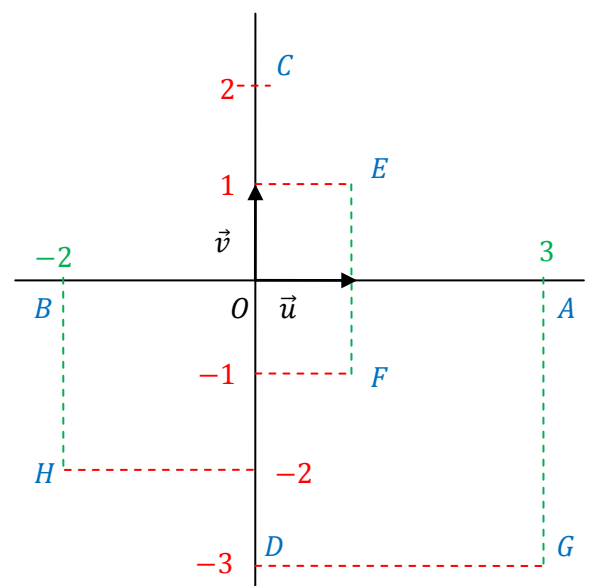
A tout nombre complexe $z = a + bi$ (avec a et b réels), on peut associer l'unique point M de coordonnées cartésiennes $(a; b)$.

On dit alors que M est le **POINT-IMAGE** de z et que z est l'**AFFIXE** du point M .



L'axe $(O; \vec{u})$ est appelé **AXE DES RÉELS** et l'axe $(O; \vec{v})$ est appelé **AXE DES IMAGINAIRES PURS**. Le plan est quant à lui appelé **PLAN COMPLEXE**.

- $z_A = 3 = 3 + 0i$
 A , de coordonnées $(3; 0)$, est donc le point-image de z_A .
- $z_B = -2 = -2 + 0i$
 B , de coordonnées $(-2; 0)$, est donc le point-image de z_B .
- $z_C = 2i = 0 + 2i$
 C , de coordonnées $(0; 2)$, est donc le point-image de z_C .
- $z_D = -3i = 0 + (-3)i$
 D , de coordonnées $(0; -3)$, est donc le point-image de z_D .
- $z_E = 1 + i = 1 + 1i$
 E , de coordonnées $(1; 1)$, est donc le point-image de z_E .
- $z_F = 1 - i = 1 + (-1)i$
 F , de coordonnées $(1; -1)$, est donc le point-image de z_F .



- $z_G = 3 - 3i = 3 + (-3)i$

G , de coordonnées $(3 ; -3)$, est donc le point-image de z_G .

- $z_H = -2 - 2i = -2 + (-2)i$

H , de coordonnées $(-2 ; -2)$, est donc le point-image de z_H .

2- Précisons un argument de chacun des nombres complexes $z_A, z_B, z_C, z_D, z_E, z_F, z_G$ et z_H .

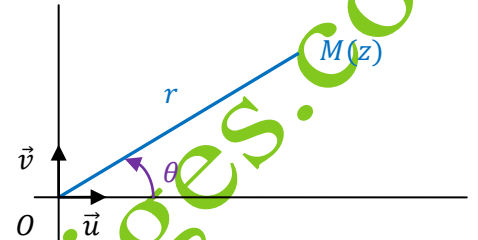
Rappel : Forme trigonométrique d'un complexe, argument et module

Soit $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ un repère orthonormal direct du plan complexe.

Tout point $M(z)$ du plan complexe, distinct de O , possède aussi des

COORDONNÉES POLAIRES $(r ; \theta)$ avec $\begin{cases} r = OM \\ \theta = (\vec{u} ; \overrightarrow{OM}) \end{cases}$.

- Le **MODULE** de z est le nombre réel positif (non nul), noté r , tel que $r = OM$.
- Un **ARGUMENT** de z , noté $\arg(z)$, est une mesure exprimée en radians de l'angle orienté $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$.
- L'écriture $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est appelée **FORME TRIGONOMÉTRIQUE** du complexe z .



- $\arg(z_A) = (\vec{u} ; \overrightarrow{OA}) = 0 \pmod{2\pi}$

En effet, les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OA}$ ont même direction et même sens.

Remarque : On peut aussi remarquer que, comme A est sur l'axe des réels positifs, $\arg(z_A) = 0 \pmod{2\pi}$.

- $\arg(z_B) = (\vec{u} ; \overrightarrow{OB}) = \pi \pmod{2\pi}$

En effet, les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont même direction mais sont de sens contraire.

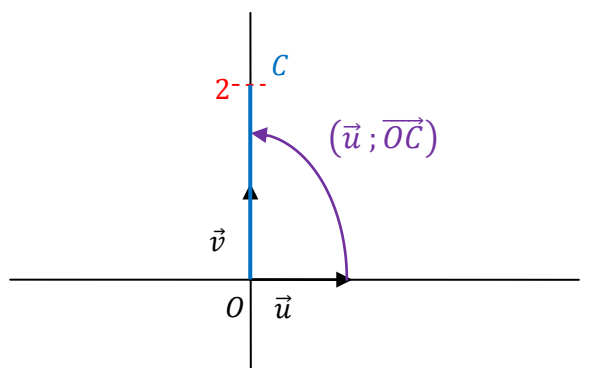
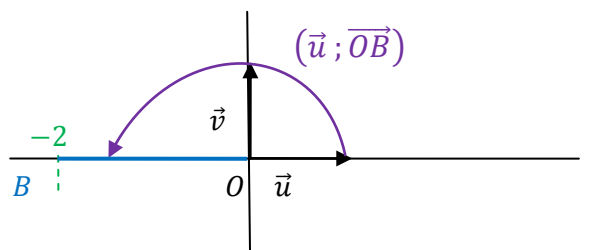
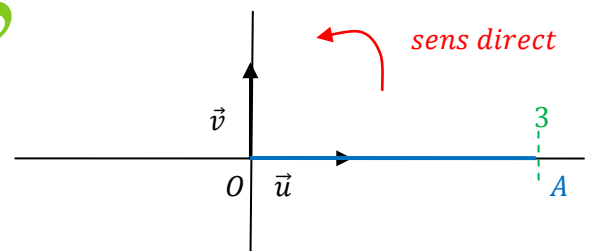
Remarque : On peut aussi remarquer que, comme B est sur l'axe des réels négatifs, $\arg(z_B) = \pi \pmod{2\pi}$.

- $\arg(z_C) = (\vec{u} ; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

En effet, d'une part $(\vec{u} ; \overrightarrow{OC}) = (\vec{u} ; \vec{v})$ et, d'autre part, le repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ est orthonormal direct.

Rappel : $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ est orthonormal direct signifie que :
 $(\vec{u} ; \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$

Remarque : On peut aussi remarquer que, comme C est sur l'axe des imaginaires purs de partie imaginaire positive, $\arg(z_C) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.



- $\arg(z_D) = (\vec{u}; \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$
 car $(\vec{u}; \overrightarrow{OD}) = (\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi = \frac{\pi}{2} + \pi \pmod{2\pi}$
 $= \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi} = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

Remarque : On peut aussi remarquer que, comme D est sur l'axe des imaginaires purs de partie imaginaire négative, $\arg(z_D) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

- $\arg(z_E) = (\vec{u}; \overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$

En effet, la demi-droite $[OE)$ est la bissectrice de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$.

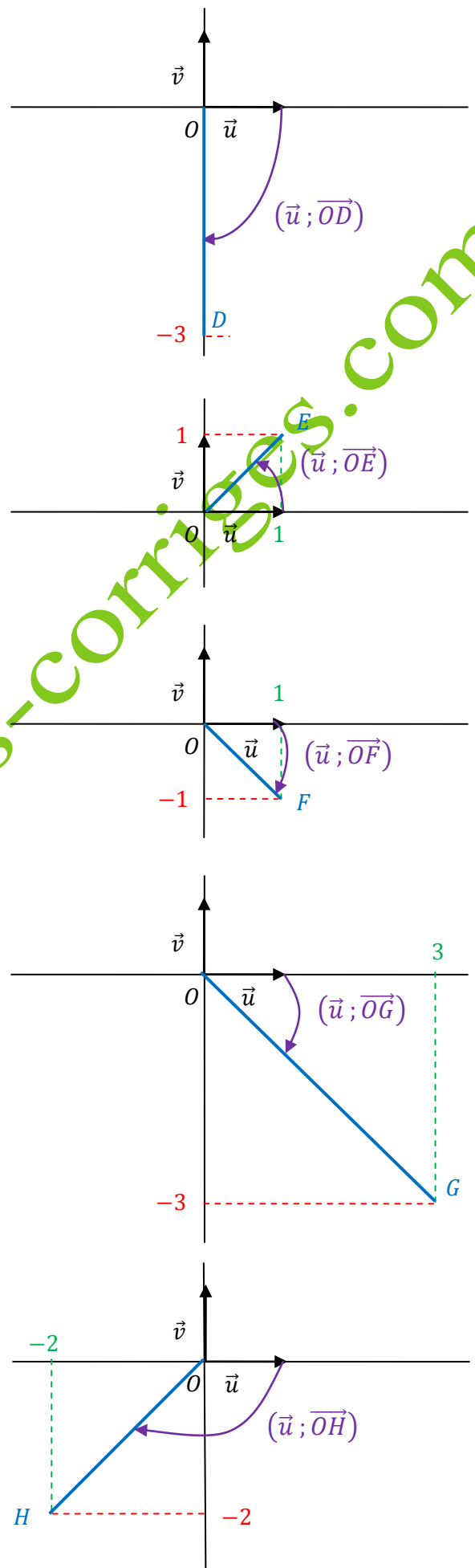
- $\arg(z_F) = (\vec{u}; \overrightarrow{OF}) = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$

En effet, la demi-droite $[OF)$ est la bissectrice de l'angle $(\vec{u}; -\vec{v})$.

- $\arg(z_G) = (\vec{u}; \overrightarrow{OG}) = (\vec{u}; \overrightarrow{OF}) = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$

- $\arg(z_H) = (\vec{u}; \overrightarrow{OH}) = -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$

En effet, la demi-droite $[OH)$ est la bissectrice de l'angle $(-\vec{u}; -\vec{v})$.



Donner une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2011$$

$$z_4 = -29i$$

$$z_7 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = -1980$$

$$z_5 = 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$z_8 = -\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$$

$$z_3 = 2000i$$

$$z_6 = 3 - 3i$$

Correction de l'exercice 2

Rappel : Forme trigonométrique d'un complexe

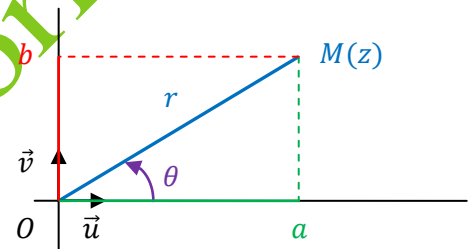
Soit $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ un repère orthonormal direct du plan complexe et soit M le point d'affixe $z = a + bi$ (où a et b désignent des réels non tous nuls).

- Le **MODULE** de z est le nombre réel positif, noté r , défini

$$\text{par : } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Un **ARGUMENT** de z ($z \neq 0$), noté $\arg(z)$, est une mesure

de l'angle orienté $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$, définie par :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases}$$


- L'écriture $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est une **FORME TRIGONOMETRIQUE** de z , avec $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$.

Remarques importantes :

- Il existe plusieurs formes trigonométriques d'un même complexe z non nul puisqu'il existe plusieurs arguments de z .
- Le nombre complexe nul $z = 0$ n'admet pas de forme trigonométrique puisqu'il n'a pas d'argument.

Rappel : Valeurs trigonométriques remarquables / cosinus et sinus d'un angle $\theta \in [0 ; \pi] \pmod{2\pi}$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Pour les valeurs de $\cos \theta$ et $\sin \theta$ avec $\theta \in [-\pi ; 0[\pmod{2\pi}$, on utilise la parité de la fonction cosinus et l'impairité de la fonction sinus ; en l'occurrence, pour tout θ réel : $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.

- Donnons une forme trigonométrique du nombre complexe z_1 .

Nombres complexes – Forme trigonométrique d'un complexe – Exercices corrigés

$$z_1 = 2011 = 2011 + 0i$$

Déterminons tout d'abord le module r de z_1 .

$$r = |z_1| = \sqrt{2011^2 + 0^2} = 2011$$

Déterminons désormais un argument θ de z_1 .

$$\theta = \arg(z_1) \text{ est défini par } \begin{cases} \cos \theta = \frac{2011}{2011} = 1 \\ \sin \theta = \frac{0}{2011} = 0 \end{cases} \text{ donc } \theta = \arg(z_1) = 0 \pmod{2\pi}$$

Proposons enfin une forme trigonométrique de z_1 .

$$z_1 = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 2011(\cos 0 + i \sin 0)$$

- Donnons une forme trigonométrique du nombre complexe z_2 .

$$z_2 = -1980 = -1980 + 0i$$

Déterminons tout d'abord le module r de z_2 .

$$r = |z_2| = \sqrt{(-1980)^2 + 0^2} = 1980$$

Déterminons désormais un argument θ de z_2 .

$$\theta = \arg(z_2) \text{ est défini par } \begin{cases} \cos \theta = \frac{-1980}{1980} = -1 \\ \sin \theta = \frac{0}{1980} = 0 \end{cases} \text{ donc } \theta = \arg(z_2) = \pi \pmod{2\pi}$$

Proposons enfin une forme trigonométrique de z_2 .

$$z_2 = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 1980(\cos \pi + i \sin \pi)$$

- Donnons une forme trigonométrique du nombre complexe z_3 .

$$z_3 = 2000i = 0 + 2000i$$

Déterminons tout d'abord le module r de z_3 .

$$r = |z_3| = \sqrt{0^2 + 2000^2} = 2000$$

Déterminons désormais un argument θ de z_3 .

$$\theta = \arg(z_3) \text{ est défini par } \begin{cases} \cos \theta = \frac{0}{2000} = 0 \\ \sin \theta = \frac{2000}{2000} = 1 \end{cases} \text{ donc } \theta = \arg(z_3) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Proposons enfin une forme trigonométrique de z_3 .

$$z_3 = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 2000 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

- Donnons une forme trigonométrique du nombre complexe z_4 .

$$z_4 = -29i = 0 + (-29)i$$

Déterminons tout d'abord le module r de z_4 .

$$r = |z_4| = \sqrt{0^2 + (-29)^2} = 29$$

Déterminons ensuite un argument θ de z_4 .

$$\theta = \arg(z_4) \text{ est défini par } \begin{cases} \cos \theta = \frac{0}{29} = 0 \\ \sin \theta = \frac{-29}{29} = -1 \end{cases} \text{ donc } \theta = \arg(z_4) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Proposons enfin une forme trigonométrique de z_4 .

$$z_4 = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 29 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

- Donnons une forme trigonométrique du nombre complexe z_5 .

$$z_5 = 2 + 2i\sqrt{3} = 2 + 2\sqrt{3}i$$

Déterminons tout d'abord le module r de z_5 .

$$r = |z_5| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = 4$$

Déterminons désormais un argument θ de z_5 .

$$\theta = \arg(z_5) \text{ est défini par } \begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta = \arg(z_5) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

Proposons enfin une forme trigonométrique de z_5 .

$$z_5 = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

- Donnons une forme trigonométrique du nombre complexe z_6 .

$$z_6 = 3 - 3i = 3 + (-3)i$$

Déterminons tout d'abord le module r de z_6 .

$$r = |z_6| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

Déterminons désormais un argument θ de z_6 .

$$\theta = \arg(z_6) \text{ est défini par } \begin{cases} \cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta = \arg(z_6) = \frac{-\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

Proposons enfin une forme trigonométrique de z_6 .

$$z_6 = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 3\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{4} \right) \right)$$

- Donnons une forme trigonométrique du nombre complexe z_7 .

$$z_7 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Déterminons tout d'abord le module r de z_7 .

$$r = |z_7| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

Déterminons désormais un argument θ de z_7 .

$$\theta = \arg(z_7) \text{ est défini par } \begin{cases} \cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta = \arg(z_7) = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

Proposons enfin une forme trigonométrique de z_7 .

$$z_7 = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

- Donnons une forme trigonométrique du nombre complexe z_8 .

$$z_8 = -\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$$

Déterminons tout d'abord le module r de z_8 .

$$r = |z_8| = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Déterminons désormais un argument θ de z_8 .

$$\theta = \arg(z_8) \text{ est défini par } \begin{cases} \cos \theta = \frac{-3}{4} = \frac{-1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta = \arg(z_8) = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

Proposons enfin une forme trigonométrique de z_8 .

$$z_8 = r(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{3}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

Exercice 3 (2 questions)

Niveau : facile

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes z_1 , z_2 et z_3 suivants et en déduire un argument.

$$z_1 = -2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z_2 = -3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_3 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Correction de l'exercice 3

- Soit le nombre complexe suivant :

$$z_1 = -2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

Remarque : z_1 n'est pas écrit sous une forme trigonométrique $z_1 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (avec $r > 0$) car -2 est négatif. Il convient donc de transformer l'écriture de z_1 .

➤ 1^{ère} méthode :

Rappel : Relations trigonométriques / Angles associés

Pour tout x réel,

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$z_1 = -2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \times (-1) \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\underbrace{-\cos \frac{\pi}{6}}_{-\cos X} \underbrace{-i \sin \frac{\pi}{6}}_{-i \sin X} \right)$$

$$= 2 \left(\underbrace{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)}_{\cos(\pi+X)} + i \underbrace{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)}_{\sin(\pi+X)} \right) = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

Une forme trigonométrique de z_1 est donc :

$$2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

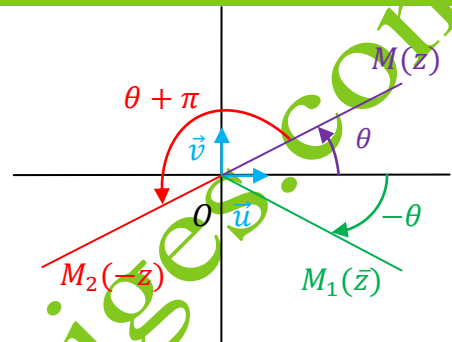
Un argument de z_1 est par conséquent $\frac{7\pi}{6}$.

➤ 2^{ème} méthode :

Rappel : Propriétés des arguments

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

- $\arg \bar{z} = -\arg z \pmod{2\pi}$
- $\arg(-z) = \arg z + \pi \pmod{2\pi}$
- $\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg z \pmod{2\pi}$



On peut aussi utiliser la relation $\arg(-z) = \arg z + \pi \pmod{2\pi}$ avec $z = \pi/6$. En effet,

$$z_1 = -2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = - \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right] = -z \text{ avec } z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \text{ et } \arg z = \frac{\pi}{6}$$

Dès lors, $\arg z_1 = \arg(-z) = \arg z + \pi = \pi/6 + \pi = 7\pi/6$

- Soit le nombre complexe suivant :

$$z_2 = -3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Remarque : L'écriture de z_2 n'est pas de la forme $z_2 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (avec $r > 0$) car -3 est négatif. Il convient donc de transformer l'écriture de z_2 .

➤ 1^{ère} méthode :

$$z_2 = -3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 3 \left(-\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 3 \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

Une forme trigonométrique de z_2 est donc :

$$3 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

Un argument de z_2 est par conséquent $\frac{5\pi}{4}$.

➤ 2^{ème} méthode :

On peut aussi utiliser directement la relation $\arg(-z) = \arg z + \pi \pmod{2\pi}$ avec $z = \pi/4$. En effet,

$$z_2 = -3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = - \left[3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] = -z \text{ avec } z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ et } \arg z = \frac{\pi}{4}$$

Dès lors, $\arg z_2 = \arg(-z) = \arg z + \pi = \pi/4 + \pi = 5\pi/4$

- Soit le nombre complexe suivant :

$$z_3 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Remarque : L'écriture de z_3 n'est pas de la forme $z_3 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (avec $r > 0$). Il convient donc de transformer l'écriture de z_3 .

➤ **1^{ère} méthode :**

$$z_3 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

Une forme trigonométrique de z_3 est donc :

$$\sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

Un argument de z_3 est par conséquent $-\frac{\pi}{3}$.

➤ **2^{ème} méthode :**

On peut également utiliser la relation $\arg \bar{z} = -\arg z \pmod{2\pi}$ avec $z = \pi/3$. En effet,

$$z_3 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \bar{z} \text{ avec } z = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \text{ et } \arg z = \frac{\pi}{3}$$

Dès lors, $\arg z_3 = \arg(\bar{z}) = -\arg z = -\pi/3$

On utilise la parité de la fonction $X \mapsto \cos X$ et l'imparité de la fonction $X \mapsto \sin X$. En effet, pour tout X réel,

$$\cos X = \cos(-X) \text{ et } -\sin X = \sin(-X)$$

Exercice 4 (1 question)

Niveau : moyen

Ecrire le complexe $(\sqrt{3} - i)^{2012}$ sous forme trigonométrique.

Correction de l'exercice 4

Soit z le nombre complexe tel que $z = \sqrt{3} - i$.

$$z = \sqrt{3} - i = \sqrt{3} + (-1)i$$

Déterminons dans un premier temps le module r de z .

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

Déterminons dans un second temps un argument θ de z .

$$\theta = \arg(z) \text{ est défini par } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-1}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta = \arg(z) = \frac{-\pi}{6} \pmod{2\pi}$$

Proposons désormais une forme trigonométrique de z .

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 2 \left(\cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right)$$

Posons $Z = z^{2012}$.

➤ 1^{ère} méthode :

$$Z = z^{2012} = \left[2 \left(\cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right) \right]^{2012} = 2^{2012} \times \left(\cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right)^{2012}$$

Rappel : Formule d'Abraham De Moivre

Pour tout réel θ et pour tout entier n ,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Z &= 2^{2012} \times \left(\cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right)^{2012} = 2^{2012} \times \left(\cos \left(2012 \times \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right) + i \sin \left(2012 \times \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right) \right) \\ &= 2^{2012} \times \left(\cos \left(-\frac{1006\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{1006\pi}{3} \right) \right) \end{aligned}$$

Or,

$$-\frac{1006\pi}{3} = -\frac{1008\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 336\pi + \frac{2\pi}{3} = 168 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

Autrement dit,

$$Z = 2^{2012} \left(\cos \left(-\frac{1006\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{1006\pi}{3} \right) \right) = 2^{2012} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

En conclusion, le module de $Z = (\sqrt{3} - i)^{2012}$ est 2^{2012} et un argument de Z est $2\pi/3$.

➤ 2^{ème} méthode :

Rappel : Module et argument d'un produit

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' ,

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$$

Quel que soit le nombre complexe non nul z et quel que soit l'entier naturel n ,

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\arg(z^n) = n \arg z \pmod{2\pi}$$

Commençons par déterminer le module de Z .

$$|Z| = |z^{2012}| = |z|^{2012} = 2^{2012}$$

Donnons désormais un argument de Z .

$$\begin{aligned}\arg Z &= \arg z^{2012} = 2012 \arg z = 2012 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1006\pi}{3} = -\frac{1008\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 336\pi + \frac{2\pi}{3} \\ &= 168 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$Z = 2^{2012} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

Exercice 5 (4 questions)

Niveau : facile

1- Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -1 - i$$

$$z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$Z = z_1 z_2$$

2- Déterminer la forme algébrique de Z .

3- En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

4- Donner les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Correction de l'exercice 5

1- Ecrivons sous forme trigonométrique les nombres complexes z_1 , z_2 et Z .

- Donnons tout d'abord une forme trigonométrique du nombre complexe $z_1 = -1 - i$.

$$z_1 = -1 - i = -1 + (-1)i$$

Déterminons le module r de z_1 .

$$r = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Déterminons un argument θ de z_1 .

$$\theta = \arg z_1 \text{ est défini par } \begin{cases} \cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta = \arg z_1 = \frac{5\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

Proposons désormais une forme trigonométrique de z_1 .

$$z_1 = r(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

- Donnons dorénavant une forme trigonométrique du nombre complexe z_2 .

$$z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$$

- Donnons enfin une forme trigonométrique du nombre complexe $Z = z_1 z_2$.

Z est le produit des nombres complexes z_1 et z_2 non nuls.

Donc, d'une part,

$$|Z| = |z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$

D'autre part,

$$\arg Z = \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = \frac{5\pi}{4} + \left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{15\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} = \frac{11\pi}{12} \pmod{2\pi}$$

De ce fait, une écriture trigonométrique de Z est :

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

2- Déterminons la forme algébrique de Z .

$$\begin{aligned} Z = z_1 z_2 &= (-1 - i) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i \right) - i \times \frac{1}{2} - i \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\substack{i^2 \\ = -1}}{=} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}i = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)i \end{aligned}$$

3- Donnons les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

Rapports : Partie réelle et partie imaginaire d'un complexe

Soit z un complexe écrit sous sa forme algébrique $z = a + bi$ (avec a et b réels).

- On dit alors que a est la **PARTIE RÉELLE** de z et on la note $a = \text{Re}(z)$.
- On dit par ailleurs que b est la **PARTIE IMAGINAIRE** de z et on la note $b = \text{Im}(z)$.

D'après la première question,

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = \sqrt{2} \cos \frac{11\pi}{12} + \sqrt{2} \sin \frac{11\pi}{12} i$$

D'où :

$$\operatorname{Re}(Z) = \sqrt{2} \cos \frac{11\pi}{12}$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \sqrt{2} \sin \frac{11\pi}{12}$$

D'après la deuxième question,

$$Z = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) i$$

D'où :

$$\operatorname{Re}(Z) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

Rappel : Égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont **ÉGAUX** si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Ainsi, par comparaison des écritures algébrique et trigonométrique de Z ,

$$\operatorname{Re}(Z) = \sqrt{2} \cos \frac{11\pi}{12} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \sqrt{2} \sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

On a donc d'une part :

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos \frac{11\pi}{12} &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \cos \frac{11\pi}{12} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos \frac{11\pi}{12} = -\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{11\pi}{12} &= -\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin \frac{11\pi}{12} &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{11\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin \frac{11\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \frac{11\pi}{12} &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Remarque : On sait que, pour tout X réel, $\cos^2 X + \sin^2 X = 1$. Vérifions ici l'égalité avec $X = \frac{11\pi}{12}$.

$$\cos^2 \frac{11\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12} = \left[-\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) \right]^2 + \left[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right]^2 = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{16} + \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{16}$$

$$= \frac{\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{6} + \sqrt{6}^2}{16} + \frac{\sqrt{6}^2 - 2\sqrt{6}\sqrt{2} + \sqrt{2}^2}{16} = \frac{2 + 2\sqrt{12} + 6 + 6 - 2\sqrt{12} + 2}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

4- Précisons $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

D'après les formules sur les angles associés, on a d'une part :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \underbrace{\cos \left(\pi - \frac{11\pi}{12} \right)}_{\cos(\pi-X)} = \underbrace{-\cos \frac{11\pi}{12}}_{-\cos X} = - \left[- \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right) \right] = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Et d'autre part :

$$\sin \frac{\pi}{12} = \underbrace{\sin \left(\pi - \frac{11\pi}{12} \right)}_{\sin(\pi-X)} = \underbrace{\sin \frac{11\pi}{12}}_{\sin X} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

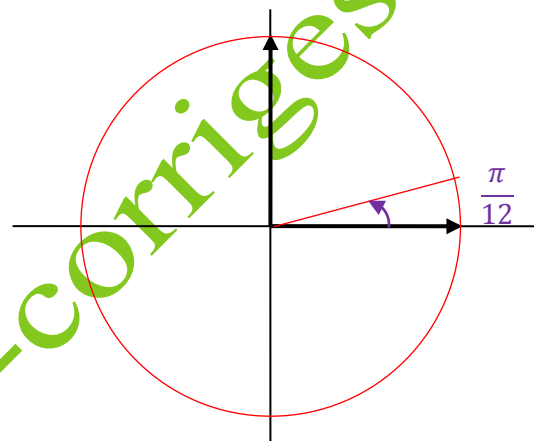
Remarque : On peut vérifier ces résultats en utilisant les formules trigonométriques d'addition / soustraction :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$



Il suffit de poser $a = \pi/3$ et $b = \pi/4$ car

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Exercice 6 (2 questions)

Niveau : facile

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z + \frac{1}{z} = 1$ d'inconnue z et donner les solutions sous forme trigonométrique.

Correction de l'exercice 6

Remarque préalable : Très souvent, par commodité d'écriture, on écrit les solutions complexes d'une équation sous leur forme exponentielle, voire algébrique, mais très rarement sous une forme trigonométrique.

Nombres complexes – Forme trigonométrique d'un complexe – Exercices corrigés

L'équation $z + \frac{1}{z} = 1$ est définie si et seulement si $z \neq 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} - \{0\}$,

$$z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z^2 + 1 - z}{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$$

L'équation $z + \frac{1}{z} = 1$ nous amène donc à résoudre une équation du second degré à une inconnue et à coefficients réels.

Rappel : Equation du second degré à coefficients réels

Soit $az^2 + bz + c$ un trinôme du second degré (avec a, b et c réels tels que $a \neq 0$). $\Delta = b^2 - 4ac$

	solutions de $az^2 + bz + c = 0$	factorisation de $az^2 + bz + c$
$\Delta = 0$	$z_0 = \frac{-b}{2a}$ $z_0 \in \mathbb{R}$	$a(z - z_0)^2$
$\Delta > 0$	$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $z_1 \in \mathbb{R}$ et $z_2 \in \mathbb{R}$	$a(z - z_1)(z - z_2)$
$\Delta < 0$	$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{ \Delta }}{2a}$ $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{ \Delta }}{2a}$ $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$; $z_2 = \bar{z}_1$	$a(z - z_1)(z - z_2)$

Posons Δ le discriminant du trinôme du second degré $z^2 - z + 1$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$$

$\Delta < 0$ donc le trinôme admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-1) - i\sqrt{|-3|}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

Rappel : Conjugué d'un nombre complexe

Le **CONJUGUÉ** du nombre complexe $z = a + ib$ (avec a et b réels) est le nombre complexe, noté $\bar{z}$, tel que $\bar{z} = a - ib$.

$z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$ donc les solutions, notées S , de l'équation $z + \frac{1}{z} = 1$ sont :

$$S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} ; \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right\}$$

Ecrivons ces solutions sous forme trigonométrique.

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Les solutions, notées S , de l'équation $z + \frac{1}{z} = 1$ sont :

$$S = \left\{ \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) ; \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right\}$$

Exercice 7 (2 questions)

Niveau : facile

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$ d'inconnue z et écrire les solutions sous forme trigonométrique.

Correction de l'exercice 7

L'équation $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$ est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$,

Posons $Z = z^2$. Alors $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$ devient $Z^2 + 4Z + 3 = 0$. Résolvons $Z^2 + 4Z + 3 = 0$, d'inconnue Z .

Cette équation est une équation du second degré à coefficients réels et à une inconnue. En posant Δ le discriminant du trinôme du second degré $Z^2 + 4Z + 3$, on a $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$.

$\Delta > 0$ donc $Z^2 + 4Z + 3$ admet deux racines réelles distinctes :

$$Z_1 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-4 - 2}{2} = -3$$

$$Z_2 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-4 + 2}{2} = -1$$

Or, comme $Z = z^2$, il s'ensuit que $z^2 = Z_1 = -3$ ou $z^2 = Z_2 = -1$.

D'une part,

$$z^2 = -3 \Leftrightarrow z^2 = (\sqrt{3}i)^2 \Leftrightarrow z = -\sqrt{3}i \text{ ou } z = \sqrt{3}i$$

Ecrivons ces solutions sous forme trigonométrique.

$$z = -\sqrt{3}i = \sqrt{3}(0 + (-1)i) = \sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \right)$$

$$z = \sqrt{3}i = \sqrt{3}(0 + (1)i) = \sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

D'autre part,

$$z^2 = -1 \Leftrightarrow z^2 = i^2 \Leftrightarrow z = -i \text{ ou } z = i$$

Ecrivons ces solutions sous forme trigonométrique.

$$z = -i = 0 + (-1)i = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$$

$$z = i = 0 + 1i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

L'équation $X^2 = a$ admet :

- 1 solution réelle si $a = 0$: $X = 0$
- 2 solutions réelles si $a > 0$:
 $X = -\sqrt{a}$ et $X = \sqrt{a}$
- 2 solutions complexes si $a < 0$:
 $X = -\sqrt{|a|}i$ et $X = \sqrt{|a|}i$

En résumé, les solutions de l'équation $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$ sont :

$$\sqrt{3} \left(\cos \left(\frac{-\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{2} \right) \right) ; \sqrt{3} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) ; \cos \left(\frac{-\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{2} \right) \text{ et } \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

Exercice 8 (1 question)

Niveau : moyen

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1- $\arg z = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$

2- $z^2 \in \mathbb{R}^-$

3- $\arg \bar{z} = \arg z \pmod{2\pi}$

4- $\arg z = \arg(-z) \pmod{2\pi}$

5- $\arg(z + i) = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$

6- $\arg \left(\frac{z-2-i}{z-1+i} \right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

7- $\arg(z - 2) = \arg(iz - 1) \pmod{2\pi}$

Correction de l'exercice 8

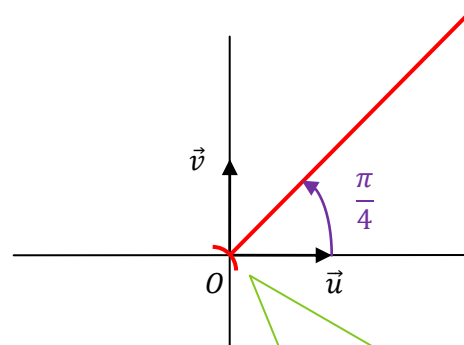
1- Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg z = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

$$\arg z = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

L'ensemble des points recherchés est la demi-droite ouverte d'origine O et passant par le point d'affixe $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$.

Rappel : Notions de demi-droite et de demi-droite ouverte

Une demi-droite est dite ouverte si le point d'origine qui la limite n'appartient pas à la demi-droite considérée. La demi-droite $]Ox)$ est donc la demi-droite $[Ox)$, privée de son origine O .

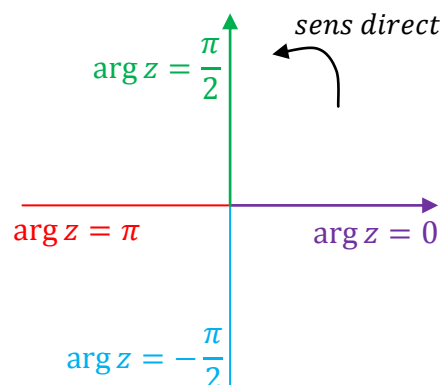


Par ce symbole $\hookrightarrow$, on montre que le point O est exclu de la demi-droite tracée en rouge.

2- Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z^2 \in \mathbb{R}^-$.

Rappel : Caractérisation d'un réel et d'un imaginaire pur

- z réel $\Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg z = 0 \pmod{\pi}$
- z réel avec $\operatorname{Re} z > 0 \Leftrightarrow \arg z = 0 \pmod{2\pi}$
- z réel avec $\operatorname{Re} z < 0 \Leftrightarrow \arg z = \pi \pmod{2\pi}$
- z imaginaire pur $\Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg z = \pi/2 \pmod{\pi}$
- z imaginaire pur avec $\operatorname{Im} z > 0 \Leftrightarrow \arg z = \pi/2 \pmod{2\pi}$
- z imaginaire pur avec $\operatorname{Im} z < 0 \Leftrightarrow \arg z = -\pi/2 \pmod{2\pi}$

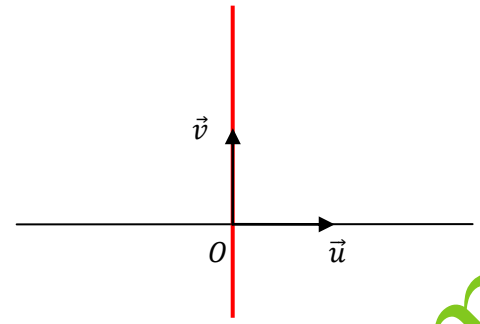


$$z^2 \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow z^2 = 0 \text{ ou } \arg z^2 = \pi \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } 2 \arg z = \pi \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \arg z = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

L'ensemble des points recherchés est l'axe des imaginaires d'un repère du plan complexe.



3- Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg \bar{z} = \arg z \pmod{2\pi}$.

Tout d'abord, observons que, comme $\arg \bar{z} = \arg z$, $z \neq 0$.

Pour tout nombre complexe non nul z ,

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

Par suite,

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \text{ avec } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

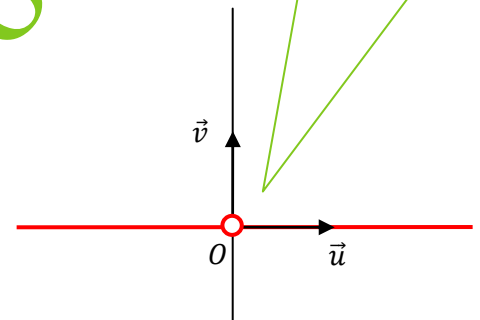
Par conséquent,

$$\arg \bar{z} = \arg z \pmod{2\pi} \Leftrightarrow -\theta = \theta \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \theta = 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow \arg z = 0 \pmod{\pi}$$

L'ensemble des points recherchés est la droite des réels, privée de l'origine O d'un repère du plan complexe.

Par ce symbole $\circ$, on montre que le point O est exclu de la droite tracée en rouge.



Remarque : On pouvait également utiliser l'une des propriétés des arguments : $\arg \bar{z} = -\arg z \pmod{2\pi}$.

4- Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg z = \arg(-z) \pmod{2\pi}$.

Tout d'abord, observons que, comme $\arg z = \arg(-z)$, $z \neq 0$.

Pour tout nombre complexe non nul z ,

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

Par suite,

$$-z = -r(\cos \theta + i \sin \theta) = r(-\cos \theta - i \sin \theta) = r(\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)) \text{ avec } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,

$$\arg z = \arg(-z) \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \theta = \pi + \theta \pmod{2\pi} \Leftrightarrow 0 = \pi \pmod{2\pi}, \text{ résultat absurde puisque } 0 \neq \pi !$$

L'ensemble des points recherchés est l'ensemble vide.

Remarque : On pouvait aussi utiliser l'une des propriétés des arguments : $\arg(-z) = \arg z + \pi \pmod{2\pi}$

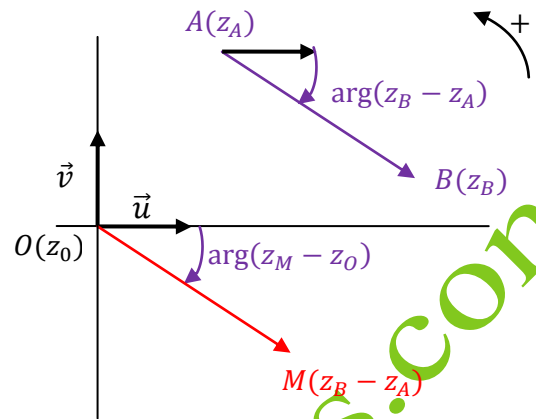
5- Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z + i) = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

Rappel : Affixe d'un vecteur et argument d'un angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$

Le plan complexe est muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormal direct. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur non nul du plan et M , d'affixe z_M , est un point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Alors,

- $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$
- $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$



Soit A le point d'affixe $z_A = -i$.

$$\arg(z + i) = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \arg(z - (-i)) = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \arg(z - z_A) = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$$

En outre,

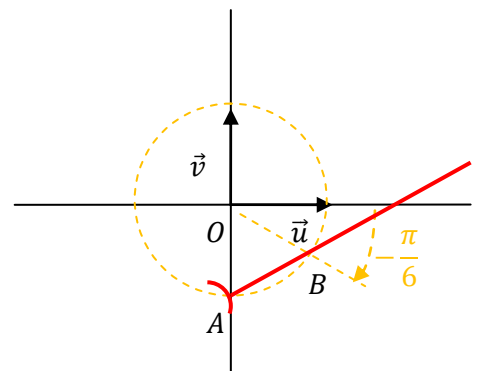
$$z_A + \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = -i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

L'ensemble des points recherchés est la demi-droite ouverte $]AB)$ où A et B désignent les points d'affixes respectifs $z_A = -i$ et $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Remarque : Pour placer avec précision le point B , il est préférable d'envisager une forme trigonométrique de son affixe.

$$z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Les points A et B se trouvent sur le cercle de centre O et de rayon 1.



6- Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg\left(\frac{z-2-i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Rappel : Affixe d'un angle orienté $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$

Le plan complexe est muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormal direct. A, B, C et D sont quatre points du plan, d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C et z_D tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$. Alors,

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right)$$

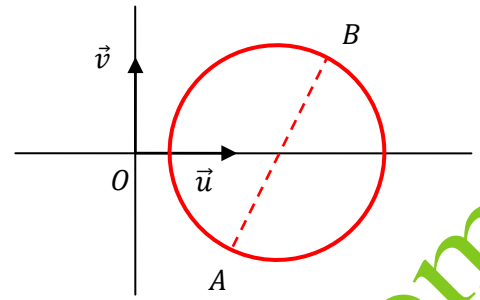
Soient A et B désignent les points d'affixes respectifs $z_A = 1 - i$ et $z_B = 2 + i$.

$$\arg\left(\frac{z - 2 - i}{z - 1 + i}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - (2 + i)}{z - (1 - i)}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$



L'ensemble des points recherchés est le cercle de diamètre $]AB[$ (diamètre privé des points A et B).

7- Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z - 2) = \arg(iz - 1) \pmod{2\pi}$.

Rappel : Module et argument d'un quotient

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' ,

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$$

Pour tout z complexe, $iz - 1 = i(z + i)$.

Ainsi, en posant A et B les points d'affixes respectifs $z_A = -i$ et $z_B = 2$

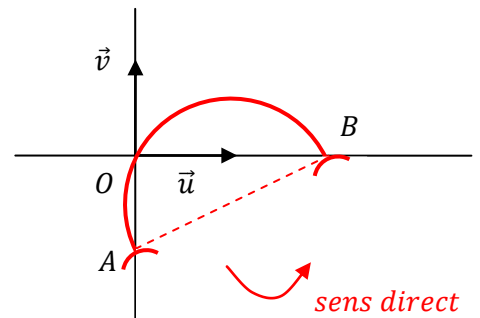
$$\arg(z - 2) = \arg(iz - 1) \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \arg(z - 2) = \arg(i(z + i)) \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \arg(z - 2) = \arg i + \arg(z + i) \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \arg(z - 2) - \arg(z + i) = \arg i \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - 2}{z + i}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$



Ainsi, M appartient à l'un des demi-cercles ouverts de diamètre $[AB]$. Plus précisément, **M appartient au demi-cercle ouvert de diamètre $]AB[$ (privé des points A et B), tel que $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$ soit dans le sens direct.**

Remarque : Vérifions cette affirmation en trouvant un point du demi-cercle. Testons l'égalité avec $z = 0$.

$$\arg\left(\frac{z - 2}{z + i}\right) = \arg\left(\frac{0 - 2}{0 + i}\right) = \arg\left(\frac{-2}{i}\right) = \arg\left(\frac{-2i}{-1}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$$

L'affixe de O vérifie l'égalité donc le point O d'affixe 0 appartient au demi-cercle ouvert de diamètre $[AB]$.

L'ensemble des points recherchés est le demi-cercle ouvert de diamètre $]AB[$, c'est-à-dire le demi-cercle privé des points $A(-i)$ et $B(2)$, qui contient le point $O(0)$.