

Exercices – Nombres Complexes

Exercice 1

- 1) On considère le nombre complexe : $u = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
- Qu'appelle-t-on conjugué d'un nombre complexe ?
 - Montrer que $u^2 = -2\sqrt{3} + 2i$.
 - Donner le conjugué de u^2 .
 - Calculer le module et l'argument de u^2 .
 - Ecrire sous forme trigonométrique u^2 .
- 2) Ecris sous forme algébrique le nombre complexe $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- 3) On pose $Z = z.u^2$.
- Ecrire sous la forme algébrique le nombre complexe Z .
 - Ecrire sous la forme trigonométrique Z .
 - En déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$.

Exercice 2

On considère les nombres complexes $Z_1 = \sqrt{3} - i$ et $Z_2 = 2 - 2i$ et $A = \frac{Z_1^4}{Z_2^3}$

- Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes : Z_1 ; Z_2 ; Z_1^4 et Z_2^3 .
 - Déterminer la forme algébrique des nombres complexes Z_1^4 et Z_2^3 et A .
- Calculer le module et un argument de A .
- Déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Problème 3

7points

Le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). On considère les points A et B d'affixes respectives i et $-i$. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe Z distinct de $-i$ associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = \frac{1 + iZ}{Z + i}$.

- Quelle est l'image du point O par f ?
- Quel est le point qui a pour image par f le point c d'affixe $1 + i$?
- montre que l'application $\frac{1 + iZ}{Z + i} = Z$ admet deux solutions que l'on déterminera.
- Vérifie que $Z' = \frac{i(Z - i)}{Z + i}$.

En déduis que $\overrightarrow{OM'} = \frac{AM}{BM}$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) + \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

5) montre que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par f situées sur un même cercle (c) que l'on précisera.

6) Soit M un point du cercle de diamètre $[AB]$ différent de A et B . Montre que son image M' est située sur l'axe des abscisses.

"l'essentiel n'est pas de tout faire mais de s'assurer que le travail fait correcte"

Exercice 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. On pose : $P(z) = z^3 - (11 + 6i)z^2 + (28 + 38i)z - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z - 3)(z^2 + az + b).$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

c) Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $\text{Im}(z_A) < \text{Im}(z_B) < \text{Im}(z_C)$. Calculer l'abscisse du point G barycentre du système $\{A; 2\}, \{B; -2\}, \{C; 2\}$ et placer les points A , B , C et G .

2. Pour tout réel k différent de 2, on définit l'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3 - k)\overrightarrow{MC}.$$

a) Pour quelles valeurs de k , l'application f_k est une translation ? Déterminer alors son vecteur.

b) On suppose que $k \in \mathbb{R} - \{2; 3\}$. Montrer que f_k admet un unique point invariant Ω_k . reconnaître alors f_k et donner ses éléments caractéristiques en fonction de f_k .

c) Déterminer et construire le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R} - \{2; 3\}$. Reconnaitre Ω_1 .

d) Pour $k = 1$; déterminer et construire le lieu géométrique du point R centre de gravité du triangle AMM' lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C .

3. Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = m$, où m est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de m , la nature de Γ_m .

b) Déterminer et construire Γ_m pour $m = 10$.

Exercice 5 (7 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f de P dans P qui à tout point M d'abscisse z associe le point M' d'abscisse z' telle que $z' = e^{i|z|}z$.

1) a) Déterminer les abscisses des points A' et B' images respectives par f du point A d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ et du point B d'abscisse π .

b) Déterminer l'ensemble Γ des points M d'abscisse z tel que $|z'| = 1$.

2) a) Montrer qu'un point M est invariant par f si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que $OM = 2k\pi$.

b) En déduire l'ensemble E des points invariants par f .

3) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 = e^{i|z|}z$

a) Montrer que si z est solution de (E) alors $|z| = 0$ ou $|z| = 1$

b) Montrer que si z non nul est solution de (E) alors $\arg(z) = \frac{1}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) Déduire les solutions de l'équation (E).

4) Soit C le point d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ et Δ la demi-droite d'origine O passant par C et ne contenant pas le point O .

a) Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à Δ si et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

b) Soit $M(z)$ un point de Δ et $M'(z')$ son image par f .

Montrer que M et M' sont symétriques par rapport à $(O, \vec{u})$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$

tel que $|z| = -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$.

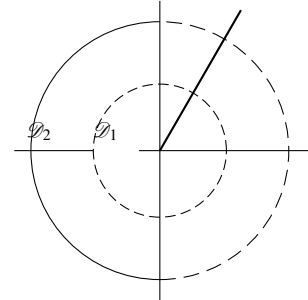
5) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note C_k le cercle de centre O et de rayon $2k\pi$,

D_k la couronne délimitée par les cercles C_k et C_{k+1}

U_k l'aire de la couronne D_k .

a) Montrer que $U_k = \pi^3(8k + 4)$

b) Calculer la limite de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n U_k$



6) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'un point $M(z)$ appartient à $\Delta \cap D_k$ et est symétrique avec son image par rapport à

$(O, \vec{u})$ si et seulement si $z = 2\pi \left(k + \frac{2}{3}\right) e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 6

A) Soit m un nombre complexe non nul.

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_m) : 2z^2 - 2(m + 1 + i)z + m^2 + (1 + i)m + i = 0$.

1) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (2im)^2$.

2) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_m) .

B) Dans cette partie, on suppose que $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$.

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives $1, i, m, z_1 = \frac{(1-i)(m+i)}{2}$

et $z_2 = \frac{(1+i)(m+1)}{2}$. Soit I le milieu du segment $[AB]$.

Soit f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point N d'affixe z associe le point N' d'affixe z' tel que $z' = iz + 1$.

1) a) Montrer que f est une isométrie.

b) Montrer que I est le seul point invariant par f .

c) Montrer que f est une rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d) Vérifier que $f(M_1) = M_2$.

2) a) Vérifier que $\frac{z_1 - m}{z_2 - m} = i \cdot \left(\frac{m-1}{m-i}\right)$.

b) En déduire que si M est situé sur le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$, alors les points M, M_1 et M_2 sont alignés.

3) a) Vérifier que $z_2 - z_1 = im$ et déduire que $M_1M_2 = OM$, ainsi que la position relative des droites (M_1M_2) et (OM) .

b) Montrer que $\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{OM}$.

c) On a tracé dans la page annexe le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$ et on a placé sur (Γ) le point M . Construire, en justifiant, les points M_1 et M_2 .

