

Exercices (Nombres complexes)

Exercice1:

Mets sous la forme $a+ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (forme algébrique) les nombres complexes

$$\text{suivants : } z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} ; \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 ; \quad z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} ; \quad z_4 = \frac{5+2i}{1-2i} ;$$

$$z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 ; \quad z_6 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} ; \quad z_7 = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} ; \quad z_8 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)}$$

Exercice2

1) Détermine le module et un argument des complexes suivants : $\alpha \in \mathbb{R}$

$$Z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i-1}\right)^6 ; \quad Z_2 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9 (1-i)}{-8(1+i)^5} ; \quad Z_3 = \frac{1-\cos\alpha + i\sin\alpha}{1+\cos\alpha - i\sin\alpha} ; \quad Z_4 = \left(1 - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(1 + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$Z_5 = \frac{(1+i\sqrt{3})(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{\cos\alpha + i\sin\alpha + i(\cos\alpha - \sin\alpha)} ; \quad Z_6 = 1 - itan\alpha \text{ avec } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} ;$$

$$\begin{cases} |Z_7 (3-i\sqrt{3})^3| = 6 \\ \arg\left(\frac{(3-i\sqrt{3})^3}{2iZ_7}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3) Donne la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants:

$$\begin{aligned} z_1 &= -2e^{i\frac{\pi}{4}} ; & z_2 &= (1+i)^3 e^{\frac{3i\pi}{4}} ; \\ z_3 &= \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3} ; & z_4 &= 5\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

4) Linéarise : $\cos^3 2x$; $\sin^4 x$; $(\cos^3 x)(\sin^2 x)$

Exercice 3:

Trouve les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

Exercice 4:

I) Soient $a, b \in]0, \pi[$. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + e^{ia} , \quad z_2 = 1 - e^{ia} , \quad z_3 = e^{ia} + e^{ib} , \quad z_4 = \frac{1 + e^{ia}}{1 + e^{ib}} .$$

II) Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontre que

$$\frac{z+z'}{1+zz'} \text{ est réel .}$$

3) Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontre que : $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.

4) Soit z un complexe tel que : $2z^2 + 3\left(\frac{1}{z}\right)^2 = 5 + i$.

Montre que $z^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^2 = 2$ et $z^2 - \left(\frac{1}{z}\right)^2 = -2i$.

Exercice 5:

Détermine les nombres complexes z solution de l'équation $z^6 = (1+i)z^{-2}$.

Exercice 6 :

1) Détermine les racines quatrièmes de $-7 - 24i$.

2) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^3 = -2 + 2i$

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = -8i$

c) Résous dans $\mathbb{C}$ $\frac{1}{2}z^6 + (1+3i)z^3 + 8 + 8i = 0$

Exercice 7

On donne : $P(z) = iz^3 + (5-2i)z^2 - (4+9i)z - 9-6i$

et $Q(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$.

1) Démontre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.

2) Démontre que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution réelle.

Exercice 8

On considère le nombre complexe $z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$.

1) Détermine le module et un argument de z^2 puis en déduis le module et un argument

de z^2 2) Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x = \sqrt{2}$.

Exercice 9

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les équations suivantes:

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$; b) $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$, on considère

les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = 1 + \sqrt{3} + i$; $c = 1 + \sqrt{3} - i$ et $d = 1 - 2i$.

a) Place les points A, B, C et D puis précise la nature du quadrilatère ABCD.

b) Calculer le module et un argument de $\frac{d-b}{a-b}$. Préciser la nature des triangles ABD et

ACD .

c) Dédurre de ce qui précède que les points A, B C et D appartiennent à un même cercle ;
(Γ) dont on déterminera le centre I et le rayon r. Tracer (Γ)

3) On considère l'équation : $z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$ (1) où θ est un réel quelconque .

a) Résoudre l'équation (1)

Soient z_1 et z_2 les deux solutions de (1) . On appelle E et F les images des solutions z_1 et z_2 de (1) .

b) Montrer que E et F appartiennent au cercle (Γ) .

Exercice 10

les autorités municipales du village de MANDIAKUY envisagent de réhabiliter une maternité au profit des femmes .

Consulté pour réaliser le plan d'aménagement , l'urbaniste YIRABO a prévu:

– la réhabilitation de 6 blocs pouvant abriter les femmes et leurs bébés . Chaque bloc a une dimension $L = 2|z_A|$ de longueur et $l = 5|z_C|$ de largeur exprimée en mètres , et

comprend chacun un nombre de chambre $N = |z_B|$ avec z_A , z_B et z_C solution de l'équation

$$(E) : \left(\frac{1 + 8\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) z^2 + (2\sqrt{3} + 16 - 6i)z - 8 + 8i\sqrt{3} = 0 \quad \text{tels que } z_A = \overline{z_B} \quad \text{et}$$

$$\text{Im}(z_A) > 0$$

– la construction d'un hangar qui sert le lieu de vaccination des enfants ayant la forme de

l'ensemble (H) des points M d'affixes z vérifiant: $\left| (1 + i\sqrt{3})z - 2 \right| = 6$

Tâches: le travail à faire consiste à aider la sage femme pour trouver des réponses à ses préoccupations .

1) Prouve que le nombre complexe $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une solution de l'équation (E)

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

3) Détermine la longueur et la largeur des blocs puis le nombre de chambre par bloc .

4) Détermine l'ensemble (H) .

5) Dédus – en la forme du hangar .

Exercice 11:

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$. Montre que $\frac{\beta}{1 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{1 + \beta^4} + \frac{\beta^3}{1 + \beta^6} = -2$

Exercice 12:

I) 1) Soient f l'application du plan P qui à tout point M d'affixe Z on associe le point M'

d'affixe Z' telle que $Z' = \frac{Z - 2 + i}{Z + 1 - i}$.

1.a) Détermine l'image directe par f du point A d'affixe $3 - i\sqrt{3}$.

b) Détermine les nombres complexes pour lesquels f est définie

c. On pose $Z = x + iy$ avec x, y des réels. Ecris Z' sous la forme algébrique

2) Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que :

a. Z' soit réel

b. Z' soit imaginaire pur.

c. $|Z'| = 1$

II) Détermine et représente les ensembles de points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

a) $|z + \bar{z} - 1| = 4$; b) $|z - \bar{z} - 1 + i| = 2$

S