

Exercices sur les nombres complexes

TSE– TSEXP

Forme algébrique

- 1** Ecris sous forme algébrique les nombres complexes donnés puis en déduis la partie réelle et imaginaire de chacun d'eux :

a) $Z = (-1 - i)^3$; **b)** $Z = i^5$; **c)** $Z = \frac{i}{(1+i)(3-2i)}$; **d)** $Z = \left(1 + \frac{2}{i}\right)(3 - 2i)$

- 2** On donne les nombres complexes suivants : $Z_1 = 1 - 2i$ et $Z_2 = 3 + i$.

Ecris sous forme algébrique : $Z_1 + Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 \times Z_2$; Z_1^2 ; $\frac{1}{Z_2}$; $\frac{Z_2}{Z_1}$

Forme trigonométrique - Forme exponentielle

- 3** Détermine les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes suivants :

a) $Z = -i$; **b)** $Z = \sqrt{3} + i$; **c)** $Z = \frac{-1-i}{2}$; **d)** $Z = -1 + i\sqrt{3}$; **e)** $Z = -1 - i$
f) $Z = (-\sqrt{3} - i)^3$; **g)** $Z = \frac{-\sqrt{3} - i}{1+i}$; **h)** $Z = (1+i)(-2-2i)$; **i)** $Z = (-1+i)e^{i\frac{-5\pi}{6}}$
j) $Z = -\cos\alpha + i\sin\alpha$; **k)** $Z = -\cos\alpha - i\sin\alpha$; **l)** $Z = \cos\alpha - i\sin\alpha$

- 4** Complète le tableau suivant :

Forme algébrique	$-5(1 - i\sqrt{3})$		
Forme trigonométrique			$2 \left[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) \right]$
Forme exponentielle		$e^{-\frac{5i\pi}{4}}$	

- 5** On pose : $A = 5\sqrt{2}(1 + i)$; $B = -5(1 + i\sqrt{3})$

- Détermine le module et un argument de : A ; B ; $\bar{A}$; $\frac{B}{A}$; $A \times B$ et $\frac{A}{B^2}$
- Soit Z un nombre complexe tel que : $AZ = B$
 - Ecris Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
 - En déduis les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$
 - Calcule $(Z)^{12}$

6 On pose : $Z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

- 1) Calcule Z^2 puis Détermine son module et son argument.
- 2) En déduis de ce qui précède le module et un argument Z .

7 Les parties I et II sont indépendantes :

I- On pose : $|Z| = 2\sqrt{2}$ et $\arg[(1 + i\sqrt{3})Z] = \frac{7\pi}{12}$.

Détermine la forme trigonométrique et exponentielle de Z .

II- On pose : $Z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $Z' = 1 - i$

- 1) Ecris $\frac{Z}{Z'}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
- 2) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Détermination de l'ensemble des points

8 Détermine les ensembles suivants :

- 1) L'ensemble (Ω) des points M d'affixes Z tels que : $|Z - i| = 2$
- 2) L'ensemble (Γ) des points M d'affixes Z tels que : $|\bar{Z} - i| = 2$
- 3) L'ensemble (λ) des points M d'affixes Z tels que : $|Z + 1 - 2i| = |\bar{Z} - 1 - i|$
- 4) L'ensemble (φ) des points M d'affixes Z tels que : $\arg(Z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi$
- 5) L'ensemble (ω) des points M d'affixes Z tels que : $\arg(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

9 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de 1 et soit $Z = \frac{z+1}{z-1}$

Détermine puis construis l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

- 1) $|Z|=1$; 2) Z est un réel. ; 3) Z est un imaginaire

Linéarisation.

10 Linéarise les expressions : $A = \sin^3 x$; $B = \cos^3 \frac{x}{2}$; $C = \sin^3 x \cdot \cos^3 x$

Résolution d'équations et systèmes.

11 Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $Z^2 - 2Z + 2 = 0$; b) $Z^2 - 2Z + 1 = 0$; c) $Z^2 + 2\sin \alpha Z + 1 = 0$

e) $Z^2 - 2\cos \alpha Z + 1 = 0$ f) $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

12 1) Développe le produit de facteurs suivant : $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

2) Résous l'équation $Z^4 = 1$

3) En déduis des questions 1) et 2) la résolution des équations suivantes :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \quad \text{Puis} \quad \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^2 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right) + 1 = 0$$

13 On donne le nombre complexe Z tel que : $Z = 2 + 3i$

1) Vérifie $Z^4 = -119 - 120i$

2) Détermine les racines quatrième de l'unité.

3) En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^4 = -119 - 120i$

14 Résous dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

$$1) \begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 6 \\ Z_1 + Z_2 = 5 \end{cases} \quad ; \quad 2) \begin{cases} (2 + 3i)Z - 5Z' = -1 \\ (1 - i)Z + 2Z' = 2(1 + i) \end{cases}$$

Résous dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1 + i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases}$$

15 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère le polynôme $p(Z)$ telque :

$$p(Z) = Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i$$

1) Démontre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution réelle que l'on notera Z_1 , dont on Déterminera la valeur.

2) Factorise $P(Z)$ puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

16 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme $p(Z)$

$$\text{telque : } p(Z) = Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1$$

1) Montre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.

2) Factorise $p(Z)$ puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.

17 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme $p(Z)$ telque :

$$p(Z) = Z^3 + 2(1 - 2\cos 2\theta)Z^2 + 4(1 - 2\cos 2\theta)Z + 8$$

1) Calcule $p(-2)$.

2) Factorise $p(Z)$ puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.

3) On désigne par Z_1 ; Z_2 et Z_3 les solutions de l'équation $p(Z) = 0$.

Calcule le module et un argument de Z_1 ; Z_2 et Z_3 .

4) On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives Z_1 ; Z_2 et Z_3 .

Pour quelles valeurs de θ , le triangle ABC , est-il équilatérale ?

18 Soit f la fonction à variable complexe Z telle que : $f(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$

1) Prouver que si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes : $\overline{Z_0}$ et $\frac{1}{Z_0}$ en sont aussi.

2) Détermine $f(1 + i)$ et en exploitant ce qui précède, Trouve toutes les solutions de l'équation $f(Z) = 0$.

19 Soit le polynôme $P(Z)$ définie par : $P(Z) = Z^4 - (1 + \sqrt{2})Z^3 + (2 + \sqrt{2})Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + 1$

1) Vérifie que : $P(Z) = Z^2 \left[\left(Z + \frac{1}{Z} \right)^2 - \left(Z + \frac{1}{Z} \right) (1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right]$ avec $Z \neq 0$

2) En utilisant la question précédente, Résous l'équation $P(Z) = 0$.

20 On considère dans $\mathbb{C}$ le complexe u tel que : $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

1- Calcule les racines carrées de u .

2- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2Z^2 + 2iZ + i\sqrt{2} = 0$.

(On notera Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation).

3- Montre que : $\left| \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right| = \sqrt{2}$

Figures géométriques dans le plan.

21 Soient A, B, C trois points d'affixes respectives : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.
Démontre que ces trois points sont alignés. (on fera une figure).

22 Soient A, B, C trois points d'affixes respectives : $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

a- Démontre que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A .

a- Détermine l'affixe de D tel que : $ABCD$ soit un parallélogramme. (on fera une figure).

23 Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectives : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

a- Etudie la nature des triangles ABC et BCD .

b- Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on Déterminera le centre et le rayon. (on fera une figure).

24 On considère un repère orthonormé directe $(O ; \vec{U} ; \vec{V})$ du plan complexe. Soit les points $A ; B ; C$ d'affixes respectives :

$$Z_A = -1 + i \quad ; \quad Z_B = \frac{2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} \quad \text{et} \quad Z_C = 2 - 2i$$

a- Ecris les complexe Z_A ; Z_B et Z_C sous forme exponentielle.

b- Détermine l'affixe Z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle $(\vec{OB} ; \vec{OD}) = \frac{\pi}{3}$.

25 Le plan est rapporté au repère orthonormé directe $(O ; \vec{U} ; \vec{V})$.

On considère :

- Le point A d'affixe $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$.
- Le point B d'affixe Z_B est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle $(\vec{OA} ; \vec{OB}) = \frac{\pi}{3}$.
- Le point Q d'affixe Z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment $[OB]$.
- Le point K d'affixe Z_K est tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.

1) Détermine les affixes Z_B ; Z_Q et Z_K respectivement des points B ; Q et K .

2) Démontre que $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur. En déduis la nature du triangle OKA .

3) Soit C la point d'affixe Z_C tel que $Z_C = \frac{2Z_A}{3}$

a- Calcule $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$. Que peut-on en déduire pour les points B ; C et K ?

26

On considère l'ensemble des complexes Z_n tels que : $\forall n \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n \end{cases}$$

1) On note M_n le point d'affixe Z_n dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a- Calcule Z_1 ; Z_2 ; Z_3 et Z_4 .

b- Placer les points M_1 , M_2 , M_3 , M_4 et M_5 .

2) Calcule le quotient : $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$ puis en déduire la nature du triangle $OM_{n+1}M_n$

Transformations géométriques du plan.

27

Soit (S) l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe Z' d'affixe M' tel que

$Z' = (1 + i)Z + 1 - i$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (S) .

28

Soit la similitude directe plane S de centre $A(1 ; 1)$; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformé le point M' d'affixe Z' .

Exprime Z' en fonction de Z .

29

Soient A, B, C et D les points d'affixes $Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$.

Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D .

1) Détermine le rapport k et l'angle θ de S

2) Détermine l'écriture complexe f associée à S .

3) Détermine l'affixe de Ω le centre de S

30

Détermine la traduction complexe de la transformation (Γ) dans chacun des cas suivants :

1) (Γ) est la translation qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$

2) (Γ) est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$.

3) (Γ) est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + i$.

31

Soit f la transformation définie par $Z' = aZ + 3i$

1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f si : $a = 2$ puis si $a = -i$.

2) Soient $A(1)$; $B(2 + i)$; $A'(2i)$; $B'(1 + i)$. Vérifie que $AB = A'B'$

3) Démontre qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

32

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : Z^3 - (4 + i\sqrt{3})Z^2 + (3 + 4i\sqrt{3})Z - 3i\sqrt{3} = 0$

1) Montre que (E) admet deux solutions réelles que l'on notera α et β puis une solution imaginaire pure que l'on notera ω .

2) Soit f , l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout nombre complexe Z , on a :

$$f(Z) = aZ + b.$$

a-Détermine les réels a et b pour que $f(\omega) = \omega$ et $f(\alpha) = \beta$.

b-Calcule le module et un argument de a .

c-Donne la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f .

33

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. A est le point d'affixe $2i$ et P^* le plan privé de A .

Soit T la transformation qui au point M d'affixe $Z \neq 2i$ associe le point M' d'affixe Z' tel que :

$$Z' = \frac{2iZ - 5}{Z - 2i}.$$

1) Montre que pour tout point M de P^* , le point M' est distinct de A .

2) Démontre que T est une bijection de P^* sur lui-même. Détermine sa réciproque T^{-1} .

3) a- Montre qu'un point M de P^* est invariant par T si et seulement si son affixe vérifie la relation : $Z^2 - 4iZ + 5 = 0$.

b- Trouve le réel α tel que : $Z^2 - 4iZ + 5 = (Z - 2i)^2 + \alpha$.

c- Montre alors que T admet deux points invariants B et C .

4) On appelle (D) la droite passant par O et dirigée par $\vec{v}$ et (D^*) la droite (D) privé de A .

Montre que (D^*) est globalement invariante par T .

5) a- Montre que pour tout $Z \neq 2i$, $|Z' - 2i| \times |Z - 2i| = 9$.

b- Soit (Γ) le cercle de centre A et de rayon 3. Montre que (Γ) est globalement invariante par T .

34 Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On donne quatre points $A; B; C$ et D d'affixes respectives : $Z_A = -2 + 6i$; $Z_B = 1 - 3i$; $Z_C = 5 + 5i$ et $Z_D = 2 + 4i$

- 1) Soit S la similitude plane directe qui tout point M d'affixe Z , fait correspondre le M' d'affixe Z' tel que : $Z' = 3iZ + 13 - 9i$.
 - a- Donne les éléments caractéristiques de S .
 - b- Quelle est l'image des points C et D par la similitude S ?
 - c- Montre que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.
- 2) Soit R la similitude plane directe qui transforme B et C et D en A .
 - a- Trouve la relation liant l'affixe Z d'un point M et l'affixe Z' de son image $R(M)$.
 - b- Donne les éléments caractéristiques de cette similitude (on appellera J le point invariant). Montre que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.
 - c- Que représente le point D pour le triangle ABC ?
- 3) Montre que J est un point de la droite (AB) . Donne une mesure en radian de l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$.

35 Soit α un nombre complexe.

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1 + i)Z^2 - 2i(\alpha + 1)Z + (i - 1)(\alpha^2 + 1) = 0$.
- 2) Soient Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation.
Trouve entre Z_1 et Z_2 , une relation indépendante de α .
- 3) Caractérise la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe Z_1 associe le point M_2 d'affixe Z_2 .
- 4) On pose $Z_1 = x + iy$ et $Z_2 = x' + iy'$.
 - a- Exprime x' et y' en fonction de x et y .
 - b- Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation $x + 2y - 1 = 0$?

Problèmes.

36 Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(Z) = \frac{iZ}{Z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe Z .

- 1) Détermine les coordonnées du point B dont l'affixe Z_B et telle que $f(Z_B) = 1 + 2i$
- 2) Soit Z un élément de E . on note r le module de $Z + i$ et α une mesure de son argument.
Exprime la forme trigonométrique de $f(Z) - i$ en fonction de r et α .
- 3) Soit A le point d'affixe $-i$
 - a) Détermine l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$
 - b) Montre que B appartient à (Γ) .

Partie A : Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$
- 2) Soit $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$
 - a- Montre que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution réelle notée z_0 que l'on Déterminera.
 - b- Factorise $P(Z)$ puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

Partie B:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (o, i, j)

On donne les points $A ; B$ et C d'affixes respectives : $Z_A = 2 ; Z_B = 4 + 2i ; Z_C = -2 + 4i$

- 1) a- Calcule le rapport : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ et en déduis la nature du triangle ABC
 b-Montre que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$

c-Détermine (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe Z vérifiant l'équation suivante :

$$|Z - 4 - 2i| = |Z + 2 - 4i|$$

- 2) Soit S la similitude du plan telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.

- a- Déterminons le rapport k et l'angle θ de la similitude S .
- b- Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S .
- c- En déduis le centre de la similitude S .