

Série d'exercices sur les nombres complexes.

Exercice 1.

1. Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants:

$$a) z_1 = \sqrt{3} + i; \quad b) z_2 = 1 + i; \quad c) z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants:

$$a) z = \sqrt{3} + 1 \quad b) z = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad c) z = -\cos \alpha - i \sin \alpha$$

$$d) z = \frac{-1 + i}{\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)} \quad e) z = 2 \left[\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right] \quad f) z = -e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

3. $\theta \in]-\pi, \pi[- \{0\}$.

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants:

$$a) z_1 = \sin \theta + i \cos \theta \quad b) z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta \quad c) z_3 = \sin \theta + 2i \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Exercice 2.

1. Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes:

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i$$

Déterminer le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

2. En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 3.

On considère le nombre complexe $u = -3 + 3i$.

1. Déterminer le module et un argument de u .

2. Déterminer le nombre complexe z défini par: $uz = 6\sqrt{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$.

En déduire les valeurs de $\cos \frac{17\pi}{12}$ et $\sin \frac{17\pi}{12}$.

Exercice 4.

On pose $Z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

1. Calculer Z^2 puis déterminer son module et un argument.

2. En déduire de ce qui précède le module et un argument de Z .

Exercice 5.

Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u \notin \mathbb{R}$.

Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, |1 + uz| = |1 + \bar{u}z| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.

1. En utilisant la formule de Moivre, montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

a) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ et $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.

b) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ et $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

c) $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ et $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$.

2. a) Vérifier que $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)} \right)$.

b) On pose : $a = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$, $b = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$, $c = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $d = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Trouver le module et l'argument des nombres complexes : $a + b$; c et d .

3. En utilisant la formule d'Euler:

a) Montrer que : $\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$; $\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$;

$$\sin 4\theta = \frac{1}{8}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}.$$

b) Linéariser : $\sin^5\theta$ et $\cos^2\theta\sin^3\theta$.

Exercice 7.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

a) $2z - 3\bar{z} + 2i = 0$ b) $z + (1 - i)\bar{z} + 3 - 2i = 0$ c) $z^2 + 5z + 6 = 0$ d) $z^2 - z + 1 = 0$

e) $z^3 - 8 = 0$.

2. On considère l'équation (E) : $z^3 - (1 - 4i)z^2 - (1 + 2i)z - 3 + 6i = 0$.

a) Vérifier que i est une solution de (E).

b) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure α et distincte de i .

c) Acheter la résolution de (E).

Exercice 8.

Soit α un réel de $]-\pi, \pi]$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4\sin\alpha z + 4 = 0$.

On appellera z_1 et z_2 les deux solutions de cette équation.

Calculer le module et un argument de chacune d'elles.

b) Calculer : $S = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ et $S' = z_1^2 + z_2^2$.

Pour quels réels de $] -\pi, \pi]$ a-t-on : $S' = 0$.

Exercice 9.

On désigne par α un nombre réel tel que : $-\pi < \alpha < \pi$.

1. Démontrer l'égalité: $\sin^2 \alpha - 2(1 + \cos \alpha) = -4\cos^4 \frac{\alpha}{2}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^2 - 2z\sin \alpha + 2(1 + \cos \alpha) = 0$.

3. Calculer en fonction de α le module et un argument des solutions de cette équation.

Exercice 10.

On considère le polynôme $P(z) = 2z^3 - 7z^2 + 22z + 13$.

1. Calculer $P(2 + 3i)$.

2. Exprimer $P(\bar{z})$ en fonction de $P(z)$.

3. Dédire des questions précédentes que $P(z)$ est factorisable par $z^2 - 4z + 13$ et effectuer cette factorisation.

4. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 11.

1. a) Vérifier l'égalité $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$.

En déduire qu'ils existent trois nombres complexes tels que $z^3 = 1$.

b) Ecrire ces trois nombres sous forme trigonométrique et placer les points correspondants dans le plan complexe.

2. On désigne par j celui des trois nombres qui a une partie imaginaire strictement positive.

Montrer que $\bar{j} = j^2 = -j - 1$.

Exercice 12.

On considère dans $\mathbb{C}$ le nombre complexe u tel que $u = -1 - 2i\sqrt{2}$.

a) Trouver les racines carrées de u .

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $2z^2 + 2iz + i\sqrt{2} = 0$.

Exercice 13.

1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants: $z_1 = 3 - 4i$ et $z_2 = 1 - i$.

2. Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $Z = 8i$.

3. Déterminer les racines sixièmes de l'unité.

4. z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E) : $z^4 = -7 + i\sqrt{2}$.

a) Vérifier que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E).

b) Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des

nombre complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

Exercice 14.

Soit M un point du plan complexe rapporté à un repère orthonormal.

Pour $z \neq 1$, on pose $Z = \frac{z-2i}{z-1}$.

On note $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ (x, y, X, Y sont des réels).

1. Calculer X et Y en fonction de x et y .
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M tels que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tels que Z soit un imaginaire pur.
4. Faire une figure représentant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 15.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z un nombre complexe et Z le complexe défini par : $Z = \frac{z-2i}{z-2-i}$.

On appelle A et B les points d'affixes respectives $2+i$ et $2i$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z , tels que:

- a) $|Z| = 1$;
- b) Z soit réel;
- c) Z soit imaginaire pure.

Exercice 16.

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ d'affixe z vérifiant:

- a) $|z+2-i| = 5$;
- b) $|iz-2+3i| = 3$;
- c) $\arg(iz) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$;
- d) $\arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$;
- e) $|z-4-i| = |z-1-3i|$.

Exercice 17.

Soit le polynôme de variable complexe z , $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + az - 3(2+i)$ où a désigne un nombre complexe.

1. Déterminer le nombre complexe a pour que $P(2+i) = 0$.

2. Vérifier qu'alors $P(z) = (z-2-i)(z^2-2z+3)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

4. Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B et C les points dont les affixes sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Déterminer la nature du triangle ABC .

Exercice 18.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tels que:

a) $z' = -z + 2 + i$

b) $z' = -\frac{1}{3}z + 2 - i$

c) $z' = -iz + 1 + i$

d) $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2 - 4i$

Exercice 19.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne l'affixe d'un point M par z_M .

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 18 = 0$.

Placer dans le plan les points B et C dont les affixes sont les solutions de l'équation, B étant le point dont l'affixe z_B a une partie imaginaire négative.

2. Soit $\mathcal{R}$ le quart de tour positif de centre O .

Montrer que $\mathcal{R}(B) = C$.

3. Soit A le point d'affixe $z_A = 3(1 - \sqrt{3})$.

Calculer un argument du nombre complexe $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

En déduire la nature du triangle ABC , puis construire A .

Exercice 20.

1. Soit f la transformation du plan complexe qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que : $z' = az + 3i$

Donner la nature et les éléments caractéristiques de f lorsque $a = 2$, puis lorsque $a = -i$.

2. On donne les points : A, B, A' et B' d'affixes respectives : $z_A = 1, z_B = 2 + i, z_{A'} = 2i$ et $z_{B'} = 1 + i$.

a) Vérifier que $AB = A'B'$.

b) Déterminer la rotation $\mathcal{R}$ telle que $\mathcal{R}(A) = A'$ et $\mathcal{R}(B) = B'$.

Exercice 21.

Soit $\mathcal{S}$ l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $z' = 3iz - 1 - 7i$.

1. a) Justifier que $\mathcal{S}$ est une similitude directe et préciser ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer l'expression analytique de $\mathcal{S}$.

2. Déterminer une équation de l'image par $\mathcal{S}$ de la droite (BC) , B et C étant les points d'affixes respectives 2 et $3 - i$.

3. Déterminer une équation de $(\mathcal{C}')$, image du cercle $(\mathcal{C})$ d'équation $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.