

SERIE D'EXERCICE N°1 (TSE-TSEXP)

EXERCICE 1 :

On pose $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = -1 + 3i$ et $z_3 = 1 - i$

1°) Mets sous la forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_1 + z_2 + z_3$; b) $z_1 - 3z_2$; c) iz_1^2 d) z_2^4 et e) $z_1 * z_2$

2°) Mets sous forme algébrique les complexes suivants :

a) $e^{i\pi}$; b) $e^{\frac{i\pi}{2}}$; c) $e^{-\frac{i\pi}{2}}$; d) $2e^{\frac{i\pi}{3}}$;
e) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; f) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

EXERCICE 2 :

c) 1°) Calcule i^2 ; i^3 ; i^4

d) 2°) En déduis la valeur de i^{2009} et i^{2006} puis en déduis les entiers n tels que i^n soit un imaginaire pur.

e) 3°) Détermine les entiers naturels n tels que $(i + 1)^4$ soit un réel négatif.

EXERCICE 3 :

Dans chacun des cas suivants, détermine le module et un argument de z.

a) $z = 1 + i \tan \theta$

b) $z = 1 - i \tan \theta$

c) $z = \cos \theta - i \sin \theta$

d) $z = -\sin \theta + i \cos \theta$

e) $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$ et $\theta \in [0; \pi]$

f) $z = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta + i \sin \theta}$

2-Ecris sous forme exponentielle le nombre complexe z dans les cas suivants :

$$z = \frac{2 + 2i}{\sqrt{3} + i} \quad z = (3 - \sqrt{3}i)(-1 + i) \quad z = \frac{-2}{\sqrt{3} + i} \quad z = \frac{\sqrt{3} + i}{(-2 + 2i)^2}$$

3-Etablis que $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}} \right)$ et $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} \right)$

EXERCICE 4 : Soit $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$; $z_2 = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ et $z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

a) Mets sous forme exponentielle z_1 et z_2

b) En déduis la forme algébrique des complexes $z_1 * z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; z_1^2 et $\frac{z_2^6}{z_1^3}$

c) Détermine les racines cubiques de z_3 puis en déduis que la somme de ces racines $z_0 + z_1 + z_2 = 0$

EXERCICE 5 :

Soit $J = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $U = 1 + J$

1- Démontre que $1 + J + J^2 = 0$

2- Calcule U^n ($n \in \mathbb{N}$) en fonction n

EXERCICE2 :

Soit $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ et $z_2 = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$

a- Ecris sous la forme exponentielle z_1 et z_2

b- En déduis la forme algébrique des complexes $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; z_1^2 et $\frac{z_2^6}{z_1^3}$

EXERCICE :6

On donne $Z = -8\sqrt{3} + 8i$ et $U = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

1- Ecris sous la forme trigonométrique le nombre complexe Z puis détermine les racines carrées de Z sous forme trigonométrique.

2- Calcule U^2 . Utilise ce résultat pour exprimer les racines carrées de Z sous leur forme algébrique. En déduis les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

EXERCICE 7:

On donne les nombres complexes : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

1- Détermine le module et un argument de z_1 et z_2 .

2- En déduis le module ; un argument et une forme trigonométrique des nombres

$z_1 \cdot z_2$ $\frac{1}{z_2}$ $\frac{z_1}{z_2}$ et z_2^{2016} .

3- Ecris z_3 sous forme algébrique puis en déduis les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ puis $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

EXERCICE 8 :

On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

1) Calcule z^2 puis son module et son argument

2) En déduis une forme trigonométrique de z

3) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$ puis celle de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

4) Construis les points A ; B et C d'affixes respectives z ; $-z$ et z^2

EXERCICE 9 :

1°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 1$

2-a) Développe $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$

b) Soit l'équation (E) : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$. En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$; détermine sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E).

3-) En déduis les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 10:

On donne le nombre complexe $z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

a. Exprime z^2 sous forme algébrique.

b. Exprime z^2 sous forme exponentielle.

c. En déduis la forme exponentielle.

EXERCICE 11 :

Soient $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

1-a) Ecris sous forme algébrique $z_1 \times z_2$.

b) Ecris sous forme exponentielle z_1 et z_2 puis $z_1 \times z_2$.

c) En déduis $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. On pose $z_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_1$.

a) Détermine le module et un argument de z_3

b) Démontre que z_3^{12} est un nombre réel.

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 .

a-) Donne une interprétation géométrique du module de z_1 et d'un argument de z_1 .

EXERCICE 12:

1-Détermine l'ensemble des M du plan tel que l'on a :

a- $|z - i| = 2$

b- $|\bar{z} - i| = 2$

c- $|z + 1 - 2i| = |\bar{z} - 1 - i|$

d- $\arg(z - 1 + 2i) = \frac{-\pi}{4} + k\pi$

EXERCICE 13 : le plan est muni d'un repère orthogonal $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de 1 et soit $Z = \frac{z+1}{z-1}$.

Détermine puis construis l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

a- $|Z| = 1$

b- Z est un réel

c- Z est un imaginaire pur.

Exercice 14 :

Soit z un nombre complexe distinct de $2 - i$ tel que : $Z = \frac{z + 3 - 2i}{z - 2 + i}$.

1°) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de celles de z.

2°) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) Z soit un nombre réel ;

b) Z soit un nombre imaginaire pur.

EXERCICE 15 :

1- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 1 = 0$

2- Soit $z = 4(7 + 24i)$. Montre que z_0 est une racine 4è de z .

3- En déduis une résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 - 4(7 + 24i) = 0$.

4- En déduis enfin les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$(F): [(\sqrt{2} + i)z]^4 - (7 + 24i) = 0.$$

EXERCICE :

1- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2z + 2 = 0$

2- En déduis les solutions des équations suivantes :

$$(E_1): (z - 2i)^2 - 2(z - 2i) + 2 = 0 ;$$

$$(E_2): (i\bar{z} + 3i + 3)^2 - 2(i\bar{z} + 3i + 3) + 2 = 0 \text{ et}$$

$$(E_3): \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - 2\left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 2 = 0.$$

EXERCICE 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. Unité graphique : 2cm

1) Détermine les racines carrées du nombre complexe $8 - 6i$

2) On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 + (-1 + i)z^2 + (2 + 2i)z + 8i$

a) Démontre que (z) admet une unique racine imaginaire pure αi qu'on déterminera

b) Détermine les complexes $a; b$ et c tels que $P(z) = (z - \alpha i)(az^2 + bz + c)$

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

3) On considère les points $A; B$ et C d'affixes respectives $-1 - i$; $2 - 2i$ et $2i$

a) Place les points $A; B$ et C

b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie votre réponse

c) Détermine l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme

4) On considère le point E d'affixe $2 + 2i$

a) Place le point E

b) Démontre que les points $A; B; C$ et E sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.