

QCM

Cocher la réponse exacte.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points $M(z)$ et $M'(z')$.

1. a. La distance MM' est égale à

☐ $|z - z'|$.

☐ $\|z - z'\|$.

☐ $|z + z'|$.

b. Si $\arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi]$, alors

☐ O, M et M' sont alignés.

☐ $z = z'$.

☐ $|z| = |z'|$.

c. Si $\arg(z) \equiv \arg(iz') [2\pi]$ et $|z| = |z'| = 1$, alors

☐ $z = z'$

☐ $z = iz'$.

☐ $z = -z'$.

2. Si A, B et C sont trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tels que

$z_B - z_A = 4(z_C - z_A)$, alors

☐ ABC est isocèle.

☐ (AB) et (AC) sont
perpendiculaires.

☐ A, B et C sont
alignés

3. Si A, B et C sont trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tels que

$z_B - z_A = 4i(z_C - z_A)$, alors

☐ ABC est isocèle.

☐ (AB) et (AC) sont
perpendiculaires.

☐ (AB) et (AC) sont
parallèles.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non réels.

Le conjugué de $Z = z_1 + iz_2$ est $\bar{Z} = z_1 - iz_2$.

2. Soit z un nombre complexe. Si z^3 est réel alors nécessairement z est réel.

3. Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

Si $|z| = |z'|$ alors nécessairement $z = z'$ ou $z = -z'$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 Mettre les nombres complexes ci-dessous sous forme algébrique.

$$2i + \frac{1}{i} - 1; \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}; \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2; \frac{(1-i)(2+i)}{i-2}.$$

2 Calculer le conjugué de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$$\frac{(3-2i)(5+i)}{3i(7+2i)}; \left(\frac{i-3}{1+i}\right)^2; (2-i)(3+2i)(2+i)(3-2i).$$

3 On donne les nombres complexes

$$z_1 = \frac{(11+13i)(11-13i)-(3-5i)-(3+5i)}{(7+3i)+(7-3i)};$$

$$z_2 = \frac{3-7i}{9+2i}; z_3 = \frac{3+7i}{9-2i}.$$

Montrer, sans effectuer de calcul, que z_1 est réel, $z_3 + z_2$ est réel et $z_3 - z_2$ est imaginaire.

4 Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants.

1. $z = a + i(a+1), \quad a \in \mathbb{R}.$

2. $z = 2i \sin \frac{a}{2}, \quad a \in [0, 2\pi[.$

3. $a(z-i) = i(z+1), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

5 Calculer le module de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$$(1+i)^4; (2-3i)^2; (-2+i)(1-3i)(1-4i); \frac{1-5i}{i+2\sqrt{3}}.$$

6 1. Montrer que pour tout nombre complexe z , $|z|=1$, si et seulement si, $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

2. En déduire que si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes tels que $|z_1|=|z_2|=1$ alors $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel.

7 Soit z un nombre complexe. Déterminer z pour que les nombres complexes z , $1-z$ et z^2 aient le même module.

8 Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réels, on considère le nombre complexe $z' = z^2$.

1. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z' .

2. Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit réel.

3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit imaginaire.

9 Soit A, B et C les points d'affixes respectives $2+i$, -1 et $3-2i$.

1. Déterminer l'affixe du point I milieu de $[BC]$.

2. a. Calculer AB, AC et BC.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

3. a. Déterminer l'affixe du point D symétrique de A par rapport à I.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

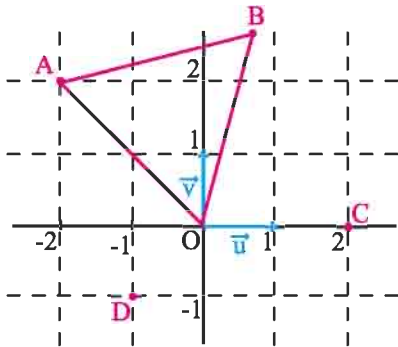
10 Placer dans le plan, les points A, B, C et D d'affixes respectives $-2+i$, $4i$, $\frac{7}{2}+2i$ et $\frac{3}{2}-i$.

Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

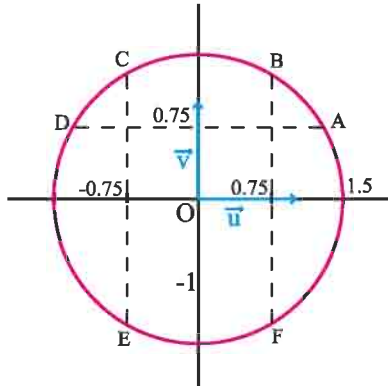
11 1. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|\bar{z}-1+2i|=3$.

2. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\frac{|iz+1-i|}{|\bar{z}+2+i|}=1$.

12 Dans le graphique ci-dessous le triangle OAB est équilatéral. Déterminer le module et un argument des affixes z_A , z_B , z_C et z_D des points A, B, C et D.



13 Déterminer à l'aide du graphique ci-contre, un argument des affixes z_A , z_B , z_C , z_D , z_E et z_F des points A, B, C, D, E et F.



14 Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

- a. $-8i$; $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$; $3i + \sqrt{3}$; -2.5 ; $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$; $5 + 5i$.
- b. $\frac{3(1+i\sqrt{3})}{(1+i)^2}$; $\frac{1+i}{1-i}$; $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^3$; $(1-i)^5(1+i)^3$.

15 Soit $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

- Déterminer $|z_1|$, $\arg(z_1)$, $|z_2|$ et $\arg(z_2)$.
- Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique de $z_1 z_2$.
- En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

16 Soit $z_1 = -1+i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1+i$.

- Déterminer $|z_1|$, $\arg(z_1)$, $|z_2|$ et $\arg(z_2)$.
- Déterminer $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.
- En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

17 Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes ci-dessous.

$$e^i; e^{-i\frac{\pi}{4}}; e^{2i\frac{\pi}{3}}; \frac{e^{i\pi}}{4}; 2ie^{i\frac{\pi}{6}}.$$

18 Donner la forme exponentielle des nombres complexes ci-dessous.

$$2\sqrt{3} - 2i; -5 - 5i; -1 + i\sqrt{3}; \frac{1+i}{\sqrt{2}}; \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}.$$

19 1. Donner la forme exponentielle du nombre

$$\text{complexe } z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}.$$

2. En déduire la forme algébrique de z^6 .

20 1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $-1+i$.

2. En déduire que $(-1+i)^{11} = 32 + 32i$.

21 Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants.

$$1. z = 2e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

$$2. z = -2e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

$$3. z = 2 + \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

22 Soit un réel θ de $]0, \pi[$.

1. Montrer que $1 + e^{i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et

$1 - e^{i\theta} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2. En déduire le module et argument de chacun des nombres complexes $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$.

23 Donner la forme exponentielle du nombre complexe z dans chacun des cas suivants.

1. $z = \cos \theta - i \sin \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

2. $z = \sin \theta + i \cos \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

3. $z = -\cos \theta - i \sin \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

4. $z = 1 + i \tan \theta$, $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

5. $z = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.

24 On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O . Soit un point M de $\mathcal{C}$ d'affixe t telle que $(\vec{u}, \vec{OM}) \equiv \alpha [2\pi]$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On pose $u = t^3$ et $v = 2t$.

1. Ecrire chacun des nombres complexes u et v sous la forme trigonométrique.

Soit $w = 2t - t^3$, A , B et C les points d'affixes respectives u , v et w .

2. Placer, dans le plan, les points A , B et C lorsque

$\alpha = \frac{\pi}{3}$.

3. Déterminer les réels α pour lesquels O , A et B sont alignés.

4. On suppose dans la suite que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

a. Quelle est la nature du quadrilatère $OABC$?

b. Déterminer le réel α pour que $OABC$ soit un rectangle.

25 Soit le nombre complexe $z = e^{i2\theta} - i$ avec $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

1. On désigne par M et M' les points images respectives de z et $\bar{z}$. Déterminer l'affixe du point N pour que $OMNM'$ soit un losange.

2. a. Montrer que $z = 2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$.

b. Mettre $\frac{z}{\bar{z}}$ sous la forme exponentielle.

c. En déduire la valeur de θ pour que $OMNM'$ soit un carré.

d. Construire le carré $OMNM'$ pour la valeur de θ trouvée.

26 Soit θ un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O .

Soit un point M de $\mathcal{C}$ d'affixe z tel que $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$.

1. Placer les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + \cos \theta$ et $z_B = -1 + i \sin \theta$.

2. a. Montrer que le quadrilatère $OAMB$ est un parallélogramme.

b. Montrer qu'il existe une valeur de θ tel que $OABM$ est un losange.

c. Donner une valeur approchée de θ à 10^{-1} près.

3. On désigne par $\mathcal{A}(\theta)$ l'aire du parallélogramme $OAMB$.

Montrer que $\mathcal{A}(\theta)$ est maximale lorsque $\theta = \frac{\pi}{3}$.

27 Soit φ un réel de $]0, \pi[$ et z le nombre

complexe défini par $z = \frac{1}{2}(\sin \varphi + i(1 - \cos \varphi))$.

1. Déterminer en fonction de φ , le module et un argument de z .

2. Déterminer un module et un argument des nombres complexes $z_1 = z - i$ et $z_2 = \frac{z}{z - i}$.

On considère les points M et N d'affixes respectives z_1 et z_2 .

1. Déterminer l'ensemble E décrit par le point M .

2. Déterminer l'ensemble F décrit par le point N .

3. Représenter les ensembles E et F .