

Travaux dirigés sur les nombres complexes

Exercice1 :

I°) On donne $Z_1 = \frac{5-i}{3+2i}$ et $Z_2 = \frac{5+i}{3-2i}$.

Par deux méthodes différentes montrer que $Z_1 + Z_2$ est un réel et $Z_1 - Z_2$ est un imaginaire pur.

II°) 1°) Démontrer que si les nombres complexes z_1 et z_2 ont pour module 1, le nombre

a°) $z' = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ Est un réel.

b°) $z' = \frac{z_1-z_2}{1+z_1z_2}$ est imaginaire pur.

2°) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, (\sqrt{3} + i)^{2n+1} - (-\sqrt{3} + i)^{2n+1}$ est réel.

III°) Déterminer la forme algébrique dans chacun des cas suivants :

$z_1 = i \sum_{k=0}^{751} i^k + 1$; $z_2 = (1 + 2i) \sum_{k=5}^{2036} i^k - 2 + 5i$.

Exercice2 :

I°) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a°) $\left\{ \begin{array}{l} |z|^3 = 8 \\ \arg((- \sqrt{3} + i)z) = \frac{\pi}{3} \end{array} \right. ; \text{ b°) } \left\{ \begin{array}{l} |\bar{z}|^2 \cdot |\sqrt{2} - i\sqrt{2}| = 18 \\ \arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{\bar{z}^3}\right) = \frac{\pi}{4} \end{array} \right.$

II°) On donne $A = 5\sqrt{2}(1 + i)$ et $B = -5(1 + i\sqrt{3})$.

1°) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivant : $A, \bar{A}, B, \frac{1}{A}, A \times B, \frac{B}{A}$ et $\frac{A}{B^2}$.

2°) Soit Z un nombre complexe tel que $AZ = B$.

a°) Ecris Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b°) En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$.

c°) Calculer z^{2027} .

Exercice3 :

I°) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$; $z_2 = \sin \alpha + i \cos \alpha$; $z_3 = -\cos \alpha + i \sin \alpha$; $z_4 = \tan \alpha + i$;

$z_5 = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$; $z_6 = 1 - \sin \alpha - i \cos \alpha$; $z_7 = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}$; $z_8 = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{7} + i \left(\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{5} \right)$;

$z_9 = \frac{1-\cos \alpha + i \sin \alpha}{1+\cos \alpha + i \sin \alpha}$ avec $\alpha \in [0, \pi[$; $z_{10} = \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$ avec $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

II°) Ecrire sous forme trigonométrique puis exponentielle les nombres complexes suivants :

$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_2 = (1 - i\sqrt{3})^4$; $z_3 = \frac{(1-i)^4}{(-\sqrt{3}+i)^3}$; $z_4 = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_5 = (1+i)e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_6 = (-1 - i\sqrt{3})^3 e^{i\frac{3\pi}{4}}$;

$z_7 = -2(\sin \alpha + i \cos \alpha)$; $z_8 = 5(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})e^{-i\frac{5\pi}{6}}$; $z_9 = \frac{3e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}}$; $z_{10} = \frac{-\cos 2x + i \sin 2x}{2 \cos 3x - 2i \sin 3x}$;

$z_{11} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\cos 5x + i \sin 5x)}{2(1-i)(\sin x - i \cos x)}$; $z_{12} = 1 + i(1 + \sqrt{2})$.

Exercice4 :

I°) On considère le nombre complexe : $z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$.

1°) Ecrire z^2 sous forme algébrique.

2°) Déterminer le module et un argument de z^2 . En déduire le module et un argument de z .

3°) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de : $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

4°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3} + 1) \cos x + (\sqrt{3} - 1) \sin x = \sqrt{2}$ puis place les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

II°) A°) Linéariser les expressions suivantes :

$A(x) = \cos^3 x$; $B(x) = \sin^3 2x$; $C(x) = \cos^2 x \cdot \sin^3 x$; $D(x) = \sin x \cdot \cos^4 x$; $E(x) = 3 \sin^3 2x + \sin^2 4x$

Exercice5 :

I°) Soient les nombres complexes suivants : $Z_1 = \frac{\sqrt{6-i\sqrt{2}}}{2}$; $Z_2 = 1 - i$; $Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2}$.

1°) Mettre Z_3 sous forme algébrique.

2°) Déterminer le module et l'argument de Z_1 et Z_2 .

3°) Ecrire Z_3 sous forme trigonométrique. En déduire : $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

II°) Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

1°) Calculer z^2 ; puis calculer le module et un argument de z^2 . Ecrire z^2 sous la forme trigonométrique

2°) En déduire le module et un argument de Z .

3°) En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice6 :

I°) Soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$; on pose $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$.

1°) Démontre que si a et b sont deux nombres complexes conjugués et que la partie imaginaire de a est positive.

2°) Calculer $a + b$ et ab . En déduire a et b .

II°) On considère les nombres complexes : $a = -\sqrt{3} + i$.

1°) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a .

En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

2°) Déterminer les entiers relatifs n pour les quels a^n est un nombre réel.

3°) Déterminer les entiers relatifs n pour les quels a^n est un nombre imaginaire pur.

Exercice7 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 1 + i\sqrt{3}$, $b = 1 - i\sqrt{3}$ et $c = 4$. On pose $z = \frac{b-c}{a-c}$.

1°) Déterminer z sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

2°) Interpréter géométriquement le module et un argument de z .

3°) Montrer que $(E) : z \in \mathbb{C}, |(1 + iz)^3(1 - i \tan \alpha)| = |(1 - iz)^3(1 + i \tan \alpha)|$ telle que $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

4°) Montrer que l'on a : $|1 + iz| = |1 - iz|$.

5°) En déduire que z est un réel.

6°) Montrer que $(E) \Leftrightarrow \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$.

7°) Exprimer $\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

8°) Soit z un nombre réel, on pose $z = \tan \varphi$ où $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. En déduire de la question.

9°) c°) et d°) que $(E) \Leftrightarrow e^{6i\varphi} = e^{2i\alpha}$. Déterminer alors les solutions z_0, z_1, z_2 de (E) .

Exercice8 :

On considère l'équation $(E) : z^4 - 2(1 + \sqrt{3})z^3 + 2(3 + 2\sqrt{3})z^2 - 4(3 + \sqrt{3})z + 8 = 0$

1°) Démontrer que si le complexe z_0 est solution de (E) alors son conjugué l'est aussi.

2°) Vérifier que le complexe $z_0 = 1 + i$ est une solution de l'équation (E) . En-déduire une seconde solution z_1 de l'équation.

3°) Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de l'équation.

4°) Représenter dans le plan complexe les points images des quatre solutions de l'équation (E) .

5°) Déterminer la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calculer en cm^2 l'aire de sa surface.

Exercice 9 :

I°) On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit le polynôme

$$P(z) = z^3 + 2(1 - 2 \cos 2\alpha)z^2 + 4(1 - 2 \cos 2\alpha)z + 8.$$

1°) Calculer $p(-2)$.

2°) Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$.

3°) Pour $a = 1, b = -4 \cos 2\alpha$ et $c = 4$. Résoudre $p(z) = 0$.

5°) Soient A, B et C les points images dans le plan complexe des solutions de l'équation $p(z) = 0$. Pour quelles valeurs de α le triangle ABC est-il équilatéral ?

II°) 1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (2^{\theta+1} \cos \theta)z + 2^{2\theta} = 0$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

2°) Soient A et D les points d'affixes les racines de l'équation précédente dans un plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer θ pour que le triangle OAD soit équilatéral.

III°) on considère le nombre réel α tel que $0 < \theta < \pi$.

a°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $(\sin^2 \alpha)z^2 + (\sin 2\alpha)z + 1 + \cos^2 \alpha = 0$.

b°) Soit z_1 et z_2 les solutions de (E) . Vérifier que $z_1^2 + z_2^2$ est un réel indépendant de α .

c°) On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé, les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 .

d°) Déterminer α tel que $\forall \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ on a : $M_1 M_2 = 2\sqrt{2}$.

Exercice 10:

I°) 1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$; $z + \frac{1}{z} = 0$ et $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$

2°) Soit le polynôme Q défini par : $Q(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$.

a°) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \frac{Q(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$.

b°) En-déduire la résolution de $Q(z) = 0$.

II°) 1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0$

2°) a°) Déterminer sous forme algébrique les racines sixièmes de l'unité.

b°) Calculer $(1 - i)^6$. En-déduire la forme algébrique des solutions de l'équation : $u^6 - 8i = 0$.

III°) 1°) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $-i$ sous forme trigonométrique et algébrique.

2°) En déduire la résolution de l'équation dans $\mathbb{C}$: $[(1 - i)z]^3 + i = 0$. On écrit ces solutions sous forme algébrique et trigonométrique

Exercice 11:

Soit β un réel de $]0; \pi[$, on considère A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectifs :

$z_A = 1 + e^{i\beta}$; $z_B = -1 + e^{i\beta}$ et $z_C = -z_B$.

1°) Déterminer la forme exponentielle de z_A, z_B et z_C .

2°) Montrer que les points A, B et C sont alignés.

3°) a°) Montrer que le triangle OAB est rectangle en O .

b°) Déterminer le réel β pour que le triangle OAB soit isocèle.

4°) a°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \sqrt{2}(1 + i)z - 1 + i = 0$

b°) Vérifier que les solutions de (E) s'écrivent sous la forme $z_1 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $z_2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{5\pi}{8}}$.

c°) En déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.

d°) Placer les points A, B et C dans le plan muni d'un repère orthonormé.

5°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_β) : $z^2 - 2e^{i\beta}z + 2i \sin \beta e^{i\beta} = 0$

Exercice 11:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère dans le plan complexe deux points M_1 et M_2 tels que les points O, M_1 et M_2 sont distincts deux à deux et non alignés.

Soient z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2 et M un point du plan dont son affixe vérifie la relation : $z = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}$.

1°) a°) Montrer que : $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$.

b°) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle $OM_1 M_2$.

2°) Montrer que si $z_2 = \overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe des réels.

3°) On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et de mesure d'angle $\alpha \in]0; \pi[$.

a°) Calculer z_2 en fonction de z_1 et α .

b°) Montrer que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1 M_2]$.

4°) Soit θ un réel donné de l'intervalle $]0; \pi[$.

On suppose que z_1 et z_2 les solutions de l'équation : $6Z^2 - (e^{i\theta} + 1)Z + (e^{i\theta} - 1) = 0$.

a°) Sans calculer z_1 et z_2 montrer que : $z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$.

b°) Déterminer en fonction θ la forme trigonométrique du nombre complexe z .

Exercice12 :

Soit l'équation $(E_m) = z^2 - m(m + i)z + im^3$ avec m un paramètre complexe et z l'inconnue complexe.

1°) On pose $m = 1 + i$, écrire et résoudre l'équation (E_{1+i}) ainsi obtenue.

2°) On pose $m = 0$, écrire et résoudre l'équation (E_0) ainsi obtenue.

3°) On pose $m = i$ écrire et résoudre l'équation (E_i) ainsi obtenue.

4°) Résoudre l'équation (E_m) dans le cas général et montrer que les racines s'écrivent simplement en fonction de m .

5°) Sachant que $m = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec r le module et un argument de m .

Ecrire sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E_m) en fonction de r et θ .

6°) Lorsque $m = 4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$, donner l'écriture de m sous forme trigonométrique et déterminer les racines de l'équation $(E_{4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}})$ obtenue.

7°) On désigne par z la racine qui n'est pas imaginaire pure.

Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $t^3 = z$ et représenter géométriquement les images des solutions dans le plan complexe.

Exercice13 :

1°) calculer les racines complexes z_1 et z_2 de l'équation : $z^2 - \frac{1}{5}z + \frac{1}{10} = 0$; z_1 désigner la solution de partie imaginaire positive.

2°) Soit θ le nombre réel de l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $\tan \theta = 3$. Montrer que z_1 et z_2 sont égaux

respectivement à $\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{10 \cos \theta}$ et $\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{10 \cos \theta}$.

3°) On pose $z_n = z_1^n + z_2^n$.

Montrer que z_n est un nombre réel que l'on calculera en fonction de n et θ .

4°) a°) Montrer que $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$. En déduire que $10 \cos \theta = \sqrt{10}$.

b°) Déterminer la limite de z_n quand n tend vers ∞ .

Exercice14 :

On considère l'équation $(E_n) = (iz)^n = (z + 2i)^n$ où n est un entier supérieur ou égal 2.

1°) a°) Lorsque $n = 2$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) puis écris sous forme trigonométrique les solutions ainsi obtenue où $\operatorname{Re}(z_1) < 0$.

b°) On pose $u = \frac{\sqrt{2}}{2} z_1$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, u^k + \bar{u}^k = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$.

c°) On considère l'application f définie dans l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$.

Montrer que $f(z) = \frac{1}{2}[(1 + uz)^n + (1 + \bar{u}z)^n]$.

d°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$.

2°) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A d'affixe $-2i$ et M d'affixe z .

a°) Montrer que : si z est solution (E_n) alors $OM = AM$.

b°) Déduis-en que toute solution de (E_n) peut s'écrire sous la forme $\alpha - u$ où a est nombre réel.

3°) a°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_n) .

b°) Montrer que les solutions de (E_n) peuvent s'écrire sous la forme $z_k = -i + \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Exercice15 :

On considère l'équation $(E): z^2 + z + \frac{3}{8} - i\frac{\sqrt{3}}{8} = 0$.

1°) a°) Ecrire $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sous forme exponentielle.

b°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

c°) Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

2°) Soit $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ on considère l'équation $(E_\theta): 2z^2 + 2z - i \sin(2\theta)e^{i2\theta} = 0$.

a°) Montrer que : $z_1 = -\cos \theta \cdot e^{i\theta}$ est solution de (E_θ) puis déterminer l'autre solution.

b°) En déduire que $-1 + \cos \theta e^{i\theta} = i \sin \theta e^{i\theta}$.

3°) Le plan est rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = -\cos \theta \cdot e^{i\theta}$ et $z_2 = i \sin \theta \cdot e^{i\theta}$.

a°) Vérifier que $OM_1^2 + OM_2^2 = M_1M_2^2$.

b°) En déduire que le triangle OM_1M_2 est inscrit dans un cercle (C) dont on déterminera le rayon et l'affixe z_I du centre I puis construire ce cercle.

4°) Placer le point le point M_1 puis enduire l'emplacement de M_2 pour $\theta = \frac{\pi}{6}$.

5°) Déterminer la valeur θ_0 de θ pour laquelle d'aire A du triangle OM_1M_2 est maximale.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 8z + 64 = 0$.

2°) On considère les I, B et K d'affixes respectives $z_I = 4 + 4i\sqrt{3}$, $z_B = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $z_K = 8i$.

a°) Calculer le module et un argument de z_I .

b°) Donner la forme exponentielle z_I et z_B .

c°) Montrer que les points I, B et K sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon

d°) Placer les points I, B et K dans le plan muni d'un repère orthonormé puis construire le cercle.

Dans le reste d'exercice on compléter la figurer de question ci-dessus au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3°) On considère les points I', B' et K' d'affixes respectives $z_{I'} = z_I \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_{B'} = z_B \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

a°) Montrer que $z_{B'} = 8$.

b°) Calculer le module et un argument du nombre $z_{I'}$, puis déterminer sa forme algébrique.

Exercice16:

1°) On considère dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$,

$z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

1°) Placer les points A, B et C dans un repère orthonormé.

2°) a°) Vérifier que : $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et en-déduire la nature du triangle ABC .

b°) Déterminer le centre et le rayon (Γ) circonscrit au triangle ABC .

II°) On considère le nombre réel $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et l'équation $(E_\theta): z^2 - 2ie^{i\theta}z - 4(1 - i)e^{i2\theta} = 0$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) .

2°) On considère dans le plan complexe et les points M et M' d'affixes respectives $2e^{i\theta}$ et $2(-1 - i)e^{i\theta}$ on note par N l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a°) Déterminer l'ensemble (C) des points M quand θ décrit $]0; \frac{\pi}{2}[$.

b°) Déterminer l'affixe z_N de point N .

c°) Montrer que : $OMNM'$ est un parallélogramme.

d°) En-déduire une construction du point M' à partir du point M .

3°) a°) Déterminer en fonction de θ le module et un argument de $2(-1 + i)e^{i\theta}$.

b°) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque θ varie dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.

4°) Soit l'équation $(E'_\theta): (\sqrt{2}z - 1)^3 = (-2 + 2i)e^{i\theta}z^3$.

a°) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $(-2 + 2i)e^{i\theta}$. Soit $x \in]0; \pi[$ montrer que :

$$\frac{\sqrt{2}z - 1}{z} = \sqrt{2}e^{ix} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 + i \cot \frac{x}{2} \right).$$

c°) En-déduire les solutions de l'équation (E'_0) .

Exercice17:

A°) Soit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{-20}{(1-i)z+2i}$.

1°) Calculer le complexe z_0 dont l'image par f n'est pas définie.

2°) Déterminer le module et un argument de z_0 .

B°) On se place dans le corps des nombres complexes, on pose : $h_n(z) = z^n(1 - z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $h_n(z) = h_0(z)$.

2°) On se propose de résoudre suivant : $(S) : \begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$

a°) Montrer que l'équation $|z| = |1 - z|$ admet une infinité de solution. (on Prendre $z = x + iy$)

b°) Soit z_0 l'une de ces solutions, calculer en fonction du module r et de l'argument θ de z_0 . L'argument de $1 - z_0$, le module et l'argument de $(1 - z_0)z_0^n$.

c°) En déduire que le système (S) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$.

Quel est l'ensemble des solutions du système.

Exercice 18 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère les points I et A d'affixes respectives 1 et -2 . Le point K est le milieu de $[IA]$. On appelle (C) le cercle de diamètre IA .

1°) Soit B Le point d'affixe b où $b = \frac{1+4i}{1-2i}$. Ecrire b sous forme algébrique puis montre que B appartient au cercle (C) .

2°) Soit D un point du cercle (C) telque $(\overrightarrow{KI}; \overrightarrow{KD}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et soit d'affixe D .

a°) Quel est le module de $d + \frac{1}{2}$?

b°) Donne un argument de $d + \frac{1}{2}$ puis en déduis d .

c°) Détermine le réel α vérifiant l'égalité $\frac{1+2ai}{1-ai} = \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$.

3°) Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m = \frac{1+2xi}{1-xi}$. On pose $z = \frac{m-1}{m+2}$.

Calculer z puis en déduis la nature du triangle AIM .

4°) soit N un point, différent de A , du cercle (C) et n affixe. Démontre qu'il existe un réel y tel que $n = \frac{1+2yi}{1-yi}$.

Exercice 19 :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (Unité graphique 5cm). On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

1°) Donne la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B

2°) Dans la suite de l'exercice. M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$ où $\alpha \in [0; 2\pi[$. On considère l'application f qui à tout point M de (C) on associe $f(M) = MA \times MB$.

a°) Montre que : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha} \sin \alpha$.

b°) Montre l'égalité suivante : $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right) e^{i\alpha} \right|$.

c°) En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2 \sin \alpha \right)^2}$.

3-a°) En utilisant 2.c, montre qu'il existe deux points M de (C) , dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donne cette valeur minimale.

b°) En utilisant 2.c, montre qu'il existe un seul point M de (C) , dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donne cette valeur maximale.

Exercice 20 :

Dans le plan complexe P le repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = -2i$ et $z_B = -i$. Soit la fonction $f : P - \{B\} \rightarrow P$

$$M(Z) \mapsto M'(Z') / Z' = \frac{Z+2i}{1-iZ}$$

1°) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

2°) Après avoir interprété géométriquement $|f(Z)|$ et $\arg[f(Z)]$, déterminer les ensembles suivants :

$(E_1): \{M(Z) \in (P) / f(Z) \in \mathbb{R}\}$; $(E_2): \{M(Z) \in (P) / f(Z) \in \mathbb{R}_+\}$

$$(E_3): \{M(Z) \in (P) / f(Z) \in \mathbb{R}_-\} \quad ; (E_4): \{M(Z) \in (P) / f(Z) \in i\mathbb{R}\}$$

$$(E_5): \{M(Z) \in (P) / f(Z) \in i\mathbb{R}_+\} \quad ; (E_3): \{M(Z) \in (P) / f(Z) \in i\mathbb{R}_-\}$$

Exercice 21 :

Déterminer les ensembles suivants :

- 1°) L'ensemble (Ω) des points M d'affixes Z tels que $|z - i| = 2$.
- 2°) L'ensemble (Γ) des points M d'affixes Z tels que $|\bar{z} - i| = 2$.
- 3°) L'ensemble (T) des points M d'affixes Z tels que $|z + 1 - 2i| = |\bar{z} - 1 - i|$.
- 4°) L'ensemble (λ) des points M d'affixes Z tels que $\arg(z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi$.
- 5°) L'ensemble (φ) des points M d'affixes Z tels que $\arg(2\bar{z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.
- 6°) L'ensemble (D) des points M d'affixes Z tels que $\arg\left(\frac{\bar{z}-2i}{z+3+i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- 7°) L'ensemble (E) des points M d'affixe Z tel que $3 \leq |z + 2 - i| \leq 5$.

Exercice 22 :

- 1°) a°) Montrer que l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe $z = x + iy$ (où x et y sont des réels) vérifie la relation $(2 + 3i)z + (-2 + 3i)\bar{z} - 12i = 0$ est une droite (D) que l'on déterminera par une équation cartésienne.
- b°) Représenter cette droite dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- 2°) Montrer qu'il existe un seul réel z_0 et un seul imaginaire z_1 qui vérifie la relation (1) puis calculer z_0 et z_1 .
- 3°) Soient A et B les points du plan complexe d'affixes respectives $-\frac{4}{3}i$ et $4 + \frac{4}{3}i$. Montrer que la droite (D) est médiatrice du segment $[AB]$.
- 4°) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la relation :

$$\left| -\frac{4}{3}i - z \right| = \left| 4 + \frac{4}{3}i - z \right|$$

- 5°) Déterminer et représenter la graphique précédent l'ensemble des points M du plan dont l'affixe dont l'affixe z vérifie : $\arg\left(\frac{-4i-3z}{12+4i-3z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k étant un entier relatif.

Exercice 23 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -1 + i, z_B = -2$ et $z_C = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$. Soit f l'application du plan privé de A dans le plan qui, à tout point M d'affixe z distinct de z_A on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z+2}{z+1-3i}$.

- 1°) Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 3iz - 2 = 0$.
- 2°) Déterminer les affixes des points invariants par f .
- 3°) Déterminer l'ensemble des points M tels que M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1.
- 4°) En posant $z = x + iy$, déterminer $Im(z')$ en fonction de x et y . Déduis-en l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.
- 5°) a°) Montrer que pour tout $z \neq -1 + 3i$, on ait l'équivalence : $\frac{z+2}{z+1-3i} = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z - z_C)(\bar{z} - \bar{z}_C) = \frac{5}{2}$.
- b°) Déduire-en l'ensemble des points M tels que M' ait une affixe imaginaire pure.

Exercice 24 :

Le plan Complexe (P) est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $(E): z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$.

- 1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.
- 2°) On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4 + i, 4 - i$ et $-i$. Placer ces points sur une figure que l'on complètera dans la suite de l'exercice.
- 3°) Le point Ω est le point d'affixe 2, on appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- a°) Calculer l'affixe de S .
- b°) Démontrer que les points A, B, S et C appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.
- 4°) Pour tout point M d'affixe z tel que $z \neq 0$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.
- a°) Déterminer les affixes des points A', B' et C' associés respectivement aux points A, B et C .

b°) Vérifier que A', B' et C' appartiennent à un cercle (C') de centre P et de rayon r que l'on déterminera.

5°) Soit M un point de cercle (C) .

a°) Démontrer que : $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.

b°) En-déduire l'ensemble auquel appartiennent les points M' .

Exercice 25 :

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout réel x , associe $f(x) = \frac{-1-2ix}{2+ix}$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par M le point d'affixe $f(x)$

1°) Déterminer l'ensemble (E) des réels x tel que $|f(x)| \leq 1$ où $|f(x)|$ désigne le module du nombre complexe $f(x)$.

2°) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} \leq |f(x)| \leq 2$.

3°) a°) calculer $f(x) + \frac{5}{4}$ et en déduire que lorsque x parcourt $\mathbb{R}$ les points M appartiennent à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

b°) Retrouver à l'aide de la question 3-a°) le résultat du 2°)

c°) On désigne par θ l'argument de $f(x)$ appartiennent à $[0; 2\pi[$. A l'aide de la question 3-a°) démontrer que $|\sin \theta| \leq \frac{3}{5}$.

Exercice 26 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_n d'affixes

$z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ avec n est un entier naturel.

1°) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n puis exprimer z_n en fonction de z_0 et n .

2°) Donner z_0, z_1, z_2, z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

3°) Placer les points M_0, M_1, M_3 et M_4 (unité graphique 3 cm).

4°) Déterminer la distance OM_n en fonction de n .

5°) a°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, M_n M_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$.

b°) On pose $L_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1}$. Déterminer L_n en fonction de n , puis calculer sa limite quand n vers $+\infty$.

5°) Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{OM_0}, \vec{OM_n})$ en fonction de n pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés ?

Exercice 27 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère l'application F qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = t^3 z + t(t+1)$ où t désigne un nombre complexe quelconque.

1°) Déterminer l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une translation puis caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

2°) Déterminer l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ puis caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

3°) Donner les éléments caractéristiques de F pour $t = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 28 :

1°) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe plane de centre $\Omega(1+i)$, de rapport $k=2$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

2°) Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = -1-i, z_B = -i, z_C = 1+3i$ et $z_D = 5+i$.

a°) Déterminer le rapport K et l'angle θ de (S) .

b°) Déterminer l'écriture complexe associée à (S) .

c°) Déterminer l'affixe de Ω .

3°) On donne les points $A(2), B(4+2i)$ et $(-2+4i)$. Soit (S) la similitude directe du plan telle que : $s(A) = A$ et $s(B) = C$.

a°) Déterminer le centre, le rapport K et l'angle θ de la similitude (S) .

b°) Déterminer l'expression de la bijection complexe associée à (S) .

4°) Soient les points A, B et C d'affixes respectives $3 - i, -2i$ et $2 - 2i$.

Déterminer l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de la similitude directe plane (S) de centre B et qui transforme A en C .

5°) Soit (S) le système qui, à tout point $M(x; y)$ d'affixe z associe le point $M'(x'; y')$ d'affixe z' tels que :

$$\begin{cases} x' = -x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} \\ y' = -\sqrt{3}x - y + 2 \end{cases}$$

Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe (S).

Exercice :

1°) Soit $(0, \vec{u}, \vec{v})$ un repère complexe et soit la transformations S pour laquelle, tout point M d'affixe z a pour image M' d'affixe z' définie par :

$$\begin{cases} x' = ax - by + 1 \\ y' = bx + ay + 1 \end{cases} \text{ avec } M(x; y) \text{ et } M'(x'; y').$$

a°) Montrer que $z' = z_0 z + 1 + i$ avec $z_0 = a + ib$ où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

b°) Déterminer la nature complexe z_0 pour que S soit une translation. Donner alors l'élément caractéristique de cette translation.

c°) Déterminer z_0 pour que S soit une rotation d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$. Trouver l'autre élément caractéristique.

d°) Peut-on déterminer z_0 pour que S soit une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$? Si oui, donner l'autre élément caractéristique.

e°) Caractériser la transformation S si $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2°) On considère un cercle de centre O , A un point de cercle et M un point décrivant ce cercle mais distinct de A . Pour tout point N du plan tel que AMN soit un triangle équilatéral de sens indirect.

a°) Soit la similitude directe S' de centre A transformant le point M en I (I étant le milieu de segment $[MN]$). Déterminer le rapport et l'angle de S' .

b°) Placer l'image O_1 du centre O de ce cercle par S' .

c°) Déterminer l'ensemble (E) décrit par le point I lorsque M décrit tout le cercle sauf le point A puis construire cet ensemble.

Exercice29 :

I°) On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(i\sqrt{2} + 1)z - 2i\sqrt{2}$.

1°) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution unique imaginaire pure z_0 .

2°) Déterminer les réels a et b tels que : $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

II°) On considère les points A, B, j et k d'affixes respectives : $z_A = 1 + i, z_B = 1 - i, z_j = i\sqrt{2}$ et $z_k = e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

1°) Placer les points A, B, j et k sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure dans la suite de l'exercice.

2°) Soit L le symétrique du point J par rapport au point K . Déterminer l'affixe du point L .

3°) Montrer que les points A, B, j et k appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4°) Soit D le point d'affixe $z_D = -1 + i$. On considère la rotation r de centre O qui transforme j en D .

a°) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r .

b°) Soit C l'image du point L par la rotation r . Déterminer l'affixe du point C .

5°) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

Exercice30 :

I°) On note f l'application affine du plan lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tels que : $z' = [\lambda - (\lambda^2 - 1)i]z - 2i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

1°) Quelle est la nature de f pour $\lambda = 1$? Préciser alors son élément caractéristique.

2°) Pour quelle de λ , f est-elle une homothétie ? Donner ses éléments caractéristiques.

3°) Existe-t-il de valeur de λ pour que f soit une rotation ? Si oui préciser ses éléments caractéristiques.

II°) Le plan Complexe est muni du repère orthonormé directe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 2 cm . Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et f_θ

l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (1 + i \tan \theta)z - i \tan \theta$.

- 1°) Déterminer la nature et les éléments caractéristique de f_θ .
- 2°) Soient Ω le point d'affixe 1 et M un point du plan distinct de Ω . Montrer que : si θ n'est pas nul, alors $MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M . Pour quelle valeur de θ , ce triangle est-il isocèle ?
- 3°) On pose dans cette partie $\theta = \frac{\pi}{4}$ et on note A, B, C et D les points d'affixes respectives $i, 2i, -1$ et $-1 + i$
- a°) Placer les points A, B, C et D dans le plan.
- b°) Démontrer que : $ABCD$ est un parallélogramme dont on précisera l'aire en cm^2 .
- c°) Donner l'expression analytique de $f_{\frac{\pi}{4}}$.
- d°) En déduire les coordonnées des points A', B', C' et D' image respective par $f_{\frac{\pi}{4}}$ des points A, B, C et D .
- e°) Placer ces images dans le plan et montrer que : $A'B'C'D'$ est un parallélogramme dont on précisera l'aire en cm^2 .