

EXERCICE DE SYNTHÈSE (Inspirée du BAC 2025) :

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) définie sur $]0; +\infty[$ par : $y' + y = \frac{e^{-x+1}}{x}$

1. Résoudre l'équation $(E_0) : y' + y = 0$
2. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = e^{-x+1} \ln x$. Vérifier que h est une solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E)
4. Déterminer f_1 la solution particulière de (E) vérifiant $f_1(1) = 0$

Partie B :

Soit la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x \ln x$.

1. Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[, g'(x) < 0$
2. Dresser le tableau de variation de g
3. Montrer que g est une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle à préciser
4. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$
5. Montrer que $1,7 < \alpha < 1,8$
6. Préciser le signe de g sur $[1; +\infty[$

Partie C :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} (-x+1) \ln(-x+1) & \text{si } x < 1 \\ e^{-x+1} \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2cm.

- 1)
 - a. Montrer que f est défini sur $\mathbb{R}$
 - b. Rappeler les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$
 - c. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement si possible les résultats obtenus.
 - d. Étudier la branche infinie de C_f en $-\infty$
- 2)
 - a. Montrer que f est continue en 1
 - b. Étudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter géométriquement si possible les résultats obtenus
- 3)
 - a. Calculer $f'(x)$ sur $]-\infty; 1[$ et étudier son signe
 - b. Montrer que $\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)e^{-x+1}}{x}$. En déduire le signe de f' sur $]1; +\infty[$
- 4) Dresser le tableau de variation de f
- 5) Tracer la courbe représentative C_f de f dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Partie D :

- 1) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$
 - a. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1}
 - b. Préciser l'ensemble de définition de h^{-1} et tracer sa courbe dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 2) Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=0$. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$I_n = \int_{-1}^0 (-x+1) [\ln(-x+1)]^n dx$$

- a. Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties
- b. En déduire la valeur de A
- c. En posant $t = -x+1$, montrer que $I_n = \int_1^2 t (\ln t)^n dt$
- d. Démontrer que pour tout $t \in [1; 2] : 0 \leq \ln t \leq \ln 2$
- e. En déduire que pour tout $n \geq 1 : 0 \leq I_n \leq \frac{3}{2} (\ln 2)^n$
- f. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

g. Montrer que la suite (In) est décroissante

RESOLUTION :

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) définie sur $]0; +\infty[$ par : $y' + y = \frac{e^{-x+1}}{x}$

1. Résolvons l'équation (E₀) : $y' + y = 0$

Extraction : $y' + y = 0$

Liaison : résolution des équations différentielles du 1^{er} ordre sans 2nd membre sous la forme $ay' + by = 0$ (solution générale : $ke^{-\frac{b}{a}x}$)

Itinéraire : pour la résolution je dois juste indiquer la forme générale des solutions des équations différentielles du 1^{er} ordre sans 2nd membre en remplaçant a et b par 1. Donc $-\frac{b}{a} = -1$

Traitement : l'ensemble des solutions de (E₀) sont sous la forme $y = ke^{-x}$

Evaluation : $y' = -ke^{-x}$. En faisant $y' + y = -ke^{-x} + ke^{-x} = 0$. Le résultat est bon.

2. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = e^{-x+1}\ln x$. Vérifions que h est une solution particulière de (E) :

Extraction : $h(x) = e^{-x+1}\ln x$; (E) : $y' + y = \frac{e^{-x+1}}{x}$; vérification de h comme solution de (E)

Liaison : équations différentielles du 1^{er} ordre avec 2nd membre, dérivées usuelles ln et expo

Itinéraire : pour montrer que h est solution de (E) je dois montrer que $h' + h = \frac{e^{-x+1}}{x}$. Donc je dois dériver h qui est un produit de deux fonctions. Ensuite j'additionne h' et h pour vérifier le 2nd membre.

Traitement :

$$h = e^{-x+1}\ln x \rightarrow \text{Posons } \begin{cases} U = e^{-x+1} \rightarrow U' = -e^{-x+1} \\ V = \ln x \rightarrow V' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$h' = U'V + V'U = -e^{-x+1}\ln x + \frac{e^{-x+1}}{x}$$

$$h' + h = -e^{-x+1}\ln x + \frac{e^{-x+1}}{x} + e^{-x+1}\ln x = \frac{e^{-x+1}}{x}$$

Donc h est solution de (E)

Evaluation : la vérification étant déjà une évaluation et on a le résultat escompté donc c'est cohérent.

3. Déduisons-en l'ensemble des solutions de (E)

Extraction : (E) : $y' + y = \frac{e^{-x+1}}{x}$; $h = e^{-x+1}\ln x$ (solution particulière) ; $y = ke^{-x}$ (solution générale) ; détermination de l'ensemble des solutions de (E)

Liaison : équations différentielles du 1^{er} ordre avec 2nd membre

Itinéraire : pour trouver l'ensemble des solutions de (E) je dois faire la somme entre l'ensemble des solutions de (E₀) et la solution particulière de (E)

Traitement : l'ensemble des solutions de (E) est $y = ke^{-x} + e^{-x+1}\ln x$

Evaluation : $y = y_H + y_P$ donc c'est cohérent.

4. Déterminons f₁ la solution particulière de (E) vérifiant $f_1(1) = 0$

Extraction : $y = ke^{-x} + e^{-x+1} \ln x$

Liaison : équations différentielles du 1^{er} ordre avec 2nd membre

Itinéraire : pour trouver f_1 je pose $y(1) = 0$ pour trouver la valeur de k

Traitement :

$$y(1) = 0 \rightarrow ke^{-1} + e^0 \ln 1 = 0 \rightarrow ke^{-1} = 0 \rightarrow k = 0$$

$$f_1(x) = e^{-x+1} \ln x$$

Evaluation : f_1 est solution de (E) et est identique à h . On sait déjà que h vérifie (E) donc f_1 aussi vérifie (E). Le résultat est cohérent.

Partie B :

Soit la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x \ln x$.

1. Montrons que $\forall x \in [1; +\infty[, g'(x) < 0$

Extraction : $g(x) = 1 - x \ln x$; vérification du signe de g' sur $[1; +\infty[$

Liaison : fonction $\ln$

Itinéraire : pour montrer que $g'(x) < 0$ sur $[1; +\infty[$, je dois dériver g et étudier son signe. 1 étant une constante sa dérivée est nulle. La partie $x \ln x$ se comporte comme un produit de deux fonctions différentes donc j'applique la dérivée d'un produit. Avant de dériver j'indique aussi le domaine de dérivabilité de g

Traitement : on sait que $\ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc sur $[1; +\infty[$ et comme x est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1; +\infty[$ alors par produit g est dérivable sur $[1; +\infty[$

$$g(x) = 1 - x \ln x \rightarrow \begin{cases} U = -x \rightarrow u' = -1 \\ V = \ln x \rightarrow v' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$g'(x) = (-1) \ln x + \frac{1}{x}(-x) = -\ln x - 1 = -(\ln x + 1)$$

Étudions le signe de g' :

On sait que pour tout $\forall x \in [1; +\infty[, \ln x > 0 \rightarrow \ln x + 1 > 1$ donc $\ln x + 1 > 0 \rightarrow -(\ln x + 1) < 0$

Conséquence : $\forall x \in [1; +\infty[, g'(x) < 0$

Evaluation : en regardant g' on voit que dans la parenthèse nous avons la somme de deux nombres positifs avec un - devant donc le résultat est cohérent.

2. Dressons le tableau de variation de g :

Extraction : $g(x) = 1 - x \ln x$; $g'(x) = -(\ln x + 1)$; $g'(x) < 0$; tableau de variation de g

Liaison : étude de fonction $\ln$

Itinéraire : pour dresser le tableau de variation il me faut les limites, la dérivée et le signe de la dérivée. J'ai déjà les deux derniers mais pas encore les limites aux bornes de D_g . Je dois donc les calculer.

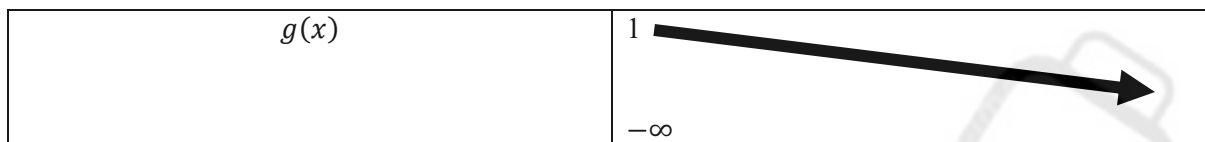
Traitement :

Calculons les limites de g :

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x \ln x = -\infty$$

Dressons le tableau de variation de g :

x	1 $+\infty$
$g'(x)$	-



Evaluation : la dérivée est négative, la fonction est décroissante vers $-\infty$ donc c'est cohérent.

3. Montrons que g est une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle à préciser

Ici on n'a pas besoin de l'algorithme. On voit tout simplement que d'après le tableau de variation, g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ donc **g est une bijection de $[1; +\infty[$ vers $g([1; +\infty[) =]-\infty; 1]$** (prendre bien soin d'inverser les bornes)

4. Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$:

Extraction : $g(x) = 1 - x \ln x$, tableau de variation, détermination de α

Liaison : théorème de la bijection

Itinéraire : pour montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$ je dois montrer que 0 se trouve dans l'intervalle image de $[1; +\infty[$. Et comme g est bijective, j'applique le théorème de la bijection.

Traitement :

On sait que g est bijective de $[1; +\infty[$ vers $]-\infty; 1]$. Or $0 \in]-\infty; 1]$. Donc d'après le théorème de la bijection **l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$**

Evaluation : le théorème a été bien énoncé donc c'est cohérent.

5. Montrer que $1,7 < \alpha < 1,8$

Extraction : $g(x)$, 1,7; 1,8 ; encadrement de α

Liaison : théorème des valeurs intermédiaires

Itinéraire : pour montrer que $1,7 < \alpha < 1,8$, je dois calculer $g(1,7)$ et $g(1,8)$ et ensuite je montre que $g(1,7) \times g(1,8) < 0$. Enfin j'applique le théorème des valeurs intermédiaires.

Traitement :

$$\begin{cases} g(1,7) = 0,1 \\ g(1,8) = -0,06 \end{cases}$$

$g(1,7) \times g(1,8) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires **$1,7 < \alpha < 1,8$**

Evaluation : on a bien le changement de signe de g entre les valeurs 1,7 et 1,8 donc le résultat est cohérent.

6. Préciser le signe de g sur $[1; +\infty[$

Extraction : tableau de variation, $1,7 < \alpha < 1,8$; signe de g

Liaison : étude de fonctions

Itinéraire : pour trouver le signe de la fonction, je dois me baser sur le tableau de variation ainsi que sur α . Je sais que g est bijective donc une seule tendance baissière et aussi α annule g . En plaçant α et $g(\alpha)$ dans le tableau de variation je peux voir l'ensemble des signes que prend g sur l'intervalle $[1; +\infty[$. Et attention ici on m'a demandé le signe de la fonction et non le signe de la dérivée.

Traitement :

x	1	α	
	$+\infty$		
$g'(x)$		-	
$g(x)$			
	1	$-\infty$	

Signe de g :

- **Sur $[1; \alpha]$; $g(x) \geq 0$**
- **Sur $[\alpha; +\infty]$; $g(x) \leq 0$**

Evaluation : le changement de signe de g de part et d'autre de α est cohérent vu que α annule g.

Partie C :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} (-x+1)\ln(-x+1) & \text{si } x < 1 \\ e^{-x+1}\ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

On note Cf sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2cm.

1)

a. Montrons que f est défini sur $\mathbb{R}$

Extraction : f(x), détermination du domaine de définition de f

Liaison : étude de fonction ln et expo, fonction à raccordements

Itinéraire : pour montrer que f est défini sur $\mathbb{R}$ je dois étudier le domaine de définition de chaque raccordement ensuite faire la réunion des deux domaines trouvés

Traitement :

Soit $f_1(x) = (-x+1)\ln(-x+1)$

$$f_1 \exists \text{ sssi } \begin{cases} x < 1 \\ -x+1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ -x > -1 \end{cases} \rightarrow x < 1 \rightarrow D_{f_1} =]-\infty; 1[$$

Soit $f_2(x) = e^{-x+1}\ln x$

$$f_2 \exists \text{ sssi } \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow x \geq 1 \rightarrow D_{f_2} = [1; +\infty[$$

$$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} =]-\infty; 1[\cup [1; +\infty[= \mathbb{R}$$

Evaluation : le résultat trouvé est conforme à la vérification demandée.

b. Rappelons les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$

Ici pas besoin d'algorithme car ce sont des questions de cours :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

c. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement si possible les résultats obtenus.

Extraction : $f(x) = \begin{cases} (-x+1)\ln(-x+1) & \text{si } x < 1 \\ e^{-x+1}\ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; limites de f aux bornes de D_f et interprétation

Liaison : limites fonction ln et expo, branches infinies

Itinéraire : pour trouver les limites de f aux bornes, je vais utiliser les limites usuelles et faire des transformations si nécessaire. Pour les interprétations j'utilise les résultats des branches infinies.

Traitement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+1)\ln(-x+1) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x+1 = +\infty \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \text{Par composé } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x+1) = +\infty \quad (2) \end{cases}$$

Par produit de (1) et (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+1)\ln(-x+1) = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} \ln x \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \text{Par composé} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = 0 \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad (2) \end{cases}$$

Par produit (1) et (2) on a une FI « $0 \times \infty$ ». Levons l'indétermination :

Ici on n'a pas besoin de faire des transformations car on sait que d'après la croissance comparée, la limite sera celle de la fonction expo.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} \ln x = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Interprétations possibles : en $-\infty$ on a une branche infinie à étudier mais en $+\infty$ la droite d'équation $y=0$ (axe des abscisses) est une asymptote horizontale à Cf.

Évaluation : nous avons une cohérence dans nos résultats car la question suivante nous demande l'étude de la branche infinie en $-\infty$ donc normal qu'on trouve infini. Et on a demandé une interprétation possible des résultats obtenus.

d. Étudions la nature de la branche infinie en $-\infty$:

Extraction : $f(x)$; limite en $-\infty$; nature de la branche infinie

Liaison : limites fonction $\ln$, branches infinies

Itinéraire : pour trouver la nature de la branche infinie je calcule d'abord $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et après je conclus en fonction du résultat

Traitement :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x+1) \ln(-x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x+1}{x} \right) \ln(-x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{x} + \frac{1}{x} \right) \ln(-x+1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + \frac{1}{x} \right) \ln(-x+1) \\ &\rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + \frac{1}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x+1) = +\infty \end{cases} \rightarrow \text{Par produit } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+1) \ln(-x+1) = -\infty \\ &\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \end{aligned}$$

Donc nous avons une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$

Évaluation : la démarche est correcte et le résultat cohérent.

2)

a. Montrons que f est continue en 1

$$\text{Extraction : } f(x) = \begin{cases} (-x+1) \ln(-x+1) & \text{si } x < 1 \\ e^{-x+1} \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} ; \text{ continuité de } f \text{ en } 1$$

Liaison : continuité

Itinéraire : pour montrer que f est continue en 1, je calcule la limite à gauche de 1, à droite de 1 et $f(1)$. Remarque : la limite à droite de 1 est aussi l'image de 1 car c'est sur cet intervalle qu'on doit calculer $f(1)$

Traitement :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+1) \ln(-x+1) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} -x+1 = 0^+ \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \text{par composé} \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(-x+1) = -\infty \quad (2) \end{cases}$$

Par produit de (1) et (2) on a une FI « $0 \times \infty$ ». Levons l'indétermination :

On pose $X = -x + 1 \rightarrow$ si $x \rightarrow 1^-, X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + 1) \ln(-x + 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} X \ln X = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-x+1} \ln x \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} -x + 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \\ \text{Par composé } \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-x+1} = 1 \text{ (1)} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0 \text{ (2)} \end{cases}$$

Par produit de (1) et (2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-x+1} \ln x = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 = f(1)$

Récapitulation : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

Conclusion : f est continue en 1

Evaluation : les fonctions à raccordement sont généralement continues sur la valeur du raccord. Cependant ce n'est pas TOUJOURS le cas. Mais vu qu'on nous demande de montrer que f est continue en 1, donc l'hypothèse de départ est juste confirmée par nos calculs.

b. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter géométriquement si possible les résultats obtenus

Extraction : $f(x) = \begin{cases} (-x + 1) \ln(-x + 1) & \text{si } x < 1 \\ e^{-x+1} \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; dérivabilité de f en 1 et interprétation des résultats

Liaison : dérivabilité et étude de fonction ln et expo

Itinéraire : pour étudier la dérivabilité en 1, je calcule $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Pour chaque cas je devrai faire des transformations pour avoir des limites usuelles. On sait que $f(1) = 0$ alors les limites s'en trouvent simplifiées

Traitement :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-x + 1) \ln(-x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1) \ln(-x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -\ln(-x + 1) = +\infty \end{aligned}$$

Conclusion partielle : f n'est pas dérivable en 1-

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-x+1} \ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} \times e^{-x+1} = 1 \times 1 = 1$$

Conclusion partielle : f est dérivable en 1+ et $f'_d(1) = 1$

Conclusion générale : f n'est pas dérivable en 1

Interprétation graphique : Cf admet au point d'abscisse 1 un point anguleux formé par :

- Une demi tangente verticale dirigée vers le bas en 1-
- Une demi tangente oblique d'équation $y = 1(x - 1) + 0 = x - 1$ en 1+

Evaluation : les démarches sont correctes. La vérification ultime dans ce cas se fera grâce au tableau de variation

3)

a. Calculons $f'(x)$ sur $] -\infty; 1[$ et étudions son signe

Extraction : $f(x) = \begin{cases} (-x + 1) \ln(-x + 1) & \text{si } x < 1 \\ e^{-x+1} \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; f' sur $] -\infty; 1[$

Liaison : dérivée fonction ln

Itinéraire : pour dériver f sur $] -\infty; 1[$ je dois utiliser le raccordement valable sur cet intervalle en question ; faire attention aussi car nous avons un produit. Surtout indiquer le domaine de dérivabilité avant de travailler. Car on vient de montrer que f n'est pas dérivable en 1

Traitement :

f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$:

Sur $]-\infty; 1[$: $f(x) = (-x + 1) \ln(-x + 1)$

On pose :
$$\begin{cases} U = -x + 1 \rightarrow U' = -1 \\ V = \ln(-x + 1) \rightarrow V' = \frac{-1}{-x+1} = \frac{1}{x-1} \end{cases}$$

$$f'(x) = -\ln(-x + 1) + (-x + 1) \times \frac{1}{x-1} = -\ln(-x + 1) - \frac{x-1}{x-1} = -\ln(-x + 1) - 1$$

$$f'(x) = -[\ln(-x + 1) + 1]$$

Signe de f' :

En posant

$$\ln(-x + 1) + 1 = 0 \rightarrow \ln(-x + 1) = -1$$

$$\rightarrow -x + 1 = e^{-1} \rightarrow -x = e^{-1} - 1$$

$$\rightarrow x = -e^{-1} + 1$$

	$-\infty$ 1	$-e^{-1} + 1$
$\ln(-x + 1) + 1$	+	-
f'	-	+

Signe de f' :

- Sur $]-\infty; 1 - e^{-1}]$, $f'(x) \leq 0$ et f décroissante
- Sur $[1 - e^{-1}; 1[$, $f'(x) \geq 0$ et f croissante

Evaluation : ce résultat est en cohérence avec la limite en $-\infty$. On a une décroissante en quittant $+\infty$ donc c'est correct.

b. Montrons que $\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)e^{-x+1}}{x}$. En déduire le signe de f' sur $]1; +\infty[$

Extraction : $f(x) = \begin{cases} (-x + 1) \ln(-x + 1) & \text{si } x < 1 \\ e^{-x+1} \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; $g(x) = 1 - x \ln x$; $\begin{cases} \text{Sur } [1; \alpha]; g(x) \geq 0 \\ \text{Sur } [\alpha; +\infty]; g(x) \leq 0 \end{cases}$; dérivée et signe sur $]1; +\infty[$

Liaison : fonction ln et expo

Itinéraire : pour montrer l'égalité je dois dériver f sur l'intervalle $]1; +\infty[$ ensuite effectuer des transformations pour s'assurer d'avoir g(x) au numérateur. L'étude du signe sera simplifiée car nous connaissons déjà le signe de g(x)

Traitement :

Sur $]1; +\infty[$: $f(x) = e^{-x+1} \ln x$

Posons
$$\begin{cases} U = e^{-x+1} \rightarrow U' = -e^{-x+1} \\ V = \ln x \rightarrow V' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$f'(x) = -e^{-x+1} \ln x + \frac{e^{-x+1}}{x} = \frac{-e^{-x+1} x \ln x + e^{-x+1}}{x} = \frac{e^{-x+1}(-x \ln x + 1)}{x} = \frac{g(x)e^{-x+1}}{x}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)e^{-x+1}}{x}$$

Signe de f' :

Puisque pour tout $x \in]1; +\infty[$, $e^{-x+1} > 0$ et $x > 0$, le signe de f' dépend celui de g :

- Sur $[1; \alpha]$, $g(x) \geq 0 \rightarrow f'(x) \geq 0$ et f croissante
- Sur $[\alpha; +\infty[$, $g(x) \leq 0 \rightarrow f'(x) \leq 0$ et f décroissante

Evaluation : ce résultat est en cohérence avec la limite en $+\infty$ puisqu'on a une limite tendant vers 0 qui est une asymptote horizontale.

4) Dressons le tableau de variation :

Ici on n'a pas besoin de l'algorithme car il s'agit de récapituler tout le travail d'étude déjà fait :

Limites aux bornes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Signes de f' et variations :

- Sur $]-\infty ; 1 - e^{-1}]$, $f'(x) \leq 0$ et f décroissante
- Sur $[1 - e^{-1} ; 1]$, $f'(x) \geq 0$ et f croissante
- Sur $[1 ; \alpha]$, $g(x) \geq 0 \rightarrow f'(x) \geq 0$ et f croissante
- Sur $[\alpha ; +\infty]$, $g(x) \leq 0 \rightarrow f'(x) \leq 0$ et f décroissante

Non dérivabilité en 1 donc double barre sur la partie f' sur la valeur de 1.

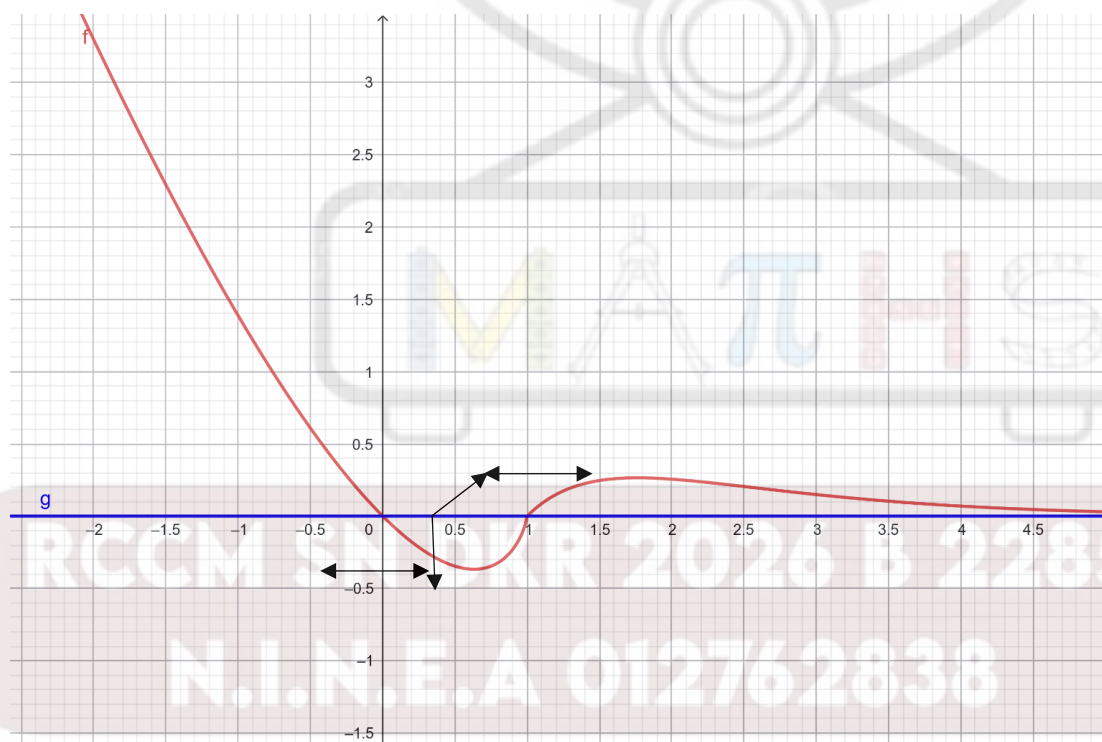
$$1,7 < \alpha < 1,8$$

Les valeurs α , $1 - e^{-1}$ et 1 devant être placés par ordre croissant donc on fera attention à bien les ordonner. $1 - e^{-1} \approx 0,6$ donc $1 - e^{-1} < 1 < \alpha$

Tableau de variation :

x	$-\infty$ $+\infty$	$1 - e^{-1}$	1	α
$f'(x)$	-	+	+	-
$f(x)$	$+\infty$	$f(1 - e^{-1})$		$f(\alpha)$
	0			

5) Traçons la courbe (Cf)



REMARQUE :

Notre courbe a été tracée avec GeoGebra ; il t'appartient de la construire correctement en suivant les indications que nous t'avons donnée (squelette, asymptotes, tangentes et demi tangentes, extrémums...) et respecter la graduation du repère qui doit être d'unité 2cm

Partie D :

- 1) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$
 - a. Montrons que h admet une fonction réciproque h^{-1}

Extraction : tableau de variation de f , existence de la bijection réciproque

Liaison : étude de fonction

Itinéraire : pour montrer que h admet une bijection réciproque sur $[\alpha; +\infty[$ je dois montrer que h est bijective de $[\alpha; +\infty[$ vers un intervalle à préciser

Traitement :

x	$-\infty$	$1 - e^{-1}$	1	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+	-
$f(x)$	$+\infty$		$f(1 - e^{-1})$	$f(\alpha)$	0

h est continue et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$ donc h est une bijection de $[\alpha; +\infty[$ vers $h([\alpha; +\infty[) =]0; f(\alpha)]$

Conclusion : **h admet une fonction réciproque h^{-1}**

Evaluation : le résultat est en adéquation avec notre tableau de variation

- b. Précisons l'ensemble de définition de h^{-1} et tracer sa courbe dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Ici pas besoin de l'algorithme. Une simple lecture du tableau de variation suffit :

$$D_{h^{-1}} =]0; f(\alpha)]$$

Courbe de la bijection réciproque

REMARQUES :

- Pour plus de lisibilité nous avons pris juste la partie de h correspondant à la réciproque mais tu devras tracer la courbe de la bijection dans le même repère que celui utilisé dans la partie précédente
 - Tu remarqueras la parfaite symétrie entre les deux courbes. En respectant les indications données tu aboutiras au même résultat.
- 2) Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=0$. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$I_n = \int_{-1}^0 (-x+1)[\ln(-x+1)]^n dx$$

- a. Calculons I_1

Extraction : $I_n = \int_{-1}^0 (-x+1)[\ln(-x+1)]^n dx$; calcul de I_1

Liaison : calcul intégral

Itinéraire : pour calculer I_1 , je remplace d'abord n par 1 ensuite j'utilise la technique de changement de variable et l'intégration par parties. On prendra soin de noter que nous aurons le produit entre un polynôme et une fonction $\ln$ donc le polynôme sera utilisé comme U' et la fonction $\ln$ comme V et on applique $\int U'V = UV - \int V'U$

Traitement :

$$I_n = \int_{-1}^0 (-x+1)[\ln(-x+1)]^n dx$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 (-x+1) \ln(-x+1) dx$$

En posant $t = -x+1 \rightarrow \frac{dt}{dx} = -1 \rightarrow dt = -dx$

$$\begin{cases} \text{pour } x = 0 \rightarrow t = 1 \\ \text{pour } x = -1 \rightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 (-x+1) \ln(-x+1) dx = \int_2^1 t \ln t (-dt) = - \int_2^1 t \ln t dt = \int_1^2 t \ln t dt$$

On pose $\begin{cases} u' = t \rightarrow u = \frac{1}{2} t^2 \\ v = \ln t \rightarrow v' = \frac{1}{t} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_1^2 t \ln t dt &= \left[\frac{1}{2} t^2 \ln t \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{2} t^2 \times \frac{1}{t} \right) dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \ln t \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \ln t \right]_1^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{4} t^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} 2^2 \ln 2 - \frac{1}{4} 2^2 - \left(\frac{1}{2} 1^2 \ln 1 - \frac{1}{4} 1^2 \right) = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$I_1 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

Evaluation : le résultat étant positif et devant être utilisé dans la question suivante, il y'a alors cohérence

b. Déduisons-en la valeur de A

Ici pas besoin de l'algorithme. Il faut juste poser la formule de calcul d'aire avec l'intégrale :

$$A = 1UA \times I_1$$

Or notre repère est gradué 2cm donc $1UA = 2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$

$$A = 4 \left(2 \ln 2 - \frac{3}{4} \right) = 8 \ln 2 - 3$$

$$A = 8 \ln 2 - 3 \text{ cm}^2$$

c. En posant $t = -x+1$, montrons que $I_n = \int_1^2 t (\ln t)^n dt$

Ici aussi on n'a pas besoin de l'algorithme car on avait déjà initié ce changement de variable demandé plus haut :

$$\int_{-1}^0 (-x+1)[\ln(-x+1)]^n dx$$

En posant $t = -x+1 \rightarrow \frac{dt}{dx} = -1 \rightarrow dt = -dx$

$$\begin{cases} \text{pour } x = 0 \rightarrow t = 1 \\ \text{pour } x = -1 \rightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^0 (-x+1)[\ln(-x+1)]^n dx = \int_2^1 t (\ln t)^n (-dt)$$

$$I_n = \int_1^2 t(\ln t)^n dt$$

d. Démontrons que pour tout $t \in [1; 2] : 0 \leq \ln t \leq \ln 2$

Extraction : $t \in [1; 2]$, encadrement de $\ln t$

Liaison : fonction $\ln$ et inégalités

Itinéraire : pour démontrer que pour tout $t \in [1; 2] : 0 \leq \ln t \leq \ln 2$ on va commencer par encadrer t ensuite comme $\ln$ est croissante et positive pour tout $t > 0$ on peut l'appliquer sur l'inégalité

Traitement :

$$1 \leq t \leq 2 \rightarrow \ln 1 \leq \ln t \leq \ln 2 \rightarrow 0 \leq \ln t \leq \ln 2$$

Evaluation : le résultat est cohérent car les propriétés des inégalités ont été correctement appliquées.

e. En déduire que pour tout $n \geq 1 : 0 \leq I_n \leq \frac{3}{2}(\ln 2)^n$

Extraction : $I_n = \int_1^2 t(\ln t)^n dt ; 0 \leq \ln t \leq \ln 2$; encadrement de $\ln$

Liaison : propriétés des inégalités avec les intégrales

Itinéraire : pour avoir un encadrement de I_n je vais d'abord encadrer la fonction dans l'intégrale puis appliquer la propriété des inégalités sur les intégrales (si $f(x) \geq g(x) \rightarrow \int f(x)dx \geq \int g(x)dx$)

Traitement :

$$0 \leq \ln t \leq \ln 2$$

$$0^n \leq (\ln t)^n \leq (\ln 2)^n \rightarrow 0 \leq (\ln t)^n \leq (\ln 2)^n$$

$$\rightarrow 0 \times t \leq t(\ln t)^n \leq t(\ln 2)^n \rightarrow 0 \leq t(\ln t)^n \leq t(\ln 2)^n$$

$$\rightarrow 0 \leq \int_1^2 t(\ln t)^n \leq \int_1^2 t(\ln 2)^n dt$$

(Ici je te fais remarquer que l'intégrale de la fonction nulle est nulle. Et aussi $(\ln 2)^n$ est une constante)

$$0 \leq \int_1^2 t(\ln t)^n \leq (\ln 2)^n \int_1^2 t dt \rightarrow 0 \leq \int_1^2 t(\ln t)^n \leq (\ln 2)^n \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^2$$

$$\rightarrow 0 \leq \int_1^2 t(\ln t)^n \leq (\ln 2)^n \left(\frac{1}{2} 2^2 - \frac{1}{2} 1^2 \right) \rightarrow 0 \leq \int_1^2 t(\ln t)^n \leq (\ln 2)^n \left(2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$0 \leq \int_1^2 t(\ln t)^n \leq \frac{3}{2}(\ln 2)^n \rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{3}{2}(\ln 2)^n$$

Evaluation : le résultat trouvé est en corrélation avec la consigne donc il y'a cohérence

a. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

Extraction : $0 \leq I_n \leq \frac{3}{2}(\ln 2)^n ; \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

Liaison : limite d'une suite, théorème des gendarmes

Itinéraire : pour trouver la limite de la suite (I_n) je dois utiliser l'inégalité démontrée précédemment puis appliquer le théorème des gendarmes. Ici on peut préciser que $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$ et $\ln 2 \approx 0,7$

Traitement :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} (\ln 2)^n = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

b. Montrons que la suite (I_n) est décroissante

Extraction : $I_n = \int_1^2 t(\ln t)^n dt$; monotonie de (I_n)

Liaison : monotonie d'une suite, propriétés d'addition sur les intégrales, signe d'une intégrale

Itinéraire : pour montrer que (I_n) est décroissante j'étudie le signe de $I_{n+1} - I_n$

Traitement :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_1^2 t(\ln t)^{n+1} dt - \int_1^2 t(\ln t)^n dt = \int_1^2 [t(\ln t)^{n+1} - t(\ln t)^n] dt = \int_1^2 [t(\ln t)^n \times \ln t - t(\ln t)^n] dt \\ &= \int_1^2 t(\ln t)^n (\ln t - 1) dt \end{aligned}$$

On sait déjà que $t(\ln t)^n \geq 0$ quand on faisait l'encadrement de I_n . Voyons maintenant le signe de $(\ln t - 1)$ pour tout $t \in [1; 2]$

$$1 \leq t \leq 2 \rightarrow 0 \leq \ln t \leq \ln 2 \rightarrow -1 \leq \ln t - 1 \leq \ln 2 - 1$$

Remarquons que $\ln 2 - 1 \approx -0,3$ donc $\ln t - 1 < 0$

De ce fait $t(\ln t)^n (\ln t - 1) < 0$

Par conséquent $\int_1^2 t(\ln t)^n (\ln t - 1) dt < 0 \rightarrow I_{n+1} - I_n < 0 \rightarrow I_{n+1} < I_n$

Conclusion ; la suite (I_n) est décroissante

Evaluation : les propriétés ont été bien appliquées et le résultat cohérent.

Petit bonus : ici on voit que (I_n) est bornée et décroissante donc on peut conclure que (I_n) est convergente. En plus sa limite a été déjà démontrée alors !



RCCM SN DKR 2026 B 2285

N.I.N.E.A 012762838