

Exercices de Mathématiques

Terminale Sciences – Programme du Mali

Exercices progressifs et Sujets de Baccalauréat

★ Basique ★★ Intermédiaire ★★★ Avancé/Bac

Table des matières

1	Nombres Complexes	5
2	Arithmétique	11
3	Fonctions Numériques	15
4	Primitives et Calcul Intégral	19
5	Fonction Logarithme Népérien	23
6	Fonction Exponentielle Népérienne	27
7	Fonction Puissance	31
8	Suites Numériques	33
9	Équations Différentielles	37
10	Dénombrement et Probabilités	41
11	Géométrie Plane – Transformations et Barycentres	45
12	Coniques	47
13	Sujets de Baccalauréat – Série TSExp (2014–2023)	51

Chapitre 1

Nombres Complexes

Exercice 1.1



Mettre sous forme algébrique :

1) $(2 + 3i)(4 - i)$

2) $(1 + i)^4$

3) $\frac{3 + 2i}{1 - i}$

4) $\frac{(1 + i\sqrt{3})^3}{(1 - i)^2}$

5) $(3 - 2i)^2 - (1 + i)^2$

6) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3}$

Exercice 1.2



Simplifier les expressions suivantes (en utilisant les puissances de i) :

1) $i^{100} + i^{101} + i^{102} + i^{103}$

2) $\frac{(1 + i)^2}{(1 - i)^2}$

3) $(2 + i)(2 - i)(1 + 3i)$

4) $\left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^8$

5) $\frac{(3 - i)^2}{(1 + i)^2}$

6) $(1 + i)(1 + i^2)(1 + i^3)(1 + i^4)$

Exercice 1.3



Déterminer le module et un argument de chacun :

1) $z_1 = 1 + i$

2) $z_2 = -\sqrt{3} + i$

3) $z_3 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

4) $z_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$

5) $z_5 = (1 + i)^6$

6) $z_6 = \frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 - i)^2}$

7) $z_7 = -2 - 2i\sqrt{3}$

8) $z_8 = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} \quad (\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$

Exercice 1.4



Soit $z = x + iy$. Déterminer et interpréter géométriquement les ensembles :

a) $|z - 1 + 2i| = 3$

b) $|z - 1| = |z + 3i|$

c) $|z + 2| - |z - 2| = 0$

d) $\operatorname{Re}(z^2) = 1$

e) $\frac{z - 1}{z + i}$ est réel

f) $\frac{z-1}{z+i}$ est imaginaire pur

g) $\operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{z+1}\right) = 0$

h) $|z-2| + |z+2| = 6$

Exercice 1.5



Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$

b) $z^2 - (5+3i)z + 4 + 7i = 0$

c) $iz^2 - 2z - 4 - 4i = 0$

d) $z^2 - (1-i)z - 18 + 13i = 0$

e) $z^2 + (1+6i)z + (1+23i) = 0$

f) $z^4 + z^2 + 1 = 0$

g) $z^2 - (3+4i)z + (1+7i) = 0$

h) $z^2 - (2i)z - 1 = 0$

Exercice 1.6



Déterminer les racines carrées de : $-5 - 12i$; $3 + 4i$; $-2i$; $8 - 6i$; $5 + 12i$; $-15 + 20i$.

Exercice 1.7



Résoudre dans $\mathbb{C}$ et placer les solutions dans le plan :

a) $z^3 = 8i$

b) $z^4 = -1$

c) $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$

d) $z^4 = 8(1-i\sqrt{3})$

e) $z^5 = 1$ (racines 5èmes de l'unité)

f) $z^3 = 1 + i$

Exercice 1.8



Soient $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$.

1) Mettre sous forme trigonométrique z_1 , z_2 , z_2/z_1 , $z_1 \cdot z_2$.

2) En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

3) Résoudre $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$.

Exercice 1.9



Soit $A(-2+i)$, $B(2-3i)$, $M(z)$.

1) Déterminer l'ensemble des M tels que $|z+2-i| = |z-2+3i|$.

- 2) Déterminer l'ensemble des M tels que $MA^2 + MB^2 = 32$.
- 3) Déterminer l'ensemble des M tels que $MA \cdot MB = 10$.
- 4) Soit $K = \frac{z+2}{(1+i)z}$. Ensemble des M tels que K soit réel.

Exercice 1.10

Déterminer l'écriture complexe et la nature de chaque transformation :

- a) Translation de vecteur $\vec{u}(2+i)$.
- b) Rotation de centre $\Omega(3i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- c) Homothétie de centre $\Omega(1+i)$ et de rapport -2 .
- d) Similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre O .
- e) Symétrie par rapport à l'axe réel.
- f) Symétrie par rapport à l'axe imaginaire.

Exercice 1.11

A d'affixe $z_A = 1$, B d'affixe $z_B = i$, C d'affixe $z_C = -1 + i$.

- 1) Calculer les affixes de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.
- 2) Déterminer la nature du triangle ABC .
- 3) Trouver le centre du cercle circonscrit.
- 4) Calculer l'affixe du barycentre G de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$.

Exercice 1.12

Soit f définie par $z' = (1+i)z + 2 - i$.

- 1) Montrer que f est une similitude directe.
- 2) Déterminer rapport, angle et centre.
- 3) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(i)$.
- 4) Déterminer $f \circ f$ et sa nature.

Exercice 1.13

Soit $f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16$.

- 1) Trouver a, b tels que $f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$.
- 2) Résoudre $f(z) = 0$. Montrer que les images sont sur un même cercle.

Exercice 1.14

En utilisant la formule de Moivre :

- a) Exprimer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.
- b) Montrer que $\cos(3\theta) = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$.
- c) En déduire les solutions de $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

Exercice 1.15

Linéariser :

- a) $\cos^4 \theta$
- b) $\sin^3 \theta \cos^2 \theta$
- c) $\cos^6 \theta$
- d) $\sin^4 \theta \cos^2 \theta$
- e) $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$

Exercice 1.16

Soit $j = e^{2i\pi/3}$. On a $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

- 1) Vérifier que $j^2 = \bar{j}$.
- 2) Calculer $(1 - j)(1 - j^2)$ et $(1 - j^2)(1 - j^4)$.
- 3) Montrer que $|1 - j| = \sqrt{3}$.
- 4) En déduire la valeur de $\sin \frac{\pi}{3}$.
- 5) Déterminer les trois racines cubiques de l'unité et les placer dans le plan.

Exercice 1.17 – Bac TSE 2025

(E) : $(1 - 8i)z^3 + (23 - 4i)z^2 + 3z - 24i = 0$ dans $\mathbb{C}$.

- 1. Démontre que (E) admet une solution imaginaire pure que tu détermineras.
- 2. Résous (E) dans $\mathbb{C}$.
- 3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $\frac{1}{2} + i$, $3i$ et $-2 + 3i$. Soit G le barycentre des points A , B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.
 - a. Détermine puis écris sous forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$.
 - b. Démontre que les affixes de $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$ sont les termes d'une suite géométrique.
 - c. Déduis-en qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C . Détermine ses éléments caractéristiques.

Exercice 1.18 – Bac TSE 2024

Similitude S de centre O , angle $\frac{\pi}{2}$, rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. M_0 d'affixe $z_0 = 1 + i$, $M_n = S(M_{n-1})$.

- 1. Écriture complexe de S .
- 2. Affixes de M_1 , M_2 , M_3 .
- 3. Relation entre z_n et z_{n-1} . Exprimer z_n en fonction de n .
- 4. $a_n = |z_n|$. Montrer que $(\ln a_n)$ est arithmétique. Étudier la convergence de (a_n) .

Exercice 1.19 – Bac TSE 2023

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne A d'affixe $z_A = 2 - 2i$ et B d'affixe $z_B = 1 + (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} - 1)$.

On admettra que $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ et $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$.

1. Écris $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique.
2. Calcule OA , AB et OB .
3. Détermine en radians les mesures principales de $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$. En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
4. Détermine l'affixe du point D , image de A par la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$. Quelle est la nature du quadrilatère $OABD$?

Exercice 1.20 – Bac TSE 2022

★★★

Soit $\omega = e^{i\pi/3}$.

1. Écrire ω sous forme algébrique. Vérifier que $\omega^6 = 1$.
2. Calculer $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$.
3. Soit $A(1)$, $B(\omega)$, $C(\omega^2)$, $D(\omega^3)$, $E(\omega^4)$, $F(\omega^5)$ dans le plan complexe. Montrer que $ABCDEF$ est un hexagone régulier.
4. Déterminer la similitude S telle que $S(A) = B$ et $S(B) = C$.

Exercice 1.21 – Bac TSE 2021

★★★

Soit l'équation $(E) : z^2 - (3 + 4i)z + (1 + 7i) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

1. Calculer le discriminant Δ de (E) et ses racines carrées.
2. Résoudre (E) .
3. On pose z_1 et z_2 les solutions. Montrer que $|z_1| = |z_2|$ et interpréter géométriquement.
4. Déterminer la similitude qui transforme z_1 en z_2 et z_2 en z_1^2/z_2 .

Exercice 1.22 – Bac TSE 2019

★★★

Soit $f : z \mapsto z' = \frac{(1 + i\sqrt{3})z + 2 - 2i\sqrt{3}}{2}$.

1. Montrer que f est une similitude directe. Déterminer son rapport k , son angle θ , et son centre Ω .
2. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.
3. Déterminer l'écriture complexe de $f \circ f$. Quelle est sa nature?
4. Trouver le plus petit entier $n \geq 1$ tel que f^n (itérée n fois) soit une translation ou une identité.

Exercice 1.23 – Bac TSE 2017

★★★

Soit $P(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1$.

1. Diviser $P(z)$ par z^2 . Poser $u = z + \frac{1}{z}$ et exprimer $P(z)/z^2$ en fonction de u .
2. Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
3. Placer les solutions dans le plan complexe et montrer qu'elles sont sur un même cercle.

Chapitre 2

Arithmétique

Exercice 2.1



- 1) Division euclidienne de 2024 par 17, de 3725 par 23, de 10001 par 101.
- 2) Décomposer en facteurs premiers : 360, 504, 1001, 2310, 4200, 9720.
- 3) Calculer $\text{pgcd}(360, 504)$, $\text{ppcm}(360, 504)$, $\text{pgcd}(252, 180)$.
- 4) Calculer $\text{pgcd}(1001, 385)$ et $\text{pgcd}(4200, 9720)$ par Euclide.

Exercice 2.2



Démontrer par récurrence :

- a) $\forall n \geq 1 : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- b) $\forall n \geq 1 : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- c) $\forall n \geq 1 : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- d) $\forall n \in \mathbb{N} : 5^n - 1$ est divisible par 4.
- e) $\forall n \in \mathbb{N} : 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
- f) $\forall n \geq 1 : 2^n \geq n + 1$.

Exercice 2.3



Utiliser les critères de divisibilité pour tester si :

- 1) $3 \mid 2 + 0 + 2 + 5 = 9$: confirmer que $3 \mid 2025$.
- 2) $9 \mid 729$, $11 \mid 2024$, $7 \mid 5005$.
- 3) Trouver le reste de 12345 divisé par 9.
- 4) Vérifier que $1001 = 7 \times 11 \times 13$.

Exercice 2.4



- 1) Quel est le reste de 3^{2025} divisé par 7 ? de 7^{2024} divisé par 10 ?
- 2) Montrer que $n^3 - n$ est divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- 3) Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 4) Montrer que $\text{pgcd}(2n+1, 3n+2) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 5) Montrer que $\text{pgcd}(n^2+1, n+1)$ divise 2 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.5

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$:

- a) $23x + 7y = 1$
- b) $23x + 7y = 6$
- c) $15x + 7y = 3$
- d) $17x - 5y = 2$
- e) $12x + 8y = 4$
- f) $35x + 51y = 7$

Exercice 2.6

Congruences et théorème chinois des restes :

- 1) Résoudre $3x \equiv 1 [7]$.
- 2) Résoudre $5x \equiv 3 [11]$.
- 3) Résoudre $\begin{cases} x \equiv 2 [3] \\ x \equiv 3 [5] \end{cases}$
- 4) Résoudre $\begin{cases} x \equiv 1 [4] \\ x \equiv 2 [7] \end{cases}$

Exercice 2.7

Écriture en différentes bases :

- 1) Écrire en base 2 : 157, 255, 1000.
- 2) Écrire en base 16 : 2024, 4095.
- 3) Convertir $(10110101)_2$ et $(1A3)_{16}$ en base 10.
- 4) Effectuer en binaire : $(1101)_2 + (1011)_2$ et $(1110)_2 \times (101)_2$.

Exercice 2.8

- 1) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- 2) Soit p un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p}$ est irrationnel.
- 3) Montrer que $\log_2 3$ est irrationnel.
- 4) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 2.9

Soit n un entier naturel.

- 1) Montrer que $n^4 + 4$ n'est jamais premier pour $n \geq 2$ (factoriser en utilisant Sophie Germain : $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$).
- 2) Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
- 3) Montrer que $n^2 + n + 41$ est premier pour $n = 0, 1, 2, \dots, 9$ mais pas pour $n = 40$.

Exercice 2.10 – Bac TSE 2025

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S) : \begin{cases} 23x + 10 \equiv 0 [7] \\ 4x \equiv 0 [7] \end{cases}$

1. Déterminer un couple (α_0, β_0) d'entiers relatifs, solution de $23\alpha + 7\beta = 1$.
2. Trouver un couple (u_0, v_0) solution de $(E) : 23u + 7v = 6$. Résoudre complètement (E) .
3. Démontre que x est solution du système (S) si et seulement s'il existe un couple (u, v) vérifiant $\begin{cases} 23u + 7v = 6 \\ x + 10 = 23u \end{cases}$. Déduis-en l'ensemble des solutions de (S) .
4. Déterminer la plus petite solution (entier naturel) de (S) divisible par 16.

Exercice 2.11 – Bac TSE 2022

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1 : \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$.
2. Déterminer les entiers a et b tels que $a \equiv 3 [5]$ et $a \equiv 2 [7]$ et $0 \leq a < 35$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2 : 13x - 17y = 1$. En déduire toutes les solutions.
4. Trouver tous les entiers n tels que $n^2 + 3$ soit divisible par 5.

Exercice 2.12 – Bac TSE 2018

1. Vérifier que $\text{pgcd}(17, 5) = 1$ et en déduire une solution de $17x + 5y = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} : 17x + 5y = 3$.
3. Un marchand vend des objets à 17 F et 5 F. Il reçoit exactement 300 F. Combien d'objets de chaque sorte peut-il avoir vendu ? (solutions en entiers naturels)
4. Montrer que pour tout entier n , $n^5 - n$ est divisible par 5.

Exercice 2.13 – Bac TSE 2016

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 7^n - 1$ est divisible par 6.
2. Calculer $\text{pgcd}(84, 120)$ par l'algorithme d'Euclide. En déduire des entiers u, v tels que $84u + 120v = \text{pgcd}(84, 120)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2 : 7u + 5v = 2$.
4. Combien existe-t-il d'entiers $n \in \{0, \dots, 999\}$ divisibles par 7 ou par 11 ?

Chapitre 3

Fonctions Numériques

Exercice 3.1



Calculer les limites :

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 3}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

6) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 1)$

10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

Exercice 3.2



Pour chaque fonction, donner D_f et calculer les limites aux bornes :

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$

b) $g(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

d) $p(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

e) $q(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$

f) $r(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

Exercice 3.3



Étudier la continuité et la dérivabilité en x_0 :

a) $f(x) = |x - 2|$ en $x_0 = 2$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

$$c) \ h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ en } x_0 = 0$$

Exercice 3.4

Étudier complètement (variations, asymptotes, courbe) :

- a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$
- b) $g(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)^2}$
- c) $h(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$
- d) $k(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$
- e) $\ell(x) = x + \frac{4}{x-1} \ (x \neq 1)$

Exercice 3.5

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-2, 0]$. Encadrer α à 10^{-1} près par la méthode de dichotomie.

Exercice 3.6

Calculer les dérivées de :

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ | 5) $\frac{x}{(1 + x^2)^2}$ |
| 2) $(2x^3 - x)^4$ | 6) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ |
| 3) $x\sqrt{x^2 + 1}$ | 7) $\sin^3 x \cdot \cos^2 x$ |
| 4) $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$ | 8) $(x^2 + 1) \arctan x$ (si vu au cours) |

Exercice 3.7

Théorème des valeurs intermédiaires. Pour chacune des fonctions suivantes, montrer l'existence d'une racine dans l'intervalle indiqué, puis l'encadrer à 10^{-1} :

- a) $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0, 1]$
- b) $g(x) = 2^x - 3x$ sur $[1, 2]$
- c) $h(x) = \cos x - x$ sur $[0, \pi/2]$

Exercice 3.8

Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$. On sait que f admet 1 pour extremum en $x = 0$ et -3 pour extremum en $x = 2$. Déterminer a, b, c . Étudier f . Montrer que $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles distinctes.

Exercice 3.9

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

- 1) Déterminer D_f . Montrer que f admet une asymptote oblique $y = x - 2$.
- 2) Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations.
- 3) Étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique.
- 4) Tracé. Montrer que la courbe admet un centre de symétrie.

Exercice 3.10

Fonctions implicites. Soit la relation $x^2y + y^3 = 2$ définissant y en fonction de x au voisinage du point $(1, 1)$.

- 1) Vérifier que $(1, 1)$ vérifie la relation.
- 2) En dérivant implicitement par rapport à x , calculer $y'(1)$.
- 3) Déterminer l'équation de la tangente en $(1, 1)$.

Exercice 3.11 – Bac TSE 2023

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - 2 + \ln x$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Démontrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution $\ell \in [1, 2]$.
4. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. **Approximation de ℓ** : Soit $\varphi(x) = 2 - \ln x$. Montrer que φ envoie $[1, 2]$ dans $[1, 2]$ et que ℓ est l'unique point fixe de φ sur cet intervalle. La suite $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, $u_0 = 1$, converge-t-elle vers ℓ ?

Exercice 3.12 – Bac TSE 2021

Soit $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer D_f et les asymptotes de la courbe (C_f) .
2. Étudier les variations de f .
3. Étudier la position de (C_f) par rapport à son asymptote horizontale.
4. Tracer (C_f) .
5. Montrer que (C_f) admet un centre de symétrie que l'on déterminera.

Exercice 3.13 – Bac TSE 2020

Soit $f : x \mapsto \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

1. Déterminer D_f . Montrer que $y = x + 2$ est asymptote oblique.
2. Étudier les variations de f .
3. Étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique.

4. Soit $g(x) = f(x) - x - 2$. Calculer $\int_2^4 g(x) dx$.

Chapitre 4

Primitives et Calcul Intégral

Exercice 4.1



Trouver une primitive :

1) $3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 9x + 1$

2) $(2x - 1)(x^2 - x + 4)^3$

3) $(5x + 1)^7$

4) $\frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}$

5) $5x(x^2 + 1)^6$

6) $3x^2(x^3 + 1)^5$

7) $\frac{x}{(x^2 + 1)^3}$

8) $\frac{\cos x}{\sin^3 x}$

9) $(5 - 2x)^6$

10) $\frac{6x + 3}{(x^2 + x + 1)^4}$

11) $\sin^3 x \cos x$

12) $\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

13) $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

14) $\cos^2 x$

Exercice 4.2



Calculer :

1) $\int_{-2}^3 (x^2 - 5x + 4) dx$

2) $\int_0^1 (x + 1)(3x^2 + 6x)^2 dx$

3) $\int_0^\pi \sin x \cos^3 x dx$

4) $\int_0^{\pi/4} \tan x dx$

5) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

6) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$

7) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$

8) $\int_0^\pi \sin^2 x dx$

Exercice 4.3



Calculer les intégrales par changement de variable :

a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ (poser $x = \sin t$)

b) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}$ (poser $t = \sqrt{x}$)

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ (poser $t = \sin x$)

d) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ (poser $t = x^2$)

Exercice 4.4

Intégration par parties (IPP) :

a) $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$

b) $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$

c) $\int_1^e x \ln x \, dx$

d) $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx$

e) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx$

f) $\int_0^1 \arctan x \, dx$

g) $\int_1^e \sqrt{x} \ln x \, dx$

Exercice 4.5

Décomposer en éléments simples puis intégrer :

a) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 1}$

b) $\int_3^5 \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} \, dx$

c) $\int_0^1 \frac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)(x+2)} \, dx$

d) $\int_2^4 \frac{5x+1}{(x-1)^2(x+1)} \, dx$

e) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2} \, dx$

f) $\int_1^2 \frac{x^3}{x^2-1} \, dx$

Exercice 4.6

Aires et volumes :

a) Aire entre $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$.

b) Aire entre $y = xe^{-x}$, l'axe (Ox) et $x = 2$.

c) Aire entre $y = x^2$ et $y = x$ sur $[0, 1]$.

d) Aire entre $y = \sin x$ et $y = \cos x$ sur $[0, \pi/2]$.

e) Volume du solide de révolution engendré par $y = \sqrt{x}$ sur $[0, 4]$ autour de (Ox) .

Exercice 4.7

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx.$$

- 1) Montrer que $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
- 2) Calculer I_2, I_3 .
- 3) Montrer que $I_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- 4) Montrer que $(n+1)I_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Exercice 4.8

$$J_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx.$$

- 1) Montrer que $J_n = e - nJ_{n-1}$.
- 2) Calculer J_0, J_1, J_2 .
- 3) Montrer que $0 < J_n < \frac{e}{n+1}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

Exercice 4.9

Soit $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ (intégrales de Wallis).

- 1) Montrer que $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
- 2) Calculer $W_0, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5$.
- 3) En déduire W_{2n} et W_{2n+1} sous forme de produits.

Exercice 4.10 – Bac TSE 2000

$f(x) = x(\ln x - 1)$ sur $]0, +\infty[$. Étude complète : asymptotes, variations, tracé.

1. Calculer $\int_1^e x \ln x \, dx$ par IPP.
2. En déduire l'aire entre (C_f) , (Ox) et $x = e$.
3. Montrer que $F(x) = \frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{3}{2}) + \frac{1}{4}$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4.11 – Bac TSE 2019

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f est impaire. En déduire qu'on peut se restreindre à $]0, +\infty[$.
2. Étudier les asymptotes (montrer AO $y = x$) et les variations.
3. Calculer $\int_1^2 f(x) \, dx$.

4. Soit $g(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{4x^2} - x^2 + 1$. Montrer que $g'(x) = f(x) - 2x + \frac{2}{x}$. En déduire l'aire entre (C_f) et l'AO sur $[1, 2]$.

Exercice 4.12 – Bac TSE 2017

Soit $f(x) = x - 1 - \ln x$ définie sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, avec égalité seulement en $x = 1$.
2. Définir F une primitive de f sur $]0, +\infty[$ et calculer $F(e)$.
3. Calculer l'aire du domaine limité par (C_f) , l'axe (Ox) , les droites $x = 1$ et $x = e$.
4. Soit $h(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) - 1$. Montrer que $h(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.

Chapitre 5

Fonction Logarithme Népérien

Exercice 5.1



Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- a) $\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(3x-5)$
- b) $2\ln(x-2) + \ln(3x+1) = 2\ln 2$
- c) $(\ln x)^2 - 7\ln x + 6 = 0$
- d) $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 1 = 0$
- e) $\ln(x+2) + 1 = \ln(x-1) + \ln 2$
- f) $6\ln^2 x + 7\ln x - 3 = 0$
- g) $\ln^3 x - 2\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$
- h) $\ln(2x+1) > \ln(x+3)$

Exercice 5.2



Résoudre les inéquations :

- a) $\ln(x(3-x)) \leq \ln 2$
- b) $\ln \frac{5x+1}{6x+1} > 0$
- c) $\ln(x+5) + \ln(x+4) \leq \ln(x+13)$
- d) $\ln x - \frac{1}{\ln x} < \frac{8}{3}$
- e) $(\ln x)^2 \leq 4$

Exercice 5.3



Déterminer l'ensemble de définition de :

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $\ln(12+3x-x^2)$ | 4) $\frac{\ln x}{3-\ln x}$ |
| 2) $\ln \frac{2x-1}{x+1}$ | 5) $\ln(\ln x)$ |
| 3) $\sqrt{\ln(x^2-16)}$ | 6) $\ln \sqrt{x^2-4x+3}$ |

Exercice 5.4



Calculer les dérivées de :

1) $\ln(x^2 + 3x - 1)$

5) $-\ln(\cos x) (= \ln |\sec x|)$

2) $\ln \frac{x+1}{x-1}$

6) $\ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

3) $x^2 \ln x$

7) x^x (poser $x^x = e^{x \ln x}$)

4) $[\ln(3x+1)]^5$

8) $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

Exercice 5.5

Étude complète de $f(x) = \frac{x+3-\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Asymptotes, tangente en $x = 1$.

Exercice 5.6

Soit $g(x) = \frac{\ln x - 1 - x^2}{x}$ pour $x > 0$.

- 1) Étudier les variations de g .
- 2) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.
- 3) En déduire que $\ln x \leq x + \frac{1}{x} - 1$ pour tout $x > 0$.

Exercice 5.7

Soit $h(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

- 1) Montrer que $h(0) = 0$ et $h'(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$.
- 2) En déduire l'inégalité : $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + x$ pour $x \geq 0$ (ou préciser la bonne inégalité).
- 3) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 5.8

Résoudre dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$:

- a) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 6 \\ \ln x \cdot \ln y = 5 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 2 \ln x + 3 \ln y = 9 \\ \ln x - 2 \ln y = -5 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} x^4 y^3 = e^5 \\ x^2 y^4 = e^6 \end{cases}$

Exercice 5.9

Étude de $f(x) = x \ln x - x + 1$ sur $]0, +\infty[$.

- 1) Montrer que $f(x) \geq 0$ sur $]0, +\infty[$, avec égalité seulement en $x = 1$.
- 2) Montrer que (C_f) admet l'axe (Oy) comme demi-tangente en 0.

- 3) Calculer l'aire entre (C_f) , (Ox) , $x = 1$, $x = e$.

Exercice 5.10



Soit $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ définie sur $] -1, 1[$.

- 1) Montrer que f est impaire et calculer $f'(x)$.
- 2) Montrer que $f(x) = 2\operatorname{artanh}(x)$ (si cette notation est connue).
- 3) Démontrer que $f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = f(a) + f(b)$ pour $a, b, \frac{a+b}{1+ab} \in] -1, 1[$.

Exercice 5.11 – Bac TSE 2024



$g(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. Déterminer $g'(x)$, étudier ses variations.
2. Soit $f(x) = x \ln x - x + 1$ sur $[1, +\infty[$. Calculer les limites, montrer l'asymptote oblique $y = x \ln x$. Dresser le tableau de variations.
3. Tracer (C_f) .
4. Calculer l'aire entre (C_f) , (Ox) , $x = 1$ et $x = e$.
5. Montrer que h (restriction de f à $[1, +\infty[$) est bijective. Calculer $(h^{-1})'(e-1)$.

Exercice 5.12 – Bac TSE 2021



Soit $f(x) = x \ln x - x$ sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que f admet un minimum global en $x = 1$. Valeur de ce minimum.
2. Montrer que l'équation $f(x) = c$ admet : zéro solution si $c < -1$, une solution si $c = -1$, deux solutions si $c > -1$.
3. Calculer $\int_1^e f(x) dx$ par IPP.
4. Étudier la convexité de f .

Exercice 5.13 – Bac TSE 2016



Soit $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est paire. Déterminer les asymptotes et les variations.
2. Étudier la convexité de f .
3. Montrer que $f(x) \leq x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Calculer $\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx$ par IPP.

Chapitre 6

Fonction Exponentielle Népérienne

Exercice 6.1



Résoudre :

- a) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$
- b) $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0$
- c) $3e^{2x} + e^x - 10 \geq 0$
- d) $e^{x+3} \times e^{x-2} = e^3$
- e) $e^x - 10e^{-x} = 3$
- f) $e^{2(x+1)} - 8e^{x+2} - 9e^2 = 0$
- g) $2e^{2x-4} + 5e^{x-2} - 3 = 0$
- h) $3^{2x+2} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0$
- i) $5^x - 4 \cdot 5^{-x} = 3$
- j) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Exercice 6.2



Déterminer D_f et les limites aux bornes :

- a) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (cosinus hyperbolique)
- b) $\frac{1}{1 + e^{1/x}}$
- c) $\ln(e^x + 1)$
- d) $\frac{xe^x}{1 + e^x}$
- e) $\ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$
- f) $\frac{e^x - 3}{e^x + 1}$
- g) e^{-x^2}
- h) $xe^{1/x}$ ($x \neq 0$)

Exercice 6.3



$h(x) = (x - 1)e^x + 2$.

- 1) Étudier les variations de h .
- 2) Montrer que $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-1, 0]$.
- 3) Étudier le signe de h sur $\mathbb{R}$.

- 4) Montrer que $xe^x \geq e(x-1)^2 - 2$ pour tout x .

Exercice 6.4

Étude complète de $f(x) = \frac{xe^{-x} + 2}{1 - xe^{-x}}$.

- 1) Déterminer D_f .
- 2) Montrer que $y = x + 2$ est une AO en $+\infty$.
- 3) Calculer $f'(x)$ et étudier les variations.
- 4) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à l'AO.

Exercice 6.5

Systèmes :

- a) $\begin{cases} 4e^x - 3e^y = 6 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} \ln(x + 3y) = 1 \\ e^{x-y} = 1 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} e^x + e^y = 6 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} e^{x+y} = e^5 \\ e^{x-y} = e \end{cases}$

Exercice 6.6

Fonctions hyperboliques. Poser $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

- 1) Montrer que $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
- 2) Calculer les dérivées de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.
- 3) Montrer que $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$.
- 4) Étudier $f(x) = \operatorname{ch} x$ (parité, variations, tracé).
- 5) Calculer $\int_0^1 \operatorname{sh} x \, dx$.

Exercice 6.7

Étude complète de $f(x) = \frac{xe^{-x} + 2}{1 - xe^{-x}}$. AO $y = x + 2$ en $+\infty$. Calculer l'aire entre (C_f) , l'AO et $x = 0$, $x = 1$.

Exercice 6.8

Soit $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$.

- 1) Montrer que $f(0) = 0$ et $f'(x) = e^x - 1 - x \geq 0$.

- 2) En déduire l'inégalité fondamentale : $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
- 3) En itérant, obtenir $e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ pour tout $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
- 4) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Exercice 6.9 – Bac TSE 2025


$f(x) = x - e^x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de f et montrer que f admet exactement deux zéros $\alpha < 0 < \beta$.
3. Soit $g(x) = x - xe^x + e^x$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g' = f$.
4. Étudier les variations de g , ses limites et tracé.
5. Calculer l'aire du domaine limité par (C_f) , (Ox) , $x = \alpha$ et $x = \beta$.

Exercice 6.10 – Bac TSE 2022


Soit $f(x) = (2x - 1)e^x$.

1. Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
2. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations.
3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution $x_0 = \frac{1}{2}$. Étudier le signe de f .
4. Calculer $\int_0^1 (2x - 1)e^x dx$ par IPP.
5. En déduire l'aire du domaine entre (C_f) , (Ox) , $x = 0$, $x = 1$.

Exercice 6.11 – Bac TSE 2018


Soit $f(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les limites et les variations de f .
2. Montrer que (C_f) admet $y = 0$ comme AH en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Calculer $\int_0^2 xe^{-x} dx$ par IPP.
4. En déduire l'aire du domaine limité par (C_f) , (Ox) , $x = 0$, $x = 2$.
5. Étudier la convexité de f . Points d'inflexion.

Chapitre 7

Fonction Puissance

Exercice 7.1



Simplifier ($x > 0$) :

1) $x^{3/2} \cdot x^{-1/2}$

4) $\sqrt[3]{x^2} \sqrt{x}$

2) $\frac{x^{5/3}}{x^{2/3}}$

5) $\left(\frac{x^{1/2}}{y^{1/3}}\right)^6$

3) $(x^{1/4})^{-8}$

6) $(8x^3)^{2/3}$

Exercice 7.2



Calculer les limites :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$ (écrire $x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$)

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{100}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x (= e)$

Exercice 7.3



Étude de $f(x) = x^\alpha \ln x$ sur $]0, +\infty[$, où $\alpha > 0$ est un paramètre réel.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Calculer $f'(x)$ et déterminer l'extremum de f .
- 3) Étudier la convexité de f .

Exercice 7.4



Étude de $f(x) = x^x$ sur $]0, +\infty[$.

- 1) Écrire $f(x) = e^{x \ln x}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- 2) Calculer $f'(x)$ et déterminer le minimum de f .
- 3) Montrer que f est convexe sur $]\alpha, +\infty[$ où α est à déterminer.

Exercice 7.5

Comparaison des croissances. Montrer rigoureusement (en utilisant les limites classiques) :

- a) $\ln x = o(x^\alpha)$ en $+\infty$ pour tout $\alpha > 0$.
- b) $x^\alpha = o(e^x)$ en $+\infty$ pour tout $\alpha > 0$.
- c) $e^{-x}x^\alpha \rightarrow 0$ en $+\infty$ pour tout $\alpha > 0$.
- d) Classer par croissance en $+\infty$: $\ln \ln x$, $\ln x$, $x^{0.01}$, $\sqrt{x}$, x , $x \ln x$, x^{10} , 2^x , e^x , $x!$ (informel).

Chapitre 8

Suites Numériques

Exercice 8.1



Suite arithmétique :

- a) $u_1 = 7, r = 5, n = 120$: calculer u_n et S_n .
- b) $u_1 = 50, r = -4, u_n = -6$: trouver n et S_n .
- c) $u_1 = -3, u_n = -6, S_n = 28,5$: trouver r et n .
- d) $u_5 = 17$ et $u_{12} = 38$: trouver r, u_1, S_{20} .

Exercice 8.2



Suite géométrique :

- a) $u_1 = 2, q = 3, n = 5$: calculer u_n et S_n .
- b) $u_1 = 32, u_n = 162, n = 5$: trouver q .
- c) $u_1 = 0,5, q = 7, S_n = 571,5$: trouver n .
- d) $u_2 = 6$ et $u_5 = 48$: trouver q, u_1, S_8 .

Exercice 8.3



Réurrences simples :

- a) $u_0 = 3, u_{n+1} = 2u_n - 1$. Poser $v_n = u_n - 1$. Nature de (v_n) . Exprimer u_n .
- b) $u_0 = 2, u_{n+1} = 3u_n + 4$. Trouver la suite géométrique associée.
- c) $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}$. Poser $v_n = \frac{1}{u_n}$.

Exercice 8.4



$(u_n) : u_0 = -4, u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{5}$.

- 1) Poser $v_n = u_n - 2$. Montrer que (v_n) est géométrique.
- 2) Exprimer u_n en fonction de n .

- 3) Étudier la convergence et calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Exercice 8.5



$(u_n) : u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

- 1) Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n .

- 2) Montrer que (u_n) est décroissante.
- 3) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 8.6

$$(u_n) : u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{4}.$$

- 1) Poser $v_n = u_n - 4$. Nature de (v_n) .
- 2) Exprimer u_n en fonction de n . Étudier la convergence.
- 3) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Exercice 8.7

Par récurrence :

- a) $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
- c) $2^n > n$ pour tout $n \geq 1$
- d) $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ pour $q \neq 1$
- e) $\forall n \geq 4 : n! > 2^n$

Exercice 8.8

Suite définie par une intégrale.

$$\text{Soit } I_n = \int_0^1 x^n e^x dx.$$

- 1) Montrer que $I_n = e - nI_{n-1}$.
- 2) Calculer I_0, I_1, I_2 .
- 3) Montrer que $I_n \rightarrow 0$.
- 4) Montrer que $I_n > 0$ et que (I_n) est décroissante.

Exercice 8.9

$$(u_n) : u_0 = 2, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}.$$

- 1) Montrer par récurrence que $u_n \leq 3$ pour tout n .
- 2) Montrer que (u_n) est croissante.
- 3) En déduire que (u_n) converge vers 3.

Exercice 8.10

Suite de Fibonacci. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

- 1) Calculer $F_2, \dots, F_{10}$.
- 2) Poser $r_n = F_{n+1}/F_n$ pour $n \geq 1$. Montrer que $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$.
- 3) Admettre que (r_n) converge. Déterminer sa limite $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or).
- 4) Vérifier que $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$ où $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ pour les premiers termes.

Exercice 8.11 – Bac TSE 2024

Similitude S : centre O , angle $\pi/2$, rapport $\sqrt{2}/2$. $M_0(1+i)$. Suite (z_n) .

1. Donner l'écriture complexe de S .
2. Exprimer z_n en fonction de n et z_0 .
3. Soit $a_n = |z_n|$. Montrer que $(\ln a_n)$ est arithmétique. En déduire la nature et la convergence de (a_n) .

Exercice 8.12 – Bac TSE 2022

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}$.

1. Poser $v_n = u_n - 1$. Montrer que (v_n) est géométrique.
2. Exprimer u_n en termes de n .
3. Étudier la convergence de (u_n) .
4. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ en fonction de n .

Exercice 8.13 – Bac TSE 2020

Soit (u_n) définie par $u_1 = 2$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

1. Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 1$.
2. Poser $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. Étudier la convergence.

Exercice 8.14 – Bac TSE 2019

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n \geq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Démontrer que (u_n) converge et trouver sa limite.

Chapitre 9

Équations Différentielles

Exercice 9.1



Intégrer (équations du 1^{er} ordre) :

- a) $y' - 5y = 0$
- b) $3y' + 5y = 0$
- c) $9y^2 = (y')^2$
- d) $(y')^2 - 2yy' = 0$
- e) $y' + y = 0$ avec $y(0) = 2$
- f) $2y' - 3y = 0$ avec $y(1) = e$

Exercice 9.2



Équations du 2^e ordre à coefficients constants (sans second membre) :

- a) $2y'' - 14y' + 20y = 0$
- b) $y'' + 8y' + 16y = 0$
- c) $y'' + 25y = 0$
- d) $y'' - 2y' + 5y = 0$
- e) $3y'' + 9y' - 12y = 0$
- f) $9y'' + 64y = 0$
- g) $y'' - 4y' = 0$
- h) $4y'' - 4y' + y = 0$

Exercice 9.3



Avec conditions initiales :

- a) $y'' + y' - 6y = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = -8$
- b) $y'' + 6y' + 9y = 0$, $f(0) = 4$, $f'(0) = 1$
- c) $y'' - 6y' + 13y = 0$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 5$
- d) $y'' + 9y = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$
- e) $y'' - 5y' + 6y = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

Exercice 9.4



Équations avec second membre :

- a) $(E_1) : y'' + 4y' + 4y = 4x + 12$. Trouver $g(x) = ax + b$ solution particulière. Intégrer.
- b) $(E_2) : y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x}$. Chercher une solution $g(x) = Ae^{3x}$.

c) $(E_3) : y'' - y = \cos x$. Chercher $g(x) = A \cos x + B \sin x$.

d) $(E_4) : y'' + y = x^2$. Chercher $g(x) = ax^2 + bx + c$.

Exercice 9.5



$$(E) : y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = e^{3x}.$$

- 1) Montrer que $h(x) = \frac{2}{5}e^{3x}$ est solution particulière.
- 2) Écrire la solution générale de (E) .
- 3) Déterminer la solution passant par $A(0, \frac{2}{5})$ avec tangente de pente 2.
- 4) Étudier et tracer cette solution.

Exercice 9.6



$$(E) : y'' - 4y' + 4y = 0.$$

- 1) Donner la solution générale.
- 2) Déterminer la solution avec $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.
- 3) Étudier les variations et la convexité de f .
- 4) Calculer l'aire entre la courbe, (Ox) , $x = -1$, $x = 1$.

Exercice 9.7



Application physique. Un condensateur se décharge selon $q'' + 2q' + 5q = 0$ où $q(t)$ est la charge. Conditions initiales : $q(0) = 1$, $q'(0) = 0$.

- 1) Résoudre l'équation (discriminant $\Delta = -16 < 0$).
- 2) Exprimer $q(t)$ sous forme $Ae^{-t} \cos(2t + \varphi)$.
- 3) Étudier la convergence de $q(t)$ vers 0 et interpréter physiquement.

Exercice 9.8 – Bac TSE 2022



$$\text{Soit } (E) : y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x}.$$

1. Résoudre l'équation caractéristique. Donner la solution générale de l'équation sans second membre (E_0) .
2. Vérifier qu'une solution particulière de (E) est $g(x) = 2e^{3x}$.
3. En déduire la solution générale de (E) .
4. Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 3$ et $f'(0) = 8$.
5. Étudier les variations de f et calculer $\int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 9.9 – Bac TSE 2019



$$\text{Soit } (E) : y'' + 2y' + y = xe^{-x}.$$

1. Résoudre l'équation caractéristique et donner la solution générale de (E_0) .
2. Chercher une solution particulière de (E) de la forme $g(x) = (ax^3 + bx^2)e^{-x}$.

3. En déduire la solution générale de (E) .
4. Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 9.10 – Bac TSE 2017

Soit $(E) : y'' + 4y = 4 \cos(2x)$.

1. Montrer que (E) n'a pas de solution particulière de la forme $A \cos(2x) + B \sin(2x)$ (cas de résonance).
2. Chercher une solution particulière de (E) de la forme $x(A \cos(2x) + B \sin(2x))$.
3. Donner la solution générale de (E) .
4. Déterminer la solution f telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Chapitre 10

Dénombrement et Probabilités

Exercice 10.1



Combinatoire :

- 1) Calculer $\binom{10}{3}$, $\binom{7}{2}$, $\binom{12}{5}$.
- 2) Combien d'anagrammes du mot MALI ? du mot BAMAKO ?
- 3) De combien de manières peut-on former un comité de 3 personnes parmi 10 ?
- 4) Classe de 4G et 3F : probabilité d'alternance G-F dans une file.
- 5) Jeu de 32 cartes, tirage de 5 : P (au moins 1 cœur).

Exercice 10.2



Boite A (8 pièces, 3 déf.), Boite B (5 pièces, 2 déf.). Tirage d'une pièce dans chaque boîte.

- 1) P_1 = probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse.
- 2) P_2 = probabilité qu'exactly une pièce soit défectueuse.
- 3) P_3 = probabilité que la pièce défectueuse vienne de A, sachant qu'une seule est défectueuse.

Exercice 10.3



Probabilités conditionnelles. Dans une ville, 60% des habitants ont une voiture, 30% ont un vélo, 20% ont les deux.

- 1) Un habitant a une voiture. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi un vélo ?
- 2) Un habitant a un vélo. Probabilité qu'il ait aussi une voiture ?
- 3) Les événements "avoir une voiture" et "avoir un vélo" sont-ils indépendants ?

Exercice 10.4



Trois tireurs : probabilités $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$. Un seul tir chacun.

- 1) P (exactement un touche).
- 2) Si un seul touche, P (c'est le premier tireur).
- 3) P (au moins un touche).

Exercice 10.5



Dé pipé : $p(1) = \frac{1}{4}$ et les $p(i)$ forment une suite arithmétique pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

- 1) Trouver les $p(i)$.
- 2) X = valeur obtenue. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 10.6

Loi binomiale.

- 1) 3 lancés d'un dé. X = nombre de 6. Loi de X , $E(X)$, $V(X)$, $P(X \geq 1)$.
- 2) QCM : 10 questions, 4 choix, réponse au hasard. $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{4})$. Calculer $P(X \geq 1)$, $E(X)$, $P(X \geq 5)$.
- 3) Un médicament est efficace pour 80% des patients. Sur $n = 5$ patients : P (au moins 4 guéris).

Exercice 10.7

Espérance et variance. Une variable X suit la loi :

x	-1	0	2	5
$P(X = x)$	0.1	0.3	0.4	0.2

Calculer $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.

Exercice 10.8

Sac : n jetons marqués 10 et $(10 - n)$ jetons marqués 50 ($3 \leq n \leq 7$). Tirage de 3 jetons sans remise. X = somme.

- 1) Déterminer les valeurs possibles de X et la loi de X .
- 2) Calculer $E(X)$ en fonction de n .
- 3) Trouver n pour $60 \leq E(X) \leq 90$.

Exercice 10.9

Probabilités totales et Bayes. Une usine a trois machines M_1 , M_2 , M_3 produisant respectivement 50%, 30%, 20% de la production totale. Les taux de défauts sont 2%, 3%, 5%.

- 1) Probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse.
- 2) Une pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de M_3 ?

Exercice 10.10 – Bac TSE 2025

Diaki ($p = \frac{4}{5}$) et Zeini ($p = \frac{3}{5}$) s'affrontent aux tirs au but.

1. Représente la situation par un arbre pondéré. Calcule les probabilités :
 - a. Que les joueurs soient ex-aequo.
 - b. Que Diaki gagne.
 - c. Que Zeini gagne.
2. Au bout de deux phases, le perdant donne 10 F au gagnant (sinon rien). Quelle est l'espérance de gain de Zeini ?

Exercice 10.11 – Bac TSE 2024

26G, 14F. Parmi eux, 13 garçons et n filles inscrits en langues. Évènements : G (garçon), F (fille), L (inscrit en langues). $P_G(L) = \frac{1}{2}$, $P_F(L) = \frac{n}{14}$.

1. Calculer $P(G)$ et $P(F)$.

2. Construire l'arbre de probabilité.
3. Calculer $P(L)$ en fonction de n .
4. Déterminer n pour que G et L soient indépendants.

Exercice 10.12 – Bac TSE 2023

★★★

Un marchand de bétail vend des moutons à 80 000 FCFA et des chèvres à 50 000 FCFA. Il fait une recette totale de 1 000 000 FCFA et il a plus de chèvres que de moutons.

1. Déterminer le nombre de moutons et de chèvres vendus.
2. Si les prix varient et la recette reste 1 000 000 FCFA, trouver toutes les solutions en entiers naturels.

Exercice 10.13 – Bac TSE 2021

★★★

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On tire 3 boules sans remise.

1. $P(3 \text{ boules blanches})$.
2. $P(2 \text{ blanches et } 1 \text{ noire})$.
3. $X = \text{nombre de boules blanches tirées}$. Déterminer la loi de X , $E(X)$, $V(X)$.
4. Comparer avec la loi binomiale $\mathcal{B}(3; \frac{3}{5})$ (tirage avec remise).

Exercice 10.14 – Bac TSE 2018

★★★

Trois étudiants passent un examen : A réussit avec proba 0,7, B avec proba 0,6, C avec proba 0,5. Les évènements sont indépendants.

1. $P(\text{tous réussissent})$.
2. $P(\text{aucun ne réussit})$.
3. $P(\text{exactement deux réussissent})$.
4. $P(\text{au moins un réussit})$.
5. Sachant qu'au moins un réussit, $P(\text{seul } A \text{ réussit})$.

Chapitre 11

Géométrie Plane – Transformations et Barycentres

Exercice 11.1



$$f : \begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases} . \text{ Écriture complexe. Nature. Point fixe.}$$

Exercice 11.2



Barycentres simples. $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, -1)$.

- 1) G = isobarycentre de A , B , C . Coordonnées de G .
- 2) H = barycentre de $(A, 3)$, $(B, 1)$, $(C, -2)$. Coordonnées de H .
- 3) Montrer que G est le centre de gravité du triangle.

Exercice 11.3



$S : z' = (1 + i\sqrt{3})z - 2$. Rapport, angle, centre. Image de $A(1)$. Calculer S^6 .

Exercice 11.4



$A(1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(0, 4)$. G barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, -1)$.

- 1) Coordonnées de G .
- 2) Ensemble $\mathcal{E}_1$ des M tels que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
- 3) Ensemble $\mathcal{E}_2$ des M tels que $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 20$.
- 4) Trouver k pour que $\mathcal{E}_2$ soit un cercle passant par A .

Exercice 11.5



Triangle ABC rectangle en A avec $AB = 3$ et $AC = 4$.

- 1) Calculer BC .
- 2) G = barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$. Montrer que G est le centre de gravité.
- 3) H = barycentre de $(A, \tan \hat{A})$, $(B, \tan \hat{B})$, $(C, \tan \hat{C})$... (orthocentre par barycentre).
- 4) Ensemble des M tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$: c'est un cercle de centre G .

Exercice 11.6



$A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $A'(1, 1)$, $B'(0, 2)$. Similitude S telle que $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$.

- 1) Rapport et angle de S .
- 2) Déterminer le centre de S (résoudre $z' = az + b$).

3) Calculer $S \circ S$.

Exercice 11.7



Soit r la rotation de centre $\Omega(1 + 2i)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

- 1) Donner l'écriture complexe de r .
- 2) Image du triangle $(0, 2, 2i)$.
- 3) Calculer $r \circ r$ et r^3 .

Exercice 11.8 – Bac TSE 2024



Triangle ABC isocèle avec $AB = AC$, I milieu de $[BC]$, $AI = 4a$, $BC = 2a$ ($a > 0$).

1. G = barycentre de $(A, 2), (B, 1), (C, 1)$. Construire G .
2. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des M tels que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
3. Pour $k \in \mathbb{R}$, ensemble E_k des M tels que $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = ka^2$. Discuter selon k .
4. Avec $a = 1$, repère de centre I , vecteurs $\vec{i} = \overrightarrow{IC}$ et $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$. Coordonnées de A, B, C, G .

Exercice 11.9 – Bac TSE 2023



Triangle ABC rectangle en A avec $AB = 2a$, $AC = a$.

1. G_1 = barycentre de $(A, 1), (B, -1), (C, 1)$. Construire G_1 .
2. $\mathcal{E}$ = ensemble des M tels que $MA - MB + MC = MA - MB + 2MC$... (interpréter).
3. H défini par $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Montrer que H est barycentre de $(A, 3), (B, 1), (C, -2)$.
4. Ensemble E_k des M tels que $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = ka^2$.

Chapitre 12

Coniques

Exercice 12.1



Nature et éléments des coniques :

- 1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (ellipse)
- 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (hyperbole)
- 3) $y^2 = 12x$ (parabole)
- 4) $x^2 + y^2 = 25$ (cercle)
- 5) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5} = 1$ (cercle)

Exercice 12.2



Pour chaque conique, donner centre, sommets, foyers, axes et excentricité :

- a) $4x^2 + 9y^2 = 36$
- b) $9x^2 - 16y^2 = 144$
- c) $x^2 = 8y$
- d) $y^2 - 4x^2 = 16$

Exercice 12.3



$$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 9 = 0.$$

- 1) Mettre sous forme réduite (compléter les carrés). Identifier la conique.
- 2) Donner centre, demi-axes, foyers, excentricité.
- 3) Équation de la tangente en $M_0(3, -4 + \sqrt{3})$.

Exercice 12.4



Intersection de $y = x + 1$ avec $y^2 = 4x$.

- 1) Déterminer les points d'intersection.
- 2) Interprétation géométrique : la droite est-elle secante, tangente ?
- 3) Calculer l'aire du domaine limité par la parabole et la droite.

Exercice 12.5



Équation de la tangente en $M_0(x_0, y_0)$ à :

- a) l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: montrer que c'est $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

- b) l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: trouver l'équation.
 c) la parabole $y^2 = 2px$: trouver l'équation.

Exercice 12.6

Foyer et directrice d'une parabole. Montrer que tout point $M(x, y)$ de la parabole $y^2 = 4px$ est à égale distance du foyer $F(p, 0)$ et de la directrice $x = -p$.

Exercice 12.7

$xy = 4$ dans le repère tourné de $\pi/4$: $\frac{X^2}{8} - \frac{Y^2}{8} = 1$.

- 1) Déterminer foyers, sommets, asymptotes de cette hyperbole.
- 2) Tangente en $M_0(x_0, y_0)$.
- 3) Montrer que la tangente en M_0 à l'hyperbole $xy = 4$ coupe les axes en A et B tels que M_0 est le milieu de $[AB]$.

Exercice 12.8

Lieux géométriques et coniques.

- 1) Montrer que l'ensemble des points M tels que $|MF_1| - |MF_2| = 2a$ (avec $F_1F_2 = 2c > 2a$) est une hyperbole.
- 2) Écrire l'équation d'une ellipse de foyers $F_1(-3, 0)$ et $F_2(3, 0)$ passant par $A(4, 0)$.
- 3) Déterminer l'équation du lieu des points M tels que $\frac{MF}{Md} = e$ (foyer F , directrice d , excentricité e) et identifier la conique selon $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$.

Exercice 12.9 – Bac TSE 2022

Soit l'ellipse (C) d'équation $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

1. Donner les éléments de (C) : centre, demi-axes, foyers, excentricité.
2. Équation de la tangente en $M_0(3, \frac{12}{5})$.
3. Montrer que la somme des distances d'un point de (C) aux deux foyers est constante.
4. Déterminer l'intersection de (C) avec la droite $y = x + 1$.

Exercice 12.10 – Bac TSE 2020

Soit la parabole $(\mathcal{P})$: $y^2 = 8x$.

1. Donner le foyer F , la directrice, le sommet et l'axe focal.
2. Montrer que la distance de tout point $M(x, y) \in (\mathcal{P})$ au foyer est $x + 2$.
3. La droite Δ : $y = 2x + k$ est tangente à $(\mathcal{P})$. Trouver k .
4. Calculer l'aire entre $(\mathcal{P})$ et la droite $y = 2x - 2$.

Exercice 12.11 – Bac TSE 2018

Soit l'hyperbole $(H) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

1. Donner les éléments de (H) .
2. Écrire les équations des asymptotes.
3. Équation de la tangente en $M_0(2\sqrt{2}, \sqrt{5})$.
4. Déterminer l'aire du triangle formé par les deux asymptotes et la tangente.

Chapitre 13

Sujets de Baccalauréat – Série TSExp (2014–2023)

Note : Les sujets TSExp ont une durée de **3 heures** (coefficient 3), contre 4 heures pour la série TSE. Les thèmes prioritaires sont les **fonctions** (logarithme, exponentielle), les **suites**, les **nombre complexes** et les **probabilités**. Les équations différentielles et les coniques ne sont généralement pas au programme TSExp.

Exercice 13.1 – Bac TSExp 2014 – Exercice 1 (Complexes) ★★★

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 + (\sqrt{3} - 1)z^2 + (1 - \sqrt{3})z - i = 0$.

1. Déterminer le réel y tel que iy soit solution de (E) .
2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout complexe z :

$$z^3 + (\sqrt{3} - 1)z^2 + (1 - \sqrt{3})z - i = (z - iy)(z^2 + az + b).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$.
4. En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique et trigonométrique.

Exercice 13.2 – Bac TSExp 2014 – Exercice 2 (Statistiques/Probabilités) ★★★

Une étude porte sur l'efficacité d'un médicament sur un échantillon de 600 personnes réparties en trois groupes : A (240 personnes), B (35% de l'échantillon) et C (le reste).

- 28% des fiches signalent un traitement efficace, dont 72 du groupe B.
- 75% des fiches du groupe A ne signalent aucune amélioration.

1. Compléter le tableau : groupes A, B, C $\times$ {efficace, non efficace}.
2. On choisit une fiche au hasard. Événements E_1 (groupe A), E_2 (traitement efficace), $E_3 = E_1 \cap E_2$, $E_4 = E_1 \cup E_2$. Calculer $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_3)$, $P(E_4)$.
3. On choisit une fiche du groupe B. Calculer $P(E_2|B)$.
4. Pour chaque groupe, donner le pourcentage de fiches signalant un traitement efficace.

Exercice 13.3 – Bac TSExp 2014 – Problème (Croissance de crevettes) ★★★

La taille $L(t)$ (en mm) des crevettes *Trachypenaeus* en fonction de l'âge t (en semaines) est modélisée par $L(t) = 87,5(1 - e^{-1/2 \cdot t})$.

Partie A – Modèle linéaire. Les relevés donnent les points (1, 10), (2, 18), (3, 25), (4, 33), (5, 40), (6, 41), (7, 50), (8, 53).

1. Déterminer le point moyen G du nuage. La droite (D) de coefficient directeur 6,14 passant par G : écrire son équation.

2. Selon ce modèle, taille d'une crevette de 12 semaines ? de 3 ans ?

Partie B – Modèle exponentiel. $L(t) = 87,5(1 - e^{-t/2})$.

1. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t)$ et interpréter. Calculer $L'(t)$ et étudier les variations.
2. Calculer la taille après 3 ans. Déterminer l'âge théorique d'une crevette de taille 80 mm.
3. Tracer la courbe L et la droite (D) dans un même repère. Interpréter.

Exercice 13.4 – Bac TSEXP 2015 – Exercice 1 (Suites)

★★★

Un paysan possède un champ de 50 000 arbres (année 2015). Chaque année, il vend 5% des arbres et plante 3 000 nouveaux. On note X_n le nombre d'arbres à l'année $(2015 + n)$.

1. Calculer X_1 (année 2016) et X_2 (année 2017). Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n .
2. Poser $U_n = 60\,000 - X_n$. Montrer que (U_n) est géométrique. Exprimer U_n puis X_n en fonction de n .
3. Combien d'arbres dans 20 ans ? Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$ et interpréter.

Exercice 13.5 – Bac TSEXP 2015 – Exercice 2 (Lecture graphique + Complexes)

★★★

Partie I. Une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, avec : $f(1) = f(3) = 0$, $f(2) = -1$, $f(0) = 1$, $f'(0) = f'(2) = 0$, $f' > 0$ sur $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, $f' < 0$ sur $]0, 2[$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 2] = 0$.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Équations des asymptotes de (C_f) .
3. Signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
4. Tracer (C_f) et ses asymptotes.
5. Ensemble de définition de $\ln(f(x))$ et de $\frac{1}{f(x)}$.

Partie II. Soient $z_1 = e^{i\pi/6}$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

1. Écrire z_1, z_2 sous forme trigonométrique.
2. Montrer qu'il existe deux suites géométriques (U_n) et (V_n) telles que $U_2 = V_2 = z_1$ et $U_3 = V_4 = z_2$. Déterminer U_0, V_0 et les raisons.

Exercice 13.6 – Bac TSEXP 2015 – Problème (Logarithme)

★★★

Soit $f(x) = x + \frac{2(1 + \ln x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

1. Déterminer D_f . Calculer les limites aux bornes.
2. Soit $h(x) = x^2 - 2 \ln x$. Étudier ses variations. En déduire $h(x) \geq 0$, puis le signe de $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
4. Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$. Tracer (C_f) et Δ .
5. Soit $\mathcal{A}(k)$ l'aire entre (C_f) , Δ et les droites $x = 1, x = k$ ($k > 1$). Calculer $\mathcal{A}(k)$. Pour

quelle valeur de k a-t-on $\mathcal{A}(k) = 8$?

Exercice 13.7 – Bac TSExp 2016 – Exercice 1 (Complexes + Rotation) ★★★

Partie I.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. Déterminer module et argument de chaque solution.
2. La transformation T du plan définie par $z' = e^{i\pi/3}z$.
 - a. Déterminer la nature de T et ses éléments caractéristiques.
 - b. Soit A d'affixe $z_A = -\sqrt{3} + i$. Déterminer les affixes de $B = T(A)$ et $C = T(B)$. Construire A, B, C .
 - c. Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_B}$ puis déduire la nature du triangle ABC .

Exercice 13.8 – Bac TSExp 2016 – Exercice 2 (Équation différentielle appliquée) ★★★

Dans une culture de microbes, la vitesse de prolifération vérifie $g'(t) = kg(t)$ où $k > 0$ et $g(0) = N$ (nombre initial de microbes).

1. Déterminer l'unique solution g de cette équation différentielle avec $g(0) = N$.
2. Sachant qu'au bout de 2 heures le nombre de microbes a quadruplé, calculer $g(3)$ en fonction de N .
3. Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 9 600 microbes au bout de 5 heures ?

Exercice 13.9 – Bac TSExp 2016 – Problème (Fonctions rationnelles) ★★★

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Montrer que (C_f) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.
2. Préciser la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.
3. Étudier les variations de f .
4. Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$? Si oui, trouver leurs équations.
5. Tracer (C_f) et ses asymptotes.
6. Montrer que la restriction g de f sur $I =]1, +\infty[$ est une bijection vers un intervalle J à préciser.
7. Calculer $(g^{-1})'(2)$. Dresser le tableau de variations de g^{-1} et tracer sa courbe.

Exercice 13.10 – Bac TSExp 2017 – Exercice 1 (Complexes + Probabilités) ★★★

Partie I. Complexes. Soit $p(Z) = Z^3 + (2 - 2i)Z^2 + (5 - 4i)Z - 10i$.

1. Calculer $p(2i)$.
2. En déduire une factorisation de $p(Z)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.

Partie II. Probabilités. Un vaccin contre la méningite est efficace à 75%. On vaccine 20 personnes.

1. Probabilité qu'aucune personne ne soit protégée.
2. Probabilité que la moitié des personnes soit protégée.
3. Probabilité que les 20 personnes soient protégées.

Exercice 13.11 – Bac TSEXP 2017 – Exercice 2 (Suites – Bactéries) ★★★

La population initiale est de 100 bactéries. Elle augmente de 6,5% par heure et le biologiste ajoute 100 bactéries par heure. R_n = nombre de bactéries après n heures, avec $R_{n+1} = 1,065R_n + 100$.

On pose $u_n = R_n + \frac{100\,000}{13}$.

1. Montrer que (u_n) est géométrique. Préciser la raison.
2. Exprimer u_n puis R_n en fonction de n .
3. Au bout de combien de temps le nombre de bactéries sera-t-il égal à 90% de la capacité maximale (1000) ?

Exercice 13.12 – Bac TSEXP 2017 – Problème (Exponentielle) ★★★

Soit $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
3. Équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.
4. Trouver les coordonnées des intersections de (C_f) avec les axes.
5. Tracer (C_f) et (T) .
6. Soit $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. Déterminer a, b, c pour que F soit une primitive de f .
7. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) , (T) , l'axe (Ox) et $x = 2$.

Exercice 13.13 – Bac TSEXP 2018 – Exercice 1 (Complexes) ★★★

Soit $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + 2)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

1. Vérifier que $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + 2)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$ (chercher une racine de la forme ai , $a \in \mathbb{R}$).
3. Écrire les solutions sous forme algébrique.

Exercice 13.14 – Bac TSEXP 2018 – Exercice 2 (Suite – Épidémie) ★★★

La fonction $f(t) = 24 \ln t - 3t^2 + 10$ modélise le nombre de milliers de malades sur $[1; 26]$ (en semaines).

1. Calculer $f'(t)$.
2. Étudier le signe de $f''(t)$ et le tableau de variations de f' sur $[1; 26]$.
3. Montrer que $f'(t) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1; 26]$. Encadrer α par deux

entiers consécutifs.

4. En déduire le signe de $f'(t)$ puis les variations de f .
5. Interprétation : à partir de quelle semaine le nombre de malades par semaine commence-t-il à diminuer ?

Exercice 13.15 – Bac TSExp 2018 – Suite $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ ★★★

Soit (w_n) avec $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = \frac{w_n - 1}{w_n + 3}$.

1. Calculer w_1 et w_2 .
2. Montrer que $0 < w_n < 1$ et que (w_n) est croissante.
3. Soit $v_n = \frac{w_n - 1}{w_n + 3}$... (chercher la suite géométrique associée via $v_n = \frac{w_n + \alpha}{w_n + \beta}$ pour bien choisir α, β). En déduire w_n en fonction de n .
4. Montrer que (w_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 13.16 – Bac TSExp 2019 – Exercice 1 (Complexes – Triangle) ★★★

Soit $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

1. Calculer $P(-1)$. Déterminer a, b tels que $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. On donne $A(-1)$, $B(2 + i\sqrt{3})$, $C(2 - i\sqrt{3})$, $G(3)$ dans le plan complexe. Calculer AB , BC , AC . Nature du triangle ABC .
4. Calculer un argument de $\frac{z_A - z_G}{z_C - z_G}$. Nature du triangle GAC .

Exercice 13.17 – Bac TSExp 2019 – Exercice 2 (Intégrales) ★★★

Soient $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

1. Calculer $J_1 = \int_0^1 f(x) dx$.
2. Calculer $J_1 + J_2$ et $J_1 - J_2$ pour $J_2 = \int_0^1 g(x) dx$. En déduire J_2 .
3. Déterminer a, b, c tels que $\frac{2}{(2x-1)^2} = a + \frac{b}{2x-1} + \frac{c}{(2x-1)^2}$.
4. Calculer $\int_1^2 \frac{x dx}{(2x-1)^2}$.

Exercice 13.18 – Bac TSExp 2019 – Problème (Fonction cubique) ★★★

Soit $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe.

1. Montrer que f est impaire. En déduire qu'on peut se concentrer sur $[0, +\infty[$.
2. Étudier le sens de variations de f et montrer que l'équation $g(x) = 0$ (où $g(x) =$

$x^3 + 3x^2 + 8$) admet une unique solution $\alpha \in [-4, -3]$.

- Étudier le signe de $g(x)$ selon x .
- Montrer qu'il existe a, b, c, d tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$.
- En déduire l'asymptote oblique de $(\mathcal{C})$ et la position relative.
- Déterminer les points de $(\mathcal{C})$ dont la tangente est parallèle à l'asymptote.
- Tracer $(\mathcal{C})$.

Exercice 13.19 – Bac TSEXP 2020 – Exercice 1 (Complexes)

★★★

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} = 0$.

- Déterminer le réel y tel que iy soit solution de (E) .
- Déterminer a, b tels que $z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} = (z - iy)(z^2 + az + b)$.
- Achever la résolution de (E) et écrire chaque solution sous forme trigonométrique.

Exercice 13.20 – Bac TSEXP 2020 – Exercice 2 (Suite géométrique)

★★★

Soit (U_n) définie par $U_n = e^{(-1)^n}$.

- Calculer U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 .
- Montrer que (U_n) est géométrique. Exprimer $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- Trouver la valeur minimale de n telle que $S_n > 10$.
- Soit $V_n = \ln(U_n)$ et $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$. Exprimer $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}$ en fonction de T_n .

Exercice 13.21 – Bac TSEXP 2020 – Problème (Exponentielle)

★★★

Soit $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Montrer que $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$. Position relative.
- Étudier les variations de f' .
- Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variations de f .
- Montrer que $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $1,9 < \alpha < 2$ et $-0,6 < \beta < -0,5$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprétation géométrique.
- Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et l'asymptote.

Exercice 13.22 – Bac TSEXP 2021 – Exercice 1 (Complexes)

★★★

Soit $p(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(-11 + 6i)z - 3(12 + 4i)$.

- Démontrer que $p(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
- Déterminer $q(z)$ tel que $p(z) = (z - z_0)q(z)$.

3. Démontrer que $q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_1 que l'on déterminera.
4. Résoudre $p(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$. Soit z_2 la troisième solution.
5. Démontrer que les points d'affixes z_0, z_1, z_2 sont alignés.

Exercice 13.23 – Bac TSExp 2021 – Exercice 2 (Suite récurrente)

★★★

Soit (u_n) avec $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - u_n}$. Poser $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
2. Déduire la nature de (v_n) .
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
4. Poser $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$. Exprimer S_n . Calculer la somme des 30 premiers termes de (v_n) .

Exercice 13.24 – Bac TSExp 2021 – Problème (Logarithme + Fonctions)

★★★

Partie I. Soit $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

1. Dresser le tableau de variations de g .
2. Calculer $g(1)$ et étudier le signe de $g(x)$.

Partie II. Soit $f(x) = -\frac{5}{x} + 1 + \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

(On admettra que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.)

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Démontrer que $f(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha < \beta$.
3. Montrer que $y = -\frac{5}{x} + 1$ est asymptote oblique en $+\infty$. Position relative.
4. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et l'asymptote.
5. Calculer l'aire entre $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe (Ox) en fonction de α et β .

Exercice 13.25 – Bac TSExp 2022 – Exercice 1 (Lecture de tableau)

★★★

On dispose d'une fonction f dont le tableau de variations est partiellement donné, avec $f(-3) = -1$, $f(-2) = -2$, $f(1) = -2$, $f(9) = -5$.

1. Compléter le tableau de variations.
2. Donner le domaine de définition, les asymptotes et le nombre de solutions de $f(x) = 0$.
3. Construire les asymptotes et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.
4. Résoudre graphiquement $f(x) = -2$ et l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 13.26 – Bac TSExp 2022 – Exercice 2 (Suites et Complexes)

★★★

Soit (U_n) géométrique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Soit (V_n) arithmétique de premier terme $V_0 = 1$ et de raison $r = \frac{\pi}{6}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit Z_n le complexe de module U_n et d'argument V_n .

1. Exprimer U_n et V_n en fonction de n . En déduire Z_n .
2. Démontrer que (Z_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/6}$ et de premier terme $Z_0 = 4$.
3. Déterminer la nature de la transformation F qui au point M_n (d'affixe Z_n) associe M_{n+1} (d'affixe Z_{n+1}).

Exercice 13.27 – Bac TSEXP 2022 – Problème (Croissance des poissons) ★★★

Partie A – Modèle linéaire. Données : têtes (semaines) 1 à 8, tailles (cm) : 10, 18, 25, 33, 40, 41, 50, 53.

1. Point moyen G . Droite (D) de coefficient directeur 6,14 passant par G . Écrire l'équation de (D) .
2. Taille d'un poisson de 12 semaines selon ce modèle. Et de 3 ans ?

Partie B – Modèle exponentiel. $g(t) = 87,5(1 - 2^{-t})$.

1. Limite de g en $+\infty$ (interpréter). Dérivée g' et variations.
2. Taille après 3 ans. Âge d'un poisson de taille 80 cm.
3. Tracer g et (D) dans un même repère. Interpréter.

Exercice 13.28 – Bac TSEXP 2023 – Exercice 1 (Primitives et Intégrales) ★★★

Partie I. Soit $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)}$ définie sur $]0, +\infty[$.

1. Déterminer a, b, c tels que $h(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$.
2. En déduire la primitive H de h sur $]0, +\infty[$ telle que $H(-1) = -\ln 2 \dots$ (adapter l'intervalle).

Partie II. Soit $I(x) = \int_0^x (\cos^2 t) dt$ et $J(x) = \int_0^x (\sin^2 t) dt$.

1. Calculer $I(x) + J(x)$ et $I(x) - J(x)$.
2. En déduire $I(x)$ et $J(x)$.

Exercice 13.29 – Bac TSEXP 2023 – Exercice 2 (Complexes et Similitudes) ★★★

Partie I.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2 + 6i)z - 16 + 12i = 0$.
2. Soit $p(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 - (12 - 24i)z + 32 - 24i$.
 - a. Montrer que $p(z) = 0$ admet une solution réelle z_1 .
 - b. Factoriser $p(z)$ et résoudre $p(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Partie II. On donne $A(2)$, $B(4 + 2i)$, $C(-2 + 4i)$ dans le plan complexe.

1. Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et déduire la nature du triangle ABC .
2. Déterminer l'ensemble (E) des M tels que $|z - 4 - 2i| = |z + 2 - 4i|$.
3. Soit s la similitude directe telle que $s(A) = A$ et $s(B) = C$. Déterminer rapport et angle de s .

Exercice 13.30 – Bac TSExp 2023 – Problème (Logarithme + Étude complète)

★★★

Partie A. Soit $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x}$ sur D_g .

1. Déterminer D_g .
2. Résoudre $g(x) > 0$ sur D_g .
3. Déterminer a, b, c tels que $g(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$ sur D_g .

Partie B. Soit $f(x) = x + 2 + \ln \frac{x^2}{x+1}$ sur son domaine de définition D_f .

1. Étudier les variations de f .
2. Montrer que $(D) : y = x + 2$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$. Position relative.
3. Préciser la position de $(\mathcal{C}_f)$ et (D) .
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et (D) . Équation de la tangente en ce point.
5. Étudier le comportement de f aux bornes de D_f .
6. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et (D) .
7. Montrer que le point $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.