

Exercices – Divers

Exercice 1

(5 points)

1°/ Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes:

a) $Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + \sqrt{2} = 0$ (1pt)

b) $Z + \frac{1}{Z} = 1$ (1pt) $Z + \frac{1}{Z} = \sqrt{2}$ (1pt)

2°/ Soit P le polynôme de la variable complexe Z tel que :

$$P(Z) = Z^4 - (1 + \sqrt{2})Z^3 + (2 + \sqrt{2})Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + 1$$

a) Vérifier que pour tout Z non nul on a :

$$\frac{P(Z)}{Z^2} = (Z + \frac{1}{Z})^2 - (1 + \sqrt{2})(Z + \frac{1}{Z}) + \sqrt{2} \quad (1pt)$$

b) En utilisant ce qui précède, résoudre l'équation $P(Z) = 0$ (1pt)

Exercice 2

6 points

A) x est un entier naturel supérieur ou égal à 5. Soient les entiers naturels N et N' qui s'écrivent respectivement $\overline{100x}$ et $\overline{x001}$ dans le système de base $x + 1$.

1) Ecrire N et N' dans le système de base x .

2) Ecrire $N + N'$ dans le système de base x . En déduire que $N + N'$ est multiple de $x + 1$. Donner alors, dans le système de base x , le quotient q de la division euclidienne de $N + N'$ par $x + 1$.

3) En déduire qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que :

$$\overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x = q ;$$

B.

Dans un système de numération de base a , on considère les nombres

$$A = \overline{211}, \quad B = \overline{312}, \quad C = \overline{133032}.$$

1) Expliquer pourquoi a doit être strictement supérieur à 3.

2) a) Sachant que $C = A \times B$, montrer que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$.

b) En déduire que a divise 8.

c) Déterminer alors a .

3) L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base quatre.

Problème 3 (10 points)

I- Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On appelle M , M_1 et M_2 les points d'affixes respectives : a , $Z_1 = (1 + i)a + 2i$ et $Z_2 = (1 - i)a + 2i$

1-a- Vérifie que $Z_2 = -iZ_1 - 2 + 2i$. (0,5pt)

b- En déduis que $r(M_2) = M_1$ où r est la rotation dont on précisera le centre P et l'angle α . (0,5pt)

2- On suppose que $a \neq 0$ et I est le milieu du segment $[M_1M_2]$

a- Détermine l'affixe de I . (0,5pt)

b- Montre que M est l'image de I par une translation dont on précisera l'affixe du vecteur. (0,5pt)

c- Montre que les droites (IP) et (M_1M_2) sont perpendiculaires. (0,5pt)

3- Montre que $\frac{Z_1-a}{Z_2-a}$ est un imaginaire pur si et seulement si $|a| = 2$ (0,5pt)

II- Un entier naturel K s'écrit $\overline{abac}$ dans la base 4 et $\overline{bca}$ dans la base 7.

1- Donne les contraintes sur a, b et c . (0,5pt)

2- Montre que $67a - 33b - 6c = 0$ (0,5pt)

3- En déduis que 3 est un diviseur de a , puis détermine les valeurs de a . (0,75pt)

4- Dans cette question on prendra $a = 3$; $b = 5$ et $c = 6$

a- Ecris K dans le système décimal. (0,5pt)

b- Ecris K dans le système binaire. (0,5pt)

c- Décompose K en produit de facteurs premiers. (0,5pt)

d- En déduis tous les diviseurs positifs de K . (0,5pt)

e- En déduis les couples d'entiers naturels $(a; b)$ tels que $m + d = K$ et $7 < d < 20$;
avec $m = PPMC(a; b)$ et $d = PGCD(a; b)$. (1pt)

Exercice 4

- 1) Construire le point I tel que $\vec{IJ} + \vec{IK} = \vec{0}$
- 2) Soient A ; B et C trois points du plan. Montrer que B est le barycentre des points A et C en précisant leurs poids tel que $2\vec{CA} + 3\vec{BC} = \vec{0}$
- 3) Déterminer les nombres réels α et β pour que le point G soit le barycentre des points $(E; \alpha)$ et $(F; \beta)$ dans les cas suivants : $\vec{GE} + 3\vec{GF} = 2\vec{EF}$ et $-4\vec{GE} + 3\vec{GF} = 7\vec{FE}$

Exercice 5

- 1) Soient A et B deux points du plan. Déterminer l'ensemble de points M du plan tel que :
 $\| -2\vec{MA} + 3\vec{MB} \| = 3$;
 $\| 4\vec{MA} - 2\vec{MB} \| = \| \vec{MA} + \vec{MB} \|$ et
 $\| -2\vec{MA} + 6\vec{MB} \| = \| 3\vec{MA} + \vec{MB} \|$
- 2) Soient $A(2; -4)$ et $B(1; 3)$ deux points du plan et soit
 $G = \text{bar}\{(A; 3); (B; 2)\}$.

- a) Déterminer les coordonnées du point G
- b) Déterminer les coordonnées du point K tel que G est le barycentre des points $(A; 3)$ et $(K; 1)$

Exercice 6

ABC un triangle. On considère les points E et F tels que $\vec{AE} = 2\vec{AB}$ et F est le milieu du segment $[AC]$.

- 1) Construire les points E et F
- 2) Montrer que $E = \text{bar}\{(A; -1); (B; 2)\}$
- 3) soit $G = \text{bar}\{(A; -1); (B; 2); (C; 1)\}$
M.q G est le milieu de segment $[CE]$, puis construire G .
- 4) a) Construire le point $K = \text{bar}\{(B; 2); (C; 1)\}$
b) Montrer que les points $A; K$ et G sont alignés .
c) Dédire que le point K est le centre de gravité du triangle ACE
- 5) soit $(E) = \left\{ M \in (P) / \| -\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} \| = CE \right\}$
a) M.q (E) est un cercle en détermine le centre et le rayon
b) Montrer que le point $C \in (E)$

Exercice 7

Soit ABC un triangle et soit

- $G = \text{bar}\{(A; 1); (B; -2); (C; -3)\}$
- 1) Montrer que $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$, puis construire G .
 - 2) a) Construire le point J tel que $\vec{BJ} = \frac{3}{5}\vec{BC}$
b) Montrer que $J = \text{bar}\{(B; -2); (C; -3)\}$
c) Montrer que les points $J; A$ et G sont alignés .
 - 3) soit K un point tel que B est le milieu de $[AK]$
a) Montrer que $K = \text{bar}\{(A; 1); (B; -2)\}$

b) Montrer que : $\vec{KG} = \frac{3}{4}\vec{KC}$

c) Dédire que les droites (AJ) et (KC) sont sécantes en un point G .

4) soit $(\phi) = \left\{ M \in (P) / \| \vec{MA} - 2\vec{MB} - 3\vec{MC} \| = 2AC \right\}$

a) M.q (ϕ) est un cercle en détermine le centre et le rayon

b) construire le cercle (ϕ)

Exercice 8

ABC un triangle. On considère les points Q ; I et R tels que $\vec{AQ} = \frac{1}{4}\vec{AC}$ et I est le milieu du segment $[BC]$ et R le projeté de Q sur (AB) parallèlement à (BC) .

Soit $G = \text{bar}\{(A; 3); (B; 1); (C; 1)\}$

- 1) construire une figure convenable
- 2) vérifier que $Q = \text{bar}\{(A; 3); (C; 1)\}$
- 3) Dédire que les points $B; Q$ et G sont alignés .
- 4) Montrer que : $\vec{AR} = \frac{1}{4}\vec{AB}$
- 5) Dédire que $R = \text{bar}\{(A; 3); (B; 1)\}$
- 6) Montrer que les droites $(AI); (BQ)$ et (CR) sont concourantes en un point G .

Exercice 9

ABC un triangle et J un point tel que $\vec{BJ} = 2\vec{BC}$

$G = \text{bar}\{(A; 1); (B; -1); (C; 2)\}$

- 1) Montrer que $J = \text{bar}\{(B; -1); (C; 2)\}$ puis construire le point J
- 2) Construire le point $K = \text{bar}\{(A; 1); (C; 2)\}$.
- 3) Montrer que G est le milieu du segment $[AJ]$
- 4) Montrer que les droites (AJ) et (BK) sont sécantes en un point G .
- 5) Montrer que le point K est le centre de gravité du triangle ABJ .

Exercice 10

Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

- a) $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
- b) $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.
- c) $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.
- d) $n^7 - n$ est divisible par 7.
- e) $n(n^4 - 1)$ est multiple de 5.

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

- 1.a) Déterminer la matrice J telle que $A = I_3 + J$.
- 1.b) Démontrer que pour tout entier n avec $n \geq 3$, on a : $J^n = 0_3$.
- 2) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

- 3) En déduire la matrice A^n en fonction de n pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 12

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- 1. Déterminer $(A - I_3)^2$.
- 2. En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A .
- 3. On pose $A = N + I_3$.
 - a) Déterminer N puis N^k pour tout entier naturel k .
 - b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I_3 et de A .