

Exercices – Calcul Intégral

Problème 1

PARTIE A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} e^{1-x}.$$

Elle est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa dérivée et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f(x) = \frac{e}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{e^x}$.

En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2. Pour tout x de $]0; +\infty[$; calculer $f'(x)$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f .

4. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. (unité 2cm)

5. Soit $\mathcal{D}$ la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathcal{C})$; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

a. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique.

b. Calculer en cm^3 le volume du solide de révolution engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses. (On pourra s'aider d'une intégration par parties)

PARTIE B

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$U_n = \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

1. Interpréter graphiquement U_n .

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout t de l'intervalle $[n; n+1]$; on a : $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ et que $f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$.

3. En déduire que la suite (U_n) est décroissante

4. Justifier la convergence de la suite (U_n) et calculer sa limite.

PARTIE C

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

1.

a. Que représente la fonction F pour f ?

b. En déduire $F'(x)$ et par suite le sens de variation de F .

2.

a. Démontrer que pour tout réel t positif : $(t+2) \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$

(On pourra remarquer que pour tout réel t positif, $(\sqrt{t} - \sqrt{2})^2 \geq 0$).

b. En déduire que pour réel x de l'intervalle $[1; +\infty[$: $F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^x (t+2) e^{1-t} dt$.

c. A l'aide d'une intégration par parties ; montrer que pour tout x de $[1; +\infty[$ on a :

$$\int_1^x (t+2)e^{1-t} dt = 4 - (x+3)e^{1-x}.$$

d. En déduire que pour tout x de $[1; +\infty[$; $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$.

3. On pose pour tout entier naturel n non nul : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$

a. Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale.

b. Montrer que la suite (S_n) est convergente.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l$. Donner un encadrement de l

Problème 2 (10 pts)

Partie I : On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} h(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

0,5 1) (Montrer que f est dérivable à droite de 0 .

2) On admet que $(\forall x \in [0, +\infty[) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

0,25 a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \right)$

1 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))$ et Etudier la branche infinie a (C_f) au $V(+\infty)$.

0,5 3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) = 2x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2(1+x)} \right)$

0,5 b) Montrer que f' est continue sur I .

0,5 c) En utilisant T.A.F montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad \frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$

0,25 d) En déduire la monotonie de f sur $[0, +\infty[$.

0,5 4) Tracer C_f la courbe de f (en précisant la demi tangente à droite du point $(0, 0)$)

0,5 5) Montrer que f est une bijection de I vers I (on admet que f^{-1} sa bijection réciproque est continue à droite en 0) .

6) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$

0,5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$.

0,5 b) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f(x) < x$

0,5 c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer la limite de (u_n) .

Partie II : Soit F la fonction définie sur I par : $(\forall x \in I) : F(x) = \int_x^1 f(t) dt$.

0,5 1. Calculer $F(x)$ pour tout x de I .

0,5 2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} (F(x))$ en déduire que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{4\ln 2 - 1}{6}$

0,75 3. Montrer que : $\int_0^{\ln 2} f^{-1}(t) dt = \int_0^1 t f'(t) dt$ et déduire la valeur de $\int_0^{\ln 2} f^{-1}(t) dt$

0,5 4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^{-1}(\frac{k}{n} \ln 2)$

Montrer que la suite $(s_n)_{n>0}$ est convergente et déterminer sa limite .

Partie III : Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $T_n = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^n} dt$

0,25 1. vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \int_0^1 f(t) dt - T_n = \int_0^1 \frac{t^n f(t)}{1+t^n} dt$

2. Montrer que :

0,5 $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \leq \int_0^1 \frac{t^n f(t)}{1+t^n} dt \leq n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} f(x) dx + \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 f(x) dx$

- 0,5 3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 f(x) \right) = 0$
- 0,5 4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n)$

Exercice 3 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $] -2, 2[$ par : $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2+x}{2-x} \right)$ et on note ζ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique 3cm)

A)1)a) Montrer que f est impaire.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Montrer que f réalise une bijection de $] -2, 2[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

(On notera f^{-1} sa fonction réciproque).

2)a) Soit (T) la tangente à ζ au point d'abscisse zéro, étudier la position de ζ et (T) .

b) Construire ζ' , (T) et ζ' la courbe de f^{-1} .

B)1)a) Démontrer que pour tout $x \in] -2, 2[$, On a : $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t f'(t) dt$.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Déduire que pour tout réel y on a : $\int_0^y f^{-1}(t) dt = 2 \ln \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)$.

d) Calculer alors l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2 , de la partie du plan limitée par la courbe ζ' , les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$ et l'axe des abscisses.

2) Soit A le point de la courbe ζ' d'abscisse $\ln(\sqrt{7})$.

a) Montrer que pour tout réel x on a : $[f^{-1}(x)]^2 = 4 - 2(f^{-1})'(x)$.

b) En déduire le volume du solide engendré par la rotation de l'arc $\widehat{OA}$ de ζ' autour de l'axe des abscisses.

C)1) Soit x un réel, pour tout entier naturel non nul n , on pose : $F_n(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} f^{-1}(t) \right)^n dt$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq F_n(x) \leq x \cdot \left[\frac{1}{2} f^{-1}(x) \right]^n$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$.

2)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+2}(x) = F_n(x) - \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{2} f^{-1}(x) \right]^{n+1}$.

b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{2n}(x) = x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \left[\frac{1}{2} f^{-1}(x) \right]^{2k-1}$.

3)a) Montrer que pour tout $x \in [0, 2[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{2} \right)^5 + \dots + \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n-1} = f(x) - F_{2n}(f(x)).$$

b) Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^5 + \dots + \frac{1}{2n-1} \left(\frac{3}{4} \right)^{2n-1} \right)$.

Exercice 4

A) 1) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x - \ln x$

a) Etudier les variations de h sur $]0, +\infty[$.

b) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $h(x) \geq 1$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

B) Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ puis calculer $F'(x)$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \ln 2$.

b) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 \leq F(x) - \ln 2 \leq \frac{\ln(2x)}{x - \ln x}$.

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

3) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_1^n \frac{t}{t - \ln t} dt$.

a) Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\frac{t}{t - \ln t} \geq 1 + \frac{\ln t}{t}$.

b) Calculer $\int_1^n (1 + \frac{\ln t}{t}) dt$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 5$, $n \leq U_n$.

d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 \ln^2(x)}} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0$:

$$f'(x) = \frac{-x \ln(x) (1 + \ln(x))}{\left(\sqrt{1 + x^2 \ln^2(x)}\right)^3}.$$

d) Dresser le tableau de variations de f .

e) Tracer C_f .

2) Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On désigne par C_F la courbe représentative de F .

a) Pour $t \geq e$, montrer que

$$t \ln(t) \leq \sqrt{1 + t^2 \ln^2(t)} \leq \sqrt{2} t \ln(t).$$

b) Dédurre que pour $x \geq e$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln(x)) \leq \int_e^x f(t) dt \leq \ln(\ln(x)).$$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de C_F au voisinage de $+\infty$.

d) Dresser le tableau de variations de F .

e) Tracer une allure de C_F (on peut supposer que $F(1) = 0,9$).

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3-x)e^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer la courbe (C).

d) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' - y = e^{-x}$ et calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

2. On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$U_n = \frac{3^n}{n!}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq U_n \leq \frac{9}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3. Pour tout entier naturel $n \geq 3$; on pose $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^3 (3-x)^n e^x dx$ et

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \cdots + \frac{3^n}{n!}.$$

a) Justifier que $I_1 = e^3 - 4$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq (e^3 - 1)U_n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

c) En utilisant une intégration par partie, montrer que $I_{n+1} = I_n - U_{n+1}$.

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \cdots + \frac{3^n}{n!} + I_n. \text{ En déduire que } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^3.$$

Exercice 7 (9 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^{1-x} - \ln x$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1,6 < \alpha < 1,7$.

c) Tracer C_f .

② a) Soit $\lambda \in]0, 1]$.

Déterminer en fonction de λ , l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations $x = \lambda, x = 1$ et $y = 0$.

b) Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(\lambda)$.

③ Soit (W_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par $W_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \mathcal{A}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

b) En déduire que la suite (W_n) est convergente et déterminer sa limite.

④ Soit (T_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{1-\frac{k}{n}}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $T_n = \frac{e-1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}$.

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

⑤ Soit (U_n) et (V_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ et $V_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $U_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

b) Montrer que (U_n) et (V_n) sont convergentes et déterminer la limite de chacune.

Problème 8

Pour tout entier naturel non nul n ; on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x}$, et on note C_n sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé directe $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1ère PARTIE :

1)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$.

b) Calculer $f'_n(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

c) Dresser alors , suivant n , le tableau de variations de f_n .

2)a) Montrer que toutes les courbes C_n passent par un point fixe A .

b) Montrer que toutes les courbes C_n ont une même tangente T au point A . Préciser l'équation de T .

3)a) Etudier la position relative de C_1 et C_2 .

b) Etudier la position relative de C_1 et T .

c) Construire , dans le même repère , les courbes C_1 et C_2 et la tangente T .

2ème PARTIE :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; on pose $I_n = \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^2 e^{-2x} dx$.

1) Donner une interprétation géométrique du réel I_n .

2)a) Montrer que $\forall t \geq 0$, on a : $t - \frac{1}{2}t^2 \leq \text{Log}(1+t) \leq t$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0, n]$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2n} \leq n \text{Log}(1 + \frac{x}{n}) \leq x \quad \text{et} \quad e^{-x} e^{-\frac{x^2}{2n}} \leq f_n(x) \leq e^{-x}.$$

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq 1 - e^{-n}$.

4)a) Montrer que $\forall t \geq 0$; $e^{-t} \geq 1 - t$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0, n]$; $e^{-x} e^{-\frac{x^2}{2n}} \geq e^{-x} (1 - \frac{x^2}{2n})$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 1 - \frac{1}{n} + e^{-n} (\frac{1}{n} + \frac{n}{2})$.

5) Montrer que $(I_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 9

I-1°) Déterminer l'ensemble Γ des primitives de la fonction : $x \mapsto -e^x \ln x - \frac{e^x}{x}$.

2°) Soit φ une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = e^x \varphi(x)$.

Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $\varphi(x) + \varphi'(x) = -\frac{1}{x} - \ln x$ si et seulement si g est un élément de Γ .

3°) En déduire toutes les fonctions φ .

II- Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^{1-x} - \ln x$.

1°) a) Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x)$.

c) On pose $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = e$.

2°) Soit un entier $n \geq 2$.

a) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout réel t tel que $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$,

$$\text{on a : } f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right).$$

b) Montrer alors que : $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

$$\text{En déduire que : } F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

d) Etablir les égalités : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{1-\frac{k}{n}} = (e-1) \frac{1}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)}$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

e) Calculer alors la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$, en déduire celle de (v_n) où

$$v_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Exercice 10 suite intégrale

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$

1/

a- Calculer I_1

b- Montrer que $\forall x \geq 0$ on a $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$

c- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$ puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

2/ On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx$

a- À l'aide d'une intégration par partie montrer que $J_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$

b- Montrer que $\forall x \geq 0$ on a $0 \leq \ln(x+1) \leq x$

c- En déduire $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \frac{1}{n+1}$

- d- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(1 - I_n) = J_n$ puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - I_n)$

Exercice 11 études de fonction et suite réelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et on désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2 cm

I/

- 1/ a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter ce résultat graphiquement
 - b- Montrer que f est une fonction impaire et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter ce résultat
- 2/ a- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$
 - b- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
 - c- Déterminer une équation de la tangente T à ζ au point d'abscisse 0
- 3/ a- Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$ on a $f'(t) \leq \frac{1}{2}$
 - b- En déduire que $\forall x \geq 0, f(x) \leq \frac{1}{2}x$
 - c- En déduire la position relative de T et ζ
- 4/ Construire T et ζ
- 5/ Soit λ un réel strictement négatif et soit D le domaine du plan limité par la courbe ζ et les axes d'équations $y = -1$; $x = \lambda$ et $x = 0$ et on désigne par A l'aire de D
Calculer $A(\lambda)$ puis calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$
- 6/ a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera
 - b- Construire dans le même repère la courbe ζ' de f^{-1}
 - c- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de J

II/ On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_0^{\ln 2} f^{2n}(x) dx$

- 1/ a- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f^2(x) = 1 - 2f'(x)$
 - b- En déduire u_1
- 2/ a- Montrer que pour $x \geq 0 : f^{2n}(x) \leq \frac{x^{2n}}{2^{2n}}$
 - b- Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{(\ln 2)^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)}$
 - c- En déduire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

1. (a) Calculer I_1 .
(b) Montrer que (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente.
(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
2. (a) Vérifier que pour $n \geq 3$, on a :

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx - I_{n-2}.$$

(b) En déduire que pour $n \geq 3$, on a :

$$nI_n = \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2}.$$

Calculer alors I_3 .

Exercice 13

Soit $(I_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1 .
(b) Étudier la monotonie de (I_n) .

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(2n+5)I_{n+1} + 6(n+1)I_n = 16.$$

3. Soit (J_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $J_n = nI_n$.

(a) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$:

$$2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-x) \leq \sqrt{x+3} \leq \frac{7+x}{4}.$$

(b) En déduire un encadrement de I_n si $n \neq 0$.

(c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

Exercice 14 (07pts)

I) On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = -\frac{e^x}{(1+e^{-x})^2}$.

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{e^{2x}}{1+e^{-x}}$. Vérifier que g est une solution de l'équation (E) .

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$.

3) a) Montrer qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (E_0) .

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) .

c) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) tel que $f(0) = \frac{1}{2}$.

II) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{-x}}$.

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ce résultat. (unité graphique : 2cm)

b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{e^x + 2}{(1+e^{-x})^2}$

c) Dresser le tableau de variation de f .

d) Tracer ζ_f en précisant sa demi-tangente au point d'abscisse 0.

2)a) Vérifier que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$; puis calculer $\int_0^{\ln 2} f(x) dx$.

b) En déduire l'aire de la partie fermée du plan limitée par la courbe ζ_f , l'axe des ordonnées et la droite

d'équation $y = \frac{4}{3}$.

III) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction F_n définie sur $[0, +\infty[$ par $F_n(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^{-nt}} dt$.

1) Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a : $\frac{e^t}{1+e^{-nt}} \geq \frac{e^t}{2}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$.

2) a) Montrer que F_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

b) En déduire qu'il existe un unique réel $U_n \in [0, +\infty[$ tel que $\int_0^{U_n} \frac{e^t}{1+e^{-nt}} dt = 1$; puis Calculer U_0 .

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, +\infty[$ on a : $F_{n+1}(x) \geq F_n(x)$.

b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante puis justifier qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $e^{U_n} - 2 = \int_0^{U_n} \frac{e^{(1-n)t}}{1+e^{-nt}} dt$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, U_n]$ on a : $\frac{e^t}{1+e^{-nt}} \leq e^t \leq e^{U_n}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq e^{U_n} - 2 \leq \frac{e^{U_n}}{n}$. Déterminer ,alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

5) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$n(e^{U_n} - 2) = \ln 2 - e^{U_n} \ln(1 + e^{-nU_n}) + \int_0^{U_n} e^t \ln(1 + e^{-nt}) dt .$$

b) Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a : $\ln(1+t) \leq t$.

c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^{U_n} - 2) = \ln 2$.

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x \ln(1+x)}{1+x}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

3- a) Montrer que f est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{x + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$.

b) Montrer que x et $\ln(1+x)$ ont le même signe sur $] -1; +\infty[$.

c) Etablir le tableau de variations de f .

d) Tracer (C_f) .

4) Calculer l'aire de la région du plan limitée par (C_f) , les axes du repère et la droite $\Delta : x = 1$.

II. Soient G et F_n les deux fonctions définies sur $[1; +\infty[$ par :

$$G(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_1^{x^n} \frac{f(t)}{t} \sqrt[n]{t} dt$$

Et pour tout entier $n \geq 1$, on pose $U_n = \int_1^{\frac{n+1}{n}} f(t^n) dt$.

5) Montrer que, pour tout $x \in [1; +\infty]$, $G(x) = \frac{1}{2} \ln^2(1+x) - \frac{1}{2} \ln^2 2$.

6) Montrer que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $G(x^n) \leq F_n(x) \leq xG(x^n)$.

7- a) Montrer que F_n est dérivable sur $[1; +\infty[$ et que $F_n'(x) = n \cdot f(x^n)$.

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $nU_n = F_n\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

8- a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) \leq nU_n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right) G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$$

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$.

c) $P(X=0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Problème 16 (10 points)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$.
On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A/ 1/ Etudier, suivant la parité de n , les variations de f_n .

2/ a) Etudier la nature des branches infinies de (C_n) .

b) Etudier la position relative de (C_1) et (C_2) , puis tracer (C_1) et (C_2) .

3/ Soit M_n le point de (C_n) où la tangente est parallèle à la droite $(O, \vec{i})$.

On pose $U_n = \frac{1}{n} OM_n$. Exprimer U_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

B/ On pose $I_n = \int_1^2 f_n(t) dt$.

1/ Etudier la monotonie de la suite (I_n) , en déduire qu'elle est convergente.

2/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left(\frac{e^2}{2^n} - e\right) + nI_{n+1}$.

3/ Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

C/ On considère la fonction F définie par
$$\begin{cases} F(x) = \int_{\text{Log } x}^{2\text{Log } x} \frac{e^t}{t} dt & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \\ F(0) = 0 \\ F(1) = \text{Log } 2 \end{cases}$$

1/ Montrer que le domaine de définition de F est $[0, +\infty[$.

2/ a) Montrer que : $\forall x \in]0, 1[$, $\frac{x^2 - x}{2\text{Log } x} \leq F(x) \leq \frac{x^2 - x}{\text{Log } x}$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x}$. Interpréter les résultats obtenus.

3/ a) Montrer que : $\forall x \in]0, 1[$, $x^2 \text{Log } 2 \leq F(x) \leq x \text{Log } 2$
et $\forall x \in]1, +\infty[$, $x \text{Log } 2 \leq F(x) \leq x^2 \text{Log } 2$

En déduire que F est continue en 1.

b) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $F(x) - \text{Log } 2 = \int_{\text{Log } x}^{2\text{Log } x} \frac{e^t - 1}{t} dt$

c) Montrer qu'il existe un réel c compris entre $\text{Log } x$ et $2\text{Log } x$ tel que :

$$F(x) - \text{Log } 2 = \text{Log } x \cdot \frac{e^c - 1}{c}$$

En déduire que F est dérivable en 1 et calculer $F'(1)$.

4/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et calculer $F'(x)$.

5/ a) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[$, $F(x) \geq \frac{x^2 - x}{2\text{Log } x}$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

6/ Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de sa courbe représentative.