

TRAVAUX DIRIGES DE MATHÉMATIQUES : Primitives et intégrales

Réalisé par Koffimath (Tél : 60 62 93 65)

Exercice 1 : Trouve une primitive de chacune des fonctions f définies suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 10x - 4$ | 2) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 + 5x$ |
| 3) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 9x + 1$ | 4) $f(x) = -3x^4 + 2x^3 - 5x + 7$ |
| 5) $f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 4)^3$ | 6) $f(x) = (6x + 3)(x^2 + x + 1)^4$ |
| 7) $f(x) = 5x(x^2 + 1)^6$ | 8) $f(x) = 3x^2(x^3 + 1)^5$ |
| 9) $f(x) = 7x^2(x^3 + 5)^3$ | 10) $f(x) = x(x^2 - 4)^2$ |
| 11) $f(x) = (5x + 1)^7$ | 12) $f(x) = (-3x + 2)^4$ |
| 13) $f(x) = (x - 4)^3$ | 14) $f(x) = (5 - 2x)^6$ |
| 15) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x-3)^3}$ | 16) $f(x) = \frac{3}{(5x-1)^2}$ |
| 17) $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^4}$ | 18) $f(x) = \frac{-x}{(x^2-9)^5}$ |
| 19) $f(x) = \frac{x}{(x^2+2)^3}$ | 20) $f(x) = 5 + x + \frac{4}{(x+1)^2}$ |
| 21) $f(x) = \frac{3x}{(x^2+2)^3}$ | 22) $f(x) = -x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{4}{(x+3)^2}$ |
| 23) $f(x) = \frac{2x^5-x^3+3x^2+2}{x^2}$ | 24) $f(x) = \frac{x^3+5x^2-1}{3x^2}$ |
| 25) $f(x) = \frac{2x^3+5x^2+4x+4}{(x+1)^2}$ | 26) $f(x) = (x^3 - 7x + 1)^5(3x^2 - 7)$ |
| 27) $f(x) = \frac{2x^3+5x^2+4x+4}{(x+1)^2}$ | 28) $f(x) = (x^3 - 7x + 1)^5(3x^2 - 7)$ |
| 29) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$ | 30) $f(x) = \sin x \cos^4 x$ |
| 31) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^4 x}$ | 32) $f(x) = \cos x \sin^4 x$ |
| 33) $f(x) = \sin 3x$ | 34) $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ |
| 35) $f(x) = 4 \cos 2x$ | 36) $f(x) = \cos(6x + 2)$ |
| 37) $f(x) = \cos 3x + 6 \sin 3x - \sin x \cos^3 x$ | 38) $f(x) = \cos^5 x$ |
| 39) $f(x) = 10 \sin 5x + 12 \cos 4x - 3 \sin\left(6x - \frac{\pi}{6}\right)$ | 40) $f(x) = \sin^4 x$ |

Exercice 2 : En utilisant les formules de primitives directes, calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1) $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4$ | 2) $f(x) = (x^3 - 3)^3$ |
| 3) $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 1$ | 4) $f(x) = \sqrt{-3x+2}$ |
| 5) $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ | 6) $f(x) = 3(-x-2)(3x+2)^2$ |
| 7) $f(x) = \cos(-6x+5)$ | 8) $f(x) = 3 \sin(1-4x)$ |
| 9) $f(x) = \frac{1}{3 \cos^2 3x}$ | 10) $f(x) = \frac{3}{(3x+1)^3}$ |
| 11) $f(x) = (4x-4)(2x^2-4x+1)^2$ | 12) $f(x) = \frac{-6}{\sqrt{-6x+5}}$ |
| 13) $f(x) = \frac{-5}{(7x+3)^3}$ | 14) $f(x) = (x-1)(-3x^2+6x+7)^2$ |
| 15) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x+1}}$ | 16) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3}$ |
| 17) $f(x) = 3 \cos(2x+1) \sin^3(2x+1) - 1 - \tan^2 x$ | |
| 18) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3}$ | |

Exercice 3 : En utilisant les formules de primitives directes, linéariser puis calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1) $f(x) = \sin^3 x$ | 2) $f(x) = \cos^3 \frac{3}{2}x$ |
| 3) $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos^3 x$ | 4) $f(x) = \sin^3(-x+3)$ |
| 5) $f(x) = \cos^5\left(\frac{3}{2}x+1\right)$ | 6) $f(x) = \cos^3 2x \cdot \sin 2x$ |

Exercice 4 : Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant les conditions indiquées

- | | | |
|-------------------------------|----|------------|
| 1) $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ | et | $F(0) = 7$ |
| 2) $f(x) = (x-3)^6$ | et | $F(3) = 0$ |
| 3) $f(x) = \frac{2}{(3-x)^3}$ | et | $F(0) = 0$ |

TRAVAUX DIRIGES DE MATHÉMATIQUES : Primitives et intégrales

Réalisé par Koffimath (Tél : 60 62 93 65)

$$\begin{array}{ll} 4) f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} & \text{et} \quad F(0) = \sqrt{5} \\ 5) f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} & \text{et} \quad F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ 6) f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos^3 x} & \text{et} \quad F(\pi) = 1 \\ 7) f(x) = \sin x \cdot \cos^4 x & \text{et} \quad F(\pi) = 0 \end{array}$$

Exercice 5 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition
- 2) Déterminer les réels a, b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$
- 3) En déduire la primitive de f qui s'annule en 0

Exercice 6 : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x}$

- a) Calculer la dérivée de g sur $]0; +\infty[$.
- b) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
- c) Déduire des questions précédentes une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 7 : Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^3 - x^2 - 8x + 8}{(x-2)^2}$

1. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que :
 $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$
2. En déduire les primitives de f sur $]2; +\infty[$

Exercice 8 : Soit les fonctions f et F définies par :

$$f(x) = x\sqrt{3-2x} \text{ et } F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$$

Déterminer les réels a, b et c tel que $\forall x \in]-\infty; \frac{3}{2}]$, F soit une primitive de f sur $] -\infty; \frac{3}{2}]$

Exercice 9 : Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle K .

- 1) $F(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 7$; $f(x) = 6(2x-1)^2$ et $K = \mathbb{R}$
- 2) $F(x) = -2 \cos(3x+2)$; $f(x) = 6 \sin(3x+2)$ et $K = \mathbb{R}$
- 3) $F(x) = \sqrt{2x+1}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ et $K =]-\frac{1}{2}; +\infty[$
- 4) $F(x) = \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^2$; $f(x) = \frac{(x\sqrt{x}-1)(2+x\sqrt{x})}{x^3}$ et $K =]0; +\infty[$

Exercice 10 : Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle K

- 1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 1$; $K = \mathbb{R}$
- 2) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$; $K =]-\infty; 0[$
- 3) $f(x) = x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $K =]0; +\infty[$
- 4) $f(x) = \cos x - 2 \sin x$; $K = \mathbb{R}$

Exercice 11 : Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}$

- a) $f(x) = 5x(5x^2 - 7)^4$
- b) $f(x) = \frac{2x-3}{(2x^2-6x+11)^4}$
- c) $f(x) = \frac{x(2x^2+1)}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$
- d) $f(x) = 3 \sin(3x-2)$
- e) $f(x) = 2 \cos x \sin^4 x$
- f) $f(x) = x \cos\left(3x^3 - \frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 12 : Dans chacune des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$

- a) $f(x) = 3(2-3x)^3$
- b) $f(x) = (x^2 + x + 1)(2x + 1)$
- c) $f(x) = x^3(x^4 - 5)^3$
- d) $f(x) = 4x(x^2 - 1)^3$

TRAVAUX DIRIGES DE MATHÉMATIQUES : Primitives et intégrales

Réalisé par Koffimath (Tél : 60 62 93 65)

- e) $f(x) = \cos^4 x$ f) $f(x) = \sin^6 x$
 g) $f(x) = \sin^5 x$ h) $f(x) = \sin^3 x \sin^2 x$
 i) $f(x) = \cos^2 x \sin^2 x$ j) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Exercice 13 : Dans chacune des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle K

- 1) $f(x) = \frac{3x-1}{(3x^2-2x-1)^2}$; $K =]-\frac{1}{3} ; 1[$
 2) $f(x) = \frac{2}{(1+x)^4}$; $K =]-1 ; +\infty[$
 3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ et $K =]0 ; +\infty[$
 4) $f(x) = \frac{3x^2+2}{2(x^3+2x)^3}$; $K =]-\infty ; 0[$
 5) $f(x) = \sin x \cos x (\cos^2 x + 1)^4$; $K = \mathbb{R}$
 6) $f(x) = (1 + \tan^2 x) \tan^5 x$; $K =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$
 7) $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ et $K =]0 ; +\infty[$
 8) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$; $K =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

Exercice 14 : Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive de la fonction F de la fonction f sur l'intervalle K qui vérifie les conditions indiquées.

- 1) $f(x) = x^3 - \frac{2}{x^3}$; $K =]0 ; +\infty[$ et $F(2) = 0$
 2) $f(x) = 3 \sin x - 4 \cos x$; $K = \mathbb{R}$ et $F(2) = -1$
 3) $f(x) = 2x - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; $K =]0 ; +\infty[$ et $F(1) = 1$
 4) $f(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x$; $K =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et $F(0) = 1$
 5) $f(x) = \sin x \cos x$; $K = \mathbb{R}$ et $F(\frac{\pi}{2}) = 1$
 6) $f(x) = \cos x \sin^5 x$; $K = \mathbb{R}$ et $F(0) = 3$

- 7) $f(x) = 2x \sin^2 x$; $K = \mathbb{R}$ et $F(0) = 2$
 8) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin 2x}$; $K =]0 ; \pi[$ et $F(\frac{\pi}{2}) = 3$

Exercice 15 : Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle K que l'on précisera.

- a) $f(x) = 3x^2 - x + 7$ b) $f(x) = 5x - 2 + \frac{4}{x^2}$
 c) $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = \cos x - 5 \sin x$
 e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ f) $f(x) = \sin \frac{x}{2} - 5 \cos 4x$
 g) $f(x) = (2x^2 + 1)^2$ h) $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)$
 i) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^4}$ j) $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
 k) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ l) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x-6}}$
 m) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ n) $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{(x^2+3x+1)^3}}$

Exercice 16 : Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{1-\sin x}$

En remarquant que : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, $\frac{1}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$,
 déterminer les primitives de f sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

Exercice 17 : Calculer les intégrales suivantes

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^2 (x^4 - 5x^2 + 3) dx ; & B &= \int_0^1 (x+3)(x^2+6x+4)^2 dx \\ C &= \int_0^1 (x+1)^n dx & D &= \int_0^1 (3x+1)^5 dx \\ E &= \int_1^2 \frac{4x^4-3x^2+1}{5x^2} dx & F &= \int_0^2 (2x+1)^3 dx \end{aligned}$$

TRAVAUX DIRIGES DE MATHÉMATIQUES : Primitives et intégrales

Réalisé par Koffimath (Tél : 60 62 93 65)

$$G = \int_1^2 \frac{3x+6}{(x^2+4x+3)^4} dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{3}{(3-2x)^4} dx$$

$$K = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$O = \int_0^1 x(x^2+1)^5 dx$$

$$Q = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$$

$$1) \int_{-1}^2 2t dt$$

$$3) \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$$

$$5) \int_0^{\pi} \sin t dt$$

$$7) \int_1^9 \frac{dt}{\sqrt{t+2}}$$

$$9) \int_{-1}^2 2t^3 dt$$

$$11) \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^3} dt$$

$$13) \int_0^{\pi} \sin 2t dt$$

$$15) \int_0^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$17) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 3 \cos x \sin x) dx$$

$$19) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x dx$$

$$H = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx$$

$$J = \int_2^3 \left(3x^2 - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x}\right) dx$$

$$L = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$$

$$N = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^3 x dx$$

$$P = \int_{-2}^1 \sqrt{x+3} dx$$

$$2) \int_1^0 t^2 dt$$

$$4) \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$6) \int_{-1}^2 e^4 dt$$

$$8) \int_2^3 \sqrt{2x+1} dx$$

$$10) \int_{-1}^{\frac{3}{2}} -t^4 dt$$

$$12) \int_0^9 \sqrt{s} ds$$

$$14) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 3 \sin x) dx$$

$$16) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (3 \cos x - \sin x) dx$$

$$18) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 x dx$$

$$20) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \cos 2x dx$$

$$1) I = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5) dx$$

$$3) I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-2x + \pi) dx$$

$$5) I = \int_0^4 \sqrt{4x+9} dx$$

$$7) I = -4 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5}{x^2} dx$$

$$9) I = \int_{-1}^2 (x+2)\sqrt{x+2} dx$$

$$10) I = \int_{-1}^2 (-2x+1)\sqrt{5x^2-5x+4} dx$$

$$2) I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$4) I = \int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$$

$$6) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} dx$$

$$8) I = \int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx$$

Exercice 19 : En utilisant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx \quad 2) I = \int_{-2}^1 (x+1)\sqrt{x^2-2} dx$$

$$3) I = \int_{-1}^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad 4) I = \int_2^7 (x+2)\sqrt{x-2} dx$$

Exercice 20 : En utilisant la formule d'intégration par parties calculer les intégrales

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$C = \int_0^1 (x+1)\sqrt{2x+1} dx$$

$$E = \int_0^{\pi} (3t^2 - t + 1) \sin t dt$$

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos(2x) dx$$

$$I) I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 2x dx$$

$$K) I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$$

$$M) I = \int_0^4 x\sqrt{4x+9} dx$$

$$B = \int_1^2 x\sqrt{2x+1} dx$$

$$D = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x} dx$$

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin^2(3x) dx$$

$$H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x dx$$

$$J) I = \int_{-2}^1 (x-5)\sqrt{2-x} dx$$

$$L) I = \int_{-2}^1 (x+2)\sqrt{x+1} dx$$

$$N) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x+1) dx$$

Exercice 18 : En utilisant les formules des primitives, calculer les intégrales suivantes :

TRAVAUX DIRIGES DE MATHÉMATIQUES : Primitives et intégrales

Réalisé par Koffimath (Tél : 60 62 93 65)

Exercice 21 : On considère les intégrales définies $I = \int_0^\pi \cos^4 x \, dx$ et $J = \int_0^\pi \sin^4 x \, dx$

1. a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire :
 $I = \int_0^\pi \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x \, dx$
b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que
 $I = \int_0^\pi \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3}J$
c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que
 $J = \int_0^\pi \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3}I$
2. a) Montrer que $J + I = \frac{3\pi}{4}$
b) Montrer que $J - I = 0$
c) En déduire les valeurs des intégrales I et J

Exercice 22 : Soit $A = \int_0^\pi \cos^2 x \, dx$ et $B = \int_0^\pi \sin^2 x \, dx$

1. Utiliser les propriétés de linéarité de l'intégrale pour calculer $A + B$ et $A - B$
2. En déduire les valeurs de A et B.

Exercice 23 : Soit $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x \, dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x \, dx$

3. Calculer $A + B$ et $A - B$
4. En déduire les valeurs de A et B.

Exercice 24 : Soient les intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos^2 2x \, dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin^2 2x \, dx$$

- 1) Calculer : $I + J$.
- 2) Calculer : $I - J$ en utilisant la technique de l'intégration par parties.
- 3) Déduisez – en les valeurs de I et J.

Exercice 25 : Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$

- 1) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n-1} (On pose $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$)
- 2) Calculer I_0 ; I_1 ; I_2 et I_4

Exercice 26 : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 7}{(x+2)^2}$

1. Trouver les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$
2. Trouver la primitive F de f prenant la valeur $-\frac{5}{2}$ en 0
3. En déduire $I = \int_2^3 f(x) \, dx$

Exercice 27 : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$

1. Trouver les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$
2. En déduire $I = \int_1^2 f(x) \, dx$

Exercice 28 : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$

- a) Trouver les réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$ $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$
- b) En déduire le calcul de $I = \int_0^3 \frac{2x+5}{(x+1)^2} \, dx$

Exercice 29 :

1. Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$
- a) Trouver les réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq 0$
 $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

TRAVAUX DIRIGES DE MATHÉMATIQUES : Primitives et intégrales

Réalisé par Koffimath (Tél : 60 62 93 65)

b) En déduire le calcul de $J = \int_1^3 g(x) dx$

2. Soit la fonction g définie par $h(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-3}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de h

b) Trouver les réels a et b tels que, $h(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$

c) En déduire le calcul de $J = \int_0^2 \frac{x+5}{x^2-2x-3} dx$

Exercice 30 : On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \cos^2 x dx$ et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \sin^2 x dx$$

a) Calculer $I + J$ puis $I - J$

b) En déduire les valeurs de I et de J .

1. Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout réel strictement positif x , on ait : $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

2. Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x^2+1)} dx$, en déduire en utilisant l'intégration par partie le calcul de $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x(x^2+1)} dx$

3. Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

a) Calculer I_0

b) Pour tout entier naturel n , en utilisant une intégration par parties

c) Calculer I_{n+1} en fonction de I_n . En déduire I_4

Exercice 31 : Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^3+3x^2+5x+2}{x+1}$

1. Déterminer quatre nombres réels a , b , c et d tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$

$$\{-1\}, f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$$

2. En déduire la valeur de $\int_0^3 \frac{x^3+3x^2+5x+2}{x+1} dx$

Exercice 32 : On se propose de trouver sans les calculer séparément

les trois intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$ et

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos^2 x dx$$

1. Calculer $I - J$ et $I + J + K$

2. Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. En déduire la valeur de $I + J - 3K$ puis celles de I , J et K

Exercice 33 : On pose $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2 \sin x} dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2 \sin x} dx$ et

$$I_2 = I_1 + I$$

1. Calculer I_2 et I_1

2. Calculer I_1

3. En déduire I

Exercice 34 : Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$$\text{et } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

1. Calculer I

2. Soit la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$

a) Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

b) En déduire une relation entre I et J

c) Calculer J

Exercice 35 : Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle K

a) $f(x) = x^2 + 1$; $K = [0; 10]$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$; $K = [e-2; e^2-2]$

c) $f(x) = \cos 2x$; $K = [0; \pi]$