

Exercices – Suites Numériques

3	Exercice 1 (3 pts) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite réelle définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k\sqrt[4]{k}}$ En utilisant T.A.F montrer que la suite est convergente .
Problème 2 (17 pts) I- On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+x \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ Et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé 1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et donner une interprétation géométrique du résultat . 2) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations de f . 3) a) Etudier la position relative de (C) avec la droite $(D): y = x$ (on rappelle que $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad \ln x < x$) b) tracer (C). II- Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. 1) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $]0, +\infty[$ exactement deux solutions u_n et v_n tel que $u_n < 1 < v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. 2) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante . 3) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est divergente et calculer sa limite . 4) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{v_n} \left(\ln \left(1 + \frac{n}{v_n} \right) \right) \right)$. 5) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et déduire qu' elle est convergente . 6) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \quad u_n \leq \frac{1}{n}$ et déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$. III- On considère la suite (x_n) définie par : $\begin{cases} 0 < x_0 < 1 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < x_n < 1$ 2) Montrer que (x_n) est convergente et déterminer sa limite . 3) a) Montrer que l'équation $x \ln x = 1$ admet une solution unique α dans $[1, +\infty[$. b) on pose $x_0 = \alpha$ et soit la suite (y_n) définie par : $\begin{cases} y_0 = x_0 = \alpha \\ y_n = x_0 \times x_1 \times \dots \times x_{n-1} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad y_n = e^{\frac{1}{x_n}}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n)$	

Problème 3 D'ANALYSE

Étude de la convergence d'une suite par intégration version 2bac PC/SVT/STE/STM

Partie A : L'équation caractéristique

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - e^x - 1$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α .
2. Vérifier par le calcul que $\alpha = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

1.
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement ce résultat.
 - b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $f(x) - x = \ln \left(\frac{1 + e^x}{e^{2x}} \right)$.
 - c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet α comme unique solution sur $[0, +\infty[$.
2.
 - a) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{-1}{e^x + 1}$.
 - b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

Partie C : Suite et Inégalité par intégration

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
2. Encadrement et Intégration :
 - a) En utilisant l'expression de $f'(x)$, montrer que pour tout $t \geq 0$, on a : $-\frac{1}{2} \leq f'(t) \leq 0$.
 - b) Soit $x \geq 0$. En intégrant l'encadrement précédent entre α et x (en distinguant les cas $x \geq \alpha$ et $x < \alpha$), montrer rigoureusement que :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

- c) En déduire que pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \alpha|$.
 4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 4 (Version SM) : Accroissements Finis et Nombre d'Or

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - e^x - 1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.
(On notera α l'unique solution de cette équation).
2. Montrer que $\alpha = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
3. En déduire que $\alpha > 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $f(x) - x = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^{2x}}\right)$.
2. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet α comme unique solution sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = \frac{-1}{e^x + 1}$$

4. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Partie C :

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
2. En justifiant rigoureusement l'application du Théorème des Accroissements Finis à la fonction f sur un intervalle bien choisi, montrer que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

3. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \alpha|$$

4. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .
5. *Bonus* : Sachant que $\ln 2 \approx 0.7$ et $|1 - \alpha| \leq 0.6$, déterminer la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle la distance entre u_n et α est strictement inférieure à 10^{-3} .

Exercice 5

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On étudiera la suite numérique (u_n) par trois méthodes différentes.

1^{ère} méthode :

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq 1$.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2(1-u_n)(1+u_n)}{2u_n+3}$ puis préciser la monotonie de la suite (u_n) .

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{5}(u_n - 1)$.

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

2^{ème} méthode :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

2) Exprimer v_n et u_n en fonction de n .

3) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

3^{ème} méthode :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [1; 2]$ par : $f(x) = \frac{3x+2}{2x+3}$.

1) a) Étudier les variations de la fonction f sur I et en déduire que : $f(I) \subset I$.

b) Montrer que pour tout $x \in I$: $f(x) \leq x$.

2) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 6

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$

1. Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[) ; g(x) \geq 3$

2. Soit (u_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 3$

b. Montrer que (u_n) est monotone, puis déduire qu'elle est convergente

c. Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 7

Soit (u_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

1. a. Calculer u_1 et v_0
b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$
c. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$
d. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

Calculer S_n en fonction de n puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice 8

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$.

Soit u , la suite définie par : $u_0 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Calculer u_1
- 2) Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 2 cm.
 - a- Tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives : $y = x$ et $y = \frac{1}{4}x + 3$.
 - b- Utiliser (D) et (Δ) pour placer $u_0; u_1; u_2; u_3; u_4$ sur l'axe des abscisses.
(On laissera les traits de construction en pointilles sur le dessin)
 - c- Que peut – on conjecturer quant à la convergence de la suite u ?
- 3) a- Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 4$.
b- Démontrer que la suite u est strictement croissante.
c- La suite u est – elle convergente ? Justifier.
- 4) On pose : pour tout entier naturel n ; $v_n = u_n - 4$
 - a- Démontrer que v est une suite géométrique. Donner son premier terme et sa raison.
 - b- Démontrer que pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{-2}{4^{n-1}}$
 - c- Déterminer la limite de la suite v .
 - d- En déduire la limite de la suite u .
- 5) a- Exprimer u_n en fonction de n .
b- Trouver une valeur de l'entier naturel k telle que : $|u_k - 4| < 10^{-10}$.

Exercice 9

Soient les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 8 \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}$$

1) Calculer a_1 et b_1 .

2) Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $d_n = b_n - a_n$

a- Démontrer que (d_n) est une suite géométrique.

b- Déterminer le premier terme d_0 et la raison q .

c- En déduire une expression de d_n en fonction de n . Puis en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, d_n > 0$.

d- Calculer la limite de la suite (d_n) .

3) a- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$ et $b_{n+1} - b_n = -\frac{d_n}{4}$

En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n) .

b- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_0 < a_n < b_n < b_0$

c- Déduire des questions 3.a) et 3.b) que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

4) a- Déduire de la question 3.a) que : $\forall n > 1, a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1})$.

b- Déduire la limite de la suite (a_n) puis celle de la suite (b_n) .

Exercice 10 : (6 points)

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1 + (2n+1)U_n} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$$

1/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n \leq 1$.

b) Etudier la monotonie de la suite U et montrer qu'elle est convergente.

2/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq \frac{1}{n}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $W_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$.

a) Montrer que W est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 3.

b) En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $\frac{1}{U_n} - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} W_k$.

c) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{1}{n^2}$.

c) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $U_n \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

4/ Pour tout entier naturel non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$.

a) Montrer que la suite (S_n) est strictement croissante.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ et en déduire que (S_n) est convergent

5/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_k - U_{k+1} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

b) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = 1$.

Exercice 11

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

1) On sait que $u_0 = 3$ et $u_6 = 45$.

Calculer r , u_2 et u_5

2) Sachant que $u_{20} = -20$ et $u_{51} = -145$.

Explicitez u_n .

3) On donne : $u_5 = 8$ et $u_{50} = -10$.

Calculer $S_{50} = u_5 + \dots + u_{50}$

4) On sait que $u_0 + u_1 + u_2 = 333$. Calculer u_1

Exercice 12

1. (u_n) est une suite géométrique.

On donne : $u_0 = 5$ et $2u_2 = 3u_1 - u_0$

Déterminer la raison de (u_n) .

2. Soit (v_n) une suite géométrique de raison

$q > 0$ telle que : $u_4 = 10$ et $v_6 = 250$.

a) Calculer v_0 et la raison q .

b) Donner l'expression de v_n en fonction de n .