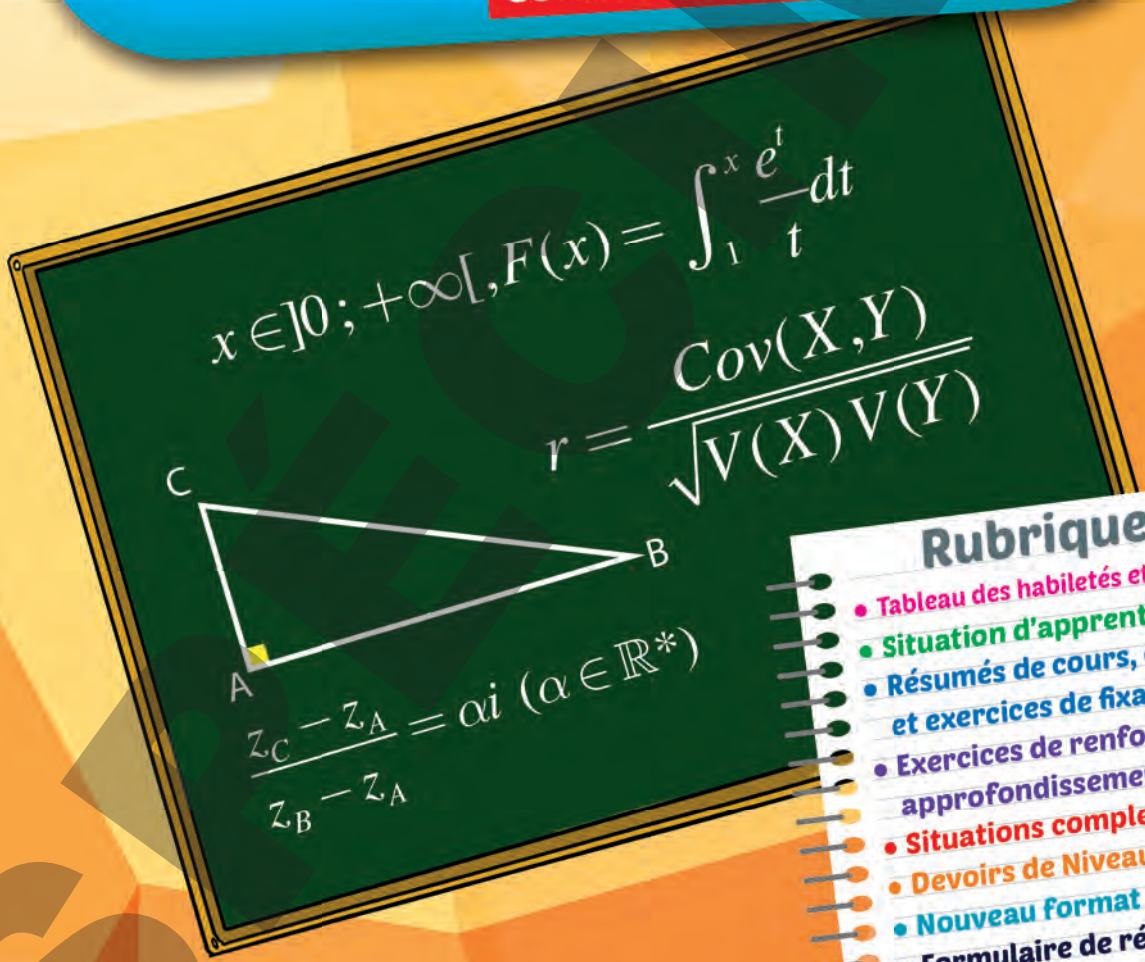
Mon cahier d'habiletés

Tle D

Maths

CONFORME AU PROGRAMME



Rubriques

- Tableau des habiletés et contenus
- Situation d'apprentissage
- Résumés de cours, exemples et exercices de fixation
- Exercices de renforcement / approfondissement
- Situations complexes
- Devoirs de Niveau
- Nouveau format du bac
- Formulaire de révision

MATÉRIALISEZ VOS IDÉES
JD Editions
L'Edition autrement

STOP COVID 19

3000 Fcfa

Mon cahier d'habiletés

Tle D

Maths

CONFORME AU PROGRAMME

KEÏTA Youssouphou
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

GAGNIÉ Guillaume
Coordonnateur Régional

MAHI Louis Clément
Encadreur pédagogique

Sous la supervision de
M. TANOH KOUACOU
Inspecteur Général de l'Éducation Nationale et de l'Enseignement Technique

Présente-toi

Année Scolaire : .....

Établissement : .....

Nom : .....

Prénom(s) : .....

Classe : .....

Nom du Professeur : .....

JD Éditions
21 B.P. 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

SPÉCIMEN

NOTE DE PRÉSENTATION

L'ouvrage ***Mon cahier d'habiletés de mathématiques*** apporte une contribution à la recherche des solutions relatives à l'évaluation des apprentissages, dans un contexte caractérisé par l'adoption des programmes éducatifs recadrés. Huit blocs rédactionnels sont présentés dans ce cahier pour répondre aux besoins des enseignants, des élèves et des parents d'élèves.

BLOC 1 : TABLEAU DES HABILETÉS ET CONTENUS



Il représente pour chaque leçon, la liste des habiletés prescrites par le programme officiel en vigueur. Il peut être utilisé par les enseignants pour orienter leurs cours et évaluer leur enseignement. Les élèves pourront l'utiliser dans le cadre de l'auto-évaluation.
Les parents d'élèves pourront l'exploiter pour suivre méticuleusement l'évolution des apprentissages de leur enfant.

BLOC 2 : SITUATION D'APPRENTISSAGE



Il s'agit de donner du sens aux notions mathématiques et de fixer le cadre des apprentissages. La situation d'apprentissage permet aussi de planifier et d'organiser les activités d'apprentissages de la leçon ou des séances.

BLOC 3 : RÉSUMÉ DE COURS ET EXERCICES DE FIXATION



Le cours, accessible à tous les apprenants, présente les définitions, les propriétés, les théorèmes et des points méthodes à connaître et à retenir.
De nombreux exemples accompagnent les définitions et les propriétés.
Les exercices de fixation sont des exercices qui interviennent juste après la mise en place d'une habileté. Ils ont pour objectif de vérifier la maîtrise ou non de cette habileté. Ils portent sur des questions de connaissance, de compréhension et d'application. Ces exercices préparent les élèves à aborder les exercices de renforcement.

BLOC 4 : EXERCICES DE RENFORCEMENT/ APPROFONDISSEMENT



Il s'agit de vérifier si l'élève est capable de mettre en œuvre plusieurs habiletés de la même leçon ou de plusieurs leçons pour résoudre ces exercices. Les élèves les utiliseront pour préparer leur devoir surveillé.

BLOC 5 : SITUATIONS COMPLEXES



Ce sont des exercices qui permettent de vérifier la capacité de l'élève à faire un transfert et offre l'occasion à l'enseignant de contextualiser son enseignement /apprentissage, c'est-à-dire, de rendre opératoires et significatifs les apprentissages.

BLOC 6 : DEVOIRS DE NIVEAU



Des devoirs de niveaux figurent dans l'ouvrage Mon cahier d'habiletés.
Il s'agit de favoriser la compréhension et d'aider les apprenants dans la recherche et la résolution d'exercices. Ces devoirs leurs permettent de s'auto-évaluer.

BLOC 7 : NOUVEAU FORMAT DU BAC SÉRIE D



En prélude au changement du format du Baccalauréat, nous proposons ici, le format officiel de l'épreuve de mathématiques du Baccalauréat série D tel que retenu par la Commission Pédagogique Nationale de Mathématiques.
En outre, des exemples d'épreuves conformes à ce nouveau format sont donnés afin d'aider les élèves et les enseignants à s'habituer à ce changement.

BLOC 8 : FORMULAIRE DE RÉVISION



Idéal pour les révisions en fin d'année et avant le début des épreuves du Baccalauréat, ce bloc vous permettra de faire le point des principales notions indispensables à la réussite de l'épreuve de mathématiques. Il vous aidera particulièrement à préparer les concours et à réussir les tests objectifs de niveau taxonomique relatif à la connaissance, à la compréhension et même à l'application.

Bonne rentrée à tous !!!

© JD Éditions, Abidjan 2013
ISBN : 979-10-91832-06-9
Toute reproduction, quel que soit le procédé, est interdite sous peine de poursuites judiciaires.

SPECIMEN

COMMENT UTILISER MON CAHIER D'HABILETÉS

Mon cahier d'habiletés, est un ouvrage conçu pour être utilisé, aussi bien dans les classes, qu'en dehors de celles-ci. Il s'adresse à la fois, aux enseignants, aux élèves, ainsi qu'aux parents d'élèves.

Cher enseignant,

Le présent ouvrage est un outil didactique qui vous sera d'une grande utilité dans la préparation de vos fiches de cours. En effet, les différentes rubriques qu'il présente, ont été empruntées au programme éducatif officiel, en vigueur. Il s'agit de :

- **« tableau des habiletés et contenus »**
  Cette rubrique reprend intégralement toutes les habiletés relatives à la leçon. Cela vous permettra de vous assurer que toutes les notions indispensables à l'acquisition des habiletés ont été prises en compte. Il vous appartiendra de les réorganiser, comme bon vous semblera.

- **« situation d'apprentissage »**
  Elle a pour mission de fixer le cadre du cours, en même temps qu'elle donne du sens aux notions mathématiques à l'étude. Nous vous prions de les adapter aux réalités socioculturelles de vos élèves.

- **« résumé de cours et exercices de fixation »**
  Voilà la rubrique qui présente de façon simple, les définitions, les propriétés, les théorèmes et les points méthodes à faire acquérir à l'apprenant. Nous vous suggérons d'examiner avec les apprenants, les exemples et leur faire traiter ensuite les exercices de fixation.

- **« exercices de renforcement ou d'approfondissement »**
  Cette rubrique vous donne l'occasion d'animer des travaux dirigés, lors des séances de régulation.

- **« situations complexes »**
  Indispensables à l'installation des compétences, ces situations pourront faire l'objet de travaux dirigés, de travaux en groupe ou de devoirs de maison.
  En tout état de cause, l'enseignant veillera à confronter ses élèves à la résolution de ces situations, désormais exigibles à l'épreuve du Baccalauréat.

- **« nouveau format du BAC série D »**
  Voici une occasion que ce cahier offre aux enseignants de préparer en toute confiance ses élèves au Baccalauréat. Cette rubrique donnera toutes les informations relatives au nouveau format de l'épreuve de mathématiques de la série D. Quatre exemples d'épreuve sont proposés, dont un sujet du blanc UEMOA de la section 2021. En fin d'année, l'enseignant pourra proposer à ses élèves de travailler en groupe sur une des épreuves. Les trois autres épreuves seront données individuellement. L'enseignant évaluera ensuite la capacité de chaque élève à résoudre ce type d'épreuve et fera les ajustements nécessaires. Ces exemples donneront aussi l'occasion aux enseignants de s'en inspirer dans le cadre de l'élaboration des épreuves des examens blancs.

- **« formulaire de révision »**
  En l'utilisant dans l'élaboration des tests objectifs, l'enseignant trouvera ici une occasion d'inciter ses élèves à consulter régulièrement cette rubrique. Les élèves l'utiliseront pour faire des révisions en vue de préparer un devoir surveillé, l'examen du Bac ou un concours après l'obtention du BAC.

Cher élève,

Ce cahier t'offre l'occasion de t'exercer. Nous n'avons pas voulu mettre les corrigés à ta disposition, afin que tu puisses faire le maximum d'effort de recherche. En tout état de cause, cet ouvrage a été conçu, pour que tu puisses travailler en autonomie.

Cher parent,

Cet ouvrage vous permettra de suivre l'évolution des apprentissages de votre enfant sans pour autant être un spécialiste des Mathématiques. Veuillez à ce qu'il/elle s'exerce au maximum. Mieux, vous pouvez lui demander de vous exposer ses difficultés, tout en lui demandant comment il/elle compte les surmonter : soit, en faisant davantage de recherches, soit, en se référant au professeur, au prochain cours. Ce genre d'échanges mettra votre enfant en confiance.

Chers tous,

Comme toute œuvre humaine, ce cahier contient probablement des irrégularités qui pourraient avoir échappé à notre vigilance. Nous vous saurions gré de nous les signaler, afin que nous puissions les corriger avant la prochaine édition. Merci à tous !

Les auteurs.

E-mail: jdeditions@yahoo.fr

SPECIMEN

SOMMAIRE

	Pages
Leçon 1 : Limites et continuité	*5*
Leçon 2 : Probabilité conditionnelle et variable aléatoire	*32*
Leçon 3 : Dérivabilité et étude de fonctions	*48*
Leçon 4 : Primitives d'une fonction	*70*
Devoir de niveau 1	*80*
Leçon 5 : Fonctions logarithmes	*83*
Leçon 6 : Nombres complexes	*101*
Leçon 7 : Fonctions exponentielles et fonctions puissances	*134*
Leçon 8 : Nombres complexes et géométrie du plan	*153*
Devoir de niveau 2	*173*
Leçon 9 : Suites numériques	*176*
Leçon 10 : Calcul intégral	*195*
Leçon 11 : Statistique à deux variables	*217*
Leçon 12 : Équations différentielles	*230*
Devoir de niveau 3	*242*
Nouveau format du bac série D	*245*
Formulaire de révision	*256*

SPÉCIMEN

1 LIMITES ET CONTINUITÉ

Tableau des habiletés et contenus

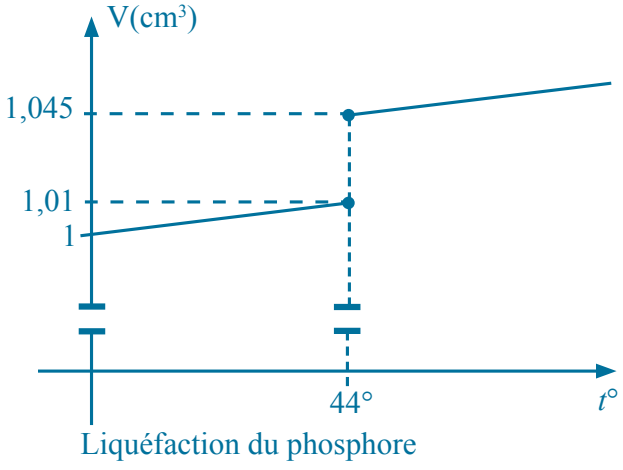
HABILETÉS	CONTENUS
IDENTIFIER	- les notions de branches paraboliques de direction celle de (OI) ou celle de (OJ) dans un repère (O, I, J) - une racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre positif - une puissance d'exposant rationnel
CONNAÎTRE	- la propriété relative à la limite d'une fonction composée - la propriété relative à la limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert - les propriétés relatives aux opérations sur les fonctions continues sur un intervalle - la propriété relative à la composée de deux fonctions continues sur un intervalle - les propriétés relatives à l'image d'un intervalle par une fonction continue : • en utilisant son tableau de variation • en utilisant une méthode algébrique - le théorème des valeurs intermédiaires : - les propriétés relatives aux fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle - les méthodes de dichotomie et de balayage - les propriétés relatives aux puissances d'exposants rationnels
NOTER	- une racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre positif ($\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$) - une puissance d'exposant rationnel ($x^{\frac{p}{q}}$)
DÉTERMINER	- la limite d'une fonction • en utilisant les limites de référence • en utilisant une expression conjuguée • en utilisant la définition d'un nombre dérivé • en utilisant les propriétés de comparaison - (minoration, majoration et encadrement) - la limite d'une fonction composée - l'image d'un intervalle par une fonction continue • en utilisant son tableau de variation • en utilisant une méthode algébrique - une valeur approchée d'une solution d'une équation - le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$ - la formule explicite d'une bijection réciproque quand cela est possible - un prolongement par continuité d'une fonction en un point.

SPÉCIMEN

REPRÉSENTER	- la courbe de la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé - graphiquement des fonctions du type : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}_*^+)$ $x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}_*^+)$
INTERPRÉTER	- graphiquement : • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ $(resp -\infty)$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ $(resp -\infty)$
DÉMONTRER	- qu'une fonction f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J dans le cas où f est continue et strictement monotone sur I - l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = m$ (m réel) sur un intervalle I, f étant continue et strictement monotone sur I - l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle ouvert $]a ; b[$, f étant continue et strictement monotone sur $[a ; b]$
TRAITER UNE SITUATION	- faisant appel aux limites et à la continuité d'une fonction

Situation d'apprentissage

Pendant le cours de Physique, des élèves de terminale étudient la variation d'un cm^3 de phosphore en fonction de la température. De 0° à 44°, le volume augmente insensiblement et de façon continue. À 44°, si peu qu'on élève la température, le volume augmente brusquement de 35 mm^3 et le phosphore se liquéfie. Au-delà de 44°, le volume augmente à nouveau insensiblement et de façon continue (voir figure). Les élèves trouvent le phénomène autour de 44° inhabituel. Pour comprendre ce phénomène, ils décident d'étudier le comportement du volume de phosphore lorsqu'on s'approche de 44° aussi bien par la droite que par la gauche.



Liquéfaction du phosphore

SPECIMEN

1 LIMITE

1. Limites de référence

Soit a un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n est impair ; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$;

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$, si n est pair ;

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = -\infty$, si n est impair ;

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$, si n est impair ;

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$;

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$.

Exemples

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^6} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^7} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^6 = +\infty$.

Exercices de fixation

1 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} \dfrac{1}{x-3}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} \dfrac{1}{x-3}$.

2 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \dfrac{1}{(x+1)^3}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}} \dfrac{1}{(x-5)^2}$.

3 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4-5x+8}{x^3-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\sin x}$.

SPÉCIMEN

2. Limite d'une restriction

Propriété

Soit g une fonction numérique, f la restriction de g à une partie A de son ensemble de définition et a un nombre réel. On suppose qu'il existe un intervalle I contenant a tel que I\{a} soit inclus dans A.

Si g possède une limite l au point a, alors l est la limite de f au point a.



Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x-2}$.

On se propose de déterminer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

On a : $\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2)=0$ et $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)=0$.

La propriété relative à la limite d'un quotient de deux fonctions ne permet pas de conclure.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$ - {2}, on a :

$f(x)=\dfrac{(2+x)(2-x)}{x-2}$, donc $f(x)=-x-2$.

f est donc la restriction à $\mathbb{R}$ - {2} de l'application

g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -x-2$

$\lim\limits_{x\to 2}(-x-2)=-4$, donc : $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4-x^2}{x-2}\right)=-4$.

Dans la pratique, on procède à une simplification de l'expression de $f(x)$ sur son ensemble de définition pour calculer sa limite.

Exercice de fixation

4 Calcule chacune des limites suivantes :

1.a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}}\dfrac{|x|-2}{2x+4}$.

2. Justifie que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^+\text{-}\{1\}$, $\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Déduis-en : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}$.

3. Lien entre limite à gauche, limite à droite et limite d'une fonction en un point

Propriété

- *Une fonction f définie en un point a admet une limite en a si et seulement si elle admet en ce point une limite à gauche et une limite à droite égale à f(a).*
- *Une fonction f non définie en un point a admet une limite l en a si et seulement si f admet une limite à gauche et une limite à droite égale à l.*



Soit f la fonction définie par :

$\begin{cases}\forall x \in]-\infty;-1[, f(x)=x^2+1\\ \forall x \in [-1;+\infty[, f(x)=x^3\end{cases}$

La limite à gauche de f en -1 est égale à 2 et la limite à droite de f en -1 est égale à -1.

Ces deux limites sont différentes, donc f n'admet pas de limite au point -1.

Soit g la fonction définie par :

$\begin{cases}\forall x \in]-\infty;-2[, g(x)=x^2+1\\ \forall x \in [-2;+\infty[, g(x)=-2x+1\end{cases}$

SPECIMEN

g (−2) = 5. La limite à gauche de g en −2 est égale à 5 et la limite à droite de g en −2 est égale à 5.

g admet au point −2 une limite à droite et une limite à gauche toutes égales à g (−2).

Donc g possède une limite au point −2.

Exercices de fixation

5 Réponds par vrai ou par faux.

f désigne une fonction définie en un point a.

	Affirmations	Réponses
1	Si la limite à gauche de f au point a est égale à la limite à droite de f au point a, alors f possède une limite au point a.	
2	Si la limite à gauche de f au point a est différente de la limite à droite de f au point a, alors f possède une limite au point a.	
3	Si f possède une limite au point a, alors la limite à gauche de f au point a est égale à la limite à droite de f au point a.	

6 On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} x^2 \text{ si } x < 1 \\ x+1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Étudie la limite de f en 1.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Limites et opération sur les fonction

a) Limites de la somme de deux fonctions

Propriété

a désigne un nombre réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$, L et L' sont deux nombres réels.

$\lim_{x\to a} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) =$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut conclure

Exemples

$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x}) = +\infty$ car :

$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$.

Par contre, l'on ne peut conclure quant à la détermination de $\lim_{x\to+\infty}(-x+\sqrt{x})$, car $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$.

Exercices de fixation

7 Réponds par vrai ou par faux.

L est un nombre réel.

On donne :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

1. On ne peut conclure pour la limite de $g + h$ en $+\infty$. .....
2. $\lim_{x\to+\infty}(g(x)+h(x)) = 0$ .....
3. $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+h(x)] = c$ .....
4. $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+h(x)] = -\infty$ .....

8 On donne : $f(x) = x^2 + 2x + 5$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

Calcule la limite de la fonction $f + g$ en $+\infty$.

.....

.....

.....

SPÉCIMEN

9 On donne : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$ et $g(x)=x-8$.

Calcule la limite de la fonction $f+g$ en -3.

b) Limite du produit de deux fonctions

Propriété

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L > 0	L < 0	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)\times g(x))=$	L L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut conclure

Exercices de fixation

10 Réponds par vrai ou par faux. L est un nombre réel non nul.

On donne :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=L$.

1. On ne peut conclure pour la limite de fg en $-\infty$. .....
2. On ne peut conclure pour la limite de fh en $-\infty$. .....
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)\times h(x)\right]=0$ .....
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)\times h(x)\right]$ est toujours égale à $+\infty$ .....

11 Soit : $f(x)=x^2+2x+5$ et $g(x)=\dfrac{x+1}{2x+3}$.

Calcule la limite de $f\times g$ en $+\infty$.

SPECIMEN

12 On donne : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ et $g(x) = x - 8$.

Calcule la limite de la fonction $f \times g$ en 2.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

c) Limite du quotient de deux fonctions

Propriété

L et L' sont deux nombres réels.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	$L'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec g(x)>0	0 avec g(x)>0	0 avec g(x)<0	0 avec g(x)<0	0	L' > 0	L' < 0	L' > 0	L' < 0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut conclure	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut conclure

Exercices de fixation

13 Réponds par vrai ou par faux.

L est un nombre réel non nul.

On donne :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$.

1. On ne peut conclure pour la limite de $\dfrac{g}{f}$ en $+\infty$. ....
2. On ne peut conclure pour la limite de $\dfrac{f}{h}$ en $+\infty$. ....
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{g(x)}=0$ ....
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ est toujours égale à $+\infty$ ....

14 On donne : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ et $g(x) = x - 8$.

Calcule la limite de $\dfrac{f}{g}$ en 1.

....

....

....

....

....

....

....

....

15 On donne : $f(x) = -1 + \cos x$ et $g(x) = \sin x$.

Calcule la limite de $\dfrac{f}{g}$ en 0.

....

....

....

SPÉCIMEN

16 On donne : : $f(x) = 1 - \cos^2 x$ et $g(x) = x \tan x$

Calcule la limite de $\frac{f}{g}$ en 0.

5. Limite d'une fonction composée

Propriété

Soient f et g deux fonctions numériques. a, l et l' des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to l} g(x) = l'$, alors $\lim\limits_{x \to a} gof(x) = l'$.

Exemples

Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction $h : x \mapsto x[\cos(\frac{1}{x}) - 1]$.

Posons : $h = gof$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \frac{\cos x - 1}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$,

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\cos(\frac{1}{x}) - 1] = 0$.

On aurait pu effectuer un changement de variable en posant : $u = \frac{1}{x}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} u = 0$,

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\cos(\frac{1}{x}) - 1] = \lim\limits_{u \to 0} \frac{\cos u - 1}{u} = 0$.

Exercice de fixation

17 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4\pi x}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{3x-1}{x+2}}$.

Conséquence

Soit *f* une fonction numérique, *a* un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$, *l* un nombre réel positif ou nul et *l'* un nombre réel.

- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$.
- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$.
- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l'$, alors $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |l'|$.
- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$.
- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$.

Exercices de fixation

18 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x^2 + x + 2}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 2}$.

SPECIMEN

19 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to -3}|7x-1|$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}|7x-1|$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty}|7x-1|$.

6. Limite par comparaison

Propriétés 1

Soit f une fonction.

- *S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]A ; +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.*
- *S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]A ; +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.*



Remarque

Des propriétés analogues existent lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers x_0. ($x_0 \in \mathbb{R}$)

Propriétés 2

Soit f une fonction.

- *S'il existe deux fonctions g et h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]A ; +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l$.*
- *S'il existe un nombre réel l, une fonction g et un intervalle $]A ; +\infty[$ tels que : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$ et $\forall x \in]A ; +\infty[, |f(x) - l| \leq g(x)$,*
- *alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l$.*



Remarque

Des propriétés analogues existent lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers x_0. ($x_0 \in \mathbb{R}$)



• Soit f une fonction numérique vérifiant l'inégalité suivante :

$\forall x \in]-5 ; +\infty[, \ f(x) + \frac{6}{7} \geq \frac{x^2}{x+5}$

Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$\forall x \in]-5; +\infty[, \ f(x) \geq \frac{x^2}{x+5} - \frac{6}{7}$.

Or : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x+5} - \frac{6}{7} = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ***(propriété 1)***

• Déterminons $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 - \frac{\cos x}{x^2})$

$\forall x \in]0 ; +\infty[, -1 \leq \cos x \leq 1$,

donc : $\frac{-1}{x^2} + 1 \leq (1 - \frac{\cos x}{x^2}) \leq 1 + \frac{1}{x^2}$.

Or : $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{-1}{x^2} + 1) = \lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{-1}{x^2} + 1) = 1$,

donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 - \frac{\cos x}{x^2}) = 1$ ***(Propriété 2)***



Exercice de fixation

20 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x + \sin x)$ sachant que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $x - 1 \leq x + \sin x$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ sachant que la fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (3x + E(x))$ sachant que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $E(x) \leq x$.

SPECIMEN

7. Calcul de limite à l'infini d'une fonction contenant des radicaux



Point méthode

Pour calculer la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$, d'une fonction contenant des radicaux, on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- *Mettre en facteur le terme de plus haut degré.*
- *Introduire l'expression conjuguée.*
- *Utiliser consécutivement ces deux procédés.*



Calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-1}+x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

• Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-1}+x)$.

Quand x tend vers $-\infty$, les propriétés sur les calculs de limites ne permettent pas de conclure.

En mettant x^2 en facteur, on a : $\forall x \in]-\infty ; \dfrac{-\sqrt{2}}{2}[$,

$$\sqrt{2x^2-1}+x = \sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}+x$$

$$= |x|\sqrt{\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}+x$$

$$= x\left(-\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+1\right)$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}+1\right)=1-\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}<0$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}+1\right)=+\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-1}+x)=+\infty$.

• Calcul de : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Ici, les propriétés sur les calculs de limites ne permettent pas de conclure quand x tend vers $+\infty$. Utilisons l'expression conjuguée.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+1}-x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}(\sqrt{x^2+1}+x),$$

donc $\sqrt{x^2+1}-x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0,$$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=+\infty$.



Exercice de fixation

21 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{1-x})$.

8. Calcul de limite en utilisant la définition d'un nombre dérivé

Pour calculer des limites, on peut dans certains cas utiliser la définition du nombre dérivé en un point.



Calculons : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Posons : $f(x)=\sqrt{x}$.

SPECIMEN

f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et

$\forall x \in]0 ; +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ est le nombre dérivé de f au point 1, donc est égal à $f'(1)$; or $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, donc : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice de fixation

22 Calcule les limites suivantes en utilisant un nombre dérivé en un point.

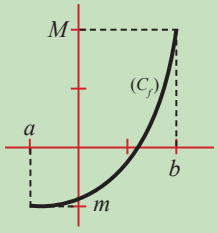
a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$.

9. Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

Propriété 1

Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a ; b[$.

- *Si f est majorée sur $]a ; b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b.*
- *Si f est minorée sur $]a ; b[$, alors f admet une limite finie à droite en a.*



Propriété 2

Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $]a ; b[$.

- *Si f est majorée sur $]a ; b[$, alors f admet une limite finie à droite en a.*
- *Si f est minorée sur $]a ; b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b.*

Propriété 3

Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a ; b[$.

- *Si f est non majorée sur $]a ; b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à gauche en b.*
- *Si f est non minorée sur $]a ; b[$,alors f a pour limite $-\infty$ à droite en a.*

Propriété 4

Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $]a ; b[$.

- *Si f est non majorée sur $]a ; b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à droite en a.*
- *Si f est non minorée sur $]a ; b[$, alors f a pour limite $-\infty$ à gauche en b.*

Exemples

La fonction tan est non majorée sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc la fonction tan admet pour limite $+\infty$ à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice de fixation

23 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) Si f est croissante et majorée sur $]1 ; 3[$, alors f a pour limite $+\infty$ à gauche au point 3. .....

b) Si f est décroissante et non minoré sur $]-1\ ;\ 2[$, alors f a pour limite $-\infty$ à gauche au point 2. .....

c) Si f est croissante et majorée sur $]-2\ ;\ 5[$, alors f a une limite $+\infty$ à gauche au point 5. .....

d) Si f est décroissante et minorée sur $]1\ ;\ 4[$, alors f a une limite finie à gauche au point 4. .....

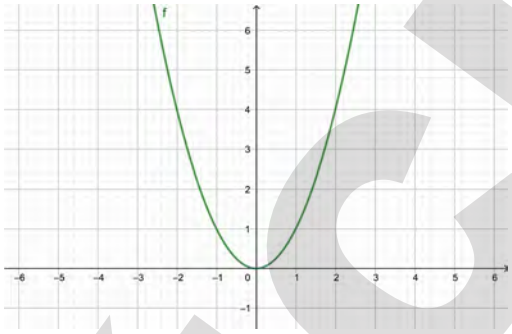
2 CONTINUITÉ

1. Continuité en un point

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.
f est continue en a si elle admet en a une limite égale à $f(a)$.

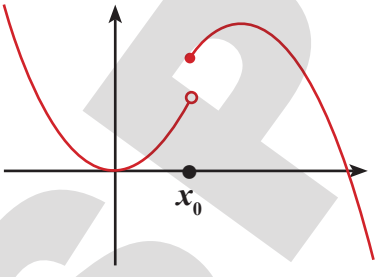




La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2$ est continue en 2.

En effet, f est définie en 2 ; $f(2) = 4$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

La fonction f est donc continue au point 2.



La courbe ci-dessus est la représentation graphique d'une fonction qui n'est pas continue au point x_0. En effet, la fonction f bien que définie en x_0, ne possède pas de limite en ce point.

Propriété

Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions de références est continue en tout élément de son ensemble de définition.

Exercices de fixation

24 Dans chacun des cas suivants, note le numéro des fonctions continues en tout point de l'intervalle I donné.

1. La fonction f est telle que : $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $I =]0\ ;\ +\infty[$;
2. La fonction g est telle que : $g(x) = \sqrt{x}\sin x$; $I =]0\ ;\ +\infty[$;
3. La fonction h est telle que : $h(x) = \dfrac{x}{\cos x}$; $I =]0\ ;\ +\infty[$;
4. La fonction k est telle que : $k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$; $I = [0\ ;\ +\infty[$.

.....

.....

25 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ \sqrt{x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Étudie la continuité de f en 0.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

26 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x > -1 \\ 2x-5 \text{ si } x \leq -1 \end{cases}.$$

Étudie la continuité de f en -1.

SPÉCIMEN

2. Prolongement par continuité

Propriété et définition

Soit f une fonction et a un nombre réel n'appartenant pas à l'ensemble de définition D_f de f.

On suppose que f admet une limite finie l en a.

La fonction g définie par :

$$g(x)=\begin{cases} f(x) \text{ si } x\in D_f\setminus\{a\} \\ l \text{ si } x=a \end{cases}$$ *est continue en a.*

Elle est appelée le prolongement par continuité de f au point a.

Exemples

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

0 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f ; de plus : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Donc la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 1 \text{ si } x=0 \end{cases}$$ est continue au point 0 et est le prolongement par continuité de f au point 0.

Exercices de fixation

27 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

1. Démontre que f admet un prolongement par continuité au point 2.
2. Définis ce prolongement.

28 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$.

1. Démontre que f admet un prolongement par continuité en 0.
2. Définis ce prolongement g.

3. Continuité sur un intervalle

Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Exemples

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert inclus dans son ensemble de définition.

Exercice de fixation

29 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

1. La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$
   ……
2. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-1\,;\,1[$
   ……

SPÉCIMEN

3. La fonction $h : x \mapsto \dfrac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$ ……

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et λ un nombre réel.

- *les fonctions $f+g$, fg ; λf et $|f|$ sont continues sur I.*
- *Si g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.*
- *Si f est positive sur I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.*



La fonction $f : x \mapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $g : x \mapsto |\sin x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété

Si f est continue sur un intervalle I, alors f(I) est un intervalle.



Remarque

Si f est continue sur un intervalle $[a ; b]$, alors $f([a ; b]) = [m ; M]$.
Les valeurs m et M ne sont pas forcément celles de $f(a)$ et $f(b)$.
m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a ; b]$.

Propriété

a, b, ℓ et L sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$ tels que $a < b$.

f est une fonction telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = L$.

- *Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a ; b]$ alors $f([a ; b]) = [f(a) ; f(b)]$.*
- *Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $]a ; b[$ alors $f(]a ; b[) =]\ell ; L[$.*
- *Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[a ; b]$ alors $f([a ; b]) = [f(b) ; f(a)]$.*
- *Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $]a ; b[$ alors $f(]a ; b[) =]L ; \ell[$.*



La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[0 ; \dfrac{\pi}{2}]$.

$\sin(0) = 0$ et $\sin(\dfrac{\pi}{2}) = 1$ donc $\sin([0 ; \dfrac{\pi}{2}]) = [0 ; 1]$.



Exercices de fixation

30 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On suppose que f est continue et croissante sur $[0 ; 1]$, $f(0) = 4$ et $f(1) = 7$

Détermine l'image de l'intervalle $[0 ; 1]$ par f.

……

……

……

31 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On suppose que f est continue et croissante sur $]-1 ; 3]$ et $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 5$ et $f(3) = 19$.

Détermine l'image de l'intervalle $]-1 ; 3]$ par f.

……

……

……

……

32 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On suppose que f est continue et décroissante sur $[7 ; 13]$ et $f(7) = 0$ et $f(13) = -10$.

Détermine l'image de l'intervalle $[7 ; 13]$ par f.

……

……

……

……

PREVIEW

33 Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x^2$.

1. Détermine l'image de l'intervalle $[-3 ; -1]$ par g.
2. Détermine l'image de l'intervalle $[1 ; 4]$ par g.

.....

.....

.....

.....

34 Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :

1. Détermine l'image par f de l'intervalle $[2 ; 4]$.
2. Détermine l'image par f de l'intervalle $[4 ; +\infty[$.
3. Détermine l'image par f de l'intervalle $]-\infty ; 2[$.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Continuité d'une fonction composée

Propriété

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction continue sur I, telle que $f(I) \subset J$ et g une fonction continue sur J.

La fonction gof est continue sur I.

Exemples

Justifions que la fonction $h : x \mapsto \tan\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Posons $h = gof$ avec $g : x \mapsto \tan x$ et $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+3}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = [\frac{1}{3} ; 1[$. La fonction g est continue sur $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et $[\frac{1}{3} ; 1[\subset]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ donc, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice de fixation

35 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) si $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = \sqrt{x}$, alors gof est continue sur $\mathbb{R}$. .....

b) si $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et $g(x) = \sin x$ alors gof est continue sur $\mathbb{R}$. .....

c) si $f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, alors gof est continue sur $\mathbb{R}$. .....

6. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

Tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f compris entre a et b.

Conséquence

Soit f : I⟶ $\mathbb{R}$, une fonction continue sur un intervalle I et $(a ; b)$ un élément de I^2.
On suppose que : $a < b$.
Si $f(a)\,f(b) < 0$, c'est-à-dire si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe $c \in [a ; b]$ tel que $f(c) = 0$.

SPÉCIMEN



Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 + x - 1$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme.

$f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. Donc il existe un nombre réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que :
$f(x_0) = 0$; car $f(0)\,f(1) < 0$.

Exercices de fixation

36 Soit f une fonction continue sur $[0 ; 1]$ telle que $f([0 ; 1]) = [-1 ; 4]$.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) 3 admet au moins un antécédent par f dans l'intervalle $[0 ; 1]$. .....

b) 0 n'a pas d'antécédent par f dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

.....

c) L'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$. .....

37 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1 ; 2]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Méthode de dichotomie

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle $[a ; b]$ tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
Il s'agit de déterminer une valeur approchée d'un nombre réel α élément de $[a ; b]$ tel que : $f(\alpha) = 0$ à une précision donnée.

- *Si $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de signes contraires, alors $\alpha \in [a ; \frac{a+b}{2}]$.*
- *Si $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de même signe, alors $\alpha \in [\frac{a+b}{2} ; b]$.*

On répète cette méthode dans l'intervalle trouvé. On s'arrête dès que l'on a la précision souhaitée.



Méthode de balayage

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle $[a ; b]$ d'amplitude 1 tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
Il s'agit de déterminer une valeur approchée d'un nombre réel α élément de $[a ; b]$ tel que : $f(\alpha) = 0$.
On calcule $f(a + 0{,}1)$; $f(a + 0{,}2)$; $f(a + 0{,}3)$; ...
On s'arrête lorsqu'on a un résultat de signe contraire au précédent. On en déduit un encadrement de α.

7. Fonction continue et strictement monotone

Propriété 1

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I détermine une bijection de I vers $f(I)$.

Propriété 2

Soit f est une bijection d'un intervalle I vers l'intervalle $f(I)$.

si f est continue et strictement monotone sur I, alors sa bijection réciproque f^{-1} est également continue et strictement monotone sur $f(I)$; de plus f et f^{-1} ont le même sens de variation.

SPÉCIMEN

Exemples

Soit f : $[0 ; \pi] \longrightarrow [-1 ; 1]$
$x \longmapsto \cos x$

La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $[0 ; \pi]$. De plus, elle est strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$.
$\cos([0 ; \pi]) = [-1 ; 1]$.

Donc f est une bijection de $[0 ; \pi]$ vers $[-1 ; 1]$.
f^{-1} est continue et strictement décroissante sur $[-1 ; 1]$.

Exercices de fixation

38 Soit la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

a) Justifie que f est une bijection de $]1 ; +\infty[$ sur $]0 ; +\infty[$.

b) Détermine l'expression de $f^{-1}(x)$.

39 Justifie que la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle que l'on précisera.

3 ÉTUDE D'UNE BRANCHE INFINIE

Le plan est muni d'un repère (O, I, J)

1. Asymptotes

a) Asymptotes parallèles à l'un des axes

Définition

Soit f une fonction de courbe représentative (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

- *On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote à la courbe (C) lorsque la fonction f a une limite finie ℓ en $+\infty$ ou en $-\infty$.*
- *On dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote à la courbe (C) lorsque la fonction f admet une limite infinie à droite ou à gauche au point x_0.*

Exemples

Soit la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ telle que : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

la limite de f en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à 2. Donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à la courbe représentative de f.

- la limite de f à droite en 1 est égale à $+\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe représentative de f.

Exercice de fixation

40 Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I ,J).

Détermine les asymptotes de la courbe (C).

SPÉCIMEN

b) Asymptotes non parallèles à l'un des axes

Définition

Soit f une fonction de courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$, on dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe (C).



Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+x-4}{x^2+1}$.

En effectuant la division euclidienne de x^3-5x^2+x-4 par x^2+1

On obtient : $\dfrac{x^3-5x^2+x-4}{x^2+1}=x-5+\dfrac{1}{x^2+1}$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-5)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}$.

$=0$

Donc la droite d'équation $y=x-5$ est une asymptote à la courbe représentative de f quand x tend vers $+\infty$.



Exercice de fixation

41 On pose : $g(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{x}$.

Justifie que la droite d'équation $y=2-x$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction g.

Propriété

Soit f une fonction de courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

La droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote à (C) si et seulement si lorsque x tend vers $+\infty$ ou $(-\infty)$, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers a et $[f(x)-ax]$ tend vers b.



Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Justifions que la courbe représentative de g admet une asymptote oblique en $+\infty$.

- $\forall x\in]0;+\infty[$, $\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=+\infty$.

- $\forall x\in]0;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=2$.

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-2x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=2$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-2x]=0$. Donc la droite d'équation $y=2x$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction g en $+\infty$.

SPECIMEN



Exercice de fixation

42 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Détermine une équation de l'asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction g en $-\infty$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Direction asymptotique

On suppose que $f(x)$ a une limite infinie lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

On étudie la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Trois cas peuvent se présenter :

- $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite infinie ;
- $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite finie ;
- $\dfrac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite.

Ces cas sont résumés dans le tableau ci-dessous :

a et b désignent respectivement les limites, lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ de $\dfrac{f(x)}{x}$ et de $f(x)-ax$.

Cas où :	Nature de la branche infinie	Exemples
$a=+\infty$ ou $a=-\infty$	La courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).	Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x}+x^3$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+\dfrac{1}{x^2})=+\infty$. La courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$.
$a=0$	La courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).	Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$. Donc, la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI) en $+\infty$.
b est un nombre réel et a un nombre réel non nul.	La droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction g.	Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. On vérifie que : (voir exemple précédent) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=2$ et que : $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-2x]=0$. Donc, la droite d'équation $y=2x$ est une asymptote oblique à la courbe de la fonction g.

SPÉCIMEN

a est un nombre réel non nul et $b = +\infty$ ou $b = -\infty$	La courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$.	Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x + \sqrt{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (2+\frac{\sqrt{x}}{x}) = 2$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-2x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ Donc la courbe représentative de fonction f admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = 2x$.
a est un nombre réel non nul et b n'existe pas	La courbe représentative de f n'a pas d'asymptote, ni de branche parabolique. Elle admet une direction asymptotique, celle de la droite d'équation $y = ax$.	Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x + \sin x$. Pour tout nombre réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc pour tout nombre réel x, $-1 + 3x \leq f(x) \leq 1 + 3x$. De l'inégalité, $-1+ 3x \leq f(x)$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (-1+3x) = +\infty$. Pour tout réel strictement positif, on a ; $\frac{-1}{x}+3 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}+3$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$. $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-3x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$. Or la fonction sin n'a pas de limite à l'infini. Donc la courbe de f n'a pas d'asymptote, ni de branche parabolique. Elle admet une direction asymptotique, celle de la droite d'équation $y = 3x$.
a n'existe pas.	La courbe représentative de f n'a pas d'asymptote, ni de branche parabolique, ni de direction asymptotique.	Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\pi x}{2} + x\cos x$. On peut vérifier comme précédemment que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2} + \cos x$ La fonction cos n'a pas de limite à l'infini donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ n'existe pas. Donc, La courbe représentative de la fonction f n'a pas d'asymptote, ni de branche parabolique, ni de direction asymptotique.

***NB :** l'étude des branches paraboliques, autres que celles des droites (OI) et (OJ) n'est pas inscrit au programme. Cependant, cette étude peut-être utile pour préparer les concours après le BAC.*

Exercice de fixation

43 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I , J).

Soit f une fonction numérique telle que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-contre.

Affirmations	Réponses
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+x] = 3$, alors la droite d'équation $y = 3x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f.	
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x] = 0$, alors la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f.	

SPECIMEN

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).	
Si la droite d'équation $y=1-4x$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-4$.	
Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).	
Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+2x]=-\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=-2x$.	

44 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=x^2+\sqrt{x^2+1}$

a) Détermine la limite de f en $+\infty$.

b) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

d) Interprète ces résultats.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4 FONCTION PUISSANCE D'EXPOSANT RATIONNEL

1. Fonction racine n-ième

Définition

n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On appelle fonction racine n-ième la bijection réciproque de la bijection : $f_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x^n$

Notation

y est un nombre réel positif ou nul. L'antécédent de y par f_n est noté : $\sqrt[n]{y}$ et on lit « racine n-ième de y » ou $y^{\frac{1}{n}}$ et on lit « y exposant $\frac{1}{n}$ »

Remarque



Soient $f_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x^n$ et $g_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto\sqrt[n]{x}$

Les courbes représentatives des fonctions f_n et g_n dans le plan muni d'un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$



La bijection réciproque de la fonction $f_5:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x^5$ est la fonction racine cinquième.

Soit y un réel positif $y=x^5\Leftrightarrow x=y^{\frac{1}{5}}$. On peut écrire $x=\sqrt[5]{y}$.



Exercices de fixation

45 On considère l'application f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à tout x associe x^3.

Justifie que la fonction $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

SPECIMEN

46

a et b sont deux nombres réels positifs, complète $a = \sqrt[7]{b} \Leftrightarrow b\ldots$; $b^{10} = a \Leftrightarrow a^{\cdots} = b$.

2. Fonction puissance d'exposant rationnel

Propriété – Définition

Soit r un nombre rationnel positif non nul tel que : $r = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ où p, q, p' et q' sont des nombres entiers naturels non nuls et x un nombre réel positif ou nul.

On a : $\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{p'}\right)^{\frac{1}{q'}}$. Par définition, $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$.

On peut écrire : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$. Soit r un nombre rationnel strictement négatif et x un nombre réel strictement positif. Par définition, $x^r = \frac{1}{x^{-r}}$.

On pose : $x^0 = 1$.

Propriété

r et r' étant des nombres rationnels non nuls, x et y des nombres réels strictement positifs,

$x^r \times y^r = (xy)^r$; $\left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'}$;

$\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$; $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$; $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$.

Exercices de fixation

47 Écris sous la forme d'une puissance rationnelle.

a) $\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{10}{21}\right)^{\frac{2}{3}}$; b) $\left(5^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{6}{25}}$; c) $\frac{7^{\frac{3}{4}}}{8^{\frac{3}{4}}}$; d) $2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{3}{5}}$.

SPECIMEN

1 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x-2}-3x$.

1. Calcule la limite de f en $-\infty$.
2. a) Démontre que pour tout $x > 1$,

$$f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-3\right).$$

b) Déduis-en la limite de f en $+\infty$.

2 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\frac{x}{2}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-5x\right)$.

3 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-3}-x\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^3+5x}-2x-1}{x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-x+7}+3x\right)$.

4 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}{x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{1-\cos x}$.

SPÉCIMEN

5 En utilisant une méthode algébrique, détermine dans chacun des cas suivants, l'image de l'intervalle K par f.

1. $f(x) = (x-1)^2 - 3$; K = [1 ; 2].
2. $f(x) = -x^2 + 8$; K = [0 ; +∞[.
3. $f(x) = 2 + \dfrac{1}{2x-3}$; $K = \left]\dfrac{3}{2} ; 5\right[$.

6 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x-3}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Calcule la limite de f en +∞ puis celle de $\dfrac{f(x)}{x}$ en +∞.
2. Donne une interprétation graphique de ces résultats.

7 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x^2$.
On note (C) la courbe représentative f dans le plan muni d'un repère orthonormé de (O, I, J).

1. Calcule la limite de f en + ∞ puis celle de $\dfrac{f(x)}{x}$ en + ∞.
2. Donne une interprétation graphique de ces résultats.

8 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Calcule la limite de f en – ∞.
2. Démontre que la courbe (C) admet une asymptote oblique en – ∞.

SPÉCIMEN

9 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J). f est une fonction de]–5 ; +∞[vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$.

1. Étudie les variations de la fonction f.
2. Démontre que f réalise une bijection de l'intervalle]–5 ; +∞[vers un intervalle K à déterminer.
3. Détermine l'expression de la bijection réciproque f^{-1}.
4. Justifie que la droite d'équation $x = -5$ est une asymptote verticale à la courbe (C) de f.
5. Justifie que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) de f.

10 On considère la fonction f définie de [–5 ; 5] vers [–517 ; 3] par : $f(x) = (x-3)^3 - 5$.

1. Démontre que f est une bijection de [–5 ; 5] vers un intervalle à déterminer.
2. a) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [–5 ; 5].
   b) Justifie que : $4{,}7 < \alpha < 4{,}71$.
3. Démontre que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution dans l'intervalle [–5 ; 5].

11 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur un intervalle K. a est un nombre réel. Dis si l'on peut prolonger dans chaque cas, la fonction f par continuité au point a. Si oui, détermine ce prolongement.

1. $f(x) = \dfrac{1+|x|}{|x|-1}$, K =]–1 ; 1[, $|a| = 1$;
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}$, K = [– 3 ; 1[, $a = 1$;
3. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$, K =]0 ; 1[, $a = 0$.

12 Dans chacun des cas suivants, calcule les limites de la fonction f en 1, en –∞ et en +∞.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}$; b) $f(x) = \dfrac{2x^3-4x^2+2x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

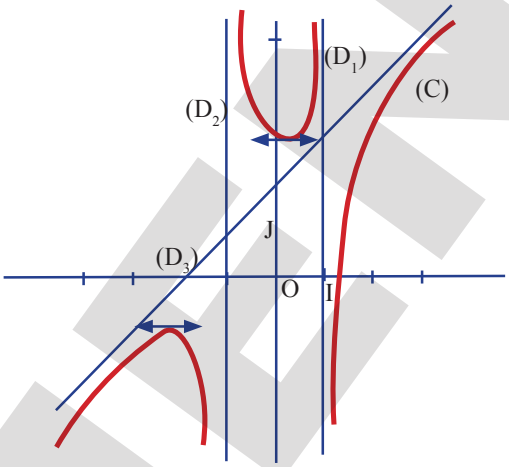
SPÉCIMEN

13 Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . On note (C) la courbe représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2x + 5}{x^2 + 5}$.

Démontre que la droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à (C) .

14 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On donne ci-contre la courbe représentative (C) d'une fonction f et les droites (D_1), (D_2), (D_3) d'équations respectives : $(D_1) : x = +1$; $(D_2) : x = -1$; $(D_3) : y = x + 2$.

1. En utilisant le graphique, traduis en terme de limite chacun des énoncés suivants:
   - (D_1) est asymptote à (C) ;
   - (D_2) est asymptote à (C) ;
   - (D_3) est asymptote à (C).
2. Étudie en utilisant le graphique, le signe de $f(x) - (x + 2)$ sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.



SPÉCIMEN

15 Lors d'une expérience, les élèves de terminale étudient le refroidissement d'un objet porté à 210°C.

On note $f(t)$ la température de l'objet à l'instant t. t est exprimé en minutes et $f(t)$ en degrés Celsius (°C). L'étude du phénomène physique conduit à la formule :

$$f(t) = \frac{210}{t} + 10.$$

Les élèves effectuent un contrôle de la température de l'objet après chaque minute (le premier contrôle ayant lieu à l'instant $t = 1$, ce jeudi 08 avril 2021 à 08 h).

Deux élèves, Abou et Konan émettent deux hypothèses.

Pour Abou, la température de l'objet passera en dessous de 11° avant le vendredi 09 avril 2021 à 08 h.

Pour Konan, la température atteindra 10° au bout d'une très longue période.

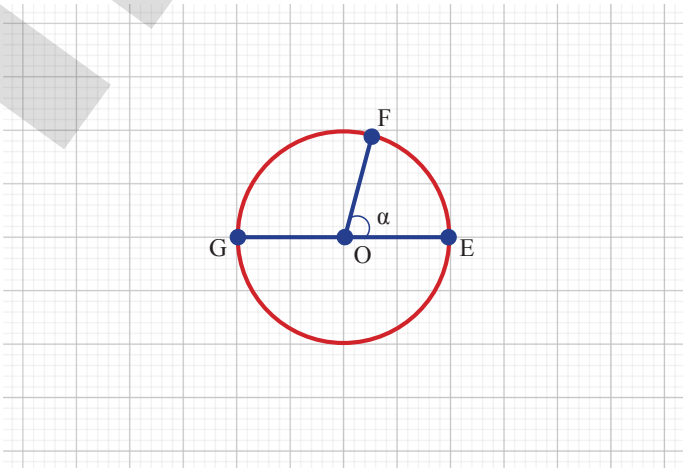
Ayant écouté ces deux élèves, tu décides de vérifier chacune de ces hypothèses.

À l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques, donne ton avis sur chacune de ces hypothèses.

16 Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de pièces métalliques circulaires.
Elle vient de recevoir une commande de plusieurs pièces circulaires ayant chacune les trois caractéristiques décrites comme suit (voir figure) :

1. OE = 1 ;
2. $Mes\left(\overrightarrow{OE} ; \overrightarrow{OF}\right) = \alpha ; \left(\alpha \in]0 ; \pi[\right)$;
3. L'aire du triangle OEF doit être égale à l'aire comprise entre le segment [EF] et l'arc $\overset{\frown}{EF}$.

Sur la figure ci-dessous, les points E et F appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.
L'entrepreneur a réalisé une pièce métallique et a placé le point E tel que : OE = 1.
Par contre, il ne sait pas comment déterminer le nombre réel α pour placer le point F sur le cercle afin que les conditions 2 et 3 soient réalisées.
Tu es invité à répondre à la préoccupation de l'entrepreneur.
À l'aide d'une production argumentée utilisant tes connaissances mathématiques, détermine pour cet entrepreneur une valeur approchée en degré de α, afin de lui permettre d'honorer la commande de son client.



SPÉCIMEN

2 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALÉATOIRE

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition d'une probabilité conditionnelle - la définition d'une variable aléatoire - la définition d'une loi de probabilité - la définition d'une fonction de répartition - la définition de l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type - la définition d'une épreuve de Bernoulli - la définition d'un schéma de Bernoulli - la définition de la loi binomiale de paramètres n et p - la propriété relative à l'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale B(n,p) - la propriété relative à la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale B(n,p) - la formule des probabilités totales
NOTER	une probabilité conditionnelle : P(A/B) ou P_B (A)
CALCULER	- la probabilité d'un évènement - la probabilité d'un évènement en utilisant la formule des probabilités totales - la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli ($0 \leq k \leq n$) - l'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire donnée
JUSTIFIER	- que deux événements sont indépendants ou non
DÉTERMINER	- la loi de probabilité d'une variable aléatoire donnée - la fonction de répartition d'une variable aléatoire donnée
CONSTRUIRE	- un arbre pondéré - la fonction de répartition d'une variable aléatoire donnée
TRAITER UNE SITUATION	- faisant appel à la probabilité conditionnelle et à une variable aléatoire

Situation d'apprentissage

Le père d'un élève de terminale lui dit : « J'augmenterai ton argent de poche si tu gagnes au moins deux parties consécutives sur trois que tu joueras contre ta mère et moi en changeant d'adversaire à chaque partie. Tu as une chance sur 3 de gagner lorsque tu joues avec ta mère et 5 chances sur 9 lorsque tu joues avec moi».

L'élève qui veut voir son argent de poche augmenter dit à son père qu'il va d'abord y réfléchir. Arrivé en classe le lendemain, il explique à ses amis de classe ce que son père lui a dit. Ils se mettent à faire des calculs pour savoir s'il est probable qu'il gagne, sachant qu'il commence le jeu avec son père.



SPÉCIMEN

Dans tout ce qui suit, Ω est un univers fini non vide et P une probabilité sur Ω.

1 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

1. Définition

Soit A et B deux événements avec P(A) ≠ 0.
On appelle probabilité de B sachant A, ou probabilité de B si A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé.
La probabilité de B sachant A est notée $P_A(B)$ ou P(B/A) et est définie par : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Conséquence

Soit A et B deux événements avec P(A) ≠ 0.
On a : $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

Exemples

Dans un lycée, il y a 867 élèves répartis comme suit :

	Seconde	Première	Terminale	Total
Filles	203	116	161	480
Garçons	140	134	113	387
Total	343	250	274	867

On choisit un élève au hasard. On note :
F : « l'élève choisi est une fille » ;
T : « l'élève choisi est un élève de terminale ».
Calculons la probabilité que l'élève choisit soit un élève de terminale sachant que c'est une fille.

Cette probabilité est $P_F(T)$. On a : $P_F(T) = \dfrac{P(F \cap T)}{P(F)}$.

$P(F \cap T) = \dfrac{161}{867}$; $P(F) = \dfrac{480}{867}$; D'où : $P_F(T) = \dfrac{161}{480}$.



D'où : $p_A(B) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)}$

Au numérateur, se retrouve l'intersection des deux ensembles.

L'indice qui est en bas se retrouve au dénominateur.

Par souci de rapidité, il est cependant utile de connaître la formule pour une probabilité conditionnelle.

Voici donc une technique pour la retenir :



Exercice de fixation

1 **Expérience aléatoire $\sum_1$.**

Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires.
Sur chaque boule, est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu".
Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné. Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné.
On tire au hasard une boule dans le sac.
Soit R l'événement "On tire une boule rouge".
Soit G l'événement "On tire une boule marquée Gagné".
Donc l'événement R∩G est : "On tire une boule rouge marquée Gagné".
P(R) = 0,4 et P(R∩G) = 0,3.
Calcule $P_R(G)$.

.....

.....

.....

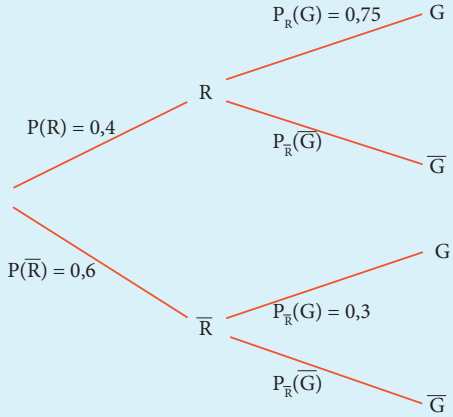
.....

.....

.....

2. Arbre pondéré

On reprend l'exemple de l'exercice de fixation.
L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) dont voici un exemple :

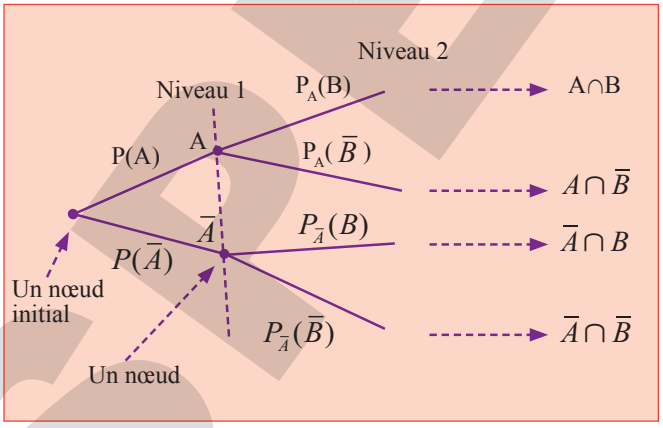


$p(R \cap G) = p(R) \times P_R(G) = 0,4 \times 0,75 = 0,3.$

SPECIMEN

Règles sur les arbres pondérés.

1. À l'origine de l'arbre ou nœud initial, on a l'événement certain, c'est-à-dire l'univers Ω.
2. À partir d'un nœud de l'arbre, on dessine des branches. Dans l'arbre ci-dessous, deux branches partent de Ω vers les évènements A et $\overline{A}$. Dans le cas général, on décompose Ω en n évènements deux à deux incompatibles $A_1,\ldots, A_n$ dont la réunion est Ω. On recommence le processus à chaque niveau.
3. Au niveau 1, on place sur chaque branche la probabilité de l'événement se trouvant au bout de la branche. Au niveau 2, sur une branche allant d'un évènement B, on place $P_A(B)$ qui est la probabilité de l'événement B, sachant que l'événement A est réalisé. Il en est de même à tous les autres niveaux.
4. La somme des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
5. Une succession de plusieurs branches s'appelle un chemin. Un chemin représente l'intersection des différents évènements rencontrés le long de ce chemin. La probabilité d'un chemin est alors le produit des probabilités des évènements rencontrés le long de ce chemin.
6. La probabilité d'un évènement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins.



Exercices de fixation

2 Dans un lycée, il y a 867 élèves répartis comme suit :

	Seconde	Première	Terminale	Total
Filles	203	116	161	480
Garçons	140	134	113	387
Total	343	250	274	867

On choisit un élève au hasard et on note :

F : « l'élève choisi est une fille » ;

G : « l'élève choisi est une garçon » ;

S : « l'élève choisi est un élève de seconde » ;

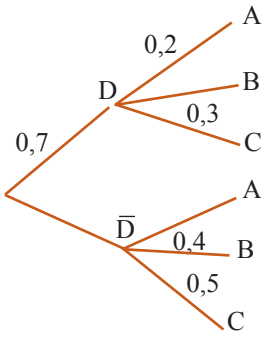
P : « l'élève choisi est un élève de première ;

T : « l'élève choisi est un élève de terminale ».

Construis un arbre pondéré correspondant à cette situation.

3 **Arbre pondéré P_1.**

1. Complète l'arbre ci-contre pour qu'il soit un arbre pondéré.
2. Détermine $P_{\overline{D}}(A)$
3. Calcule P(D∩B).



SPECIMEN

4 **Expérience aléatoire $\sum_2$.**

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test);
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,99 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note : V l'événement « la personne est contaminée par le virus »

On note : T l'événement « le test est positif »

1. Construis l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
2. Traduis par une probabilité la phrase : « Si le test est positif, il y a 40 % de chance que la personne soit contaminée.»
3. Détermine cette probabilité.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Formule des probabilités totales

Soient A_1, ..., A_n, n évènements deux à deux incompatibles tels que la probabilité de chaque évènement A_i soit non nulle et la réunion des A_i soit égale à Ω.
Pour tout évènement B, on a :
$P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + ... + P_{A_n}(B) \times P(A_n)$.



Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'achat d'un client potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité qu'il achète un téléviseur est de 0,6.
La probabilité qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4. La probabilité qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.
On se propose de calculer la probabilité que le client achète un magnétoscope.
Soit les évènements suivants :
T : « Le client achète un téléviseur » ;
M : « Le client achète un magnétoscope ».
D'après l'énoncé, on a : $P(T) = 0,6$; $P(M/T) = 0,4$; $P(M/\overline{T}) = 0,2$.
En appliquant la formule des probabilités totales avec $\{T ; \overline{T}\}$, on a :
$P(M) = P(T \cap M) + P(\overline{T} \cap M)$.
$P(M) = P(T) \times P(M/T) + P(\overline{T})) \times P(M/\overline{T})$.
$P(\overline{T}) = 0,4$ car $P(\overline{T}) = 1 - P(T)$ et $P(T) = 0,4$.
D'où : $P(M) = 0,32$.



Exercices de fixation

5 En reprenant l'expérience aléatoire $\sum_1$, calcule P(G).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6 En reprenant l'expérience aléatoire $\sum_2$, calcule la probabilité que le test soit positif.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SPÉCIMEN

4. Évènements indépendants

a. Définition

Deux événements A et B d'un univers Ω sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.



A et B sont deux évènements de l'univers d'une expérience aléatoire, tels que :

1. P(A) = 0,2 ; P(A ∩ B) = 0,08 et P(B) = 0,38 ;
2. P(A) = 0,5 ; P(B) = 0,6 et P(A ∩ B) = 0,3.

Dis, dans chaque cas si les évènements A et B sont indépendants.

C'est dans le deuxième cas que les évènements A et B sont indépendants car

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Dans le premier cas, les évènements A et B ne sont pas indépendants car

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$.

Propriété

Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle.
A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.



Remarque

Cette propriété illustre la notion d'événements indépendants. En effet, A et B sont indépendants si et seulement si la probabilité de B sachant A est égale à la probabilité de A. Ceci équivaut à dire que la réalisation ou la non réalisation de l'événement A n'a pas d'influence sur la probabilité de l'événement B et vice versa.



Une urne contient 2 boules noires et 8 blanches.

On tire deux boules de cette urne. On note A et B les événements suivants :

A : « la première boule tirée est noire. »

B : « la deuxième boule tirée est noire. »

- Si le tirage de ces deux boules s'effectue successivement avec remise de la boule tirée dans l'urne, la probabilité de B est $\frac{2}{10}$ et ceci, quelle que soit la couleur de la boule tirée en premier. Dans cette situation, les événements A et B sont indépendants.
- Si le tirage de ces deux boules s'effectue successivement sans remise de la boule dans l'urne, la probabilité de B est $\frac{2}{9}$ si la première boule tirée est blanche et $\frac{1}{9}$ si la première boule tirée est noire. La probabilité de B varie en fonction de la réalisation ou non de l'événement A. Dans cette situation les événements A et B ne sont pas indépendants.



Exercice de fixation

7 Réponds par vrai ou par faux.

1. Deux évènements qui ont une chance de réalisation sont indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas celle de l'autre. .....
2. Deux évènements incompatibles peuvent être indépendants. .....

b. Propriété

Si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.



A et B sont deux évènements d'une expérience aléatoire, tels que :
$P(A) = 0,7$; $P(\overline{B}) = 0,4$ et $P(A \cap \overline{B}) = 0,28$.
Justifions que A et B sont indépendants.

On a : $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$. Par suite A et $\overline{B}$ sont indépendants et donc A et B le sont.

Conséquence

Si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.



Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux événements indépendants :

- R : « Il n'entend pas son réveil sonner » ;
- S: « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

Il a observé que, chaque jour de classe, la probabilité de R est égale à 0, 1 et que celle de S est égale à 0,

05. Lorsqu'au moins l'un des deux événements se produit, Stéphane est en retard au lycée, sinon il est à l'heure. On se propose de :

- calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.
- calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

- La probabilité demandée est $P(\overline{R}\cap S)$. Puisque les événements R et S sont indépendants, il en est de même des événements $\overline{R}$ et S.
  Donc $P(\overline{R}\cap S) = P(\overline{R}) \times P(S) = (1 - 0,1) \times 0,05 = 0,045$. La probabilité que Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne est 0, 045.
- Stéphane arrive à l'heure si et seulement si il entend son réveil sonner et son scooter ne tombe pas en panne. La probabilité demandée est donc $P(\overline{R}\cap\overline{S})$. Puisque les événements R et S sont indépendants, il en est de même des événements $\overline{R}$ et $\overline{S}$.
  Donc $P(\overline{R}\cap\overline{S}) = P(\overline{R}) \times P(\overline{S}) = 0,9 \times 0,95$. On en déduit que $P(\overline{R}\cap\overline{S}) = 0,855$. La probabilité que Stéphane soit à l'heure un jour de classe donné est 0, 855.

Exercice de fixation

8 Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication, peuvent apparaître deux défauts désignés par les lettres α et β.

20 % des montres fabriquées présentent le défaut α et 10 % le défaut β.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On considère les événements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut α »

B : « la montre tirée présente le défaut β »

C : « la montre tirée ne présente aucun défaut »

On suppose que A et B sont indépendants. Calcule la probabilité de l'événement C.

2 VARIABLE ALÉATOIRE

1. Définition

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω. On appelle variable aléatoire toute application de Ω dans ℝ.

Exercice de fixation

9 On lance une seule fois une pièce de monnaie à pile (P) ou face (F) et on note la face supérieure. Soit Ω l'univers des possibles

Réponds par vrai par ou par faux si la relation X est une variable aléatoire.

N°	Relation	Vrai / Faux
1	X est la relation de Ω dans ℝ, telle que X(P) = 2 et X(F) = − 6.	
2	X est la relation de Ω dans ℝ, telle que : X(P) = 2 et F n'a pas d'image par X.	
3	X est la relation de Ω dans ℝ, telle que $X(P) = \frac{1}{22}$ et $X(F) = \frac{1}{2}$.	

SPECIMEN

2. Notation

Soit X une variable aléatoire et a un nombre réel.
$(X= a)$ est l'événement $\{\omega \in \Omega$, tel que : $X(\omega) = a\}$.
On dit que X prend la valeur a.
$(X \leq a)$ est l'événement $\{\omega \in \Omega$, tel que : $X(\omega) \leq a\}$.
On dit que X prend une valeur inférieur ou égale à a.
$(X > a)$ est l'événement $\{\omega \in \Omega$ tel que : $X(\omega) > a\}$. On dit que X prend une valeur strictement supérieur à a.



Exercice de fixation

10 On lance un dé cubique à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre apparu sur la face supérieure.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si le nombre lu est pair, −2 si le nombre lu est 5 et 0 sinon.

Écris en extension chacun des évènements suivants :

a) $(X= 1)$; b) $(X = 0)$; c) $(X < 1)$; d) $(X > 2)$.

3. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

a. Définition

Lorsqu'à chaque valeur x_i prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité P_i de l'événement $(X = x_i)$, on dit que l'on a défini la loi de probabilité de X.

Remarques



- *La donnée de toutes les valeurs x_i prises par X et des probabilités P_i, déterminent entièrement la loi de probabilité de X. Cela se résume dans le tableau suivant :*

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2		p_n

- *On a : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.*



Exercice de fixation

11 On lance un dé cubique à six (6) faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre apparu sur la face supérieure.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si le nombre lu est pair, −2 si le nombre lu est 5 et 0 sinon.

Détermine la loi de probabilité de X.

b. Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Définition

Soit X la variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2		p_n

On appelle espérance mathématique ou moyenne de X, le nombre réel noté E(X) défini par :

$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$.

SPÉCIMEN

Exercice de fixation

12 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-2	1	6	9	10	14
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,5$	$0,07$	$0,06$	$0,08$	$0,19$

Calcule l'espérance mathématique de X.

c. Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Soit X la variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2		p_n

- *On appelle variance de X, le nombre réel positif ou nul noté V(X) défini par :*
$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + ... + (x_n - E(X))^2 p_n$
- *On appelle écart-type de X, le nombre réel positif ou nul noté σ(X) défini par :* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque



$V(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n - [E(X)^2]$.

Exercice de fixation

13 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-2	1	6	9	10	14
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,5$	$0,07$	$0,06$	$0,08$	$0,19$

E(X) = 4,72.

Calcule V(X) et σ(X).

d. Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X, l'application F, telle que :

$F : \mathbb{R} \to [0,1]$

$t \mapsto F(t) = P(X \leq t)$.

Propriété

Si F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, alors :

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(t) \leq 1$;
- *F est croissante sur* $\mathbb{R}$.

SÉCIMEN

Exercice de fixation

14 On considère le lancer de 3 pièces de monnaie. On définit la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de piles obtenues à l'issue des trois lancées.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$				

Détermine et représente la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3 LOI BINOMIALE B(*n*, *p*)

1. Épreuve de Bernoulli

Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont le résultat peut être, soit un succès, soit un échec.

Exemples

On lance une pièce une fois et on note le résultat. On appelle succès le fait d'obtenir PILE et échec le fait d'obtenir FACE.

2. Schéma de Bernoulli

Définition

Un schéma de Bernoulli d'ordre n est la répétition d'une épreuve de Bernoulli identiques et indépendantes.

3. Loi binomiale

Définition - Propriété

Soit une épreuve de Bernoulli et ***p la probabilité d'obtenir un succès*** *(et donc $q = 1 - p$, la probabilité d'un échec).*

Si l'épreuve est répétée n fois dans les conditions du schéma de Bernoulli, alors la probabilité d'obtenir ***k succès*** *est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.*

La loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès est appelée la ***loi binomiale de paramètres n et p****. Elle est notée B(n ; p).*

Propriété

L'espérance mathématique de la variable X suivant une loi binomiale B(n ; p) est E(X) = np et sa variance est V(X) = npq.

Exercice de fixation

15 On choisit par hasard un élève d'un lycée et on lui demande de répondre par "Oui" ou "Non", s'il va au moins une fois par mois à la bibliothèque du lycée. Une étude statistique a montré que la probabilité que l'élève réponde "Oui" est $\frac{9}{11}$. On répète 10 fois, de façon indépendante, le choix au hasard d'un élève de ce lycée.

Calcule la probabilité que, parmi les élèves choisis, 6 élèves exactement se rendent au moins une fois par mois à la bibliothèque.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SPECIMEN

16 À chaque tir, la probabilité qu'un tireur touche une cible est 0,7. Un tireur tir trois fois de suite. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de cibles atteintes.

Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.

17 En reprenant l'énoncé de l'exercice précédent,

1. calcule l'espérance de X.
2. calcule la variance de X.
3. calcule l'écart-type de la variable aléatoire X.

18 Un questionnaire à choix multiple (QCM) comporte 10 questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées, dont une seule est correcte.

Un élève répond au hasard à chaque question du QCM. On note X le nombre de réponses correctes à l'issue du questionnaire.

1. Explique pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Détermine les paramètres de cette loi.

SPÉCIMEN

1 Dans une école d'ingénieurs, 20% des candidats sont admis directement sur présentation de dossiers. Tous les autres candidats passent une épreuve écrite. Ceux qui l'ont ratée, sont éliminés. Ceux qui l'ont réussie passent un test d'oral.

75% des candidats qui passent l'épreuve écrite la réussissent. Deux tiers des candidats qui passent l'épreuve orale la réussissent et sont admis.

On considère les évènements suivants :

D : « Le candidat est admis sur dossier »

E : « Le candidat passe et réussit l'épreuve écrite »

F : « Le candidat passe et réussit l'épreuve orale »

1. Traduis la situation à l'aide d'un arbre de choix.
2. On choisit un candidat au hasard.
   a) Détermine la probabilité qu'il ait passé et raté l'épreuve orale.
   b) Détermine la probabilité qu'il soit admis en ayant passé l'épreuve écrite.
3. Calcule la probabilité d'être admis à ce concours.

2 On dispose de 2 dés parfaits dont les faces sont numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. On lance successivement ces 2 dés, puis on fait la somme des chiffres obtenus sur les faces supérieures.

1. Calcule la probabilité de l'événement « la somme est paire ».
2. Calcule la probabilité « sur le premier dé, on obtient le numéro 6 ».
3. Calcule la probabilité de l'événement « la somme est paire sachant que le premier dé a donné le chiffre 6 ».

3 On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 3 boules rouges et 2 boules noires, l'urne U_2 contient 5 boules rouges et une boule noire. On jette un dé parfaitement cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, puis on lit le chiffre obtenu sur la face supérieure. Si le chiffre obtenu est 6 ou 2, on tire une boule de l'urne U_1. Si le chiffre est différent de 6 et de 2, on tire une boule de l'urne U_2.

Sachant que la boule tirée est noire, calcule la probabilité qu'elle ait été tirée de l'urne U_1.

SPÉCIMEN

4 Dans une population, il y a 45% d'hommes et 55% de femmes ; 4% des hommes et 5% des femmes présentent un caractère P.

1. Détermine la proportion de personnes qui présentent le caractère P.

2. On prend un individu au hasard.

   a) Calcule la probabilité de l'événement A : « cet individu est une personne qui présente le caractère P ».

   b) Calcule la probabilité qu'il soit un homme, sachant qu'il présente le caractère P.

5 On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite. On dispose de tests de dépistage de la maladie.

Si une personne est malade, la probabilité que son test soit positif est 0,95; notons $P_M(T)$ cette probabilité.

La probabilité que le test d'une personne soit positif sachant qu'elle est saine, est 0,1 ; notons, $P_{\overline{M}}(T)$ cette probabilité.

1. a) Calcule la probabilité d'être malade et testé positif.

   b) Calcule la probabilité d'être sain et testé positif.

   c) Calcule la probabilité d'être testé positif.

2. Calcule la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif.

3. Calcule la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif.

4. Calcule la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif.

5. Calcule la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif.

SPÉCIMEN

6 Une usine produit des règles en grande quantité. La probabilité qu'une règle présente un défaut est égale à 0,1. On prélève au hasard un échantillon de 8 règles dans la production d'une journée.

La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 8 règles.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de règles présentant un défaut parmi les 8 règles prélevées.

1. Justifie que X suit une loi binomiale. Donne les paramètres de cette loi.

2. Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Il n'y a aucune règle avec un défaut. » ;

B: « Il y a exactement deux règles avec un défaut. » ;

C: « Il y a au moins une règle avec un défaut. ».

3. Calcule l'espérance mathématique de la variable X. Interprète ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

7 On dispose de deux urnes :

- une urne U_1 dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boules noires.
- une urne U_2 dans laquelle se trouvent deux boules blanches et trois boules noires.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de chaque urne : on obtient ainsi quatre boules, les tirages dans chaque urne étant équiprobables.

1. Justifie que la probabilité de l'événement E : «parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules blanches», est égale à 0,46.

2. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues.

   a) Détermine la loi de probabilité de X.

   b) Le joueur doit verser 1500 F avant d'effectuer le tirage ; il reçoit à l'issue du tirage 600 F par boule blanche obtenue.

   c) Dis si le jeu est équitable.

3. Calcule la probabilité d'avoir tiré une et une seule boule blanche de l'urne U_1 sachant qu'on a tiré exactement deux boules blanches.

4. On ne considère que l'urne U_1, de laquelle on tire toujours au hasard et simultanément deux boules.

On nomme succès le tirage de deux boules blanches.

On renouvelle dix fois la même épreuve (en remettant chaque fois les boules tirées dans l'urne). Détermine la probabilité d'avoir au moins deux succès sur les dix tirages.

SPÉCIMEN

8 On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1).
U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.
1. On considère l'événement A : «après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ».

a) Justifie que la probabilité P(A) de l'événement A peut s'écrire : $P(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$.

b) Détermine la limite de P(A) lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On considère l'événement B : «après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche».
Vérifie que la probabilité P(B) de l'événement B peut s'écrire : $P(B) = \frac{6}{4(n+3)}$.

3. Un joueur mise 20 F et effectue une épreuve.
À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2 :

- si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ F ;
- si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n F ;
- si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a) Explique pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.
Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur les gains algébriques du joueur (par exemple, si après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).

b) Détermine la loi de probabilité de X.

c) Calcule l'espérance mathématique de X.

d) On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive.
Démontre qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

9 En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B. Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.
On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

SPÉCIMEN

• À l'événement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
• B l'événement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
• V l'événement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construis un arbre de probabilité traduisant la situation.

2. a) Calcule la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calcule la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

3. Démontre que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.

4. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4. L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses. Détermine le temps moyen, exprimé en heures, que l'institut doit prévoir pour parvenir à cet objectif.

10 Une entreprise possède 50 ordinateurs. La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de 0,01. On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres.

1. Calcule la probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne.

2. Calcule la probabilité que 5 ordinateurs soient en panne.

3. Calcule la probabilité de l'événement E : « au moins un ordinateur est en panne».

4. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs en panne parmi les 50 disponibles.

a) Calcule $p(X = 3)$.

b) Calculer $p(X \leq 3)$. Interprète ce résultat.

c) Calculer $E(X)$. Interprète ce résultat.

SPÉCIMEN

11 Un fabricant produit et vend 400 consoles de jeux par mois. Le coût de production est de 160 000 FCFA par console. Le fabricant réalise un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacun des objets fabriqués. Le test est positif dans 93 % des cas et la console de jeu reconnue conforme peut alors être vendue à 290 000 F CFA. Si le test est reconnu négatif, la console de jeu est bradée au prix de 150 000 FCFA.

Le fabricant espère un bénéfice mensuel moyen de 45 000 000 FCFA pour les mettre en réserve afin de renforcer ses fonds propres. Mais il s'inquiète et partage cette inquiétude avec son fils en classe de terminale D. Celui-ci te contacte.

Propose-lui une solution argumentée.

12 Un jeu de "pile ou face " consiste à lancer plusieurs fois de suite une pièce de monnaie et à noter le nombre de "faces" obtenu à l'issu des lancers.

L'organisateur du jeu te propose deux options.

Option 1 : tu lances trois fois de suite la pièce de monnaie. Tu ne gagnes que si tu obtiens exactement deux fois "face" à l'issu des trois lancers.

Option 2 : tu lances quatre fois de suite la pièce de monnaie. Tu ne gagnes que si tu obtiens au moins trois fois "face" à l'issu des quatre lancers.

Avant ta participation au jeu, tu décides de te retirer pour réfléchir à l'option susceptible de te permettre d'avoir le plus de chance de gagner.

Détermine cette option en basant ton raisonnement sur tes connaissances mathématiques.

SPÉCIMEN

3 DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition d'une fonction dérivable à gauche (respectivement à droite) en un point. - la définition des dérivées successives d'une fonction. - les nouvelles notations des dérivées successives ; $\frac{df}{dx}\ ;\ \frac{d^2f}{dx^2}\ ;\ \ldots\ ;\ \frac{d^nf}{dx^n}\ (n \in \mathbb{N}^*)$ - les propriétés relatives à la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle. - la propriété relative à la dérivée d'une fonction composée. - les propriétés relatives à l'inégalité des accroissements finis (les 2 formes).
NOTER	- un nombre dérivé à gauche (respectivement à droite) d'une fonction. - les dérivées successives d'une fonction.
RECONNAÎTRE	- graphiquement un point d'inflexion.
DÉTERMINER	- le signe d'une fonction en utilisant ses variations. - le sens de variation d'une bijection réciproque d'une fonction. f sur un intervalle J connaissant le sens de variation de f sur un intervalle I. - le nombre dérivé de la fonction f^{-1} en un point y_0. - un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction des dérivées successives d'une fonction.
ÉTUDIER	- la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement.
CALCULER	- le nombre dérivé en un point d'une fonction composée. - la dérivée d'une fonction composée.
REPRÉSENTER	- graphiquement la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé. - une demi-tangente. - graphiquement une fonction du type : • $x \mapsto \cos(ax + b)$; $a \in \mathbb{R}^*$ • $x \mapsto (ax + b)$; $a \in \mathbb{R}^*$ • $x \mapsto \tan(ax + b)$; $a \in \mathbb{R}^*$. - graphiquement des fonctions rationnelles. - graphiquement des fonctions de raccordement. - graphiquement une fonction : • comportant une valeur absolue ; • comportant une racine carrée.
INTERPRÉTER	- graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point x_0.

SPÉCIMEN

DÉMONTRER	- qu'une fonction composée est dérivable en un point.
UTILISER	- l'inégalité des accroissements finis pour : • démontrer une inégalité ; • établir un encadrement.
TRAITER UNE SITUATION	- faisant appel à la dérivabilité et à la représentation graphique des fonctions.

Situation d'apprentissage

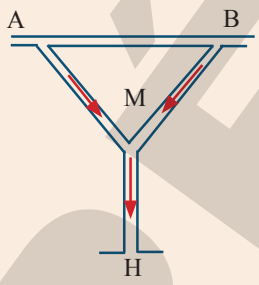
Un proviseur décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur un mur, à l'arrière de la façade d'une classe du lycée.

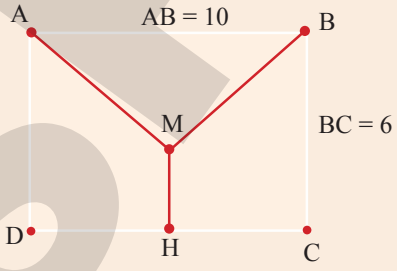
Sur ce mur, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

Sur ce plan, le support de [MH] est la médiatrice de [DC].

Afin de réduire le coût de la tuyauterie, le Proviseur veut trouver sur le mur de cette classe, la position du point M qui minimise la longueur totale des tuyaux.

Les élèves de cette classe décident d'étudier une fonction pour minimiser la longueur totale des tuyaux.







SPÉCIMEN

1 DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION EN a.

1. Définition

I est un intervalle.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $a \in I$.

- *On dit que f est dérivable à gauche en a lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.*
  Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f à gauche en a, on la note : $f_g'(a)$.
- *La droite passant par le point $A(a ; f(a))$ et de coefficient directeur $f_g'(a)$ est appelée la tangente à gauche à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.*
- *On dit que f est dérivable à droite en a lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.*
  Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f à droite en a, on la note : $f_d'(a)$.
- *La droite passant par le point $A(a ; f(a))$ et de coefficient directeur $f_d'(a)$ est appelée la tangente à droite à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.*

Exemples

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2|x-2|$.

● Étudions la dérivabilité de la fonction f au point 2.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(-x^2) = -4$, donc f est dérivable à gauche en 2 et $f_g'(2) = -4$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$, donc f est dérivable à droite en 2 et $f_d'(2) = 4$.

● La droite (D) passant par le point A (2 ; 0) et de coefficient directeur 4 est la tangente à droite à la courbe de f au point A.

Une équation de la droite (D) est donnée par :

(D) : $y = 4(x-2)$.

Exercices de fixation

1 Dans l'exemple précédent, détermine une équation de la tangente à gauche en A à la courbe de f.

2 f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a. α et β sont deux nombres réels.

On pose :

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \alpha$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \beta$.

(D) et (Δ) sont des droites passant par $A(a ; f(a))$ et de coefficient directeurs respectifs α et β.

Relie ci-dessous chaque expression de gauche à celle de droite qui lui correspond.

α est ●	● est la tangente à droite de f en a
β est ●	● le nombre dérivé de f à droite en a
(D) est ●	● le nombre dérivé de f à gauche en a
(Δ) est ●	● est la tangente à gauche de f en a

3 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x|x-1|$.

Détermine le nombre dérivé de f à gauche en 1 et le nombre dérivé de f à droite en 1.

SPECIMEN

2. Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche en a, f est dérivable à droite en a et $f_g'(a) = f_d'(a)$.



Dans l'exemple précédent,
$f_g'(2) = -4$ et $f_d'(2) = 4$
$f_g'(2) \neq f_d'(2)$ donc f n'est pas dérivable en 2.



Exercices de fixation

4 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ 2x \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

Étudie la dérivabilité de f en 0.

5 Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$g(x) = x|x-2|$.

Étudie la dérivabilité de g en 2.

6 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \text{ si } x < 1 \\ 1-\sqrt{x} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Étudie la dérivabilité de f en 1.

3. Tangente verticale

Propriété

f est une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

Lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sont infinies, la représentation graphique de f admet une tangente verticale au point A(a ; $f(a)$).



On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

(C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

Justifions que f admet une tangente verticale au point O.

SPÉCIMEN

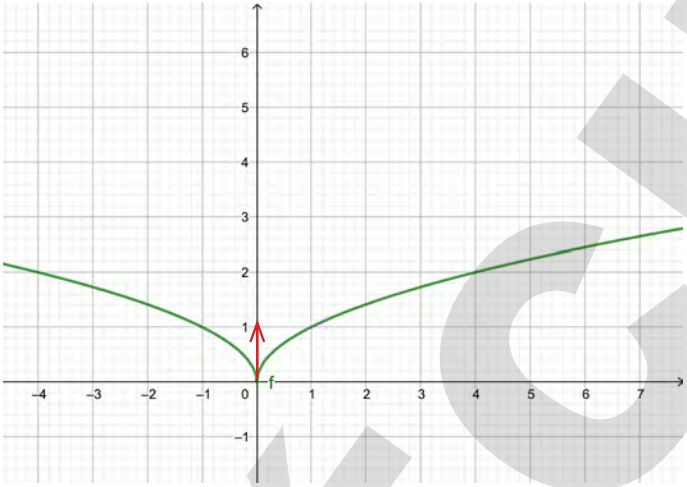
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x}}{x},$$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sqrt{-x}}{x},$$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty.$

Donc la représentation graphique (C) de f admet une tangente verticale au point O.



Exercice de fixation

7 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{|1-x^2|}$.

(C) est la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

Justifie que (C) admet au point d'abscisse 1 une tangente verticale.

- **Demi-tangente**

Définition

- *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O , I , J). Soit a un élément de Df.*
- *Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors (C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.*
- *Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors (C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.*
- *Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors (C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.*
- *Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors (C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.*

Exemples

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -\sqrt{x}$.

(C) est la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty.$$

Donc, la courbe (C) possède une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

SPECIMEN

Exercice de fixation

8 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

(C) est la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

Justifie que (C) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale dont on précisera si elle est dirigée vers le haut ou vers le bas.

4. Dérivabilité sur un intervalle

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$.

- *On dit que f est dérivable sur $]a ; b[$ lorsque f est dérivable en tout point de $]a ; b[$.*
- *On dit que f est dérivable sur $[a ; b]$ lorsque f est dérivable sur $]a ; b[$ et f est dérivable à droite de a et f est dérivable à gauche de b.*

Propriété

Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Exercice de fixation

9 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Étudie la dérivabilité de f sur $[-1 ; 1]$.

SPÉCIMEN

5. Tableau récapitulatif

Dérivée de fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalle de dérivabilité
$f(x) = k$.	$f'(x) = 0$.	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$.	$f'(x) = 1$.	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$).	$f'(x) = a$.	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$.	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).	$f'(x) = nx^{n-1}$.	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$.	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.	$]0 ; +\infty[$ $]-\infty ; 0[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$.	$]0 ; +\infty[$ $]-\infty ; 0[$
$f(x) = \sqrt{x}$.	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = \cos x$.	$f'(x) = -\sin x$.	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$.	$f'(x) = \cos x$.	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$.	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$.	$\left]\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$



On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{x^{10}}$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout nombre réel non nul, $f'(x) = -\frac{10}{x^{11}}$.



Exercice de fixation

10 Calcule la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I donné.

1. $f(x) = x^3$; $I = \mathbb{R}$;
2. $f(x) = \frac{1}{x^4}$; $I =]0 ; +\infty[$;
3. $f(x) = 10$; $I = \mathbb{R}$.

SPECIMEN

6. Dérivées et opérations

u et v sont des fonctions et I un intervalle		
Opération sur les fonctions	**Dérivées**	**Conditions**
$f = u + v$	$f' = u' + v'$	u et v sont dérivables sur l'intervalle I.
$f = ku$ (k est une constante)	$f' = ku'$	u est dérivable sur l'intervalle I.
$f = uv$	$f' = u'v + uv'$	u et v sont dérivables sur l'intervalle I.
$f = \frac{1}{v}$	$f' = -\frac{v'}{v^2}$	v est dérivable sur l'intervalle I et v ne s'annule pas sur I.
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	u et v sont dérivables sur l'intervalle I et v ne s'annule pas sur I.

Exercice de fixation

11 Dans chaque cas, calcule la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

1. $f(x) = x^2 + 3 + \sqrt{x}$, $I =]0 ; +\infty[$;

2. $f(x) = 4x^3$, $I = \mathbb{R}$; 3. $f(x) = \frac{x^2+x+4}{x^2+x+1}$, $I = \mathbb{R}$

4. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $I =]-\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2}[$.

Exercice de fixation

12 Dans chaque cas, étudie le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

1. $f(x) = x^2$, $I =]0 ; +\infty[$; 2. $f(x) = -x^3$, $I = \mathbb{R}$;

3. $f(x) = 2x^5 + 3x - 7$, $I = \mathbb{R}$.

7. Sens de variation

Propriété

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' \leq 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.
- Si $f' \geq 0$ sur I, alors f est croissante sur I.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f admet, pour tout x de I, ***un nombre dérivé***, on dit que ***f est dérivable*** sur I.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelé ***fonction dérivée*** de f et se note f'.

SPÉCIMEN

8. Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si f est dérivable sur I, alors sa fonction dérivée est la dérivée première de f.

On la note : f' ou $\frac{df}{dx}$.

- *Si f' est dérivable sur I, alors sa fonction dérivée est la dérivée seconde de f.*

On la note : f'' ou $f^{(2)}$ ou encore $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

- *Par dérivation successive, si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, alors sa dérivée est la dérivé nième de f.*

On la note : $f^{(n)}$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Exemples

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x^6 + 3x^2 - 5$

Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 12x^5 + 6x$.

On écrit aussi : $\frac{df}{dx}(x) = 12x^5 + 6x$.

$f''(x) = 60x^4 + 6$ ou encore : $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = 60x^4 + 6$.

On peut écrire aussi : $f^{(2)}(x) = 60x^4 + 6$.

Exercices de fixation

13 En utilisant l'exemple précédent, calcule $\frac{d^4 f}{dx^4}$.

14 Détermine la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $\frac{d^n f}{dx^n} = 0$.

15 Dans chaque cas, calcule la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$, $n = 2$, $I = \mathbb{R}$;
2. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2$, $n = 4$, $I =]0 ; +\infty[$.
3. $f(x) = \sin x$, $n = 3$, $I =]0 ; +\infty[$;
4. $f(x) = \cos x$, $n = 4$, $I =]0 ; +\infty[$.

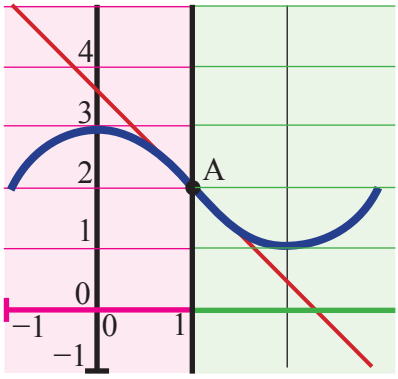
9. Point d'inflexion

Présentation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, (C_f) sa courbe représentative dans un repère et a un élément de I.

Le point $A(a ; f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) si la courbe traverse sa tangente en A.

SPECIMEN



Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, (C_f) sa courbe représentative dans un repère et a un élément de I.

Le point A(a ; $f(a)$) est un point d'inflexion de (C_f) si et seulement si f '' s'annule en a en changeant de signe.

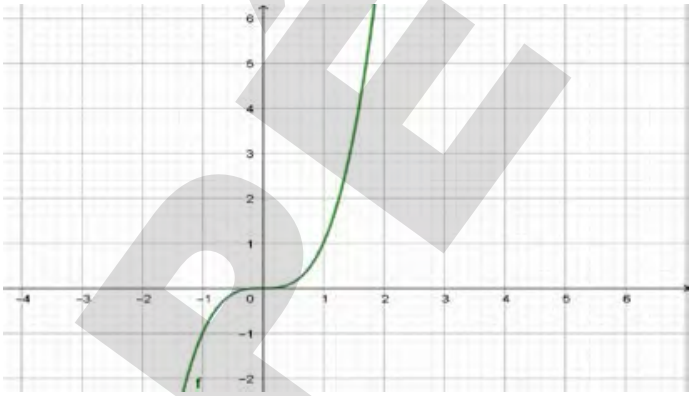
Exemples

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^3$ et (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$f''(x) = 6x$

f'' s'annule en changeant de signe en 0. Donc le point O est un point d'inflexion de la courbe (C).



La *fonction* qui à tout réel positif x associe son *cube* x^3 est appelée *fonction cube*. L'image d'un nombre négatif par *la fonction cube* est un nombre négatif et l'image d'un nombre positif est un nombre positif. Autrement dit, *x et x^3 sont de même signe.*

Exercices de fixation

16 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

Justifie que le point de (C) d'abscisse $\frac{1}{2}$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

17 Justifie que la courbe de la fonction : $x \mapsto x^4$ n'admet pas de point d'inflexion.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

1. Propriété

Propriété

f est une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J contenant f(I).

- Si la fonction f est dérivable en a ($a \in$ I) et la fonction g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction gof est dérivable en a et $(gof)'(a) = f'(a) \times g'[f(a)]$.
- Si la fonction f est dérivable sur I et la fonction g est dérivable sur J, alors la fonction gof est dérivable sur I et $(gof)' = f' \times (g'of)$.

SPECIMEN



On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos\frac{2}{x}$.

La fonction $g : x \longmapsto \frac{2}{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $g(]0 ; +\infty[) =]0 ; +\infty[$.
La fonction : $x \longmapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]0 ; +\infty[$. Donc la fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$,
$f'(x) = g'(x) \times \sin g(x)$.

Donc $\forall\, x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2}{x^2} \times \sin(\frac{2}{x})$.

Exercice de fixation

18 Dans chaque cas, calcule la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

1. $f(x) = (2x-1)^4$, $I = \mathbb{R}$; 2. $f(x) = \cos(2x-3)$, $I = \mathbb{R}$;

3. $f(x) = \left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^3$, $I = \mathbb{R}$; 4. $f(x) = \sqrt{x^2+3}$, $I = \mathbb{R}$.

2. Nombre dérivé de la réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Propriété

Soit f une fonction dérivable, strictement monotone d'un intervalle I sur un intervalle $f(I)$.

Soit α un élément de $f(I)$.
Si $f'[f^{-1}(\alpha)] \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en α et $(f^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(\alpha)\right]}$.



Soit f la fonction de $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ vers $]-1 ; 1[$ définie par : $f(x) = \sin x$.
Justifions que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et calculons $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.

f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et $f(]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[) =]-1 ; 1[$.
f est donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ sur $]-1 ; 1[$.
$f'(x) = \cos x$.
$\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, $\cos x \neq 0$; donc f la bijection réciproque de f est dérivable sur $]-1 ;1[$.
$\frac{1}{2} \in]-1 ; 1[$, d'où la dérivabilité de la fonction f^{-1} en $\frac{1}{2}$.
On a donc : $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{f'[f^{-1}(\frac{1}{2})]}$.

Or : $(f^{-1})(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, donc : $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{6})} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercices de fixation

19 En reprenant l'exemple précédent, justifie que : $\forall\, x \in]-1 ; 1[$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

SPÉCIMEN

20 On considère la fonction f dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Dans chaque cas, calcule $(f^{-1})'(\alpha)$.
1. $f(x) = x^3$; $\alpha = 1$; $I = \mathbb{R}$ et $f(I) = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$; $\alpha = 0$; $I = [0 ; +\infty[$ et $f(I) = [0 ; 1[$.

3 INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux éléments de I, tels que $a < b$.
S'il existe deux nombres réels m et M, tels que pour tout x élément de $[a ; b]$, $m \leq f'(x) \leq M$,
alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux éléments de I, tels que $a < b$.
S'il existe un nombre réel M, tel que pour tout x élément de $[a ; b]$,
$|f'(x)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)|$

Exemples

Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos x - 1| \leq |x|$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(t) = \cos t$. On a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -\sin t$.
On a bien : $|f'(t)| \leq 1$.
Pour tout nombre réel x, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur $[0 ; x]$ ou sur $[x ; 0]$ selon le signe de x, on a : $|f(x) - f(0)| \leq 1 \times |x - 0|$ soit $|\cos x - 1| \leq |x|$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos x - 1| \leq |x|$.

Exercices de fixation

21 Soient a et b deux nombres réels, tels que : $a < b$.
En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[a ; b]$, démontre que : $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$.

22
1. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[400 ; 401]$, donne un encadrement de 401 .
2. Déduis-en un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{401}$ par 20.

SPECIMEN

4 EXEMPLES D'ÉTUDE DE FONCTIONS

1. Fonctions polynômes

Exemples

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-x+3$.

1. Étudions et représentons graphiquement la fonction f.
2. Justifions que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}\ ;+\infty[$.
3. Déduisons-en que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

1. Étudions et représentons graphiquement la fonction g.

D'après la propriété relative aux limites des fonctions polynômes à l'infini, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3}x^3=+\infty.$$

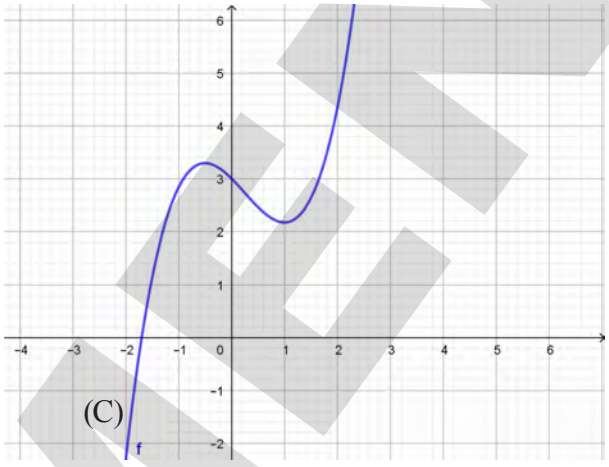
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3}x^3=-\infty.$$

La fonction f est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2x^2 - x - 1$.

L'équation $f'(x) = 0$ possède deux racines qui sont : $-\frac{1}{2}$ et 1.

L'étude du signe de $f'(x)$ permet d'établir le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{79}{24}$	↘	$\frac{13}{6}$	↗	$+\infty$



2. Le tableau de variation indique que :

$\forall x\in[-\frac{1}{2}\ ;+\infty[,\ f(x)\geq\frac{13}{6}\ ;\ \frac{13}{6}>0$.

Donc : $\forall x\in[-\frac{1}{2}\ ;+\infty[, f(x)\neq 0$.

3. La fonction est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-\infty\ ;-\frac{1}{2}[$.

Or : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $f(-\frac{1}{2})=\frac{79}{24}$, donc f est une bijection de : $]-\infty\ ;-\frac{1}{2}[$ sur $]-\infty\ ;\frac{79}{24}[$.

$0\in]-\infty\ ;\frac{79}{24}[$, donc il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle $]-\infty\ ;-\frac{1}{2}[$, tel que : $f(\alpha)=0$.

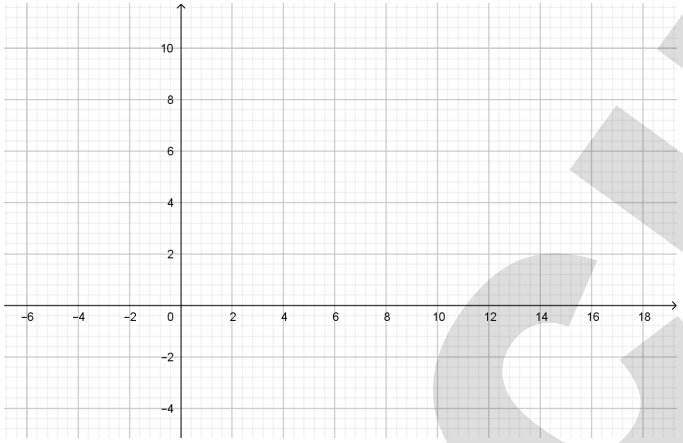
- L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[-\frac{1}{2}\ ;+\infty[$, et possède une solution unique dans $]-\infty\ ;-\frac{1}{2}[$. Donc l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Exercice de fixation

23 Soit g la fonction polynôme définie par : $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 10$.
Étudie et représente graphiquement la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

SPECIMEN

Représentation graphique



2. Fonctions rationnelles

Exemples

Étudions et représentons graphiquement la fonction rationnelle h définie par :

$$h(x) = \frac{x^2 - \frac{3x}{2} - 1}{x}.$$

L'ensemble de définition de la fonction h est :

$]-\infty;0[\cup]0 ; +\infty[$.

On vérifie que :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$.

On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de la fonction h.

En tant que fonction rationnelle, h est dérivable sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[,\ h'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$.

Donc la fonction h est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

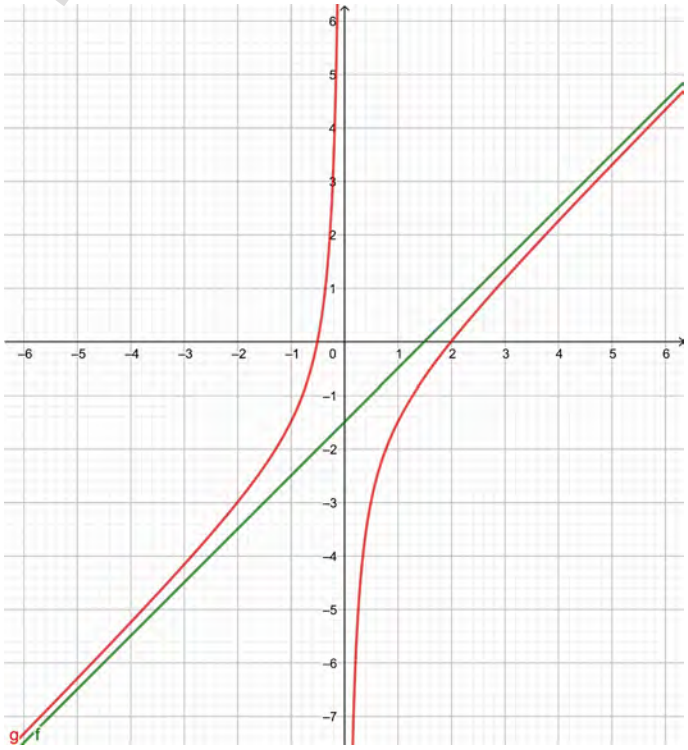
On a : $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[,\ h(x) = x - \frac{3}{2} - \frac{1}{x}$

donc on montre que la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction h en $+\infty$ et en $-\infty$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$	$+$		$\|\|$	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$\|\|$	↗	$+\infty$

Courbe



Exercice de fixation

24 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Étudie et représente graphiquement la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=\dfrac{2x^2-3x+3}{x^2-2x+2}$

3. Fonctions irrationnelles

Exemples

Étudions et représentons graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}$.

- ***Ensemble de définition***

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $1+x^2>0$, donc l'ensemble de définition de la fonction f est : $\mathbb{R}$

- ***Limite aux bornes de l'ensemble de définition***

$\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

$\forall\, x \in]-\infty\,;0[$, $f(x)=-\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$.

Interprétation graphique

- La droite d'équation : $y=1$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.
- La droite d'équation : $y=-1$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

- ***Calcul de f'(x) et signe de f'(x)***

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}}.$$

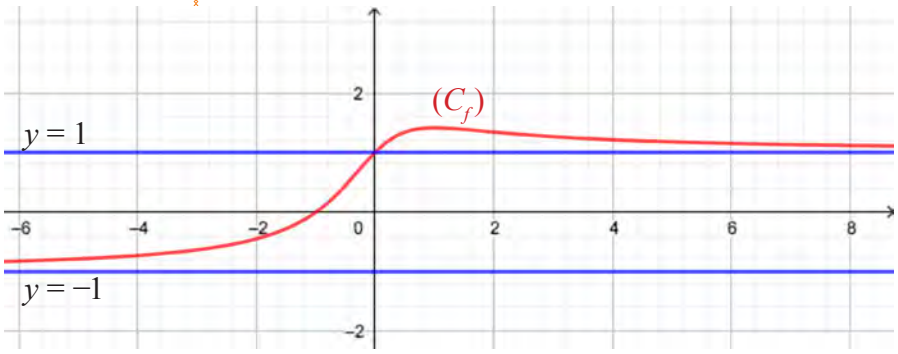
$\forall\, x \in]-\infty\,;1]$, $f'(x)\geq 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;1[$.

$\forall\, x \in]1\,;+\infty[$, $f'(x)<0$. Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

- ***Tableau de variation***

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

Représentation graphique de la fonction *f*.



SPECIMEN

Exercice de fixation

25 Étudie et représente graphiquement la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \sqrt{|x^2 + x - 2|}$.

4. Fonctions trigonométriques

Exemples

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Étudions et représentons graphiquement la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Ensemble de définition

La fonction g est définie pour tout nombre réel x, donc $D_f = \mathbb{R}$.

- **Périodicité**

Remarquons que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x + \pi) = g(x)$. Donc la fonction g est périodique de période π. On peut donc restreindre son étude à l'intervalle $[0 ; \pi]$ et compléter sa courbe représentative grâce à la translation de vecteur $\pi\,\overrightarrow{OI}$ ou $-\pi\,\overrightarrow{OI}$.

- **Limites**

La limite de g en 0 et en π vaut chacune $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ soit : $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- **Calcul de $g'(x)$**

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction g est dérivable sur $[0 ; \pi]$.

$\forall\, x \in [0 ; \pi]$, $g'(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

- **Étude du signe de $g'(x)$**

Le signe de $g'(x)$ est celui de $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{Z}$,

$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Donc, $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{Z}$,

$-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

Cherchons les solutions de l'inéquation $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ dans $[0 ; \pi]$.

Pour $k = 0$, on a : $[0 ; \pi] \cap \left[\frac{-\pi}{12} ; \frac{5\pi}{12}\right] = \left[0 ; \frac{5\pi}{12}\right]$.

Pour $k = 1$, on a : $[0 ; \pi] \cap \left[\frac{11\pi}{12} ; \frac{17\pi}{12}\right] = \left[\frac{11\pi}{12} ; \pi\right]$.

Donc : $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ et

$x \in [0 ; \pi] \Leftrightarrow x \in \left[0 ; \frac{5\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} ; \pi\right]$.

On en déduit donc que :

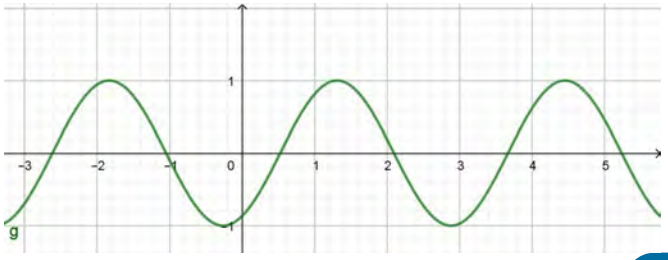
$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 0$ et $x \in [0 ; \pi] \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5\pi}{12} ; \frac{11\pi}{12}\right]$.

Donc la fonction g est strictement croissante sur $\left]0 ; \frac{5\pi}{12}\right[$ et sur $\left]\frac{11\pi}{12} ; \pi\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\frac{11\pi}{12} ; \frac{5\pi}{12}\right[$.

Tableau de variation de la fonction g

x	0		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	-1	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Représentation graphique de la fonction g



SPECIMEN



Exercices de fixation

26 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Étudie et représente graphiquement la fonction f définie par : $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$.

27 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Étudie et représente graphiquement la fonction k définie par : $k(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

SPÉCIMEN

1 Détermine un encadrement de $\sqrt{1001}$ en utilisant l'inégalité des accroissements finis.

2 On considère la fonction g de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \tan x$.

1. Démontre que : $\forall\, x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $1 \leq g'(x) \leq 2$.

2. Déduis-en que : $\forall\, x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $x \leq \tan x \leq 2x$.

3 Démontre que pour tout x élément de $[0\,;\,\frac{1}{2}]$, $1+\frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}$

4 Soit la fonction h de $[1\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = 1+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

1. a) Dresse le tableau de variation de h sur $[1\,;+\infty[$.

   b) Justifie que l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique α dans $[1\,;+\infty[$.

2. a) Démontre que pour tout x élément de $[1\,;+\infty[$, $\left|h'(x)\right| \leq \frac{1}{2}$.

   b) Déduis-en que pour tout x élément de $[1\,;+\infty[$, $\left|h(x)-\alpha\right| \leq \frac{1}{2}\left|x-\alpha\right|$.

5 On considère les fonctions f et g dérivables sur $]-1\,;\,1[$ et définies par :

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ et $g(x) = \frac{1}{1+x}$.

1. Calcule pour tout x élément de $]-1\,;\,1[$ les dérivées premières, secondes et troisièmes de chacune des fonctions f et g.

2. Déduis-en pour tout x élément de $]-1\,;\,1[$ les dérivées n-ièmes de f et celles de g.

SPÉCIMEN

6 On considère la fonction f définie par :
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, a et b étant deux nombres réels.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Détermine a et b pour que la tangente à la représentation graphique (C) de la fonction f au point d'abscisse 0 ait pour équation : $y = -3x + 1$ et $f'(1) = f'(-1)$.
2. Étudie les variations de f.
3. Construis (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

7 On considère la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{ax+2}{2x+1}$, a étant un nombre réel.

1. Détermine a pour que la courbe représentative (C) de f admette au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation : $y = -5x + 2$.
2. Dresse le tableau de variation de f pour $a = -1$.

8 On considère la fonction f dérivable et définie sur R\{1} par : $f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$, a et b étant deux nombres réels.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Détermine a et b pour que la courbe représentative (C) de f admette au point de coordonnées
(–3 ;1), une tangente horizontale.
2. Dresse le tableau de variation de f.
3. Trace (C) dans le repère (O, I, J).

9 Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{(x^2-2x+3)}{2x(x-2)}$,

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

SPÉCIMEN

c) Détermine les asymptotes à (C).

2. Calcule $f'(x)$.

3. a) Étudie les variations de f.

b) Dresse le tableau de variation de f.

4. Représente graphiquement la courbe (C) dans le repère (O, I, J) .

10 Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = |x-3| + \dfrac{1}{x-2}$.

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. a) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f .

b) Calcule les limites de f aux bornes de D_f .

c) Démontre que la droite d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et que la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

2. a) Étudie la dérivabilité de f en 3.

b) Calcule $f'(x)$ pour tout élément x de D_f .

c) Étudie le sens de variation de la fonction f.

d) Dresse le tableau de variation de la fonction f.

4. Construis la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J) .

11 Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{|x-2|}$.

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

1. a) Détermine l'ensemble de définition de f.

b) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

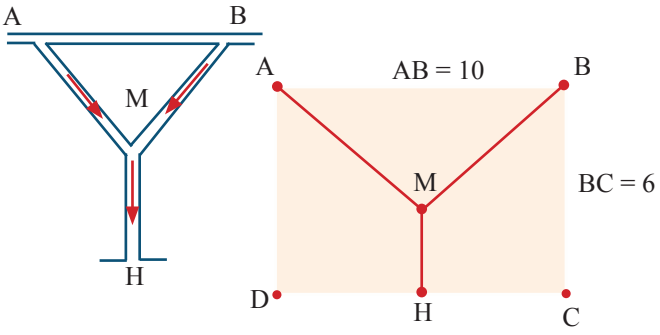
2. a) Étudie les variations de f.

b) Dresse le tableau de variation de f.

3. Construis la courbe (C).

SPÉCIMEN

12 Un proviseur décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur un mur, à l'arrière de la façade d'une classe du lycée.
Sur ce mur, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir (voir la figure ci-dessous).



Sur ce plan, le rectangle ABCD représente le mur et H le réservoir. Les segments [AM], [MB] et [MH] désignent les tuyaux. Le support du segment [MH] est la médiatrice de [DC].
On donne : AB =10 et BC = 6.
On note Q le projeté orthogonal de M sur la droite (BC) et on prend comme variable la mesure en radian de l'angle aigu $\widehat{BMQ}$ avec mes $\widehat{BMQ} = \theta, \theta \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$.
Afin de réduire le cout de la tuyauterie, le Proviseur cherche la position du point M sur le mur afin de minimiser la longueur des tuyaux à acheter. Il te sollicite.
A l'aide de tes connaissances mathématiques, détermine la valeur exacte de θ qui minimise la longueur totale des tuyaux.
(*Indication : on pourra démontrer que :* $g(\theta) = 6 + \frac{10 - 5\sin\theta}{\cos\theta}$)
où *g* est la fonction correspondant à la longueur total des tuyaux.

13 Pendant les vacances, tu travailles dans une société de fabrication de parapluie en zone industrielle à Abidjan. Cette société fabrique chaque jour x parapluies avec $x \in [0 ; 60]$. Le coût total de production de ces parapluies, exprimé en milliers de francs, est donné par : $f(x) = x^2 - 81x$.
Chaque parapluie fabriqué est vendu au prix unitaire de 3 000 francs. Toute la production est vendue le même jour. Pour plus d'efficacité, l'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal mais ne sait pas quelle quantité de parapluie elle doit fabriquer pour réaliser ce bénéfice maximal.



Elle te sollicite à cet effet. Donne une solution argumentée aux préoccupations de l'entreprise.
NB : bénéfice = prix de vente - coût de production

SPECIMEN

14 En visite dans une maternité à Abidjan, des élèves reçoivent les informations suivantes :
Lors de sa première année de vie, un enfant a deux types d'anticorps dans le sang : les anticorps transmis par la mère lors de la grossesse et les anticorps produits par l'enfant à partir de sa naissance. La somme des concentrations de ces deux anticorps est appelée concentration globale en anticorps dans le sang. La concentration en anticorps dans le sang est exprimée en grammes par litre (g/L).
On modélise la concentration en anticorps maternels dans le sang de l'enfant en fonction de son âge à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 12] par :
$f(x) = 12 \times 0{,}75^x$.
Suite à la naissance de ton petit frère, ta maman, par curiosité veut déterminer l'âge à partir duquel, la concentration en anticorps maternel du bébé sera inférieure à un gramme par litre.
À l'aide de la représentation graphique de la fonction f, réponds à la préoccupation de ta maman.

SPECIMEN

4 PRIMITIVES D'UNE FONCTION

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition d'une primitive d'une fonction continue - les primitives des fonctions de référence - les primitives de : • $u'+v'$; $\lambda u'$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; • $v'\times u'ov$; $\frac{u'}{\sqrt{u}}$; $u'\cos u$; $u'\sin u$; $\frac{u'}{u^r}$; $r \in \mathbb{Q}\setminus\{1\}$; $u'\times u^m$, $m \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ où u et v sont des fonctions dérivables.
DÉTERMINER	- l'ensemble des primitives d'une fonction continue - les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence - la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné. - les primitives d'une fonction du type : • u'+v', λu' $(\lambda \in \mathbb{R})$; • $v'\times u'ov$; $\frac{u'}{\sqrt{u}}$; $u'\cos u$; $u'\sin u$; $\frac{u'}{u^r}$, $r \in \mathbb{Q}\setminus\{1\}$; $u'\times u^m$, $m \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ où u et v sont des fonctions dérivables.
JUSTIFIER	- qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée
TRAITER UNE SITUATION	- faisant appel aux primitives de fonctions

Situation d'apprentissage

Pour préparer un exposé en physique, une élève de terminale monte au rez-de-chaussée d'un immeuble dans un ascenseur et se place sur un pèse-personne. Elle relève la mesure affichée sur le pèse-personne au cours de son trajet jusqu'au 5ème étage. D'après les lois de la physique, on peut établir que la valeur M (en *kg*) affichée par le pèse-personne, est liée à l'accélération a (en m/s) de la cabine et à la masse m (en *kg*) de la personne. L'élève veut déterminer la hauteur et la vitesse de la cabine à différents instants. On établit en mécanique que la vitesse instantanée de la cabine est la fonction dérivée de la fonction h (la hauteur de la cabine en fonction du temps) et que l'accélération instantanée de la cabine est la fonction dérivée de la vitesse. Ainsi, $a(t) = v'(t)$.
Arrivée en classe, elle demande à ses camarades de classe de l'aider à trouver la fonction v qui a pour dérivée l'accélération a.



SPECIMEN

1 DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F de I vers ℝ, dérivable sur I et telle que, pour tout élément x de I, F'(x) = f(x).



Soient f et g les fonctions définies sur ℝ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.
g est une primitive de f sur ℝ car g est dérivable sur ℝ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a :
$g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.



Exercices de fixation

1 Soient f et g les fonctions définies sur ℝ par : $f(x) = 3x^2 + 2x - 12$ et $g(x) = x^3 + x^2 - 12x + 9$.
Justifie que g est une primitive de f sur ℝ.

2 Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = 2x + 5$.
Soient F, G, H, P et Q les fonctions dérivables sur ℝ, telles que :
$F(x) = x^2$; $G(x) = x^2 + 5x - 7$; $H(x) = x^2 + 5x$;
$P(x) = x^2 + 5x + \frac{1}{x}$ et $Q(x) = \frac{5x^2 + 25x - 13}{5}$.
Parmi les fonctions F, G, H, P et Q, cite celles qui sont des primitives de f sur ℝ.

Propriété 1

Si f est continue sur un intervalle I, alors f admet une primitive sur I.



Soit la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = |x|$.
f étant une fonction continue sur ℝ, f admet au moins une primitive sur ℝ.



Exercices de fixation

3 Soient f, g, h, u et v les fonctions de ℝ vers ℝ telles que :
$f(x) = x^3 - 1$; $h(x) = \frac{1}{x}$; $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.
Identifie celles qui admettent une primitive sur son ensemble de définition.

SPÉCIMEN

4 Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1.Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet une primitive sur I. ☐

2. Une fonction qui n'est pas continue sur un intervalle n'admet pas de primitive sur cet intervalle. ☐

Propriété 2

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I.

Toute primitive de f sur I est de la forme :

$x \longmapsto F(x) + C$, *où* $C \in \mathbb{R}$.



On considère les fonctions F et f définies sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = x^4 + 1$ et $f(x) = 4x^3$.

La fonction f étant une fonction polynôme, elle est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$.

La fonction F étant une fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. D'où F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = F(x) + 11$ est une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.



Exercice de fixation

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x$.

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ définie par :

$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$.

Trouve deux autres primitives G et H de f sur $\mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété 3

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I, y_0 un nombre réel et x_0 un élément de I.

Il existe une primitive de f sur I et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0.



Déterminons l'unique primitive F, qui s'annule en 0, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

Les primitives G de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$G(x) = x^3 - x^2 + 5x + C$ où C est une constante réelle.

De la condition $G(0) = 0$, on déduit que C est égal à 0.

D'où : $F(x) = x^3 - x^2 + 5x$.



Exercices de fixation

6 Réponds par vrai ou par faux.

1. Si deux fonctions continues f et g sur $\mathbb{R}$ différent d'une constante non nulle, alors toute primitive de f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. ☐
2. Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors il existe une primitive F sur $\mathbb{R}$ et une seule, telle que $F(0) = 0$. ☐

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 1$.

On suppose que la fonction F définie par : $F(x) = x^2 - x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. Détermine la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 en 0.
2. Détermine la primitive H de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur $\frac{3}{2}$ en -1.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SPECIMEN

2 PRIMITIVES DE FONCTIONS USUELLES

Tableau de primitives

Fonction f	Primitives de f ($c \in \mathbb{R}$)	Sur l'intervalle
$x \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$)	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$)	$x \mapsto \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto x^r$ ($r \in Q^* \setminus \{-1\}$)	$x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$[0 ; +\infty[$, si $r > 0$ $]0 ; +\infty[$, si $r < 0$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$x \mapsto \tan x + c$	$](2k-1)\frac{\pi}{2};(2k+1)\frac{\pi}{2}[$, $k \in \mathbb{Z}$

Exemples

La fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction $x \mapsto \tan x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1+\tan^2 x$ sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

Exercices de fixation

8 Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f.

a) $f(x) = x^3$; b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

c) $f(x) = \frac{1}{x^5}$; d) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

9 Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f.

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; b) $f(x) = \sqrt{x}$;

c) $f(x) = \sin x$; d) $f(x) = -\cos x$.

SPÉCIMEN

3 PRIMITIVES ET OPÉRATIONS

Propriété 1

Soient f et g deux fonctions admettant des primitives sur un intervalle I. F et G deux primitives respectives de f et g sur I. Soit k un nombre réel.

- *F + G est une primitive de la fonction f + g sur I.*
- *k×F est une primitive de la fonction k×f sur I.*



Les fonctions $x \mapsto \tan x$ et $x \mapsto \sin x$ étant des primitives respectives des fonctions $x \longmapsto \tan^2 x + 1$ et $x \longmapsto \cos x$ sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, la fonction $x \mapsto \tan x + \sin x$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \tan^2 x + 1 + \cos x$ sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

Exercices de fixation

10 Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f.

a) $f(x) = x + \sin x$; b) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$;

c) $f(x) = \cos x - \sin x$

11 Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f.

a) $f(x) = 7\sin x$; b) $f(x) = -4x^2$; c) $f(x) = \frac{5}{x^2}$;

d) $f(x) = 18x^3$.

12 Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f.

a) $f(x) = 8x^2 + 5x + 3$; b) $f(x) = 12x^3 - 2x^2 + 7x - 9$;

c) $f(x) = 4\sin x - \frac{3}{x^2}$.

SPECIMEN

Propriété 2

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur u(I), alors $v \circ u$ est une primitive de la fonction $u' \times (v' \circ u)$ sur I.



La fonction $x \longmapsto 4x + \cos 3x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto 4 - 3\sin 3x$.



Exercice de fixation

13 Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.

a) $f(x) = 2\sin(-2x)$; b) $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$;

c) $f(x) = \dfrac{-3}{(3x+1)^2}$.

Tableau récapitulatif des primitives

Fonction f	Une primitive de f	Observation
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	*Sur tout intervalle où u est dérivable*
$\dfrac{u'}{u^n}$ $(n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$	$-\dfrac{1}{(u-1)u^{n-1}}$	*Sur tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas*
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	*Sur tout intervalle où u est dérivable et strictement positive*
$u'u^r$ $(r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\})$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	*Sur tout intervalle où u est dérivable et positive, si $r > 0$ (et strictement positive, si $r < 0$)*
$u'\cos u$	$\sin u$	*Sur tout intervalle où u est dérivable*
$u'\sin u$	$-\cos u$	*Sur tout intervalle où u est dérivable*



La fonction $x \longmapsto (3-2x)\sqrt{3-2x}$ est une primitive sur l'intervalle $]-\infty ; \dfrac{3}{2}[$ de la fonction : $x \longmapsto -3\sqrt{3-2x}$.

SPECIMEN



Exercice de fixation

14 Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f.

a) $f(x) = (2x-1)(x^2-x+6)^3$; b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x^2+3x+3)^3}$;

c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; d) $f(x) = \sin x \cos^3 x$.

SPÉCIMEN

1 On considère la fonction f de $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = E(x)$.
Justifie que f n'admet pas de primitive sur $[0 ; 1]$.

2 On considère la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $F(x) = x|x|$.
Justifie que F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x) = 2|x|$.

3 Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :
a) $f(x) = 3x^2 - 4x - 7$; b) $f(x) = -5x^4 + 3x^2 + 8$.

4 Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives de la fonction f sur l'intervalle I donné :
a) $f(x) = x^3(x^4 + 1)^2$, $I = \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \dfrac{4}{(3x-2)^3}$, $I =]\dfrac{2}{3} ; +\infty[$.

5 Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives de la fonction f sur l'intervalle I donné :
a) $f(x) = \dfrac{4x+2}{(x^2+x-2)^2}$, $I =]1 ; +\infty[$;

b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$, $I =]0 ; \pi[$.

6 Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que :
$g(x) = \cos 3x - \dfrac{1}{2}\cos x$.
Détermine la primitive G de g telle que $G(\dfrac{\pi}{4}) = 0$.

SPÉCIMEN

7 Soit la fonction h définie sur $]1;+\infty[$ par :
$h(x) = \dfrac{2x^3 - 7x^2 + 8x - 1}{(x-1)^2}$.

1. Détermine trois nombres réels a, b et c, tels que pour tout $x \neq -1$, on puisse écrire h sous la forme: $h(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$.
2. Détermine la primitive H de h sur $]1;+\infty[$ qui s'annule en 0.

8 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = x\sqrt{3-x}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D de f.
2. Détermine trois nombres réels a, b et c, tels que la fonction définie par :
$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-x}$ soit une primitive de f sur D.
3. Déduis la primitive de f sur D qui s'annule en -1.

9 Soit la fonction rationnelle f définie sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x+3)^3}$.

1. Détermine les nombres réels a et b, tels que :
$\forall x \in]-3;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{a}{(x+3)^2} + \dfrac{b}{(x+3)^3}$.
2. Détermine les primitives de f sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.
3. Déduis la primitive F de f sur $]-3;+\infty[$ qui s'annule en -2.

10

1. Démontre que, pour tout nombre réel x,
$\sin^3 x = \sin x - \sin x \cos^2 x$.
2. Détermine les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par : $h(x) = \sin^3 x$.
3. Déduis la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur $\dfrac{2}{3}$ en π.

SPÉCIMEN

SITUATION COMPLEXE

11 Lors d'une expérience portant sur l'efficacité d'un bactéricide, des élèves introduisent ce produit dans un milieu nutritif où une population de bactéries croissait. La population a continué à croître pendant un certain temps mais, elle s'est arrêtée de croître et a commencé à décliner.
La taille de la population à l'instant t est une fonction f dont la dérivée est donnée par :
$f'(t) = -10^3t^2 + 3.10^3t + 10^4$ et telle que : $f(0) = 10^3$.
$f(t)$ représente le nombre de bactéries et t représente le temps en heures.
Selon cette expérience, le bactéricide est jugé efficace si après son introduction, le maximum de la population de bactéries est inférieur à 460 000.
Faisant partie de ce groupe d'élèves, tu es sollicité pour apprécier l'efficacité du bactéricide.
Propose à tes camarades, une solution argumentée basée sur tes connaissances mathématiques.

SPÉCIMEN

1

EXEMPLE DE DEVOIR DE NIVEAU



1er TRIMESTRE

SPECIMEN

Exercice 1 (2 points)

Écris le numéro de l'affirmation suivi de vrai si l'affirmation est vraie ou de faux si l'affirmation est fausse.

1.Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet une primitive sur I.

2. Une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

3. Une primitive de la fonction : $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ sur $]-\infty ; 0[$ est la fonction : $x \mapsto -\frac{1}{x}$.

4. Une primitive de la fonction : $x \mapsto u'(x) \times v(u(x))$ est la fonction : $x \mapsto uov(x)$ sur tout intervalle I où u est dérivable.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont données, dont une seule est juste. Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses	
1	Si G et H sont deux évènements indépendants, tels que : P(G) = 0,3 et P(H) = 0,4, alors ...	A	P(GUH) = 0,12
		B	P(GUH) = 0,7
		C	P(GUH) = 0,58
		D	P_H (G) = 0,4
2	Si E et F sont deux évènements, tels que : P(E) = 0,3 ; P_E(F) = 0,5, alors...	A	P (E∩ F) = 0, 2
		B	P (E∩ F) = 0,8
		C	P (E∩ F) = 0,6
		D	P (E∩ F) = 0,15
3	$\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2+1}) =$	A	0
		B	$-\infty$
		C	$+\infty$
		D	1
4	Soit x un nombre réel non nul. On pose : g(x) = cos ($\frac{1}{x}$). On a :	A	$g'(x) = -\sin(\frac{1}{x})$
		B	$g'(x) = -\frac{1}{x}\cos x$
		C	$g'(x) = \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})$
		D	$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})$

Exercice 3 (3 points)

On dispose de deux urnes :
Une urne U_1 dans laquelle se trouve trois boules blanches et deux boules noires.
Une urne U_2 dans laquelle se trouve deux boules blanches et trois boules noires.
Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de chaque urne : on obtient ainsi quatre boules. Les tirages dans chaque urne sont équiprobables.

1. Justifie que la probabilité de l'événement « Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules blanches » est égale à 0,46.

2. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues.
   a) Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Le joueur doit miser 250 F avant d'effectuer le tirage. Il reçoit à l'issue du tirage 100 F par boule blanche tirée. Calcule l'espérance mathématique, puis interprète le résultat obtenu.

SPÉCIMEN

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \sqrt{|x(x-2)|} - x$.

1. Justifie que f admet en 0 et en 2 des demi-tangentes dirigées toutes vers le haut.
2. a) Justifie que la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
   b) Justifie que la droite d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.
3. a) Justifie que pour tout nombre réel x élément de $]-\infty ; 0[$, $x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x} < 0$.
   b) Justifie que pour tout nombre réel x élément de $]2 ; +\infty[$, $x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x} > 0$.
   c) Résous dans $]0 ; 2[$, l'inéquation $1 - x - \sqrt{2x - x^2} \geq 0$.
4. On suppose que f est dérivable sur les intervalles $]-\infty ; 0[$; $]0 ; 2[$ et $]2 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a) Détermine $f'(x)$ pour tout nombre réel x élément de $]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$.
   b) Détermine $f'(x)$ pour tout nombre réel x élément de $]0 ; 2[$.
5. a) Détermine les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on utilisera les résultats de la question 3).
   b) Dresse le tableau de variation de f.
6. Construis la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

Exercice 5 (2 points)

Dans la salle des profs, 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes. On choisit une personne au hasard et on se rend compte qu'elle porte des lunettes.
Détermine la probabilité qu'elle soit une femme.

Exercice 6 (5 points)

Tu travailles dans une société de fabrication d'un produit cosmétique. Cette société fabrique chaque jour x produits avec $x \in [0 ; 40]$. Le coût total de production, exprimé en milliers de francs, est donné par : $C(x) = x^2 - 60x$.
Chaque produit fabriqué est vendu au prix unitaire de 2 000 F. Toute la production est vendue le même jour. Pour plus d'efficacité, l'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal mais doit déterminer la quantité de produit cosmétique à fabriquer pour réaliser un bénéfice maximum.
Elle te sollicite à cet effet.
Donne une solution aux préoccupations de l'entreprise.

Grille de notation de la situation

Critères	Indicateurs de performance	Barème de notation
C1 : Pertinence (Interprétation correcte de la situation d'évaluation/pertinence des choix opérés par les élèves sur les données de la situation	Une introduction - Pertinence de l'outil choisi - Adéquation de l'outil avec la situation	0,75pt
C2 : Utilisation correcte des outils mathématiques en situation (concerne les pas de démonstration)	Résolution mathématique de la situation - Respect des étapes dans l'utilisation de l'outil - Exactitude des formules - Justesse de l'argumentation	1,50 pt
C3 : Cohérence de la réponse ; Cohérence dans la démonstration (entre les pas de démonstration)	Retour au problème -Le résultat obtenu est conforme au résultat attendu -Interprétation correcte du résultat par rapport au seuil fixé	1,25 pt
C4 : Critère de perfectionnement	- Concision - Originalité - Bonne présentation	0,5 pt

SPECIMEN

5 FONCTIONS LOGARITHMES

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition de la fonction logarithme népérien - la définition de la fonction logarithme décimal - les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien - la dérivée de la fonction logarithme népérien - le sens de variation de la fonction logarithme népérien - la représentation graphique de la fonction logarithme népérien - les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal - les limites de référence de la fonction logarithme népérien - les fonctions dérivées des fonctions du type : ln$o$$u$ et ln$o$$\lvert u \rvert$ - les primitives des fonctions du type : $\frac{u'}{u}$
NOTER	- la fonction logarithme népérien - la fonction logarithme décimal - une fonction logarithme de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$)
RÉSOUDRE	- des équations ou inéquations faisant intervenir la fonction ln - une équation de la forme $x^n = k$ ($k \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$) - une inéquation d'inconnue n de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$ ($q \in \mathbb{R}_+^*$; $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$)
DÉTERMINER	- les fonctions dérivées des fonctions du type : ln$o$$u$ et ln$o$$\lvert u \rvert$ - les primitives des fonctions du type : $\frac{u'}{u}$, où u est une fonction dérivable non nulle
REPRÉSENTER	- graphiquement les fonctions du type : ln$o$$u$ et ln$o$$\lvert u \rvert$ - graphiquement une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien
UTILISER	- les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien pour transformer une écriture - les limites de référence pour calculer d'autres limites
ÉTUDIER	- une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien
TRAITER UNE SITUATION	- faisant appel aux fonctions logarithmes

SPÉCIMEN

Situation d'apprentissage

Le médico-scolaire de ta commune organise une campagne de dépistage de la fièvre typhoïde dans ton établissement. Après avoir examiné n élèves pris au hasard, le médecin chef affirme que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde dans cet établissement est de $1-(0{,}325)^n$. Afin de sensibiliser davantage les élèves contre cette maladie, le chef de l'établissement veut connaître le nombre minimum d'élèves, tel que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde soit supérieure à 0,98. Il sollicite ta classe.

Après plusieurs essais infructueux avec la calculatrice, vous posez le problème à votre professeur de Mathématiques qui vous demande d'utiliser les propriétés algébriques d'une fonction qui a la particularité de transformer une somme en produit. Curieux, chaque élève de la classe décide de s'informer sur cette fonction et d'étudier ses propriétés.



SPECIMEN

1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Définition

On appelle fonction logarithme népérien la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1.

La fonction logarithme néperien est noté ln.

Conséquences

- L'ensemble de définition de la fonction ln est : $]0 ; +\infty[$.
- La fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.
- La fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
- $\ln 1 = 0$.

Exercices de fixation

1 Réponds par vrai ou par faux.

1. La fonction ln est définie sur $]-\infty ; 0[$
2. La fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$
3. La fonction ln est décroissante sur $]0 ; +\infty[$

2 Réponds dans chaque case par vraie ou par faux.

1. $\ln'\left(\frac{1}{3}\right) = 3$
2. $\ln 6 < \ln 10$
3. Si $0 < x < 6$, alors $\ln 6 < \ln x$

Propriété fondamentale

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a : ln (ab) = ln a + ln b.

Exemples

ln (2×3) = ln 2 + ln 3.
Donc ln 6 = ln 2 + ln 3.

$$\ln\sqrt{5} + \ln\sqrt{\frac{9}{5}} = \ln\left(\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{9}{5}}\right)$$
$$= \ln\sqrt{9}$$
$$= \ln 3$$

Exercices de fixation

3

1. Écris les expressions suivantes sous la forme $\ln a$ où a est un nombre réel strictement positif.
   a) $\ln 4 + \ln 5$; b) $\ln\sqrt{3} + \ln\sqrt{12}$;
   c) $\ln 8 + \ln\frac{1}{4}$.

.....

.....

.....

.....

.....

2. Justifie que : $\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \ln\left(\sqrt{2}-1\right) = 0$.

.....

.....

.....

.....

4 Écris les expressions suivantes sous la forme $\ln a + \ln b$ où a et b sont des nombres réels strictement positifs.

a) $\ln(4 \times 9)$; b) $\ln(4 \times \sqrt{2})$; c) $\ln(7\pi)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et pour tout nombre rationnel r, on a :

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$;
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$;
3. $\ln\left(a^r\right) = r \times \ln a$.

SPECIMEN



$\ln\frac{1}{4} = -\ln 4$; $\ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$

$\ln\frac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3$



Exercices de fixation

5

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

	AFFIRMATIONS	RÉPONSES
a	ln 72 = 3 ln(2) + 2 ln(3).	
b	$\ln\left(\frac{32}{343}\right) = 4\ln 2 - 3\ln(7)$	
c	ln(0,8) = 2 ln 2 – ln 5	
d	ln 625 = 5 ln 4	
e	$\ln\left(\sqrt{\frac{1}{18}}\right) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 3$	
f	$\ln 8^3 + \ln 2 = 7 \ln 2$	

6

On considère les nombres A, B et C, tels que :

A = ln 7 – ln 21 ; B = 3ln 2 – ln4 ;

C = 2ln 3 – ln6 + $\ln\frac{4}{3}$.

Écris chacun de ces nombres sous la forme ln a où a nombre réel strictement positif.

2 ÉTUDE DE LA FONCTION ln

1. Sens de variation

La fonction ln est dérivable et strictement croissante sur]0 ; + ∞[. Elle est une bijection de]0 ; + ∞[sur ℝ.
Donc : pour tous nombres réels a et b strictement positifs,

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$



- a étant un nombre réel strictement positif, si $\ln a < \ln 5$ alors, $a < 5$; si $a < 5$ alors, $\ln a < \ln 5$.
- b étant un nombre réel strictement positif, $\ln b = \ln 8 \Leftrightarrow b = 8$.



Exercice de fixation

7 Compare les nombres réels suivants :

1. ln 7 et ln 5 ; 2. $\ln\sqrt{3}$ et $\ln\frac{1}{2}$;

3. ln 29 et $\ln 4\sqrt{5}$.

2. Le nombre réel e

La fonction ln est une bijection de]0 ; + ∞[sur ℝ.
On appelle e, l'unique nombre réel élément de]0 ; + ∞[tel que : $\ln e = 1$.
e est appelé la base du logarithme népérien.
Une valeur approchée de e est : 2,718 281 828 456.

SPECIMEN



Remarque

La notation e a été donnée par le mathématicien EULER. Il a démontré que ce nombre est irrationnel.



$\ln e^3 = 3\ln e$.
$\ln e = 1$, donc : $\ln e^3 = 3$.



Exercice de fixation

8 Calcule : $\ln e^{-5}$; $\ln e^2 + (\ln e)^2 + 2\ln e^3$; $\ln e^{-5} + (\ln e^3)^2 + 2\ln e^{-1}$.

3. Limites de la fonction ln

Limites de référence

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0$



Calculons les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x)$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{x\ln x}{1+x}$.

a) $x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$. Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$,

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x) = +\infty$.

b) On a :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (1+x) = 1$. Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{x\ln x}{1+x} = 0$



Exercice de fixation

9 Interprète les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

10 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

	Affirmations	Réponses
a	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e\ln x}{x-1} = e$	
b	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\ln x}{1+x} = 0$	
d	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\dfrac{x+1}{x} = 1$	

SPÉCIMEN

11 Calcule les limites suivantes :

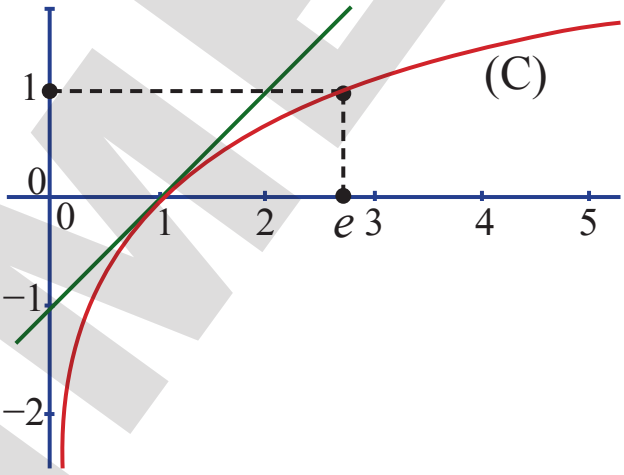
a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\ln x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

4. Courbe représentative

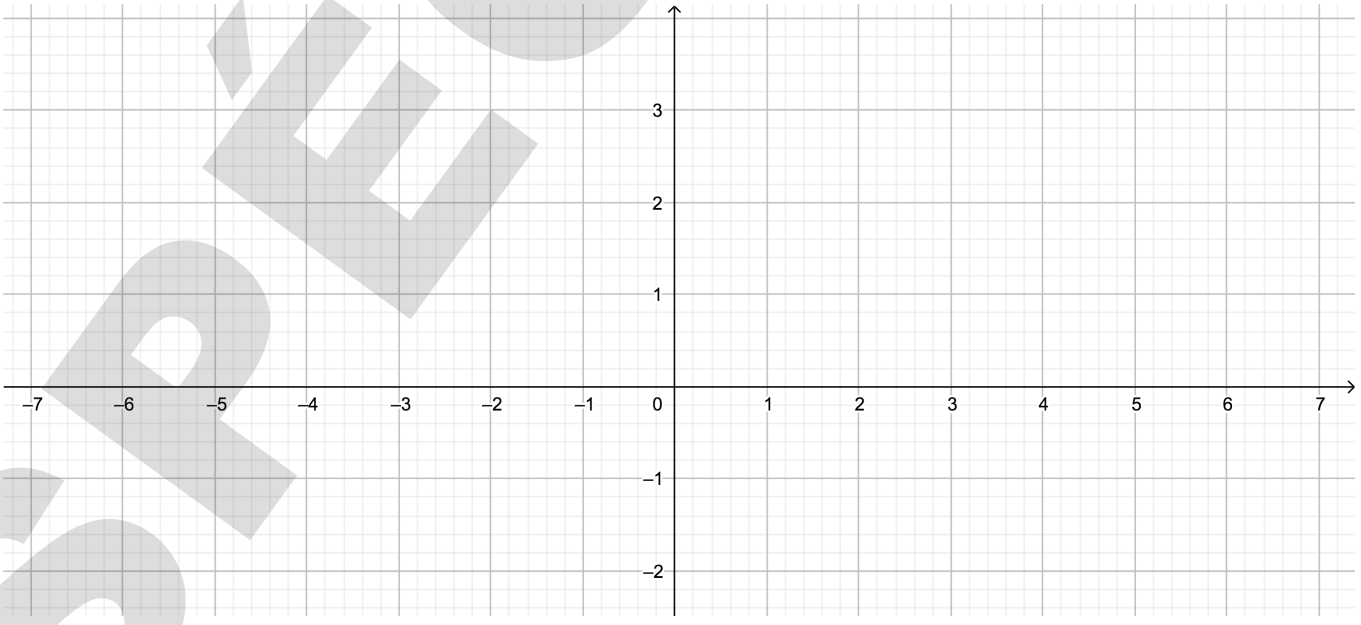
Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	||	+	
$\ln x$	|| $-\infty$	↗	$+\infty$



Exercice de fixation

12 Déduis-en la courbe représentative de la fonction g définie sur $]-\infty\,;\,0[$ par : $g(x) = \ln(-x)$.



SPÉCIMEN

3 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS FAISANT INTERVENIR LA FONCTION ln

1. Équations faisant intervenir la fonction ln

Point méthode

Pour résoudre une équation comportant des logarithmes, on peut utiliser la méthode suivante :
- déterminer les contraintes sur l'inconnue ;
- se ramener à une ou plusieurs égalités de la forme : $\ln a = \ln b$.

Exemples

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation :
$\ln(3x-2) + \ln(x-1) = \ln(4x+2)$
Contrainte sur l'inconnue :

$$\begin{cases} 3x-2>0 \\ x-1>0 \\ 4x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]1\,;+\infty[$$

Soit x un élément de $]1\,;+\infty[$, on a :
$\ln(3x-2) + \ln(x-1) = \ln(4x+2) \Leftrightarrow$
$\ln[(3x-2)(x-1)] = \ln(4x+2)$.
$\ln[(3x-2)(x-1)] = \ln(4x+2) \Leftrightarrow$
$(3x-2)(x-1) = 4x+2$
$(3x-2)(x-1) = 4x+2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$.
0 n'appartient pas à l'intervalle $]1\,;+\infty[$ et 3 appartient à $]1\,;+\infty[$, donc l'ensemble des solutions de l'équation $\ln(3x-2) + \ln(x-1) = \ln(4x+2)$ est : $\{3\}$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^3 = 7$
Contrainte sur l'inconnue : $x > 0$

$x^3 = 7 \Leftrightarrow \ln x^3 = \ln 7$ donc $3\ln x = \ln 7$ donc $\ln x = \dfrac{\ln 7}{3}$

soit $\ln x = \ln e^{\frac{\ln 7}{3}}$. On a donc $x = e^{\frac{\ln 7}{3}}$.

On peut aussi écrire que : $x^3 = 7 \Leftrightarrow x = 7^{\frac{1}{3}}$.
L'ensemble des solutions de l'équation proposée est : $\{e^{\frac{\ln 7}{3}}\}$.

Exercice de fixation

13 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(1-x) = -2$; b) $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$;
c) $2e \ln x + 1 = 0$; d) $\ln(x+5) = 2\ln 2 - \ln(x-2)$;
e) $(x^2-1)\ln x = 0$.

2. Inéquations faisant intervenir la fonction *ln*

Point méthode

Pour résoudre une inéquation comportant des logarithmes, on peut utiliser la méthode suivante :
- déterminer les contraintes sur l'inconnue ;
- se ramener à une ou plusieurs inégalités de la forme : $\ln a < \ln b$.

Exemples

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :
2. $\ln(3x-2) + \ln(x-1) < \ln(4x+2)$
Contrainte sur l'inconnue :

$$\begin{cases} 3x-2>0 \\ x-1>0 \\ 4x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]1\,;+\infty[.$$

SPECIMEN

Soit x un élément de $]1 ; +\infty[$, on a : $\ln(3x-2) + \ln(x-1) < \ln(4x+2) \Leftrightarrow \ln[(3x-2)(x-1)] < \ln(4x+2)$.
$\ln[(3x-2)(x-1)] < \ln(4x+2) \Leftrightarrow (3x-2)(x-1) < 4x+2$.
$(3x-2)(x-1) < 4x+2 \Leftrightarrow x(3x-9) < 0$.
$x(3x-9) < 0 \Leftrightarrow x \in]0 ; 3[$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(3x-2) + \ln(x-1) < \ln(4x+2)$ est : $]0 ; 3[\cap]1 ; +\infty[$, c'est-à-dire : $]1 ; 3[$.

3. Résolvons dans $\mathbb{N}$, l'équation d'inconnue n, $5^n \leq 1000$

Il n'y a aucune constraint sur l'inconnue.
$5^n \leq 1000 \Leftrightarrow \ln 5^n \leq \ln 1000$
$\ln 5^n \leq \ln 1000 \Leftrightarrow n \ln 5 \leq \ln 1000$. Or $\ln 5 > 0$ donc $n \leq \dfrac{\ln 1000}{\ln 5}$.
Une valeur approchée de $\dfrac{\ln 1000}{\ln 5}$ est 4,29, donc n est un entier naturel inférieur à 4,29 donc $n \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

Exercices de fixation

14 Résous les inéquations suivantes :

a) $\ln(1-x^2) > 1$; b) $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$;

c) $\ln(x+e) + \ln(x-e) \leq 2 + \ln 3$;

d) $\ln(2-x) > 2$; e) $\ln\dfrac{x-2}{1-x} < \ln x$.

15 Détermine le plus petit entier naturel n, tel que : $1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n > 0{,}95$.

4 FONCTIONS DU TYPE : *ln*o*u* OU *ln*o|*u*|

1. Dérivée de ln*u*

Propriété

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction ln$u$ est dérivable sur I et on a :
$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Remarque

La fonction ln ou est notée ln u.

Exemples

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = \ln(x^2+1)$.
La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

SPÉCIMEN

Exercice de fixation

16 Calcule la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

1. $f(x) = \ln(5x - 2)$, $I = \left]\frac{2}{5}; +\infty\right[$.
2. $f(x) = \ln(2x - x^2)$, $I =]0\,;2[$.
3. $f(x) = \ln(\sin x)$, $I = \left]0\,; \frac{\pi}{2}\right[$.

17 Calcule la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

1. $f(x) = \ln|x|$, $I =]-\infty\,;0[$;
2. $f(x) = \ln|2x - x^2|$, $I =]2\,;+\infty[$.

2. Primitive de $\frac{u'}{u}$

Propriété

Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I.
La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive sur I la fonction : $\ln o|u|$.

Exemples

Une primitive sur $]0\,;2[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{2x}{x^2-4}$ est la fonction : $x \mapsto \ln|x^2 - 4|$.

Exercice de fixation

18 Dans chacun des cas, détermine les primitives de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

1. $f(x) = \frac{2}{2x-3'}$, $I = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$;
2. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$, $I = \mathbb{R}$.

SPÉCIMEN

19 Dans chacun des cas, détermine les primitives de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

1. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $I=\left]0\,;\dfrac{\pi}{4}\right[$.
2. $f(x)=\dfrac{1+\tan^2 x}{\tan x}$, $I=\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

5 FONCTION LOGARITHME DE BASE a $(a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\})$

Définition

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1.
La fonction logarithme de base a, notée $\log_a$ est la fonction : $x\mapsto\dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Exemples

La fonction logarithme décimale ou logarithme de base 10, notée log est la fonction : $x\mapsto\dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

$\forall x\in\left]0\,;+\infty\right[,(\log)'(x)=\dfrac{1}{x\ln 10}$.

$\log 10=1$ *et* $\log 1=0$.

Propriété

Pour tous nombres réels x et y strictement positifs et pour tout nombre rationnel r, on a :
- $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$.
- $\log_a(x^r)=r\log_a x$.
- $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\log_a x$. • $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.

Exemples

$\log_3(7\times 4)=\log_3 7+\log_3 4$, donc : $\log_3(28)=\log_3 7+\log_3 4$.

Exercice de fixation

20 À l'aide de la calculatrice, détermine une valeur approchée de : $\log_2 321$; $\log_7 321$; $\log_8\dfrac{22}{131}$.

21 Réponds par vrai ou par faux.

Affirmations	Réponses
$\log_2(3)=\log_3(2)$	
$\log'(5)=\dfrac{1}{5\ln 10}$	
$\log_2(5)<\log_3(5)$	

SPÉCIMEN

22 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

	Affirmations	Réponses
a	$\log(10) = 1$	
b	L'ensemble de définition de la fonction log est : $[0 ; +\infty[$.	
c	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x)}{x} = +\infty$	
d	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \log(x) = 0$	
e	La fonction $x \longmapsto \log_2(x)$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.	
f	La fonction $x \longmapsto \log_{10}(x)$ est dérivable et croissante sur $]0 ; +\infty[$.	
g	La fonction $x \longmapsto \log_{\frac{1}{2}}(x)$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.	

23 Écris sous la forme $\log_a(b)$.

a) $\log_2(4) + \log_2 \dfrac{1}{2}$; b) $\log_3(9) - \log_3(27)$;

c) $\log_4(5) + 2\log_4(8)$.

24 Entoure dans chaque cas, la lettre correspondant à la bonne réponse.

1. La fonction : $x \mapsto \log_{\frac{1}{4}}(x)$ est strictement ...

A) décroissante sur $]0, +\infty[$; B) croissante sur $]0, +\infty[$

C) croissante sur $]-\infty, 0[$

2. La solution de l'équation : $\log_2(x) = e$ est ...

A) e^2 ; B) 2e ; C) $2e$; D) 1

3. Pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, la dérivée de la fonction : $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x)$ est la fonction :

A) $x \mapsto \dfrac{-1}{x\ln 2}$; B) $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln 2}$; C) $x \mapsto \dfrac{\ln 2}{x}$

D) $x \mapsto x\ln 2$

4. $(\log)'\left(\dfrac{3}{4}\right)$ = ...

A) $\dfrac{1}{3\ln 10}$; B) $\dfrac{4}{3\ln 10}$; C) $\dfrac{3}{4\ln 10}$

SPÉCIMEN

EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

1 f, g, h et k sont des fonctions numériques définies sur $]0 ; +\infty[$, respectivement par :

$f(x) = (\ln x)^2 - 4\ln x + 3$; $g(x) = \dfrac{3}{x-2}$; $h(x) = x\ln x$; $k(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

Coche la bonne réponse dans chacun des cas suivants :

f s'annule pour	☐ e et e^3	☐ 0 et e^3	☐ 1 et 3
f' s'annule pour	☐ $\dfrac{1}{4}$	☐ e^2	☐ aucun nombre réel
Une primitive de g sur [0 ;1] est	☐ $x \mapsto 3\ln(2-x)$	☐ $x \mapsto 3\ln(x-2)$	☐ $x \mapsto -3\ln(2-x)$
La limite en 0 de k est	☐ 1	☐ 0	☐ $+\infty$
$h'(x) =$	☐ $\ln x$	☐ $-1 + \ln x$	☐ $1 + \ln x$

2 Dans cet exercice aucune justification n'est demandée.

Écris le numéro de l'affirmation suivi de VRAI lorsque l'affirmation est vraie ou de FAUX lorsque l'affirmation est fausse.

soit $f :]0 ; \pi[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

N°	Affirmations	Réponse
1	$f'(x) = \dfrac{-2}{\tan x}$	
2	$f'(x) = \dfrac{-1}{(\sin x)^3}$	
3	$f'(x) = \dfrac{-3}{\sin x}$	
4	f est défini en $\dfrac{\pi}{2}$	
5	f est dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$	

3 On Pose : $\log_2 x = u$.

Exprime en fonction de u : $\log_2 x^2$; $\log_2 \sqrt{x}$; $\log_2 \dfrac{x^2}{64}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4 Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $4\ln 3 = \ln 81 - \ln\dfrac{x}{3}$;

b) $\ln x^2 + (\ln x - 4)(\ln x)^2 = 0$;

c) $(\ln x)^2 - \ln x^3 + 2 = 0$;

d) $\sqrt{5^x} + \sqrt{\dfrac{1}{5^x}} = 2{,}9$;

e) $\log(3 - x) + \log(-x - 6) = 1$;

f) $\log_2 x \,.\, \log_4 x = 8$.

.....

.....

.....

.....

.....

SPECIMEN

5 Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$\ln x - \ln 2 \leq \ln(1-3x)$; $\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2) - \log_{\frac{1}{3}} x < \log_3 x$.

6 Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les systèmes suivants :

$\begin{cases} \ln(xy) = 4 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = -12 \end{cases}$;

$\begin{cases} \log(xy) = 2 \\ x + y = 29 \end{cases}$.

7 À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, justifie que le nombre $\log_2 10$ est un nombre irrationnel.

8 Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, justifie que : $\frac{\ln a + \ln b}{2} \leq \ln \frac{a+b}{2}$.

9 Le niveau sonore exprimé en décibel et l'intensité sonore exprimée en Watt/m² sont liés par la relation : S (en décibels) = $10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ où I désigne l'intensité sonore et $I_0 = 10^{-12}$ watt/m²
(I_0 est le seuil d'audibilité par l'oreille humain)
Application :

1. Une conversation a une intensité de 10^4 I_0. Détermine en décibels son niveau sonore.
2. Détermine l'intensité correspondant un niveau sonore de 100 décibels.
3. Détermine la façon de réduire l'intensité d'un son pour abaisser le niveau sonore de 1 décibel.

SPÉCIMEN

10 On considère la fonction numérique g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \ln(-x) & si \quad x < -1 \\ g(x) = (x+1)^2 & si \quad x \geq -1 \end{cases}$$

1. Détermine l'ensemble de définition de g.
2. Démontre que la fonction g est continue en –1.
3. a) Étudie la dérivabilité de g en –1.
   b) Interprète graphiquement le résultat obtenu.

11 On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique 1 cm.

1. a) On suppose que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Calcule la limite de f en $+\infty$.
   b) Calcule la limite de f en 0.
2. a) Détermine la fonction dérivée f' de f sur $]0 ; +\infty[$.
   b) Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
3. Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse e^{-1}.
4. Trace (T) et (C) dans le même repère (O, I, J).

12 Le plan P est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) (unité graphique : 3 cm).
On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Démontre que f est continue en 0.
2. a) Étudie le sens de variation de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right).$$

Calcule $g(0)$ et déduis que :

$$\forall x \in [0 ; +\infty[, \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

SPÉCIMEN

b) Par une étude analogue, démontre que :

si $x \geq 0$, alors $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}$.

c) Établis que pour tout x strictement positif, on a :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{x}{3}.$$

Déduis-en que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

3. a) Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x).$$

Étudie le sens de variation de h et déduis-en son signe sur $[0 ; +\infty[$.

b) Démontre que pour tout élément x de $[0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}.$$

c) Dresse le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$.

4. On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le repère orthonormal (O, I, J).

a) Construis la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Démontre que (C) admet une asymptote dont on donnera une équation.

c) Trace la courbe (C).

13 Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]4 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J).
(Unité graphique : 1 cm).

1. Étude de f

a) On suppose que f est dérivable sur $]4 ; +\infty[$. Étudie les limites de la fonction f en 4 et en $+\infty$.

b) Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

c) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x + 5$ est une asymptote à (C).

d) Précise la position de (C) par rapport à (D).

2. a) Détermine les coordonnées du point de (C) où la tangente (T) a un coefficient directeur égale à $-\frac{9}{2}$.

b) Détermine une équation de (T).

3. Trace les droites (D), (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

4. Calcul d'aire.

a) Détermine, à l'aide d'une intégration par parties, les primitives sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $k : x \mapsto \ln x$

SPÉCIMEN

b) Démontre que la fonction G :
$x \mapsto (x + 1) \ln (x + 1) - x$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto \ln(x + 1)$ sur I.
c) Démontre que la fonction H :
$x \mapsto (x - 4) \ln (x - 4) - x$ est une primitive de la fonction $h : x - \ln (x - 4)$ sur I.
d) Déduis des questions précédentes, le calcul de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 5$ et $x = 6$.
On donnera la valeur exacte de $\mathcal{A}$ puis une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-2} près.

5. Intersection de (C) et de l'axe des abscisses.
a) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]4 ; +\infty[$ une unique solution, notée x_0.
b) Détermine graphiquement un encadrement de x_0 ; d'amplitude 0,5.
c) À l'aide de la calculatrice, détermine un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2}.
On précisera la méthode employée.

14 Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

Partie I : Étude d'une fonction *g* :

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$g(x) = x \ln x - x + 1$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Étudie les limites de g en 0 et $+\infty$.

On suppose que g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

2. a) Étudie les variations de g.
b) Déduis-en le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Partie II : Étude d'une fonction *f*

Soit f la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \ln x .$$

1. Étudie les limites de f en $+\infty$ et en 1.
Pour l'étude de la limite en 1 ; on pourra utiliser un taux d'accroissement. On suppose que f est dérivable sur $]1 ; +\infty[$.
2. Détermine le tableau de variation de f.
On pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$.
3. Trace la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).

Partie III : Étude de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$

1. Démontre que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution notée α et que $3,5 < \alpha < 3,6$.

2. Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} .$$

SPÉCIMEN

a) Démontre que α est solution de l'équation $h(x) = x$.

b) Étudie le sens de variation de h.

c) On pose I = [3 ; 4].

Démontre que pour tout x élément de I, on a :

$h(x) \in I$ et $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$.

3. On définit pour tout nombre entier naturel n, la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$.

Justifie successivement les trois propriétés suivantes :

a) Pour tout nombre entier naturel n,

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|u_n - \alpha|$.

b) Pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

c) La suite (u_n) converge vers α.

4. Détermine un nombre entier naturel p, tel que des majorations précédentes, on puisse déduire que u_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Indique une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

SPÉCIMEN

15 Lors d'un festival de musique organisé à l'intention des meilleurs élèves d'une classe de terminale, les organisateurs utilisent une sono qui donne 110 décibels au premier rang des invités à 10 m. Estimant le niveau sonore trop élevé, les riverains situés à 500 m du lieu du spectacle ne souhaitent pas recevoir un niveau sonore supérieur à 70 décibels.
Monsieur Konan, organisateur principal du spectacle souhaite vérifier si le niveau sonore perçu par les riverains est conforme à leur vœu. Il se tourne vers toi.
À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de Monsieur Konan.

NB : le niveau sonore exprimé en décibel et l'intensité sonore exprimée en Watt/m^2 sont liés par la relation : S (en décibels) = $10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ où I désigne l'intensité sonore et $I_0 = 10^{-12}$ watt/m^2.

L'intensité sonore est inversement proportionnelle au carré de la distance.

16 Dans le cadre de la lutte contre le réchauffement climatique, un pays décide de réduire de 8% chaque année sa consommation de charbon estimé en 2019 à 10 000 tonnes.
Lors d'une conférence de presse, le Ministre des Eaux et Forêt estime que cette lutte sera considérée comme gagnée si le pays réduit avant l'année 2030, sa consommation de charbon à moins de 2 000 tonnes.
Ayant assisté à cette conférence de presse, ton papa, sceptique, te demande si oui ou non, le pays gagnera la lutte contre le réchauffement climatique.
Donne ton avis en le motivant grâce à tes connaissances mathématiques.

SPÉCIMEN

6 NOMBRES COMPLEXES

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
IDENTIFIER	- la partie réelle ; la partie imaginaire d'un nombre complexe - la forme algébrique d'un nombre complexe - la forme trigonométrique d'un nombre complexe - la forme exponentielle d'un nombre complexe
CONNAÎTRE	- la définition du module ; d'un argument d'un nombre complexe - les propriétés relatives au module et un argument du produit, de l'inverse, du quotient et de la puissance entière d'un nombre complexe - les propriétés relatives à la somme, au produit et au quotient de deux nombres complexes - la définition du conjugué d'un nombre complexe - les propriétés relatives au conjugué d'un nombre complexe - la propriété relative à l'égalité de deux nombres complexes - l'affixe d'un point ; d'un vecteur - le point image ; le vecteur image d'un nombre complexe - la définition d'une racine carrée d'un nombre complexe - la définition d'une racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul - les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité - la formule de Moivre - les formules d'Euler - les caractérisations complexes d'un cercle ; d'une droite ; d'une demi-droite
DÉTERMINER	- la forme algébrique, la forme trigonométrique d'un nombre complexe - la partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe - le conjugué d'un nombre complexe - le module et un argument d'un nombre complexe non nul - des lieux géométriques à l'aide des nombres complexes - les racines carrées d'un nombre complexe - les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul
CALCULER	- la somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes - la puissance d'un nombre complexe
LINÉARISER	- des puissances de $\cos x$ et $\sin x$.
RÉSOUDRE	- une équation du second degré à coefficients complexes ainsi que des équations s'y ramenant - une équation se ramenant au second degré à coefficients complexes
PLACER	- les points images des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe, sur le cercle trigonométrique, connaissant l'une d'elles
UTILISER	- les formules de Moivre et d'Euler pour transformer des produits en somme dans des expressions trigonométriques
TRAITER UNE SITUATION	- faisant appel aux nombres complexes

SPÉCIMEN

Situation d'apprentissage

Après avoir participé à un concours de mathématiques, un élève propose à sa classe une des questions qui lui avait été posée à ce concours : « *Détermine un nombre dont le carré est égal à* -5 ».
Certains élèves estiment qu'un tel nombre n'existe pas, tandis que d'autres pensent le contraire.
Ils exposent cette préoccupation au professeur de mathématiques. Celui-ci profite de cette occasion pour étudier un nouvel ensemble obtenu grâce à une extension de l'ensemble des nombres réels.



SPECIMEN

1 FORME ALGÉBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Propriété et définition

Il existe un nombre noté i, tel que : $i^2 = -1$.

On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $a + ib$, tel que a et b sont des nombres réels.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ sont définies une addition et une multiplication ayant respectivement les mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.



Remarque

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$



$2 + 3i$; $5i$; $-\sqrt{2}\,i$; 7 sont des nombres complexes.



Exercice de fixation

1 Voici une liste de nombres. Entoure ceux qui sont des nombres complexes.

π ; $2i$; $5 - i$; 0 ; $\sqrt{7}$

2. Forme algébrique d'un nombre complexe

a) Forme algébrique d'un nombre complexe

Propriété et définition

a et b sont deux nombres réels.

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ ($a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$).

- *a est appelé la partie réelle de z et est notée Re(z).*
- *b est appelé la partie imaginaire de z et est notée Im(z).*

On appelle forme algébrique du nombre complexe z l'écriture de z sous la forme $a + ib$.

- *$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$, on dit que z est un nombre réel.*
- *l'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.*
- *$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0$, On dit que z est un imaginaire pur.*



Remarque

Zéro est le seul nombre complexe qui est à la fois un nombre réel et un imaginaire pur.



$Z = 7 + 9i$

7 est la partie réelle du nombre complexe Z et 9 la partie imaginaire de ce nombre complexe.



Exercices de fixation

2 Dans chacune des questions ci-dessous, entoure la bonne réponse.

Le nombre complexe $\sqrt{2} - 4i$ a pour partie imaginaire :

a) $-4i$ b) $\sqrt{2} - 4$ c) -4

3 On donne trois nombres complexes z_1 ; z_2 et z_3, tels que $z_1 = i$; $z_2 = 7 - 9i$ et $z_3 = \dfrac{2i - 5}{3}$

Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de chacun d'eux.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4 Détermine le nombre réel x pour que :

1. $2 + (3 - x)i$ soit un nombre réel.
2. $(2x - 1) + 4i$ soit un imaginaire pur.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SPÉCIMEN

b) Égalité de deux nombres complexes

Propriété

a, b, a' et b' sont quatre nombres réels.
z = a + ib et z' = a' + ib deux nombres complexes.
z = z' ⇔ a = a' et b = b'.
z = 0 ⇔ a = 0 et b = 0.



Soit x un nombre réel et soit le nombre complexe $-x + (1-x)i$.
Déterminons x pour que :
$-x + (1-x)i = 2 + 3i$.

$-x + (1-x)i = 2 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 2 \\ 1 - x = 3 \end{cases}$ On trouve dans les deux cas $x = -2$.

Effectivement pour $x = -2$, on a bien $-x + (1-x)i = 2 + 3i$.



Exercice de fixation

5 Soit x un nombre réel et z un nombre complexe, tel que : $z = 2 + (x-1)i$.
Détermine x pour que z soit égal au nombre complexe $2 + i$.

3. Calcul dans ℂ

a) Opposé d'un nombre complexe

Propriété et définition

a et b sont deux nombres réels et z = a + ib, un nombre complexe.
Il existe un et un seul nombre complexe z', tel que : z + z' = 0.
z' est appelé opposé de z et est noté – z.
On a : – z = – a – ib.



L'opposé du nombre complexe $-9 + 3i$ est le nombre complexe $9 - 3i$.



Exercice de fixation

6 Détermine l'opposé de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 tels que :
$z_1 = 17 - 9i$, $z_2 = -\sqrt{2}i$ et $z_3 = -5 - 6i$.

b) Somme de deux nombres complexes

Propriété

a, b, a' et b' sont quatre nombres réels.
(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + (b + b')i.



Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$. Calculons et écrivons sous la forme algébrique :
$z + z'$ et $z - z'$.
$z + z' = 2 + 3i + i - 5 = -3 + 4i$.
$z - z' = 2 + 3i - (i - 5) = 2 + 3i - i + 5 = 7 + 2i$.



Exercice de fixation

7 Dans chacun des cas suivants, calcule la somme des nombres complexes z_1 et z_2.
1. $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 + 2i$
2. $z_1 = -4 + 3i$, $z_2 = 5 - 8i$
3. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -7 - 17i$

On mettra chaque résultat obtenu sous forme algébrique.

SPÉCIMEN

c) Produit de deux nombres complexes

Propriété

a, b, a' et b' sont quatre nombres réels.
$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$



Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$. Calculons et écrivons sous la forme algébrique :
$2z - 3z'$; zz' et z^2.

$2z - 3z' = 2(2 + 3i) - 3(i - 5)$
$= 4 + 6i - 3i + 15$
$= 19 + 3i.$

$zz' = (2 + 3i)(i - 5) = 2i - 10 + 3i^2 - 15i$
$= 2i - 10 - 3 - 15i$
$= -13 - 13i.$

$z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2$
$= 4 + 12i + 9i^2$
$= 4 + 12i - 9$
$= -5 + 12i.$



Exercice de fixation

8 Dans chacun des cas suivants, calcule le produit des nombres complexes z_1 et z_2.

1. $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 + 2i$
2. $z_1 = -4 + 3i$, $z_2 = 5 - 8i$
3. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -7 - 17i$

On mettra chaque résultat obtenu sous forme algébrique.

d) Inverse d'un nombre complexe

Propriété

a et b sont deux nombres réels, tels que $(a ; b) \neq (0 ; 0)$.
$\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}.$



Calculons $(3 + 2i)(3 - 2i)$, puis déduisons la forme algébrique de $\frac{1}{3+2i}$.

$(3 + 2i)(3 - 2i) = (3)^2 - (2i)^2 = 9 - (-4) = 9 + 4 = 13$
$\frac{1}{3+2i} = \frac{(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i.$

SPÉCIMEN

Exercice de fixation

9 Dans chacun des cas suivants, détermine l'inverse du nombre complexe.

1. $1 + i$;
2. $-4 + 3i$;
3. $-8 + 8i$.

On mettra chaque résultat obtenu sous forme algébrique.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

e) Puissance d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe et n un nombre entier naturel non nul.
On a :

• $z^{n+1} = z^n \times z$; • *si z est non nul,* $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.



Remarque

Pour tout nombre complexe non nul z, on pose ; $z^0 = 1$.



Calcule i^{2020} ; $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^6$

Solution

$i^{2020} = i^{4\times505} = (i^2)^{2\times505} = (-1)^{2\times505} = 1$

$$(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^6 = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{2\times3}$$
$$= (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$$
$$= (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$
$$= \frac{-1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{3}{4}$$
$$= -1$$

Exercice de fixation

10 Écris la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$(2 + 3i)^2$; $(2 + 3i)^{-2}$; $(1 + i)^4$; $(1 + i)^{-4}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété

Soit n un nombre entier naturel.

• $i^{4n} = 1$; • $i^{4n+1} = i$; • $i^{4n+2} = -1$; • $i^{4n+3} = -i$



Calculons : i^{1000} ; i^{2021} ; i^{2023} et i^{2028}.

$i^{1000} = i^{4\times250} = 1$; $i^{2021} = i^{4\times505+1} = i$;

$i^{2023} = i^{4\times505+3} = -i$; $i^{2028} = i^{4\times507} = 1$.

Exercice de fixation

11 Calcule : i^{403} ; i^{2030} ; i^{2022} ; i^{2001}.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SPECIMEN

f) Produit nul

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes.
$z \times z' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.



Résolvons dans $\mathbb{C}$, $(2z - 3i)(z - 6 + i) = 0$.
$(2z - 3i)(z - 6 + i) = 0 \Leftrightarrow 2z - 3i = 0$ ou $z - 6 + i = 0$.

Soit : $z = \frac{3}{2}i$ ou $z = 6 - i$.

L'ensemble des solutions est $\{\frac{3}{2}i ; 6 - i\}$.



Exercices de fixation

12

1. Complète : $z \times z' \neq 0 \Leftrightarrow$ .....

.....

2. Soient deux nombres complexes z et z', tels que :
$z' \neq 0$ et $zz' = 0$.
Justifie que z est égale à zéro.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

13 Résous dans $\mathbb{C}$, $(3z - 2 - i)(z + 2i) = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Conjugué d'un nombre complexe

Définition

On appelle conjugué d'un nombre complexe z, le nombre complexe noté $\bar{z}$, tel que :
$Re(\bar{z}) = Re(z)$ et $Im(\bar{z}) = -Im(z)$.

Conséquences

- *a et b étant deux nombres réels, le conjugué de $a + ib$ est le nombre complexe $a - ib$.*
- *Pour tout nombre complexe z, $\bar{\bar{z}} = z$.*



Déterminons le nombre complexe conjugué de chacun des nombres complexes suivants ; $2 - i$: $1 + 2i$; 5 ; -3.

Le conjugué de $2 - i$ est $2 + i$.
Le conjugué de $1 + 2i$ est $1 - 2i$.
Le conjugué de 5 est 5.
Le conjugué de -3 est -3.



Exercices de fixation

14 Détermine le nombre complexe conjugué de chacun des nombres complexes suivants :
0 ; $1 + i$; $1 - i$; 7 ; -19 ;
$3 - 4i$; $-38 + 6i$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

15 Soit z un nombre complexe.
Justifie que $z\bar{z}$ est un nombre réel positif.

.....

.....

SPÉCIMEN

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$;
- Lorsque $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Propriétés

Soit z un nombre complexe.

- $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$.
- $z - \overline{z} = 2i\,Im(z)$.
- $z\overline{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.



Quels que soient z et z' éléments de $\mathbb{C}$: $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

Propriété à partir de laquelle on peut déduire deux autres résultats :

$\overline{(-z)} = -\overline{z}$

« Le conjugué de l'opposé est égal à l'opposé du conjugué. »

$\overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z'}$

« Le conjugué de la différence est égal à la différence des conjugués. »

Le conjugué de la somme est égal à la somme des conjugués.



On donne le nombre complexe z, tel que : $z = 4 + 3i$.

Calculons $z + \overline{z}$; $z - \overline{z}$ et $z\overline{z}$

$z + \overline{z} = 2 \times 4 = 8$.

$z - \overline{z} = 2i \times 3 = 6i$.

$z\overline{z} = 4^2 + 3^2 = 25$.



Exercice de fixation

16 Calcule dans chacun des cas suivants :

$z + \overline{z}$; $z - \overline{z}$; $z\overline{z}$

1) $z = 3 + 2i$; 2) $7 + i$.



Déterminons les conjugués de :

$(2 + 5i) + (1 - 3i)$;

$(2 + 5i)(1 - 3i)$ et $\frac{2+5i}{1-3i}$.

$$\overline{(2+5i)+(1-3i)} = \overline{(2+5i)} + \overline{(1-3i)}$$
$$= 2 - 5i + 1 + 3i$$
$$= 3 - 2i$$

$$\overline{(2+5i)(1-3i)} = \overline{(2+5i)}\ \overline{(1-3i)}$$
$$= (2-5i)(1+3i)$$
$$= 2 + 6i - 5i + 15$$
$$= 17 + i$$

$$\overline{\left(\frac{2+5i}{1-3i}\right)} = \frac{\overline{2+5i}}{\overline{1-3i}} = \frac{2-5i}{1+3i} = \frac{(2-5i)(1-3i)}{10}$$
$$= -\frac{13}{10} - \frac{11}{10}i.$$

SPÉCIMEN

Exercice de fixation

17 Soient z et z' des nombres complexes, tels que : $z = 2 + 3i$ et $z' = -1 + 5i$.

Détermine la forme algébrique de :

$\overline{z+z'}$; $\overline{zz'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

5. Module d'un nombre complexe

Définition

On appelle module du nombre complexe z, noté $|z|$, le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}}$.

Remarque

soit $z = a + ib$**, on a :** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exemples Déterminons le module de chacun des nombres complexes suivants :

$1+i$; $1-\sqrt{3}i$; $\sqrt{5}+3i$; $2i$.

$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

$|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

$|\sqrt{5}+3i| = \sqrt{(\sqrt{5})^2+3^2} = \sqrt{5+9} = \sqrt{14}$.

$|2i| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$.

Exercices de fixation

18 Détermine le module de chacun des nombres complexes suivants :

$3 + 4i$; $6 - 8i$ et $\sqrt{2} + \sqrt{7}i$.

19 Soient z et z' deux nombres complexes.

Un élève écrit : $|z| = |z'| \Leftrightarrow z = z'$ ou $z = -z'$.

Donne ton avis argumenté.

SPÉCIMEN

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $|\overline{z}| = |z|$;
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- $|Re(z)| \leq |z|$;
- $|Im(z)| \leq |z|$;
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$;
- $|zz'| = |z| \times |z'|$;
- *Lorsque* $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$;
- *Lorsque* $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.



Remarque

Pour tout nombre complexe z non nul, on a : $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.



Calculons le module de chacun des nombres complexes suivants :

1) $(7 + 35i)(3 + 2i)$; 2) $\frac{7-35i}{3-2i}$;

3) $\frac{(5+3i)(1+i)}{4+i}$

1) $\left|(7 + 35i)(3 + 2i)\right| = |7+35i| \; |3+2i|$

$= 7|1+5i| \; |3+2i|$

$= 7\sqrt{1^2+5^2} \times \sqrt{13}$

$= 7\sqrt{26 \times 13}$

$= 7\sqrt{2 \times 13^2}$

$= 91\sqrt{2}.$

2) $\left|\frac{7-35i}{3-2i}\right| = \frac{|7-35i|}{|3-2i|} = \frac{7|1-5i|}{|3-2i|} = \frac{7\sqrt{1^2+5^2}}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{7\sqrt{26}}{\sqrt{13}} = 7\sqrt{2}.$

3) $\left|\frac{(5+3i)(1+i)}{4+i}\right| = \frac{|(5+3i)(1+i)|}{|4+i|}$

$= \frac{\sqrt{5^2+3^2} \times \sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{4^2+1^2}}$

$= \frac{\sqrt{34} \times \sqrt{2}}{\sqrt{17}}$

$= 2.$



Exercices de fixation

20 Justifie que $1 + i$ et $1 - i$ ont le même module.

21 Soient z et z' deux nombres complexes, tels que : $|z| = 2$ et $|z'| = 3$.

Calcule : $|\overline{z}|$; $|-\overline{z}|$; $|zz'|$; $\left|\frac{1}{z}\right|$; $\left|\frac{z}{z'}\right|$.

SPÉCIMEN

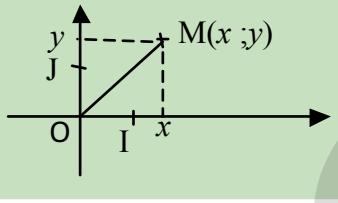
6) Affixe, point-image et vecteur image

Propriété et définition

Le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé plan complexe.

- *À tout point M de coordonnées (x ; y) du plan complexe, on associe le nombre complexe unique, noté z, qui s'écrit $z = x + iy$.*
- *Réciproquement, à tout nombre complexe $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels, on associe dans le plan complexe le point M.*
- *z est appelé affixe de M.*
- *M est appelé le point image de z.*
- *Au vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (x ; y), on associe le nombre complexe $x + iy$.*

On dit que $x + iy$ est l'affixe de $\vec{w}$ et que $\vec{w}$ est le vecteur image de $x + iy$.



Exemples

1. Soit A le point image du nombre complexe $3i$. Déterminons les coordonnées de A.
2. Déterminons l'affixe du vecteur $\vec{u}$ (−3 ; 8).

1. Le point A a pour coordonnées (0 ; 3).
2. L'affixe du vecteur $\vec{u}$ (−3 ; 8) est le nombre complexe $-3 + 8i$.

Exercices de fixation

22 Soient les points A(−7 ; 5) et B(0 ; 3). Soit le vecteur $\vec{u}$, tel que : $\vec{u}$ (−3 ; 9).

1. Détermine l'affixe du point A.
2. Détermine l'affixe du point B.
3. Détermine l'affixe du vecteur $\vec{u}$.

23

1. Détermine les coordonnées du point image du nombre complexe $1 + i$.
2. Détermine les coordonnées du point image du nombre complexe $-3i$.
3. Détermine les coordonnées du vecteur image du nombre complexe 7.
4. Détermine les coordonnées du vecteur image du nombre complexe $1 + i$.

Définition

Soient z et z' les affixes respectives des points M et M' dans le plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- *L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$.*
- *Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est le vecteur image de $z' - z$.*

Exemples

Soient $5i$ et $2 - 3i$ les affixes respectives des points A et B dans le plan complexe mini d'un repère orthonormé directe $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminons l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

L'affixe du vecteur, $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $(2 - 3i) - (5i)$, soit $2 - 8i$.

SPECIMEN

Exercices de fixation

24 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. A, B et C sont les points de coordonnées respectives (1 ; 1) ; (− 2 ; 3) et (4 ; 3). Détermine l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

25 Le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé plan complexe. A et B sont des points, tels que : A(−4 ; 3).
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur-image du nombre complexe $1 + i$.
Détermine les coordonnées de B.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. Le point I est le milieu de [MM']. On a

- $MM' = |z' - z|$;
- *l'affixe de I est* $\frac{z + z'}{2}$;
- *l'affixe du vecteur* $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ *est* $z + z'$.

Exemples

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives $2 + 5i$ et $-4 + 3i$.

1. Calculons AB
2. Déterminons l'affixe du milieu K du segment [AB].

1. $AB = |(-4 + 3i) - (2 + 5i)|$
   $= |-6 - 2i|$
   $= \sqrt{6^2 + 2^2}$
   $= 2\sqrt{10}$
2. L'affixe du point K est le nombre complexe $\frac{(2 + 5i) + (-4 + 3i)}{2}$, soit : $-1 + 4i$.

Exercices de fixation

26 Réponds par vrai ou par faux.

1. Deux nombres complexes qui ont le même point image sont égaux. ☐
2. Deux vecteurs qui ont le même affixe sont égaux. ☐
3. Deux vecteurs opposés ont le même affixe. ☐

27 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points P(1 ; −1), Q(4 ; 5) et les vecteurs $\vec{w}(1 ; -2)$ et $\vec{y}(3 ; 4)$.
1. Détermine l'affixe du milieu I de [PQ].
2. Détermine l'affixe du vecteur $\vec{w} + \vec{y}$.
3. Détermine PQ.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SPÉCIMEN

28 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{y}$ d'affixes respectives $2 + 3i$ et $4 - 5i$.

1. Détermine l'affixe du vecteur $3\vec{w}$.
2. Détermine l'affixe du vecteur $2\vec{w} - 3\vec{y}$.

2 FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Argument d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe non nul, M le point image de z dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

- *On appelle Argument principal du nombre complexe z, noté ARG(z), la mesure principale de l'angle* $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
- *On appelle un argument de z, noté arg(z), toute autre mesure de l'angle* $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

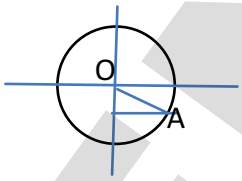
Exemples

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminons l'argument principal du nombre complexe $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

La méthode à utiliser ici est le cercle trigonométrique.

Soit A le point image du nombre complexe $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.



Ici, la mesure de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OA})$ est : $-\frac{\pi}{6}$.

Exercice de fixation

29 En utilisant le cercle trigonométrique, détermine l'argument principal de chacun des nombres complexes suivants :

$1 ; i ; -i ; -1 ; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ *et* $ARG(z') = ARG(z)$.
- $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ *et* $\arg(z') = \arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples

z est le nombre complexe de module 2 et d'argument $-\frac{\pi}{3}$.

z' est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{5\pi}{3}$.

Justifions que : z = z'.

SPECIMEN

On a : $|z| = |z'|$ et $\frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$,

soit $\arg(z') = \arg(z) + 2\pi$, donc $z = z'$.

Exercice de fixation

30 Réponds par vrai ou par faux.

a) Tout nombre complexe non nul est parfaitement déterminé par la donnée de son module et de son argument principal. ☐

b) Si des arguments de deux nombres complexes non nuls sont égaux alors ces deux nombres complexes sont égaux. ☐

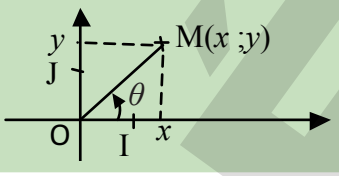
2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

a) Propriété et définition

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul, M son point image et θ un argument de z. On a :

- $|z| = OM$
- $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ *et* $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$.



Exemples

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Déterminons l'argument principal du nombre complexe $\sqrt{3} + i$.

$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$.

Soit θ l'argument principal du nombre complexe $\sqrt{3} + i$.

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$, donc : $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Exercice de fixation

31 Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants : $1 + i\sqrt{3}$;

$\sqrt{3} - 3i$; $-\sqrt{2} - i\sqrt{6}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Définition

*Soit z un nombre complexe **non nul** et θ un argument de z.*
On appelle forme trigonométrique de z, l'écriture de z sous la forme $|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Exemples

Écrivons le nombre complexe $1 + i$ sous forme trigonométrique.

$|1 + i| = \sqrt{2}$; soit θ l'argument principal de $1 + i$.

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc : $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Donc : $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice de fixation

32 Dans chacun des cas suivants, détermine le nombre complexe z sous forme trigonométrique.

1) $z = 1 - i$; 2) $z = \sqrt{3} - 3i$; 3) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SPECIMEN

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, pour tout nombre entier relatif n,

- $arg(zz') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- $arg(\frac{1}{z}) = -arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z') + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- $arg(z^n) = n\,arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.



Soient z et z' deux nombres complexes, tels que :

$ARG(z) = -\frac{\pi}{2}$ et $ARG(z') = \frac{\pi}{3}$.

Déterminons un argument de chacun des nombres complexes suivants : zz' ; $\frac{1}{z}$; $\frac{z'}{z}$.

- $arg(zz') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
$= \frac{-3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} + 2k\pi$
$= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$
- $arg(\frac{1}{z}) = -arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$= -(-\frac{\pi}{2}) + 2k\pi$
$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- $arg(\frac{z'}{z}) = arg(z) - arg(z') + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
$= \frac{-3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} + 2k\pi$
$= \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi$



Exercice de fixation

33 Soient z et z' deux nombres complexes, tels que : $ARG(z) = \frac{\pi}{4}$ et $ARG(z') = -\frac{\pi}{3}$.

Détermine un argument de chacun des nombres complexes suivants :

zz' ; $\frac{1}{z}$; $\frac{z'}{z}$; $\frac{z}{z'}$; z^2 ; $\frac{z^2}{z'}$.

b) Forme algébrique-forme trigonométrique

(Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique.)

Point méthode 1

Soit z un nombre complexe non nul donné sous forme algébrique a + ib où a et b sont des nombres réels.

Pour déterminer la forme trigonométrique de z, on peut :

- *Calculer le module de z ; $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$;*
- *Calculer cos θ et sin θ ; $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.*
- *Déterminer θ (il faut pour cela connaître les angles remarquables et le cercle trigonométrique) ;*
- *Écrire la forme trigonométrique de z ; $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.*



SPECIMEN



Déterminons la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$\sqrt{3}+i$; $1+i$; $(\sqrt{3}+i)(1+i)$; $\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}$.

$|\sqrt{3}+i| = 2$ et $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$.

$\sqrt{3}+i = 2(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6})$

$|1+i| = \sqrt{2}$ et $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$1+i = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$.

$|(\sqrt{3}+i)(1+i)| = 2\sqrt{2}$ et

$\arg(\sqrt{3}+i)(1+i) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$.

$(\sqrt{3}+i)(1+i) = 2\sqrt{2}(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12})$.

$|\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}| = \sqrt{2}$;

$\arg(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$.

$\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i} = \sqrt{2}(\cos(-\dfrac{\pi}{12}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{12}))$.

Exercice de fixation

34 Écris chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$(2+2i)(1-i)$; $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2i}$; $\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}$; $(1-i)^4$.

(Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique)

Point méthode 2

Soit z un nombre complexe donné sous forme trigonométrique r(cosθ + isinθ) où θ est un argument de z et r le module de z.
Pour déterminer la forme algébrique de z. On peut :

- *Déterminer cos θ et sin θ ;*
- *Déterminer la partie réelle Re(z) et la partie imaginaire Im(z) de z,*
  Re(z) = r cos θ et Im(z) = r sin θ ;
- *Écrire la forme algébrique de z ;*
  z = Re(z) + i Im(z).



SPECIMEN

Exemples

Écrivons chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$; $4\,(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$;

$\sqrt{2}\,(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$.

$\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}\,(0 + i) = i\sqrt{2}$.

$4(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) = 4(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i) = 2 - 2\sqrt{3}\,i$.

$\sqrt{2}\,(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2})$

$= -1 - i$.

Exercice de fixation

35 Écris chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique.

$\sqrt{2}\,(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\sin\frac{2\pi}{3})$; $2(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4})$;

$3(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6})$.

3) Forme exponentielle

Définition

Pour tout nombre réel θ, on pose :
$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$
On appelle forme exponentielle du nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ, l'écriture de z sous la forme $re^{i\theta}$.

Exemples

Écrivons les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :
$\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$; $1 - \sqrt{3}\,i$.

$\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$:

$|1 - \sqrt{3}\,i| = 2$ et $\text{Arg}(1 - \sqrt{3}\,i) = -\frac{\pi}{3}$,

donc : $1 - \sqrt{3}\,i = 2e^{\frac{-\pi}{3}i}$.

Exercices de fixation

36 Dis pourquoi le nombre complexe zéro n'est pas concerné par la définition précédente.

37 Soit θ un nombre réel. Parmi les nombres complexes suivants, entoure ceux qui sont écrits sous forme exponentielle.

1) $2e^{i\theta}$; 2) $-3e^{i\theta}$; 3) $7e^{-i\theta}$; 4) $-4e^{-i\theta\frac{\pi}{4}}$.

SPÉCIMEN

38 Écris sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

a) $2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$; b) $1+i$; c) $3+i\sqrt{3}$.

Propriété

Soient θ et θ' deux nombres réels. On a :

- $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$; $e^{-i\theta} = cos\theta - isin\theta$;
- $|e^{-i\theta}| = |e^{i\theta}| = 1$;
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Exemples

Écrivons les nombres complexes ci-dessous sous la forme $e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel.

$e^{-\frac{\pi}{3}i} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{5}}}$; $\frac{e^{i\frac{\pi}{5}}}{e^{i\frac{2\pi}{5}} \times e^{-i\frac{4\pi}{5}}}$.

$e^{-\frac{\pi}{3}i} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{3}i+i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{12}}$;

$\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{5}}} = e^{i\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{5}} = e^{i\frac{3\pi}{10}}$;

$\frac{e^{i\frac{\pi}{5}}}{e^{i\frac{2\pi}{5}} \times e^{-i\frac{4\pi}{5}}} = e^{i\frac{\pi}{5}-(i\frac{2\pi}{5}-i\frac{4\pi}{5})} = e^{i\frac{3\pi}{5}}$.

Exercice de fixation

39 Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants.

1) $\frac{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$; 2) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$;

3) $\frac{\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}}$; 4) $-2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$.

SPÉCIMEN

4) Formule de Moivre

Propriété

θ est un nombre réel et n un nombre entier relatif.
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Exemples On donne :
$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Écrivons sous forme exponentielle $(1 + i)^3$.

$$(1+i)^3 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^3$$
$$= (\sqrt{2})^3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Exercice de fixation

40 Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

1) $(1+i\sqrt{3})^2$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^3$; 3) $\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1-i}\right)^3$.

Exemples Écrivons $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

$(\cos x + i\sin x)^4 = (\cos(4x) + i\sin(4x))$
$= \cos^4 x + 4i\cos^3 x\sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x - 4i\cos x\sin^3 x + \sin^4 x$.
$= \cos^4 x + \sin^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + (4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x)i$.
Par identification, on a :
$\cos(4x) = \cos^4 x + \sin^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x$ et
$\sin(4x) = 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x$

Exercice de fixation

41 Exprime les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

a) $\cos 3x$; b) $\cos 2x + \cos 3x$.

SPECIMEN

5) Formules d'Euler

Propriété

θ est un nombre réel et n un nombre entier relatif.

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$;
- $\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$; $\sin n\theta = \dfrac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$.



Écrivons sous forme algébrique : $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}$.

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Exercices de fixation

42 Écris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1) $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}$; 2) $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2i}$; 3) $e^{i\frac{3\pi}{4}}+e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

43 Soit θ un nombre réel appartenant à]0 ; π[.

Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres suivants :

1) $e^{i\theta}+1$; 2) $e^{i\theta}-1$; $e^{-i\theta}+1$.

Linéarisation

La linéarisation est importante pour calculer des primitives de fonctions circulaires, telles que $x \mapsto \cos^3 x$; $x \mapsto \sin^5 x$. On ramène par exemple $x \mapsto \cos^3 x$ en une somme de fonctions dont on connaît la primitive comme $x \mapsto \cos(nx) + \cos(mx)$ où n et m sont des nombres entiers relatifs.

Méthode

Pour linéariser $\cos^n x$, on peut procéder comme suit :

- *utiliser la formule d'Euler : $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$;*
- *élever à la puissance n chaque membre, $\cos^n x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$;*
- *développer $\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ (on peut utiliser le triangle de Pascal);*
- *regrouper les termes pour retrouver la formule d'Euler $e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos(nx)$*
- *achever le calcul.*



SPÉCIMEN

Remarque



• On utilise la même méthode pour $\sin^n x$ avec $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

• Pour linéariser $\cos^2 x \sin^3 x$, il suffit de développer $\left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$ et utiliser la même méthode.



On se propose de linéariser $\sin^3 x$ et $\cos^3 x \sin^2 x$.

- $\sin^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$$= \frac{e^{3ix} - 3e^{2ix} \times e^{-ix} + 3e^{ix} \times e^{-2ix} - e^{-3ix}}{-8i}$$

$$= \frac{e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})}{-8i}$$

$$= \frac{-2\sin(3x) + 6\sin x}{8}$$

Donc : $\sin^3 x = \dfrac{-\sin(3x) + 3\sin x}{4}$

- $\cos^3 x \sin^2 x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2$

$$= -\frac{(e^{2ix} - e^{-2ix})^2 (e^{ix} + e^{-ix})}{32}$$

$$= -\frac{(e^{4ix} - 2 + e^{-4ix})^2 (e^{ix} + e^{-ix})}{32}$$

$$= -\frac{(e^{5ix} + e^{3ix} - 2(e^{ix} + e^{-ix}) + e^{-3ix} + e^{-5ix})}{32}$$

$$= -\frac{(e^{5ix} + e^{-5ix} + e^{3ix} + e^{-3ix} - 2(e^{ix} + e^{-ix}))}{32}$$

$$= -\frac{2\cos(5x) + 2\cos(3x) - 4\cos x}{32}$$

Donc : $\cos^3 x \sin^2 x = -\dfrac{\cos(5x) + \cos(3x) - 2\cos x}{16}$.



Exercice de fixation

44 Soit x un nombre réel.

Linéarise les expressions suivantes :

1) $\cos^3 x$; 2) $\sin^2 x \cos^2 x$; 3) $\cos^4 x$; 4) $\sin^5 x$.

3 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

1) Racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe

Définition

Soit n un nombre entier naturel non nul et Z un nombre complexe.

- *On appelle racine carrée d'un nombre complexe Z, tout nombre complexe z, tel que $z^2 = Z$.*
- *On appelle racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe Z, tout nombre complexe z, tel que : $z^n = Z$.*

SPECIMEN

Point méthode

Pour déterminer une racine carrée d'un nombre complexe Z, on peut :

- *poser* $\delta^2 = Z$ *avec* $\delta = x + yi$, $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$;
- *calculer* $|Z| = |\delta^2|$ *soit* $|Z| = x^2 + y^2$;
- *calculer* $\delta^2 = Z$, *soit* $x^2 - y^2 + 2xyi = Z$;
- *résoudre le système* $\begin{cases} x^2 + y^2 = |Z| \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(Z) \\ 2xy = \mathrm{Im}(Z) \end{cases}$





Déterminons les racines carrées de $-3 + 4i$.
Posons $\delta^2 = \Delta$ avec $\delta = x + yi$, $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$.
On a : $x^2 - y^2 + 2xyi = -3 + 4i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

On trouve : $x^2 = 1$ soit $x = 1$ ou $x = -1$.
Si $x = 1$, $y = 2$ et si $x = -1$; $y = -2$.
On en déduis que $\delta = 1 + 2i$ ou $\delta = -1 - 2i$.
Les racines carrées de $-3 + 4i$ sont : $1 + 2i$ et $-1 - 2i$.

Exercices de fixation

45 Détermine les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

1) i ; 2) $1 + i$; 3) $\sqrt{3} + i$.

46 Détermine les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants :

1) 1 ; 2) i ; 3) $1 + i$.

Propriété

Soit n un nombre complexe non nul, $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ la forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul.

- *0 est la seul racine* $n^{ième}$ *de 0.*
- *z admet n racines* $n^{ième}$ *qui sont de la forme :*

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

$[k \in \{0 ; 1, 2, \ldots, (n-1)\}]$.

- *Dans le plan complexe, les points-images des n racines* $n^{ième}$ *sont sur le cercle (C) de centre O et de rayon* $\sqrt[n]{r}$.

  - *Lorsque n = 2, les points-images des deux racines carrées sont diamétralement opposés sur (C).*

  - *Lorsque n > 2, les points-images des n racines* $n^{ième}$ *sont les sommets d'un polygone régulier de n côté inscrit dans le cercle (C).*



1. a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^5 = 1$
   b) Démontrons que la somme des racines cinquième de l'unité est égale à zéro.

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^5 = -i$.
3. Calculons la somme des racines et interprétons géométriquement ce résultat en introduisant l'isobarycentre de leurs images.

SPECIMEN

4. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$.

1. a) Les racines cinquième de l'unité sont 1 ;
$e^{i\frac{2\pi}{5}}; e^{i\frac{4\pi}{5}}; e^{i\frac{-4\pi}{5}}; e^{i\frac{-2\pi}{5}}$.

b) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \dfrac{z^5 - 1}{z - 1}$ avec $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et donc $z \neq 1$ et $z^5 = 1$.

donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

2. $z^5 = -i$. Les solutions sont :
$e^{-\frac{\pi}{10}i}$; $e^{\frac{3\pi}{10}i}$; $e^{\frac{i7\pi}{10}}$; $e^{-\frac{i9\pi}{10}}$; $e^{-\frac{i5\pi}{10}}$.

3. $e^{-\frac{\pi}{10}i}(1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{-4\pi}{5}} + e^{i\frac{-2\pi}{5}}) = 0$.
C'est que l'isobarycentre des points images des solutions est le point O(0 ;0) origine du repère orthonormé orienté.

4. $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 1 + (iz) + (iz)^2 + (iz)^3 + (iz)^4$
$= \dfrac{(iz)^5 - 1}{iz - 1} = 0 \Leftrightarrow (iz)^5 - 1 = 0$ et $z \neq i$.
C'est-à-dire $z^5 = -i$.
Les solutions sont donc :
$e^{-\frac{\pi}{10}i}$; $e^{\frac{3\pi}{10}i}$; $e^{\frac{i7\pi}{10}}$; $e^{-\frac{i9\pi}{10}}$ et $e^{-\frac{i5\pi}{10}}$.

Exercices de fixation

47 Détermine les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants, puis place les points-images dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1) 1 ; 2) $1 - i$; 3) -2.

48 Détermine les racines quatrième de 1 puis place les points-images dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

49 Justifie que pour $n \geq 2$, la somme des n racines n-ième d'un nombre complexe non nul est égal à 0.

Propriété

On pose : $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- *Les trois racines cubiques de l'unité sont 1, j et $\bar{j}$.*
- $1 + j + \bar{j} = 0$ *et* $j^2 = \bar{j}$.

Exemples

Vérifions que $1 + j + \bar{j} = 0$.
$1 + j + j^2 = \dfrac{1 - j^3}{1 - j} = 0$, car $j^3 = 1$.

Exercice de fixation

50

1. Vérifie que :
a) $\bar{j} = -1 - j$; b) $j \times \bar{j} = 1$; c) $j^6 = 1$.
2. Calcule j^{2021}.

SPECIMEN

Équation du second degré dans $\mathbb{C}$



Point méthode

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des nombres réels et a est différent de zéro, on peut :

- *calculer le discriminant Δ ;*
- *déterminer les racines carrées δ et $-\delta$ de Δ ;*
- *déterminer les solutions $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.*



Résolvons dans $\mathbb{C}$:
$z^2 + (3i-4)z + 1 - 7i = 0$.
$\Delta = 3 + 4i$.
En utilisant la méthode permettant de déterminer la racine carré d'un nombre complexe, on trouve : $\delta = 2 + i$

$$z_1 = \frac{-(3i-4)-(2+i)}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-(3i-4)+(2+i)}{2}$$

$z_1 = -2i + 1$ et $z_2 = 3 - i$.
$S = \{1 - 2i\ ;\ 3 - i\}$.



Exercice de fixation

51 Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations du second degré suivante :

1) $z^2 + z + 1 = 0$: 2) $z^2 + (3i-4)z + 1 - 7i = 0$; 3) $iz^2 - i\sqrt{3}\,z + 1 = 0$.

4 NOMBRE COMPLEXE ET CONFIGURATION DU PLAN

Propriétés

A, B, C et D sont quatre points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

- $mes(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \arg\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} + 2k\pi\ [k \in \mathbb{Z}]$.
- $AB = CD \Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_D - z_C|$.
- *A, B, et C sont alignés* $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.
- $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.
- *M appartient à la médiatrice du segment* [AB] $\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B|$.
- *M appartient au cercle de centre A et de rayon r* $(r > 0) \Leftrightarrow |z_M - z_A| = r$.

SPÉCIMEN

Exercices de fixation

52 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Détermine l'ensemble des points M d'affixe z, tels que :

1) $|z - i| = 2$; 2) $|z - 1 + 2i| = |z + 2 - i|$.

53 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, $1 + 2i$ et $1 + \sqrt{3} + i$.

En utilisant les nombres complexes, démontre que le triangle ABC est équilatéral de sens indirect.

SPÉCIMEN

1 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Place dans le plan complexe les points E, F, G et H d'affixes respectives $-3 + i$; $2i$; $-\frac{5}{2}$ et $\frac{3}{2} - 3i$.
2. Détermine les affixes des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{HE}$ et $2\overrightarrow{FE}$.
3. Détermine l'affixe du milieu I de [EF].

2 On donne : $a = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ et $b = 3(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$.

1. Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants : ab ; ab^2 ; a^2b; $\frac{b}{a^2}$
2. Déduis-en la forme algébrique de ab et $\frac{a}{b}$.

3 Soit $u = 1 + i$ et $v = \sqrt{3} - i$.

1. Calcule le module et un argument de chacun des nombres complexes u et v.
2. a) Donne la forme algébrique et la forme trigonométrique du produit uv.
   b) Déduis la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4 Exprime les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

a) $\cos 4x$; b) $\cos 5x + \cos 6x$;

c) $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x$.

5

1. Linéarise : $\cos^4 x$; $\cos^2 x \sin^3 x$; $\cos^5 x - \sin^4 x$.
2. Détermine les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants:

$2i$; $3 + 4i$; $8 + 6i$; $5 - 12i$; $-7 + 24i$.

SPECIMEN

6 Soit θ un nombre réel appartenant à [0; π [.

1. Résous dans ℂ l'équation $z^2 - (2^{\theta+1} \cos \theta)z + 2^{2\theta} = 0$. Donne chaque solution sous forme trigonométrique.
2. Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B dont les affixes sont solutions de l'équation précédente.

Détermine θ afin que OAB soit un triangle équilatéral.

7

1. Résous dans ℂ l'équation (E) : $z^3 - z^2 - (1 + i)z - 2 + 2i = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.
2. Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$,on considère les points A , B et C dont les affixes sont solutions de l'équation (E).
   a) Place les points A, B et C.
   b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

8

1. Vérifie que pour tout nombre complexe z, $z^4 - 3z^2 - 4 = (z^2 + 1)(z^2 - 4)$.
2. Résous dans ℂ l'équation (E): $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$.
3. Place les images A, B , C et D des solutions de l'équation (E) dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
4. Démontre que les points A, B, C et D sont les sommets d'un losange.

9 Résous dans ℂ l'équation (E) : $z^3 + (1-5i)z^2 - 2(5 + i)z + 8i = 0$ sachant que (E) admet une solution imaginaire pure.

SPECIMEN

10

1. Détermine les racines cubiques de 1.
2. Calcule $(2 - i)^3$.
3. Déduis les racines cubiques de $2 - 11i$.

11 Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on pose :
$a = \frac{9}{2}(\sqrt{3} - 3i)$.

1. Écris a sous forme trigonométrique.
2. a) Détermine sous forme trigonométrique, les racines cinquièmes de a.
   b) Représente graphiquement les racines cinquièmes de a.

12 A tout nombre complexe z, on associe son image M dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct. Pour tout nombre complexe z différent de i,on pose : $Z = \frac{2z - 4}{z - i}$.

1. Détermine et construis l'ensemble des points M, tels que Z soit un nombre réel.
2. Détermine et construis l'ensemble des points M, tels que Z soit un imaginaire pur.

13 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f l'application de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
$f(z) = \frac{iz}{z + i}$.

1. Détermine l'affixe b du point B, tel que $f(b) = 1 + 2i$.
2. Soit z un élément de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$. On note r le module de $z + i$ et a une mesure de son argument principal. Exprime $f(z) - i$ sous forme trigonométrique.
3. Soit A le point d'affixe $-i$.
   a) Détermine l'ensemble (C) des points M du plan d'affixe z, tels que : $|f(z) - i| = \sqrt{2}$.
   b) Détermine l'ensemble (F) des points M du plan d'affixe z tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure d'un argument de $f(z) - i$.
   c) Démontre que B appartient à (C) et (Γ) .
   d) Construis (C) et (Γ).

SPECIMEN

14 Soit z un nombre complexe, tel que :
$|1 + iz| = |1 - iz|$.
Démontre que z est un nombre réel.

15 Écris sous forme algébrique, chacun des nombres complexes suivants :

1) $2e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{3\pi}{4}}$; 2) $\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{3e^{-\frac{i3\pi}{4}}}$; 3) $\dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-\frac{i5\pi}{6}}}$.

16 Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.
Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

1) $\dfrac{\tan\theta - i}{\tan\theta + i}$; 2) $\dfrac{1}{1 + i\tan\theta}$; 3) $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$;

4) $\dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$.

17 Détermine les racines quatrièmes de 81 puis place les points images de ces racines dans le plant complexe.

SPÉCIMEN

18 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Calcul les racines $n^{ième}$ de $-i$ et de $1 + i$.
2. On considère l'équation (E) :

$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0$

a) Calcule $(9 + i)^2$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

19 Trouve tous les entiers naturels n, tels que $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit un nombre réel positif.

20 Soit z un nombre complexe différent de 1.

Démontre que :

$|z|$ est égal à 1 si et seulement si $\frac{1+z}{1-z}$ est un imaginaire pur.

21

1. a) Justifie que pour tout nombre complexe z, on a : $Re(z) \leq |z|$.

   b) Montre dans quel cas a-t-on l'égalité $Re(z) = |z|$.
2. a) Démontre que pour tout couple de nombres complexes $(z_1 ; z_2)$, on a : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

   b) On suppose de plus que z_1 et z_2 sont des nombres complexes non nuls. Justifie que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si il existe un nombre réel positif λ, tel que $z_2 = \lambda z_1$.
3. a) Démontre par récurrence que pour tout n–uplet $(n \geq 2)$, $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ de nombres complexes, on a : $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$

   b) Démontre que si $z_1, \ldots, z_n$ sont tous non nuls, alors l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si il existe des nombres réels strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tels que pour tout $k = 1, \ldots, n$, on a : $z_k = \lambda_k z_1$.

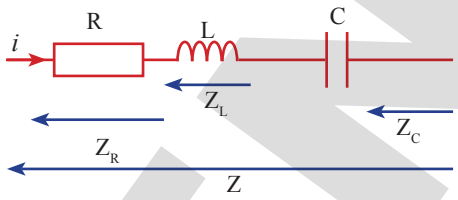
SPÉCIMEN

22 En électricité, on peut caractériser le comportement d'un dipôle passif linéaire en régime sinusoïdal avec un nombre complexe que l'on appelle « impédance complexe »;

Ainsi :

- l'impédance complexe d'une résistance est : $z_R = R$ (R est la résistance en ohms);
- L'impédance complexe d'une bobine est $z_L = jL\omega$ où L est l'inductance en henry et ω la pulsation du courant en rad/s;
- L'impédance complexe d'un condensateur est : $Zc = \frac{1}{jC\omega}$ où C est la capacité en farad et ω la pulsation du courant en rad/s.

On associe une résistance, une bobine et un condensateur en série.



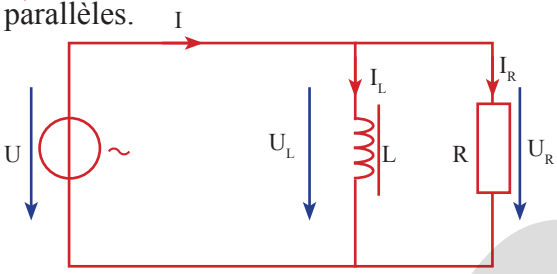
L'impédance complexe de l'association est :

$Z = Z_R + Z_L + Z_C$.

1. Détermine l'expression de la partie réelle de l'impédance complexe Z.
2. La résistance X correspond à la partie imaginaire de Z. Détermine X.
3. L'impédance de l'association (en ohm) correspond au module de l'impédance complexe.
Détermine l'impédance de l'association.
4. Le déphase entre tension et courant est donné par l'argument de l'impédance complexe.
Détermine le déphase entre tension et courant.

SPÉCIMEN

23 On associe une résistance et une bobine en parallèles.



L'impédance complexe de l'association est :

$Z = \frac{Z_R \times Z_L}{Z_R + Z_L}$ *où :* Z_R est la résistance de R et Z_L celle de L

1. L'impédance de l'association (en ohm) correspond au module de l'impédance complexe.
Détermine l'impédance de l'association.

2. Le déphase entre tension et courant est donné par l'argument de l'impédance complexe.
Détermine le déphase entre tension et courant.

3. En électricité, on peut caractériser le comportement d'un filtre avec un nombre complexe que l'on appelle « fonction de transfert »
Voici la fonction de transfert d'un filtre RC passe-bas du premier ordre. $T = \frac{1}{1 + jRC\omega}$.

a) L'amplification d'un filtre correspond au module de la fonction de transfert.
Détermine son expression.

b) Le déphase entre la sortie et l'entrée est fourni par l'argument de la fonction de transfert.
Détermine son expression.

SPECIMEN

24 Un jeu concours de mathématiques réunit chaque année les meilleurs élèves des classes de terminal C d'une ville.

Voici une question posée à l'édition 2021 de ce concours :

«*le plan est rapporté à un repère orthonormé direct* $(O; \vec{u}, \vec{v})$. *Détermine l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation :* $\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ *[π]*».

À l'issu de ce concours, deux de tes amis ont proposé deux réponses différentes à cette question. l'un affirme qu'il s'agit d'une droite, tandis que l'autre affirme avoir proposé un cercle.

Etant l'un des meilleurs élèves de terminal C de ta promotion, ils te sollicitent.

Départage-les en caractérisant ce ensemble grâce à une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques.

25 Un jeu concours oppose les élèves de terminale D de ton lycée.

Le prix à remporter à l'issue du jeu par le gagnant est une bourse d'étude aux États-Unis après le baccalauréat.

Le jeu est le suivant :

"Construire un hexagone régulier de rayon quelconque et justifier cette construction à l'aide des nombres complexes"

Le jury te propose une piste : " Choisir un point O et tracer un cercle de centre O. Marquer sur le cercle un point A qui est un des sommets de l'hexagone, puis avec un écartement égal au rayon, marquer les autres sommets".

Tu es candidat à ce jeu, propose ta solution argumentée.

SPÉCIMEN

7 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition de la fonction exponentielle népérienne - la définition d'une fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$) - la définition d'une fonction puissance d'exposant réel non nul - les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne - la dérivée de la fonction exponentielle népérienne - le sens de variation de la fonction exponentielle népérienne - la représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne - les propriétés algébriques de la fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$). - les propriétés algébriques de la fonction puissance d'exposant réel non nul - l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$; $\alpha \neq 0$ suivant que $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$ - les limites de référence de la fonction exponentielle népérienne - les fonctions dérivées des fonctions du type : $\exp \circ u$ et u^α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ - les primitives des fonctions du type : $u'e^u$ et $u'u^m$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ - les propriétés relatives à la croissance comparée des fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances.
NOTER	- la fonction exponentielle népérienne - une fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$) - une fonction puissance d'exposant réel non nul
RÉSOUDRE	- des équations ou inéquations faisant intervenir des fonctions exponentielles
DÉTERMINER	- les dérivées des fonctions du type : $\exp \circ u$ et u^α ($a \in \mathbb{R}^*$) - les primitives des fonctions du type: $u'e^u$; $u'u^m$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
REPRÉSENTER	- graphiquement les fonctions du type : $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) - graphiquement une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne - graphiquement une fonction faisant intervenir une fonction puissance d'exposant réel non nul
UTILISER	- les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne pour transformer une écriture - les limites de référence pour calculer d'autres limites - les limites sur la croissance comparée pour calculer d'autres limites
ÉTUDIER	- une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne - une fonction faisant intervenir une fonction puissance d'exposant réel non nul
TRAITER UNE SITUATION	- faisant appel aux fonctions exponentielles et puissances

SPÉCIMEN

Situation d'apprentissage

Pour son premier stage pratique dans l'infirmerie de ton établissement, un étudiant en médecine reçoit un élève malade. Il lui donne un médicament, et celui-ci le prend immédiatement.
La fonction qui modélise la masse M, en mg, de ce médicament encore présent dans son sang t heures après sa prise du médicament est la fonction, telle que : $M(t) = 50.e^{-0,75\,t}$.
En vue de prescrire si possible d'autres médicaments plus tard, le stagiaire désire visualiser cette masse M en fonction du temps t. Il sollicite ton professeur de Sciences de la Vie et de la Terre (SVT).
Ce dernier associe ta classe au projet. Motivés pour la cause, les élèves de la classe s'organisent et décident de faire des recherches sur les fonctions comportant la fonction exponentielle népérienne et les représenter graphiquement en vu de résoudre le problème posé.



SPÉCIMEN

1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

1. Définition

La fonction exponentielle népérienne est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

Notation

La fonction exponentielle népérienne est notée exp. exp(x) est aussi notée e^x.

Conséquences de la définition

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \exp(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in]0\,;+\infty[\\ x = \ln y \end{cases}$$

L'ensemble de définition de la fonction exponentielle népérienne est $\mathbb{R}$.
La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction exponentielle népérienne est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$.

- $e^0 = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x$. On écrit aussi : $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$.
- $\forall x \in]0\,;+\infty[, \exp(\ln(x)) = x$.

On écrit aussi : $\forall x \in]0\,;+\infty[, e^{\ln x} = x$.

Exercice de fixation

1 Réponds par vrai ou par faux.

N°	Affirmations	Réponses
1	La fonction exponentielle népérienne est une bijection.	
2	La fonction exponentielle népérienne est la réciproque de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.	
3	L'ensemble de définition de la fonction exponentielle népérienne est $\mathbb{R}$.	
4	La fonction exponentielle népérienne est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	
5	–20 est inférieur à 0 donc exp(–20) est inférieur à 0.	
6	$\ln e^{\ln 4} = \ln 4$.	
7	$e^{\ln 2} = 2\ln 2$.	
8	$e^{\ln 3} = 3$.	
9	$y = \ln 4 \Leftrightarrow e^y = 4$.	

Propriété

Pour tous nombres réels a et b, on a : $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

Exemples

$e^5 \times e^2 = e^7$
$e^{-4} = e^{-2} \times e^{-2}$

Exercice de fixation

2 Écris sous la forme e^a où a est un nombre réel, les nombres réels suivants :

a) $e^6 \times e^{-4}$; b) $e^8 \times e^3$; c) $e^{-3} \times e^{-4}$;

d) $e^{-5} \times e^3$.

SPECIMEN

Propriété

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :

1) $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ 2) $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ 3) $e^{ar} = \left(e^a\right)^r$



$e^{-4} = \dfrac{1}{e^4}$; $\dfrac{e^{-2}}{e^8} = e^{-2-8}$, *donc*

$\dfrac{e^{-2}}{e^8} = e^{-10}$; $\left(e^{-5}\right)^3 = e^{-5\times 3}$, *donc*

$\left(e^{-5}\right)^3 = e^{-15}$.



Exercices de fixation

3 Écris sous la forme e^a, où a est un nombre réel, les nombres réels suivants :

a) $\dfrac{e^7}{e^3}$; b) $\left(e^{-5}\right)^6 \times e^3$; c) $\dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^3}$;

d) $\dfrac{e^{1+\ln 3}}{e^{2+\ln 3}}$.

4 Écris sous la forme e^a, où a est un nombre réel, les nombres réels suivants :

a) $\dfrac{1}{\left(e^{-3}\right)^2} + \dfrac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$; b) $\left(e^{-2}\right)^{-3} \times \left(e^{-4}\right)^2$.

2 ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1. Propriétés

- *La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, on a : (exp)'(x) = exp(x).*
- *Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.*



- $e^x = e^{-5} \Leftrightarrow x = -5$
- $e^x < e^{-5} \Leftrightarrow x < -5$

SPÉCIMEN

Exercice de fixation

5 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

	Affirmations	Réponses
a	$e^x = 2 \Leftrightarrow x = 2$	
b	$e^x > 2 \Leftrightarrow \ln 2 < x$	
c	$\ln e^x < 3 \Leftrightarrow x > 3$	
d	$x > -1 \Leftrightarrow e^{-1} < e^x$	

2. Limites de fonction exp

Propriété

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
6. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Calculs de limite

Exemples

1. Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - x\right)$.

$e^x - x = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$,

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$;

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ d'où :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - x\right) = +\infty$.

2. Calculons : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$.

$\dfrac{\sin x}{e^x - 1} = \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{x}{e^x - 1}$.

Or : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$

donc : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{e^x - 1} = 1$.

Exercice de fixation

6 Calcule chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2e^x + x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x - x\right)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + e^x}{e^x}$;

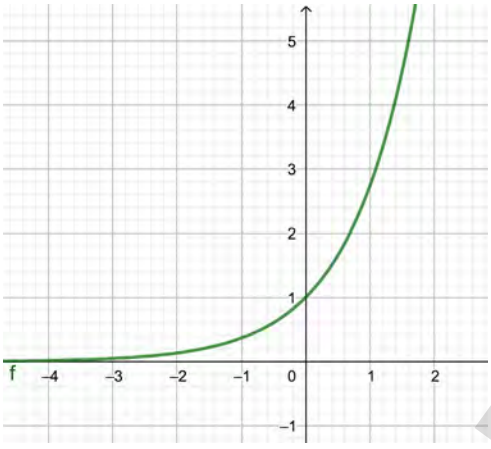
e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - \ln x\right)$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-x + 4e^x\right)$.

SPÉCIMEN

3. Courbe représentative

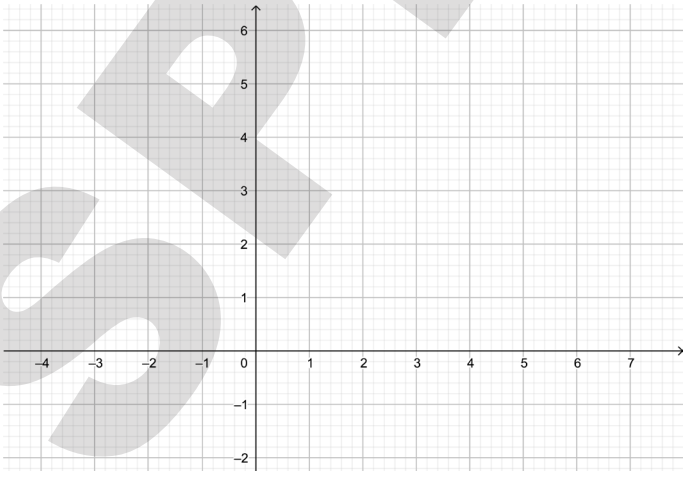
Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp)'(x)$	+	
$\exp(x)$	0 ↗	$+\infty$



Exercice de fixation

7 Construis la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^{-x}$. Explique ta méthode.



3 FONCTIONS DU TYPE : e^u

1. Dérivée de e^u

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction e^u est dérivable sur I et on a : $(e^u)' = u'e^u$.

Exemples

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = xe^{-x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^{-x^2} + x(-2xe^{-x^2})$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$.

Exercices de fixation

8 Soit h la fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$, et définie par : $h(x) = e^{\sqrt{2x}}$

Entoure la bonne réponse : $h'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{2x}}$;

$h'(x) = \dfrac{\sqrt{2x}}{2x} e^{\sqrt{2x}}$; $h'(x) = \sqrt{2x} e^{\sqrt{2x}}$.

9 Détermine sur $\mathbb{R}$, la fonction dérivée de chacune des fonctions définies par :

a) $f(x) = e^{2x+1}$; b) $g(x) = 2e^{x^2}$;

c) $k(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$; d) $l(x) = \dfrac{e^{3x-1}}{x^2+1}$.

SPÉCIMEN

2. Primitive de $u'e^u$

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction $u'e^u$ admet pour primitive sur I, la fonction e^u.



- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto xe^{x^2}$ est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$.
- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto \cos x e^{\sin x}$ est la fonction : $x \mapsto e^{\sin x}$.



Exercices de fixation

10 Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes, définies par :

a) $f(x) = 4e^{4x-2}$; b) $g(x) = 2xe^{x^2}$;

c) $h(x) = (x+2)e^{x^2+4x+1}$.

11 Détermine une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{2\cos^2 x}e^{\tan x}$.

4 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS FAISANT INTERVENIR LA FONCTION *exp*

1. Équations faisant intervenir la fonction *exp*



Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $e^{2x} - 2e^x = 15$.

$e^{2x} - 2e^x = 15 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 15 = 0$.

Posons : $X = e^x$; $X > 0$.

On a : $X^2 - 2X - 15 = 0 \Leftrightarrow (X-5)(X+3) = 0$

$(X-5)(X+3) = 0 \Leftrightarrow X = 5$ ou $X = -3$

Comme X est positif, on a : $X = 5$. D'où : $e^x = 5$.

Par suite, $x = \ln 5$.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^{2x} - 2e^x = 15$ est : $\{\ln 5\}$.



Exercice de fixation

12 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{3x} - 5e^x = 0$; b) $e^{3x+4} = 2$;

c) $e^{\sin x} = \sqrt{e}$; d) $e^{-x} = 2e^x$;

e) $e^{2x} - 3e^x + 3 = 0$; f) $e^{3x}(e^{x+3} - 1) = 0$.

SPÉCIMEN

2. Inéquations faisant intervenir la fonction *exp*



Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :
$2e^{2x} - 3e^x - 2 < 0$
Posons : $X = e^x$; $X > 0$.

On a : $2e^{2x} - 3e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X - 2 < 0$
$2X^2 - 3X - 2 < 0 \Leftrightarrow (2X + 1)(X - 2) < 0$
$X > 0$ et $(2X + 1)(X - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < X < 2$.
$e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$.
Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation :
$2e^{2x} - 3e^x - 2 < 0$ est : $]-\infty ; \ln 2[$



Exercice de fixation

13 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $3e^{2x} - 16e^x + 5 \geq 0$; b) $e^{2x+3} < \ln 3$;

c) $\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} < -1$; d) $2e^{2x+1} - 3e^x + 1 < 2e$.

5 FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a $(a > 0)$

1. Définition

a est un nombre réel strictement positif.
- *Pour tout nombre réel x, on a : $a^x = e^{x\ln a}$*
- *On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction : $x \mapsto a^x$.*



- La fonction exponentielle de base e est la fonction exp.
- La fonction exponentielle de base 10 est la bijection réciproque de la fonction log.



Exercices de fixation

14 Écris les expressions des fonctions suivantes en utilisant la fonction exponentielle de base e.

a) $f(x) = 2^x$; b) $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; c) $h(x) = \dfrac{3^x}{5^x}$.

15 Étudie et représente graphiquement fonction : $x \mapsto 5^x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

SPÉCIMEN

2. Propriétés

Propriété 1

a est un nombre réel strictement positif.
Pour tout nombre réel x, on a : $\ln a^x = x \ln a$.



x est un nombre réel quelconque.
- $\ln 3^x = x \ln 3$; $\ln e^{5x} = 5x \ln e = 5x$
- $\ln e^{-5} = -5 \ln e = -5$


Exercice de fixation

16 Complète :
$\sqrt{3} \ln 6 = \ln \ldots$; $\ln 7^{\pi} = \ldots \ln \ldots$; $\sqrt{2} \ln 5 = \ln \ldots$

Propriété 2

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et pour tous nombres réels x et y, on a :

- $a^{x+y} = a^x a^y$; $a^{-y} = \dfrac{1}{a^y}$; $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$;
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$; $(ab)^x = a^x b^x$; $(a^x)^y = a^{xy}$.


Exercice de fixation

17 x est un nombre réel quelconque, écris chacun des nombres suivants sous la forme a^x.

a) $2^{2+x} \times 2^{-2x}$; b) $\dfrac{2^x}{5^x}$; c) $7^{2-x} \times 7^{-2x}$.

3. Équations et inéquations utilisant la fonction exponentielle de base a $(a > 0)$

3.1 Équations faisant intervenir la fonction exponentielle de base a



Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$4^x - 2^{x+2} - 5 = 0$.

$4^x - 2^{x+2} - 5 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \times 2^x - 5 = 0$.

Posons $X = 2^x$, $X > 0$.

$(2^x)^2 - 4 \times 2^x - 5 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 4X - 5 = 0$.

$X^2 - 4X - 5 = 0 \Leftrightarrow (X - 5)(X + 1) = 0$.

$(X - 5)(X + 1) = 0 \Leftrightarrow X = 5$ ou $X = -1$.

Comme X est positif, on a : $X = 5$.

$2^x = 5 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 5$, soit : $x = \dfrac{\ln 5}{\ln 2}$.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $4^x - 2^{x+2} - 5 = 0$ est : $\left\{\dfrac{\ln 5}{\ln 2}\right\}$.


Exercice de fixation

18 Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation :
$2 \times 9^x - 5 \times 3^x + 2 = 0$.

3.2 Inéquations faisant intervenir la fonction exponentielle de base a



Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation :
$4^x - 2^{x+2} - 5 < 0$

$4^x - 2^{x+2} - 5 < 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \times 2^x - 5 < 0$.

Posons : $X = 2^x$, $X > 0$.

$(2^x)^2 - 4 \times 2^x - 5 < 0 \Leftrightarrow X^2 - 4X - 5 < 0$.

$X^2 - 4X - 5 < 0 \Leftrightarrow (X - 5)(X + 1) < 0$.

$X > 0$ et $(X - 5)(X + 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < X < 5$.

$2^x < 5 \Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 5}{\ln 2}$

Donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $4^x - 2^{x+2} - 5 < 0$ est : $\left]-\infty ; \dfrac{\ln 5}{\ln 2}\right[$.

SPÉCIMEN

Exercices de fixation

19 Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $2 \times 9^x - 5 \times 3^x + 2 > 0$.

20 Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $2^x < 2^{-x}$.

21 Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $(0{,}5)^x > 6$.

6 FONCTION PUISSANCE

1. Définition

Soit α un nombre réel.
On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction : $x \mapsto x^\alpha$.



Remarque

Pour tout nombre réel x strictement positif, on peut écrire : $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$



La fonction puissance d'exposant $\frac{1}{3}$ est la fonction : $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$.

2. Étude de la fonction puissance

a) Ensemble de définition

La fonction puissance est définie sur $]0 ; +\infty[$.

b) Dérivée

La fonction puissance est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. On a : $\forall x \in]0 ; +\infty[, \left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

c) Sens de variation

Si $\alpha < 0$, alors la fonction puissance est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
Si $\alpha > 0$, alors la fonction puissance est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

d) limites

Cas où $\alpha < 0$. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\alpha = +\infty$

Cas où $\alpha > 0$. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\alpha = 0$

e) Propriétés (limites de référence)

Soit α un nombre réel strictement positif, on a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\alpha \ln x = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$.

SPÉCIMEN

Exemples

Soit g la fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par : $g(x) = x^{\sqrt{3}}$.
Étudions et représentons graphiquement la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a) Ensemble de définition

La fonction g est définie sur $]0 ; +\infty[$.

b) Dérivée et sens de variation

La fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et

$\forall x \in]0 ; +\infty[, \ g'(x) = \sqrt{3}\, x^{\sqrt{3}-1}$

$\alpha = \sqrt{3}$. $\alpha > 0$, donc la fonction g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

$\alpha > 0$. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\sqrt{3}} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\sqrt{3}} = 0$.

Remarques

On aurait pu écrire : $x^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln x}$ et retrouver tous les résultats précédents.

c) Branche infinie

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\sqrt{3}}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\sqrt{3}-1}$,

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\sqrt{3}}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\left(\sqrt{3}-1\right)\ln x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3}-1\right)\ln x = +\infty$,

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\left(\sqrt{3}-1\right)\ln x} = +\infty$.

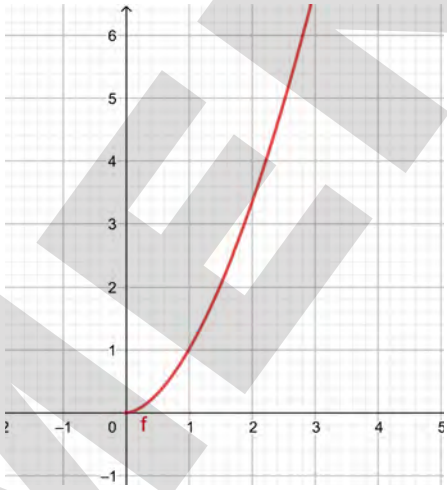
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\sqrt{3}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\sqrt{3}}}{x} = +\infty$,

donc la courbe de la fonction g admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).

d) Tableau de variation de la fonction g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	0 ↗	$+\infty$

e) Courbe représentative de la fonction g



Exercice de fixation

22 Soit h la fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par : $h(x) = x^{-\sqrt{5}}$.

Étudie et représente graphiquement la fonction h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

3. Étude de la fonction : $x \mapsto u(x)^{\alpha}$ où u est une fonction strictement positive sur un intervalle I

a) Dérivée de u^{α}

Propriété

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I et α un nombre réel.
La fonction u^{α} est dérivable sur I et on a :
$(u^{\alpha})' = \alpha u' u^{\alpha-1}$.

SPECIMEN



La fonction : $x \mapsto (\ln x)^{\pi}$ est dérivable sur $]1 ;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction :

$x \mapsto \dfrac{\pi}{x}(\ln x)^{\pi-1}$.



Exercices de fixation

23 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

	Affirmations	Réponses
a	La fonction : $x \mapsto (2x-1)^{\ln 2}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$	
b	La fonction : $x \mapsto (e^{x-1})^{\ln 2}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$	
c	$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $[(e^x-1)^{\ln 2}]' = \ln 2\, e^x\, (e^x-1)^{-1+\ln 2}$	

24 La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcule $g'(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $g(x) = \left(1+e^{-2x}\right)^{\sqrt{7}}$; b) $g(x) = \left(x^2+e^{-x}\right)^{\ln 2}$;

c) $g(x) = \left(3e^x+e^{-x}\right)^{\ln 2}$.

b) Primitives de $u'u^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Propriété

Soit α un nombre réel différent de -1, u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction $u'u^{\alpha}$ admet pour primitive sur I la fonction $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.



Une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction :

$x \mapsto \dfrac{(-2+\ln x)^{\sqrt{3}}}{x}$ est la fonction :

$x \mapsto \dfrac{(-2+\ln x)^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}$.



Exercice de fixation

25

a) Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto (e^x)^{1+\ln 2}$.

b) Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto (1-3e^{-3x})(x+e^{-3x})^{-1+\ln 3}$.

SPÉCIMEN

1 Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.
Écris en dessous du tableau le numéro de l'affirmation suivi de VRAI lorsque l'affirmation est vraie ou de FAUX lorsque l'affirmation est fausse.
f est la fonction définie par : $f(x) = e^{\tan 2x}$.

N°	Affirmations
1	$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4e^{\sqrt{3}}$
2	$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8e^{\sqrt{3}}$
3	$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$
4	f est dérivable en $\frac{\pi}{4}$

2 Pour chaque ligne du tableau ci-dessous quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule est juste.
Écris en dessous du tableau le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	Énoncés	Réponses	
1	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\ln 0,5} =$	A	$-\infty$
		B	0
		C	$+\infty$
		D	n'existe pas
2	La fonction : $x \mapsto (\ln x)^{\pi}$ est :	A	définie sur $\mathbb{R}$
		B	strictement croissante sur]0 ; 1[
		C	strictement croissante sur]1 ; $+\infty$ [
		D	dérivable en 0
3	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ si $f(x) =$	A	$x \ln\left\|\frac{x+1}{x}\right\|$
		B	$(x+3)e^{\frac{1}{x}} - x$
		C	$\sin\left(\frac{1}{x}\right)e^{\cos x}$
		D	e^{1-x}
4	Une solution de l'équation : $2e^{2x} - 5e^{x} - 3 = 0$ est :	A	ln 5
		B	ln 3
		C	0
		D	1

SPÉCIMEN

3 Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} e^x - 2e^y = 1 \\ e^x + e^y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} e^x + 3e^y = 1 \\ e^x - 5e^y = 7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 5e^x - 3e^y = 7 \\ 7e^x + 6e^y = 11 \end{cases}$; d) $\begin{cases} e^x \times e^{2y-1} = 7 \\ e^{x+2} + e^{-y} = 11 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} e^x \times 2e^y = 5 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases}$.

4 On considère le polynôme P, tel que :

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$.

1. a) Calcule P(1).
   b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.
2. Déduis les solutions dans $\mathbb{R}$ de :
   a) (E) : $2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 = 0$.
   b) (I) : $2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 \leq 0$.

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Étudie et représente graphiquement la fonction f, dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par : $f(x) = e^{-\ln x}$.

SPÉCIMEN

6 Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3\left(1 - \frac{1}{e^x + 1}\right)$

1. Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 1}$.
2. Déduis-en la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule en 0.

7 Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $5^x - 5^{-x} = 6$;

b) $4^x + 6^x = 9^x$.

8 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Dans chacun des cas suivants, étudie et représente graphiquement la fonction f.

1) $f(x) = x^{0,75}$; 2) $f(x) = (0,5)^x$; 3) $f(x) = 2^x - 2$.

9 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x - 1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et donne une interprétation graphique de ces résultats.

   b) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$, puis $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ et donne une interprétation graphique de ces résultats.
3. a) Calcule la fonction dérivée f' de f, puis étudie le sens de variation de f.

   b) Dresse le tableau de variation de f.
4. Trace (C) dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 1 cm.

SPÉCIMEN

10 **PARTIE A**

On donne la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :
$P(x) = 2e^{2x} - 5e^{x} + 2$.

1. Résous l'équation: $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$.
2. Démontre que :
   $\forall x \in]-\infty ; -\ln 2[\cup]\ln 2 ; +\infty[, P(x) > 0$ et
   $\forall x \in]-\ln 2 ; \ln 2[, P(x) < 0$.

PARTIE B

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{e^{x} - 1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : 1 cm.

1. Détermine l'ensemble de définition Df de la fonction f.
2. a) Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b) Calcule les limites à gauche et à droite en 0 de la fonction f puis donne une interprétation graphique de ces résultats.
3. On admet que f est dérivable en tout point de son ensemble de définition et on note f' sa fonction dérivée.
   a) Vérifie que : $\forall x \in Df, f'(x) = \dfrac{P(x)}{(e^{x} - 1)^{2}}$.
   b) Étudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   c) Dresse le tableau de variations de f.
4. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
   b) Étudie la position relative de (C) et (D) sur $]0 ; +\infty[$.
5. a) Démontre que la droite (D') d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.
   b) Étudie la position de (C) par rapport à (D') sur $]-\infty ; 0[$.
6. Construis (D), (D') et (C), dans le même repère (O, I, J).
7. a) Détermine deux nombres réels a et b, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^{*}, f(x) = ax + \dfrac{be^{x}}{e^{x} - 1}$.
   b) Déduis-en les primitives sur $]-\infty ; 0[$ de la fonction f.
   c) Détermine sur $]-\infty ; 0[$, la primitive F de la fonction f qui prend la valeur 1 en -1.

SPÉCIMEN

11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2e^{-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Calcule la dérivée de f.
2. Déduis-en le tableau de variation de f. Précise les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Trace (C). On choisira 4 cm comme unité graphique.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -\frac{2}{e}e^{\frac{x}{2}}$.

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $I = [-1 ; 0]$.

4. Démontre que $f(\alpha) = f(2)$ équivaut à $g(\alpha) = \alpha$.
5. a) Démontre que $g(I)$ est inclus dans I.

   b) Démontre que pour tout x appartenant à I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$.

   c) Déduis-en que pour tout x appartenant à I, $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{e}|x - \alpha|$.

6. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.

On admet que (u_n) appartient à I pour tout nombre entier naturel n.

a) Démontre que pour tout nombre entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}|u_0 - \alpha|$.

b) Déduis-en que pour tout nombre entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2e^n}$.

c) Déduis-en le plus petit nombre entier naturel, tel que l'inégalité précédente fournisse une valeur approché de α à 10^{-6} près.

SPECIMEN

12 En 2010, un styliste a décidé d'ouvrir des boutiques de vêtements à prix modérés, tout d'abord dans son pays d'origine, puis dans la communauté européenne et enfin au niveau mondial.

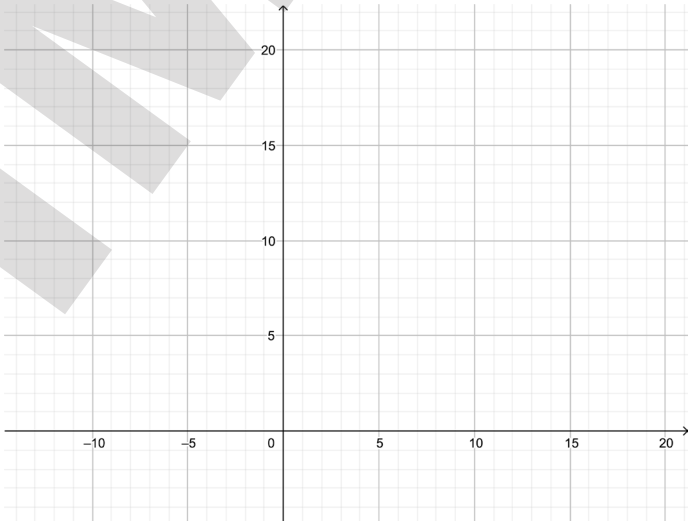
Il a utilisé la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 20] par : $f(x) = 5 + xe^{0,2x-1}$ pour modéliser son développement. On désigne par $f(x)$ le nombre de magasins de sa marque existant en l'an $2010 + x$. Chaque magasin a un chiffre d'affaires journalier moyen de 164 000 F CFA et un magasin est ouvert 300 jours par an.

En vue de faire une prévision, le styliste souhaite obtenir un chiffre d'affaires annuel moyen supérieur ou égal à 3 936 000000 pour l'ensemble de ses magasins mais ne sait pas l'année à partir de laquelle cet objectif sera atteint.

Il te sollicite.

En utilisant tes connaissances sur la fonction exponentielle, indique au stylistique l'année à partir de laquelle il atteindra son objectif.

(Remarque : on privilégiera une approche graphique de la solution du problème).



13 Un crime vient d'être commis dans un hôtel. Un client a été assassiné dans une chambre de l'hôtel par un inconnu.

L'inspecteur de police chargé de l'enquête et un médecin légiste arrivent ce mercredi 01 avril 2020 à 10 heures sur le lieu de l'assassinat et veulent déterminer l'heure du crime.

Pour cela, l'inspecteur de police prend la température de la chambre et trouve 20°C et demande aussitôt au médecin légiste de prendre la température du corps. Celui-ci trouve 32°C. Une demi-heure plus tard, il demande au médecin légiste de prendre à nouveau la température du défunt. Celui-ci trouve 31°C. Avec ces données, l'inspecteur de police demande au médecin légiste de déterminer l'heure du crime. Ce dernier hésite et demande un temps de réflexion.

SPÉCIMEN

Ayant assisté à cette enquête, tu décides de contribuer à la détermination de l'heure du crime.
Tu sais que :

- *la loi de NEWTON sur le refroidissement d'un objet en milieu ambiant permet de modéliser la température de la victime en fonction du temps t ($t \geq 0$) par :*
  $f(t) = Ae^{-kt} + 20$, où A et k sont des constantes positives que l'on déterminera.
- *la température de la victime au moment de son décès à l'instant $t = 0$, était de 37° C.*

Détermine l'heure du crime en motivant ton argumentation sur tes connaissances mathématiques.

SPÉCIMEN

8 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

Tableau des habiletés et contenus

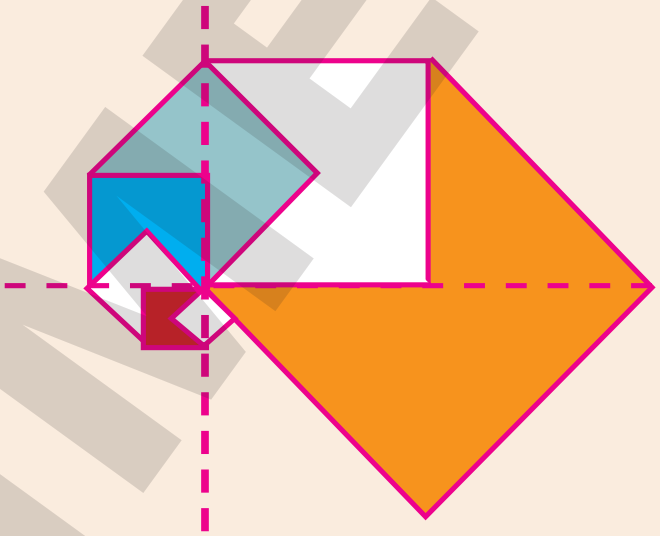
HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition d'une similitude directe - les éléments caractéristiques d'une similitude directe - les formules relatives à l'écriture complexe : • d'une translation • d'une symétrie centrale • de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses • de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées • d'une homothétie de centre Ω et de rapport λ • d'une rotation de centre Ω et d'angle θ • d'une similitude directe - les caractérisations complexes : • des points alignés • des triangles particuliers • des points cocycliques • d'un cercle • d'une droite
RECONNAÎTRE	- l'écriture complexe d'une : • translation • symétrie centrale • symétrie orthogonale par rapport à l'un des axes de coordonnées • homothétie • rotation • similitude directe
DÉTERMINER	- l'écriture complexe d'une : • translation • symétrie centrale • symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses • symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées • homothétie de centre Ω et de rapport k • rotation de centre Ω et d'angle θ • similitude directe - l'image d'un point, d'un segment, d'une droite, d'un cercle, d'un angle, par une transformation dont on connait l'écriture complexe - les éléments caractéristiques, connaissant son écriture complexe, d'une : • translation • symétrie centrale • symétrie orthogonale par rapport à un axe du repère • homothétie • rotation • similitude directe - des lieux géométriques à l'aide des nombres complexes - la nature d'un triangle, d'un quadrilatère en utilisant les caractérisations complexes

SPÉCIMEN

CONSTRUIRE	- l'image d'un point par une similitude directe - des lieux géométriques
DÉMONTRER	- une propriété géométrique (points alignés, points cocycliques, angle droit, ...) en utilisant les caractérisations complexes
TRAITER UNE SITUATION	- faisant appel aux applications géométriques des nombres complexes

Situation d'apprentissage

Le tableau ci-dessous, appelé « les sept carrés », a reçu un prix au concours d'arts d'un lycée. L'auteur, un élève de terminale de l'année précédente, affirme avoir utilisé une similitude directe pour construire ce tableau. Émerveillés, les élèves de terminale D de l'année en cours décident d'étudier les similitudes directes et de construire des figures.





SPECIMEN

Dans toute cette partie, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1 NOMBRES COMPLEXES ET CONFIGURATIONS DU PLAN

1. Nombres complexes, distances et angles

Propriété 1

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B.
On note $z_{\vec{AB}}$ l'affixe du vecteur $\vec{AB}$. On a :

- $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$
- $AB = |z_B - z_A|$
- *mes* $(\vec{u}, \vec{AB}) = arg(z_B - z_A) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ *si* $A \neq B$.

Exercice de fixation

1 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$).

Soient A et B deux points d'affixes respectives $2i + 1$ et $3i + 2$.

1. Détermine l'affixe du vecteur $\vec{AB}$.
2. Calcule AB.
3. Détermine Mes $(\vec{u}\ ;\ \vec{AB})$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété 2

Soient A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A; z_B; z_C et z_D ($A \neq B$ et $C \neq D$).

On a : $mes(\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

où $mes(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ *désigne une mesure quelconque de l'angle de vecteurs* $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exemples Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points

A, B, C et D d'affixes respectives $1+2i$, $3+2i$, $-2i$ et $2i$.

Déterminons la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}})$.

On a : $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = 2i$, par suite : $Mes(\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercices de fixation

2 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$).

Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $-1 + i$, $2i$ et $2 - 2i$.

Détermine la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}})$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$).

Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c, telles que :

$a = -1 - i$; $b = 2i$ et $c = 2 - 2i$.

Détermine : $Arg\left(\dfrac{c - a}{b - a}\right)$.

SPÉCIMEN

2. Caractérisation complexe de points alignés

Propriété

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C, $(A \neq B)$.

A, B et C sont alignés équivaut à $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ appartient à $\mathbb{R}^*$.



Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points
A, B, C et D d'affixes respectives $1+2i$, $3+2i$, $-2i$ et $2i$.

1. Justifions que les points A, B et D sont alignés.
2. Justifions que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. On a : $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-1}{2}$. $\dfrac{-1}{2} \in \mathbb{R}^*$,

donc les points A, B et D sont alignés.

2. On a : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-1-4i}{2}$. Les points A, B et C ne sont pas alignés car $\dfrac{-1-4i}{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{R}^*$.

Exercice de fixation

4 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$).

Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c, telles que :

$a = -3i$; $b = 1-i$ et $c = 2+i$.

1. Détermine : $\dfrac{c-a}{b-a}$.
2. Déduis-en que les points A, B et C sont alignés.

3. Caractérisation complexe des triangles particuliers

Propriété

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C $(A \neq B$ et $A \neq C)$.

- *ABC est un triangle isocèle en A équivaut à $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\theta}$, $(\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$.*
- *ABC est un triangle équilatéral équivaut à $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.*
- *ABC est un triangle rectangle en A équivaut à $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha i$, $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$.*
- *ABC est un triangle rectangle et isocèle en A équivaut à $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$.*



Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points

A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, $3+2i$ et $1+5i$.
Justifions que le triangle ABC est rectangle en A.

SPECIMEN

On a : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3i}{2}$.

Par suite, le triangle ABC est rectangle en A car $\frac{3i}{2}$ est un imaginaire pur non nul.

Exercice de fixation

5 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$).

Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $-1 + i$, $2i$ et $2 - 2i$.

1. Détermine une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. Déduis-en la nature du triangle ABC.

4. Caractérisation complexe de l'angle droit

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D, ($A \neq B$ et $C \neq D$).
La droite (AB) est perpendiculaire à (CD) équivaut à $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur non nul.

Exemples Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points

A, B, C et D d'affixes respectives $1 + 2i$, $3 + 2i$, -2 et $-2 + 5i$.

Justifions que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

On a : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{5i}{2}$

Par suite les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires car $\frac{5i}{2}$ est un imaginaire pur non nul.

Exercice de fixation

6 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$).

Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c, telles que :

$a = 3 - i$, $b = 2i$ et $c = 2 - 2i$.

1. Détermine : $\frac{c - a}{b - a}$.
2. Justifie que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

5. Caractérisation complexe de points cocycliques

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

Les points A, B, C et D sont cocycliques équivaut à $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} : \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B}$ appartient à $\mathbb{R}^*$.

Exemples Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $1 + 2i$, $3 + 2i$, $-2 + 2i$ et $2 + 2i$.

SPECIMEN

Démontrons que les points A, B, C et D sont cocycliques.

On a : $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} : \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B} = \frac{-3}{5}$.

$\frac{-3}{5}$ étant un nombre réel non nul, les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice de fixation

7 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives *a, b, c* et *d,* telles que :

$a = 2i$; $b = 2 - 2i$; $c = 3 - i$, et $d = 2 + 2i$.

En utilisant les arguments de $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$, justifie que les points A, B, C et D sont cocycliques.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 ÉCRITURES COMPLEXES DES SYMÉTRIES

Propriété

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'.

- *M' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe de repère* $(O; \vec{u})$ *si et seulement si* $z' = \overline{z}$. *On dit aussi que l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OI) est :* $z' = \overline{z}$ *où,* $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$.
- *M' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe de repère* $(O; \vec{v})$ *si et seulement si* $z' = -\overline{z}$.
- *On dit aussi que l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OJ) est :* $z' = -\overline{z}$.
- *M' est l'image de M par la symétrie centrale de centre O si et seulement si* $z' = -z$. *On dit aussi que l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O est :* $z' = -z$.

Exemples

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soient M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z', telle que :

- $z' = -\overline{z}$. Donc M et M' sont symétriques par rapport à l'axe de repère $(O; \vec{e}_2)$.
- Le point B d'affixe 1+i est le symétrique du point A d'affixe 1− i dans la symétrie orthogonale d'axe $(O; \vec{e}_1)$.
- L'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O est : z' = −z.

Exercice de fixation

8 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

M et M' sont des points d'affixes respectives z et z'.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OI) est : $z' = -\overline{z}$ .....
2. l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OJ) est : $z' = \overline{z}$ .....
3. l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OJ) est : $z' = -\overline{z}$ .....
4. l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OJ) est : $z' = -z$ .....
5. l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O est : $z' = -z$ .....

SPÉCIMEN

Propriété

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
M et M' sont des points d'affixes respectives z et z'.
L'écriture complexe de la symétrie centrale de centre A d'affixe a est : $z' = -z+2a$.

Exemples

$z' = -z + 2i - 4$ est l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre le point A d'affixe -2 + i.

Exercices de fixation

9 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Détermine l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $1+i$.

10 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
M et M' sont des points d'affixes respectives z et z'.
Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que $z' = -z + 3 - 2i$.
Justifie que f est une symétrie centrale et précise son centre.

3 ECRITURE COMPLEXE D'UNE TRANSLATION

Propriété

M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'.
L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle d'une translation de vecteur $\vec{u}$, *d'affixe b si et seulement si* $z' = z + b$.

Exemples

$z' = -z - 3i + 1$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ *d'affixe* $1 - 3i$

Exercices de fixation

11 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Détermine l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{w}(-1 ; -2)$.

12 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit g la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que :
$z' = z - \frac{1}{2} + i$.
Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

SPÉCIMEN

4 ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE ROTATION

Propriété

M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'.

- *L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle de la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure θ si et seulement si z' = $e^{i\theta}$ z.*
- *L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle orienté de mesure θ si et seulement si z' = $e^{i\theta}$ z + b où b est un nombre complexe, tel que : b = ω − $e^{i\theta}$ω.*



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

Justifions que la transformation du plan dont l'écriture complexe est z'= iz + 1 +i est une rotation dont on déterminera l'angle et le centre.

z' peut s'écrire z' = $e^{i\frac{\pi}{2}}$ z + 1 + *i*. Par suite cette transformation complexe est celle de la rotation d'angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe ω telle que 1 + *i* = ω − iω.

D'où : ω = *i*.



Exercices de fixation

13 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

Détermine l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$.

14 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

M et M' sont des points d'affixes respectives z et z'.

Soit *f* la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que :

$z' = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})z + 3i$.

Justifie que *f* est une rotation et précise son centre et son angle.

5 ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE HOMOTHÉTIE

Propriété

M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z' et k est un nombre réel non nul.

- *L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle de l'homothétie de centre O et de rapport k si et seulement si : z' = kz.*
- *L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle de l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k si et seulement si z' = kz+b où b est un nombre complexe, tel que b = ω − kω.*

SPECIMEN



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).
M et M' sont des points du plan d'affixes respectives z et z'.
Soit *h* la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que
$z' = -2z + 1 - 2i$.
Justifie que *h* est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

z' peut s'écrire sous la forme $z' = kz + b$ où $k = -2$ qui est un nombre réel non nul et $b = 1 - 2i$. Par suite, *h* est l'homothétie de rapport −2 et de centre Ω d'affixe ω, telle que : $1 - 2i = \omega + 2\omega$.
D'où : $\omega = \frac{1-2i}{3}$.



Exercices de fixation

15 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).
Détermine l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{2}{3}$.

16 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).
M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'.
Soit *f* la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que :
$z' = 7z + 3 - i$.
Justifie que *f* est une homothétie et précise son centre et son rapport.

6 SIMILITUDE DIRECTE

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).
M et M' sont deux points du plan et k un nombre réel strictement positif.
On appelle similitude de rapport k, toute transformation du plan, telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N', M'N' = kMN.
On appelle similitude directe de rapport k toute similitude qui conserve l'orientation des angles.



Remarques

- *Toute isométrie est une similitude de rapport 1.*
- *Toute similitude directe de rapport 1 est un déplacement.*
- *Toute homothétie de rapport k est une similitude directe de rapport |k|.*



Toute rotation est une similitude directe de rapport 1.
Toute symétrie orthogonale est une similitude de rapport 1.
Les symétries orthogonales ne sont pas des similitudes directes.

SPÉCIMEN

Exercice de fixation

17 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes, puis justifie tes réponses :

1. La symétrie centrale de centre O est une similitude directe. .....
2. Toute translation est une similitude directe. .....
3. Toute similitude directe de rapport 1 est un déplacement. .....

Propriété

Toute similitude directe de rapport k est :
soit une translation, soit une rotation, soit une homothétie, soit la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport k.



Toute similitude directe de rapport 1 est soit une translation, soit une rotation.

Exercice de fixation

18 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes, puis justifie tes réponses :

1. Toute similitude directe de rapport 2 est une homothétie. .....
2. Toute similitude directe de rapport 2 est la composée d'une homothétie de rapport 2 et d'une rotation d'angle non nul. .....
3. Toute similitude directe de rapport 2 est la composée d'une homothétie de rapport 2 et d'une rotation. .....

Propriété et définition

Toute similitude directe de rapport différent 1 admet un point invariant et un seul appelé centre de la similitude.



Remarque

Les rotations d'angle non nul ont un seul point invariant, le centre.



Toute similitude directe de rapport 3 a un seul point invariant.
Les translations de vecteur non nul n'ont pas de point invariant.

Exercice de fixation

19 Démontre que toute similitude directe qui laisse deux points distincts invariants est l'application identique.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Propriété et définition

Soit S une similitude de rapport k différent de 1 et de centre Ω. Il existe une unique homothétie H de rapport k de centre Ω et une rotation R de centre Ω et d'angle θ, telles que :

$S = HoR = RoH$.

L'angle de la rotation est appelé angle de la similitude S.

Notation

S est parfois notée S(Ω ; k, θ)

SPECIMEN

Remarque



Toute similitude directe de rapport différent de 1 est caractérisée par son rapport, son centre et son angle.
Toute rotation est caractérisée par son centre et son angle (son rapport vaut toujours 1).
Toute similitude directe qui n'est pas une translation est caractérisée par son rapport, son centre et son angle.



- La composée de l'homothétie de centre O et de rapport 2 et de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- Toute homothétie de centre Ω et de k rapport négatif, est une similitude directe de centre Ω de rapport $-k$ et d'angle π.
- Toute homothétie de centre Ω et de k rapport positif, est une similitude directe de centre Ω de rapport k et d'angle 0.
- Les similitudes directes d'angle nul sont les homothéties de rapport positif et les translations.



Exercice de fixation

20 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. Toute similitude directe de rapport 2 est caractérisée par son centre et son angle orienté. .....
2. Toute similitude directe de rapport 1 est caractérisée par son centre et son angle orienté. .....
3. Toute similitude directe de rapport k différent de 1 est caractérisée par son rapport k, son centre et son angle orienté. .....
4. Toute rotation de centre Ω d'angle θ non nul est une similitude directe de rapport 1 de centre Ω et d'angle θ. .....

7 IMAGES DE FIGURES SIMPLES PAR UNE SIMILITUDE DIRECTE ET PROPRIÉTÉS

Propriété 1

Par une similitude directe, l'image :
- *d'un segment est un segment,*
- *d'une demi-droite est une demi-droite,*
- *d'une droite est une droite,*
- *d'un cercle est un cercle.*

Propriété 2

Toute similitude directe de rapport k conserve :
- *le parallélisme,*
- *l'orthogonalité,*
- *le contact,*
- *le barycentre.*

8 ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

Propriété

- *Si S est une similitude plane directe, alors il existe un unique couple (a ; b) appartenant à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, tel que l'écriture complexe de S soit : $z' = az + b$.*
- *L'application du plan dans lui-même associée à l'application complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est une similitude plane directe.*



La transformation du plan dont l'écriture complexe est z' = (1 + *i*)z + 2 − *i* est une similitude directe.

SPECIMEN

Exercice de fixation

21 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

Démontre que la transformation du plan dont l'écriture complexe est : z' = (1 − *i*)z est une similitude directe de centre O.

Propriété

Soit z' = az + b l'écriture complexe d'une similitude directe qui n'est pas une translation.

- *son centre est le point Ω d'affixe ω, telle que : ω = aω + b.*
- *son rapport est : k = |a|.*
- *son angle est égal à Arg(a).*

Exemples

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).

La transformation du plan dont la transformation complexe est z' = (1 − *i*)z est une similitude directe de centre O, de rapport |1 − *i*| qui est $\sqrt{2}$ et d'angle Arg(1 − *i*) qui est $-\frac{\pi}{4}$.

Exercices de fixation

22 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe d'écriture complexe :

z' = $(1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(2 - i)$

23 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre A d'affixe 1 – i, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Propriété

Soit S la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.

Pour tous points M et M' du plan, distinct chacun de Ω, on a : $M' = S(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M' = k \quad M \\ (\overrightarrow{\quad M;\quad M'}) = \hat{\theta} \end{cases}$

Exemples

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

A' est l'image de A par la similitude S de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$ équivaut à :

$$\begin{cases} OA' = 2OA \\ Mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}}) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

SPÉCIMEN

Exercice de fixation

24 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$) d'unité graphique 1 cm.

Soient A, B et C trois points du plan tels que AB = 5 et S la similitude directe de centre A de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$ qui transforme B en C.

Détermine : AC et Mes $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété

Soient Ω, A et A' trois points du plan deux à deux distincts.

Il existe une unique similitude directe s de centre Ω qui transforme A en A'.

Remarque

Le rapport de S est $\frac{A'}{A}$ *et l'angle orienté de S est* $(\overrightarrow{A,\ A'})$.

Exemples

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

ABCD est un carré de sens direct.

Il existe une similitude directe S de centre A qui applique B sur C. Son rapport est $\frac{AC}{AB}$ qui vaut $\sqrt{2}$, son angle orienté est $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ de mesure principale $\frac{\pi}{4}$.

Exercice de fixation

25 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

ABC est un triangle rectangle de sens direct.

1. Justifie qu'il existe une similitude directe S de centre A qui transforme B en C.
2. On suppose que A est d'affixe $1 + i$, B d'affixe 1 et C d'affixe $2 + i$.

Donne l'écriture complexe de S.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété

Soient k un nombre réel positif, θ un nombre réel, A et A' deux points distincts du plan.

Il existe une unique similitude directe de rapport k et d'angle θ qui transforme A en A'.

Exemples

A et B sont deux points distincts du plan. Il existe une similitude directe S et une seule de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui applique A sur B.

Exercice de fixation

26 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

On considère les points A et B d'affixes respectives i et j où $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$.

SPECIMEN

Justifie qu'il existe une similitude directe S de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B.

Propriété

Soient A, B, A' et B' quatre points du plan, tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Il existe une unique similitude directe S qui transforme A en A' et B en B'.



Remarque

Le rapport de S est $\frac{A'B'}{AB}$ et l'angle orienté de S est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : 1, $1 + 3i$ et $1 + i$.

$z_A \neq z_B$ donc $A \neq B$; $z_O \neq z_C$ donc $O \neq C$, donc il existe une similitude directe S qui applique A sur B et O sur C. On démontre que : l'écriture complexe de S est :

$z' = 2iz + 1 + i$.



Exercice de fixation

27 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$).

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives i, $1 + i$, $1 + 3i$ et $2i$.

1. Justifie qu'il existe une unique similitude directe S qui applique A sur B et C sur D.
2. Détermine son rapport et son angle.
3. a) Détermine l'écriture complexe de S.
   b) Détermine le centre de la similitude S.

SPÉCIMEN

1 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, A, B et C sont les points d'affixes respectives i, $-4-i$ et $2-3i$.

1. Détermine l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. Démontre que C est l'image de B par r.
3. Déduis-en que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

2 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Identifie la transformation du plan qui, à tout point M du plan d'affixe z associe, le point M' d'affixe $z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$, puis détermine ses éléments caractéristiques.
2. Détermine et construis l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 6$.

3 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe S qui laisse le point I d'affixe $2i$ invariant et qui applique le point B d'affixe -1 sur le point C d'affixe $1-i$.
2. M est un point quelconque du plan distinct de I . Construis le point M' image du point M par S.
3. Détermine la nature du triangle IMM'.
4. Construis l'image par S de la droite (D) d'équation : $y = -2x + 2$.
5. Soit (Γ) l'ensemble des points M vérifiant IM = 5 .

Détermine et construis l'ensemble (Γ') des points M', image de M lorsque M décrit (Γ) .

SPÉCIMEN

4 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Dans chacun des cas suivants, détermine l'écriture complexe de chacune des transformations ci-dessous :

1. a) la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $3 - 2i$.
   b) la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, tel que : A (2; −7) et B(−6; 5).
2. a) l'homothétie de centre O et de rapport $k = -5$;
   b) l'homothétie de centre Ω d'affixe $\omega = 2 - i$ et de rapport $k = 3$.
3. a) la rotation de centre O et d'angle $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.
   b) la rotation de centre P d'affixe $\omega = 1 - i$ et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
   c) la rotation de centre Q d'affixe $\omega = 3 + 2i$ et d'angle $\alpha = \pi$;
4. a) la similitude directe de centre Q d'affixe $\omega = 3 + 2i$, de rapport $k = 3$ et d'angle $\alpha = \frac{-5\pi}{6}$.
   b) la similitude directe de centre C d'affixe $\omega = 4$, de rapport $k = \frac{3}{4}$ et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

5 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère la similitude directe s d'écriture complexe : $z' = 2(1 + i\sqrt{3})z + 3$.

1. Détermine les éléments caractéristiques de s.
2. Détermine l'image A' du point A d'affixe $1 + i$ par s.
3. Détermine l'image de la droite (D) d'équation $x - \sqrt{3}y = 0$ par cette similitude.

6 Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives i; -1; $5 + i$ et $1 + i$.

1. Détermine l'écriture complexe de la similitude directe s, telle que s(A) = C et s(B) = D.
2. Détermine les éléments caractéristiques de la similitude s.
3. a) Soit E le point d'affixe $-1 + i$ et F = s(E). Détermine la nature du triangle ABE.
   b) Déduis la nature du triangle CDF.

SPÉCIMEN

7 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est le centimètre. On donne le point A d'affixe i.

Soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant: $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 6$.

1. a) Démontre qu'un point M appartient à (Γ) si et seulement si son affixe vérifie: $|z - i| = 3$.
   b) Déduis la nature de (Γ).
2. On considère les points B et C d'affixes respectives $\sqrt{3}$ et $-4i$.

L'application S est la similitude directe qui applique A sur O et B sur C.

Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z', tel que M' est l'image de M par S.

a) Démontre que : $z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$.

b) Détermine les éléments caractéristiques de S. On notera Ω son centre.

3. On désigne par (C) l'image de (Γ) par S.
   a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (C).
   b) Construis (C) et (Γ).
4. Soit D le point tel que: D ∈ (ΩB) et $\overrightarrow{D} = 2\overrightarrow{B}$.
   a) Construis les points D et Ω dans le plan muni du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
   b) Démontre que le triangle ΩCD est équilatéral.
5. Soit r la rotation de centre Ω qui transforme C en D.
   a) Détermine l'écriture complexe de r.
   b) Calcule l'affixe de D.

8 On considère le polynôme P défini par :

$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Calcule $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$, puis démontre qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}$, on ait: $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$.
2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

SPECIMEN

On considère les points A et Ω d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$ et $z_\Omega = -3$.

a) Construis :

- le point B symétrique de A par rapport à l'axe des réels;
- le point C image de A par l'homothétie de centre Ω et de rapport 2;
- le point D image de C par la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

b) Détermine les affixes z_B, z_C et z_D des points B, C et D.

c) Démontre que le triangle ACD est rectangle en A.

d) Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.

4. On note E le symétrique de D par rapport à O.

a) Démontre que : $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b) Déduis-en la nature du triangle BEC.

9 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$).

L'unité graphique est 4 centimètres.

On donne les nombres réels r strictement positif et α appartenant à l'intervalle]- π ; π] et on désigne par *u* le nombre complexe de module *r* et d'argument α.

1. On construit les points A_n répondant aux conditions suivantes :
   - A_0 est l'origine du repère ;
   - A_1 est le point d'affixe *i* ;
   - pour tout entier naturel *n*, supérieur ou égal à 2, le point A_n est l'image du point A_{n-2} par la similitude de centre A_{n-1}, de rapport r et d'angle orienté de mesure principale α. On note, pour tout entier naturel *n*, z_n l'affixe du point A_n.

   a) Écris une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2}.

   b) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel *n*, supérieur ou égal à 2, on a :
   $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1} i$.

   c) Détermine l'expression de z_n en fonction de *n* et de *u*.

SPÉCIMEN

2. a) Démontre qu'il existe une similitude directe S et une seule, telle que : $A_1 = S(A_0)$ et $A_2 = S(A_1)$.
   b) Détermine les éléments caractéristiques de S.
   c) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, on : $A_{n+1} = S(A_n)$.
3. On note S_O l'application identique du plan, et pour tout entier naturel n, on pose :
   $S_{n+1} = SoS_n$.
   a) Soit p un entier naturel donné. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+p} = S_n(A_p)$.
   b) Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, démontre que S_4 est une homothétie H dont on précisera le centre et le rapport.
   c) Déduis-en que dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{4}$, les points A_n sont éléments d'un ensemble formé par la réunion de quatre droites que l'on précisera.

On suppose dans toute la suite que r est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que α est égal $\frac{\pi}{4}$ et on désigne par Ω le centre de la similitude S.

4. a) Démontre que pour tout entier naturel n, les vecteurs $\overrightarrow{A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ sont orthogonaux.
   b) Représente graphiquement les points A_0, A_1, …, A_9 dans le repère $(\Omega ; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 4 centimètres.
   c) Calcule ΩA_n en fonction de n et de ΩA_0.
   d) Déduis-en $\lim\limits_{n \to +\infty} An$.
5. Pour tout entier naturel n, on pose : $L_n = \sum_{i=0}^{n} A_i A_{i+1}$.

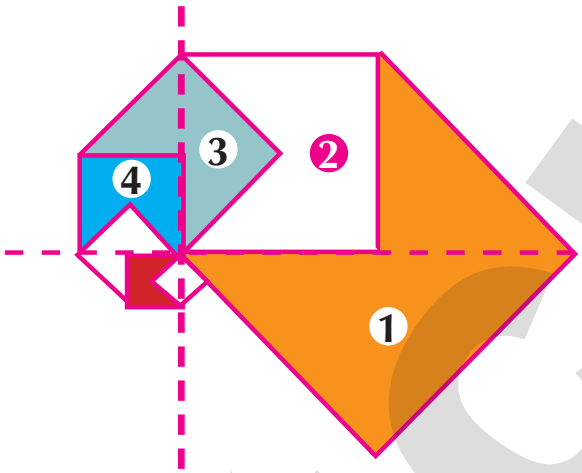
Étudie la limite de la suite $(L_n)_{n \geq 0}$ quand n tend vers l'infini.

SPECIMEN

10 Le tableau ci-dessous appelé les « sept carrés » par son auteur a reçu un prix au concours d'arts d'un lycée. Invité par le professeur d'art plastique, il explique qu'il a commencé par construire le carré 1 et que chaque carré s'obtient à partir du précédent par une similitude directe de centre le point d'intersection des axes en pointillés.

Émerveillé, tu décides de déterminer cette similitude afin de présenter un tableau similaire au prochain concours d'arts.

Reproduis le tableau et justifie cette reproduction.

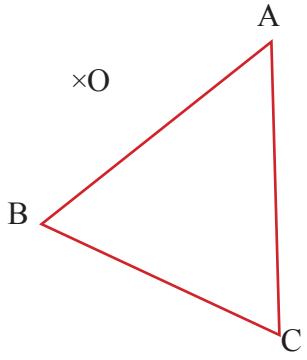


11 Ton père possède un champ triangulaire de 2,5 ha situé dans une zone marécageuse. En prélude à la saison de pluie de cette année, la Direction Régionale de l'agriculture décide de délocaliser tous les champs de cette zone. Informé, ton père se rend à la Direction Régionale où l'ingénieur en charge des délocalisations lui fournit le document ci-dessous relatif à la situation de son nouveau champ. Ne comprenant pas ce document, il te sollicite pour savoir : la forme et l'aire de son nouveau champ. Il souhaite également obtenir un plan du nouveau champ.

Exploite le document fourni par la Direction Régionale pour répondre aux préoccupations de ton père.

DOCUMENT FOURNI :

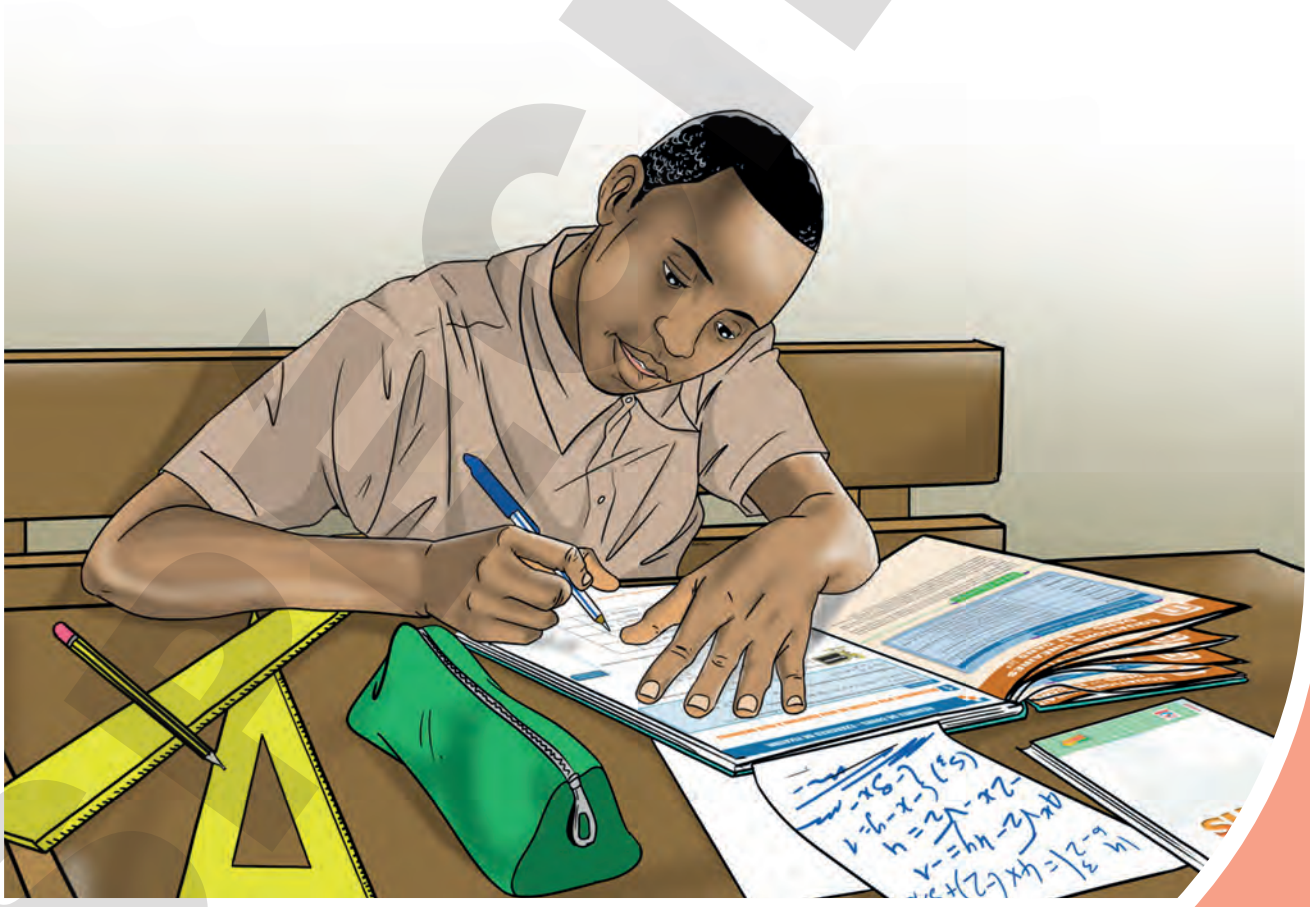
Le nouveau champ A'B'C' est l'image de l'ancien champ ABC par la similitude : $S\left(O;2;\frac{\pi}{4}\right)$.



SPÉCIMEN

2

EXEMPLE DE DEVOIR DE NIVEAU



2ème TRIMESTRE

SPÉCIMEN

Exercice 1 (2 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
z_1 et z_2 sont les nombres complexes de points images respectifs M_1 et M_2.
A est le point d'affixe a et O le point d'affixe 0.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. L'affixe de $\overrightarrow{M_1M_2}$ est $z_1 - z_2$.
2. Si $|z_1| = |z_2|$, alors M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
3. A est le milieu du segment $[M_1M_2]$ si et seulement si $z_1 - z_2 = 2(z_1 - a)$.
4. Si $z_2 = 5z_1 - 4a$, alors M_2 est l'image de M_1 par l'homothétie de centre A et de rapport 5.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont données dont une seule est juste.
Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses	
1	On considère dans l'ensemble des nombres réels l'inéquation (I) : $\ln(4 - x) \leq 0$. (I) admet pour ensemble de solutions :	A	[0 : 4 [
		B	$]-\infty ; 3[$
		C	$[4 ; +\infty[$
		D	[3 ; 4[
2	On pose : $Z = \sqrt{3} - i$. L'écriture exponentielle de Z est :	A	$2e^{i\frac{\pi}{6}}$
		B	$-2e^{i\frac{\pi}{6}}$
		C	$2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
		D	$2e^{i\frac{\pi}{3}}$
3	Soit f la fonction polynôme définie par : $x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 4$. La courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I , J)	A	admet un point d'inflexion au point d'abscisse : -1
		B	admet un point d'inflexion au point d'abscisse : $3 + 2\sqrt{2}$
		C	n'admet aucun point d'inflexion
		D	admet un point d'inflexion au point d'abscisse : 0
4	$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{2x} - e^2}{x - 1}$ est égale à :	A	$\dfrac{1}{e}$
		B	$2e^2$
		C	2
		D	$+\infty$

SPÉCIMEN

Exercice 3 (3 points)

Soit les nombres complexes u et v, tels que $u = 1 + i$ et $v = -1 + i\sqrt{3}$.

1. Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes u et v.
2. a) Détermine la forme trigonométrique de $\frac{u}{v}$

   b) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{5\square}{12}$ et $\sin\frac{5\square}{12}$.

Exercice 4 (3 points)

Un élève répond au hasard aux 6 questions d'un QCM. À chaque question, 4 réponses sont proposées, dont une seule est exacte.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

1. Démontre que la loi de probabilité de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calcule la probabilité que l'élève a d'avoir exactement 3 bonnes réponses.
3. Calcule la probabilité que l'élève a d'avoir au moins 3 bonnes réponses.
4. Calcule l'espérance mathématique de X et interprète ce résultat.

Exercice 5 (6 points)

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par T l'application de P dans P qui, a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que : $z' = (1 + i)z - i$

1. Démontre que T est une similitude directe dont on donnera les éléments caractéristiques.
   On note A le centre de la similitude.
2. a) Détermine la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})$, en supposant M ≠ A.
   b) Construis le point M' pour un point M donné.
3. Détermine l'image (D') de la droite (D) d'équation $y = x$ par la similitude T.
4. a) Démontre qu'il existe un point B distinct de A et un seul, tel que l'affixe z_B de B vérifie $z_B z'_B = 1$ où $z'_B = T(z_B)$.
   b) Place les points B et B'.
5. Soit A' le symétrique de A par rapport à O.
   Démontre que les points A, A', B et B' sont cocycliques.

Exercice 6 (5 points)

On s'intéresse à la production mensuelle d'un certain nombre d'articles par une entreprise.

On sait que le nombre d'articles produits par mois est compris entre 0 et 500.

On suppose que le coût marginal, exprimé en millions de francs, peut être modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 5] par $C(x) = 4x + (1 - 2x)e^{-2x+3}$, où x représente le nombre de centaines d'articles fabriqués.

On sait que la fonction coût total, notée C_T, est la primitive de la fonction C sur [0 ; 5] qui s'annule pour $x = 0$.

La fonction coût moyen, notée C_M est la fonction définie sur]0 ; 5] par : $C_M = \frac{C_T(x)}{x}$.

Chaque centaine d'articles est vendue en gros à 7 000 000 F. La recette totale pour x centaines d'articles est donnée, en admettant que toute la production soit vendue, par $R_T(x) = 7x$ en milliers de francs. Le bénéfice est donc défini par $B(x) = R_T(x) - C_T(x)$. L'entreprise veut déterminer la production pour laquelle le coût moyen est minimal puis la production pour laquelle le bénéfice est maximal. Elle te sollicite.

En basant ton argumentation sur tes connaissances mathématiques, réponds aux deux préoccupations de l'entreprise.

SPECIMEN

9 SUITES NUMÉRIQUES

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition d'une suite : majorée, minorée ou bornée - la définition d'une suite : convergente ou divergente - les propriétés sur les suites monotones : Toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge - la propriété : si (u_n) est une suite convergente vers a et f une fonction continue en a, alors la suite $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(a)$: - les propriétés des suites récurrentes définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ - les propriétés sur la divergence des suites numériques : Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$; Toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$ - les propriétés sur la convergence : des suites géométriques ; des suites arithmétiques ; des suites du type n^α - les théorèmes de comparaison - les propriétés sur les limites et comportements asymptotiques comparés des suites (In n) ; (a^n), $a > 0$ et (n^α), α réel
SAVOIR	- mener un raisonnement par récurrence
RECONNAÎTRE	- une suite géométrique convergente ou divergente - une suite du type n^α convergente ou divergente
DÉMONTRER	- qu'une suite est monotone - qu'une suite est majorée et/ou minorée - qu'une suite est convergente ou divergente
CONJECTURER	- le comportement d'une suite récurrente
DÉTERMINER	- la plus petite valeur de n telle que : $u_n \geq 10^p$, $p \in \mathbb{N}$ - la plus petite valeur de n telle que : $\lvert u_n - l \rvert \leq 10^p$, $p \in \mathbb{N}$ - la limite d'une suite
TRADUIRE	- une situation donnée à l'aide d'une suite : arithmétique ; géométrique ; arithmético-géometrique
TRAITER UNE SITUATION	- faisant appel aux suites numériques

SPÉCIMEN

Situation d'apprentissage

Dans le souci d'avoir assez de revenus pour l'organisation des festivités de fin d'année, le président de la promotion terminale veut effectuer le placement de la somme de 300.000 CFA qu'ils ont dans leur caisse au premier janvier 2018.
Il se rend dans une structure bancaire et le banquier lui propose deux options.
Option 1 : le capital placé est augmenté de 2500 CFA à intérêts simples par mois
Option 2 : le capital placé augmentera de 5% de mois en mois pendant la durée du placement
Le budget de la manifestation étant de 400.000 CFA, le président voudrait connaitre l'option la plus avantageuse pour obtenir rapidement cette somme avant la date de la manifestation fixée au début du mois d'août 2018.
Le major de cette promotion affirme que le problème peut être résolu à l'aide de suites particulières. Forts de ces informations et voulant aider leur président, les élèves de la promotion terminale décident de faire des recherches sur les suites arithmétiques et géométriques.



SPECIMEN

La suite (U_n) est définie dans toute la suite sur $\mathbb{N}$.

1 RAPPEL SUR LES SUITES ARITHMÉTIQUES ET LES SUITES GÉOMÉTRIQUES

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Caractérisation par une relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$, u_0 donné.	$u_{n+1} = q \times u_n$, u_0 donné.
Formule explicite	$u_n = (n-k)r + u_k$. k est un nombre entier naturel donné.	$u_n = u_k \times q^{n-k}$. k est un nombre entier naturel.
Relation entre u_n et u_p, n et p étant des nombres entiers	$u_n = u_p + (n-p)r$.	$u_n = u_p \times q^{n-p}$.
Somme de termes consécutifs	$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$. $p \leq n$	$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$. ($p \leq n$, si $q \neq 1$)

$n - p + 1$ est le nombre de termes de la somme $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$.



1) Calculons la somme des 15 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2{,}3$ et de raison $r = 3{,}1$.

2) Calculons la somme des 10 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = 9$ et de raison $q = 4$.

1) Le quinzième terme est bien u_{15} car la suite commence par u_1.

Le nombre de terme est $(15 - 1) + 1 = 15$.

$$S = 15 \times \frac{(u_1 + u_{15})}{2}.$$

On a : $u_1 = 2{,}3$; $u_n = u_1 + (n - 1)r$, donc :

$u_{15} = u_1 + 14 \times r = 45{,}7$.

$$S = 15 \times \frac{2{,}3 + 45{,}7}{2}.$$

S = 360.

2) Le dixième terme est bien u_{10} car la suite commence par u_1.

$$S = u_1 \times \frac{q^{(10-1)+1} - 1}{q - 1}.$$

$$S = 9 \times \frac{4^{10} - 1}{4 - 1}.$$

S = 3145725.

Exercices de fixation

1 (u) est une suite arithmétique de raison 7.

Détermine une relation entre u_{n+1} et u_n.

SPÉCIMEN

2 (v) est une suite géométrique de raison 7.
Détermine une relation entre v_{n+1} et v_n.

3 (u) est une suite arithmétique de raison -3 et $u_2 = 9$.
Exprime u_n en fonction de n.

4 (v) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_4 = 32$
Exprime v_n en fonction de n.

5 (u) est une suite arithmétique de raison -3 et $u_2 = 9$.
Calcule la somme $u_4 + u_5 + \ldots + u_{16}$.

6 v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_4 = 32$.
Calcule la somme : $v_4 + v_5 + \ldots + v_{12}$.

2 LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE



Point méthode

On veut prouver qu'une certaine propriété P(n), dépendant d'un entier naturel n, est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un certain entier naturel n_0.
On procède en 3 étapes:

1°) Initialisation	On démontre que P(n_0) est vraie
2°) Hérédité	Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on démontre que P(n) vraie implique P($n + 1$) vraie
3°) Conclusion	On conclut que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, P(n) est vraie

SPÉCIMEN



On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, \text{ pour } n > 0 \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que : pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

• Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$. Donc, $u_0 = 2^{0+1} - 1$.

La propriété à démontrer est vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = 2^{n+1} - 1$ et démontrons que $u_{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$.

$u_{n+1} = 2u_n + 1$

$= 2 \times (2^{n+1} - 1) + 1$ (par hypothèse de récurrence)

$= 2^{(n+1)+1} - 2 + 1$

$u_{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n + 1$.

• Donc pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.



Exercices de fixation

7 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4, \text{ pour } n > 0 \end{cases}$$

Démontre par récurrence que : pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 2$.

8 Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3 SUITES CROISSANTES, SUITES DÉCROISSANTES

Définition

Soit $(u_n)_{n \in E}$ ne suite de nombre réels. On dit que :

- *La suite (u_n) est croissante, lorsque $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier n élément de E.*
- *La suite (u_n) est décroissante, lorsque $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout entier n élément de E.*
- *La suite (u_n) est constante, lorsque $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier n élément de E.*
- *La suite (u_n) est monotone, lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.*

Remarque



Si pour tout n élément de E, $u_n < u_{n+1}$ (respectivement $u_n > u_{n+1}$) alors, la suite un est strictement croissante (respectivement strictement décroissante)



Étudions le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1} - 1 - \dfrac{1}{n}$

$= \dfrac{-1}{n(n+1)}$

SPÉCIMEN

Pour tout entier naturel n non nul, $\frac{-1}{n(n-1)} < 0$, donc la suite (u_n) est décroissante.

Exercice de fixation

9 Soit (u_n) une suite de nombres réels.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

1. Une suite constante est croissante.
2. Un suite arithmétique de raison r positive est croissante.
3. Une suite géométrique de raison q, telle que $q > 1$ est décroissante.

4 SUITE MAJORÉES, MINORÉES

Définition

Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite de nombre réels. On dit que :

- *La suite (u_n) est majorée, s'il existe un nombre réel M, tel que pour tout entier n de E, $u_n \leq M$.*
- *La suite (u_n) est minorée, s'il existe un nombre réel m, tel que pour tout entier n de E, $m \leq u_n$.*
- *La suite (u_n) est bornée, si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exemples

Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par : $u_n = \frac{3n}{n+1}$.

Démontrons que la suite (u_n) est majorée par 3.

On a :

$u_n - 3 = \frac{3n}{n+1} - 3.$

$u_n - 3 = \frac{-3}{n+1}.$

Pour tout entier naturel n, $\frac{-3}{n+1} \leq 0$, donc : $u_n \leq 3$.

Pour tout entier naturel n, $u_n \leq 3$, la suite est majorée par 3.

Exercice de fixation

10 Soit (u_n) une suite de nombres réels.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. Si pour tout entier n, $u_n < 5$, alors la suite (u_n) est minorée par 5. ☐
2. Si pour tout entier n, $u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est minorée par 0. ☐
3. Si pour tout entier n, $|u_n| < 1$, alors la suite (u_n) est bornée. ☐
4. Si pour tout entier n, $u_n \geq 1$, alors la suite (u_n) est majorée par 1. ☐

5 SUITE CONVERGENTE, SUITE DIVERGENTE

Définitions

Soit (u_n) une suite de nombre réels. On dit que :

- *La suite (u_n) est convergente, lorsqu'elle admet une limite finie.*
- *La suite (u_n) est divergente, lorsqu'elle n'est pas convergente.*

Propriété

Si une suite admet une limite alors cette limite est finie.

Exemples

- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

  La suite (u_n) converge vers 1 car $\lim u_n = 1$.
- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $u_n = \frac{n^2}{n+1}$.

  La suite (u_n) diverge vers $+\infty$ car $\lim u_n = +\infty$.

SPECIMEN

Exercices de fixation

11 Soit (u_n) une suite telle que pour tout naturel n, $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ $(L \in \mathbb{R})$, alors la suite (u_n) converge. ☐
2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, alors la suite (u_n) diverge. ☐

12 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. La suite de terme général $(-1)^n$ est convergente. ☐
2. La suite de terme général $\sin(n)$ est divergente. ☐

Propriétés

- *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*
- *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
- *Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.*
- *Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.*



*Si une suite (U_n) est **croissante et non majorée**, alors $\lim U_n = +\infty$.*

***Une suite a pour limite $+\infty$** si, pour tout réel **$A > 0$**, l'intervalle $]A\,;\,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*

Exemples

Étudions la convergence de deux suites u_n et v_n définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ et $v_n = u_n - \ln n$

1. En utilisant une intégrale, démontrons que pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

2. Déduisons que pour tout $n > 0$, $\ln(n+1) \leq u_n \leq \ln(n) + 1$.

3. Déterminons la limite de u_n.

4. Justifions que la suite (v_n) est décroissante et positive.

5. Déduisons la convergence de la suite.

On a :

1) Pour tout t élément de $[n\,;\,n+1]$, on a : $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$.

Donc : $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{n}$ par intégration membre à membre.

Soit, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

2. $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1$ et on a :

$\frac{1}{n} \leq \ln(n) - \ln(n-1)$ selon l'inégalité précédente.

En majorant chaque terme, on a :

$u_n \leq \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-1) - \ln(n-2) + \ldots + \ln 3 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 1 + 1$.

On trouve : pour $n > 0$, $u_n \leq \ln(n) + 1$.

$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ et on a : $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

En minorant chaque terme on a :

$\ln(2) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(2) + \ldots + \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln(n) \leq u_n$.

On trouve : pour $n > 0$, $\ln(n+1) \leq u_n$.

Ainsi, pour $n > 0$, $\ln(n+1) \leq u_n \leq \ln(n) + 1$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc $\lim u_n = +\infty$.

Donc (u_n) est divergente.

4. $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - u_n + \ln(n)$.

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$;

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln(n)]$.

Or d'après la question 1), $\frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln(n)] \leq 0$.

Donc, pour tout $n > 0$, $v_{n+1} - v_n \leq 0$, la suite (v_n) est décroissante.

SPECIMEN

On a :
$v_n = u_n - \ln(n)$, or : $0 \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq u_n - \ln(n)$ d'après la question 2.

Donc, pour tout $n > 0$, $v_n \geq 0$.

5. La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

Exercice de fixation

13 Soit (u_n) une suite de nombre réels.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

1. La suite croissante (u_n), telle que, pour tout nombre entier naturel supérieur à 10, $u_n < 1$, converge.
2. La suite décroissante (u_n), telle que, pour tout nombre entier naturel, $u_n < 1$, converge.
3. Une suite décroissante et à termes positifs est convergente.
4. Un suite croissante à termes négatifs est convergente.

Exemples

On a démontré plus haut que la suite (v_n) définie par : $v_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$ est décroissante et positive, donc, elle converge.

Propriété

Soit f une fonction, D_f son ensemble de définition et (u_n) une suite d'éléments de D_f .
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$. $(l \in \mathbb{R})$

Exemples

Soit la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ définie par : $u_{n+1} = \frac{7}{u_n - 2}$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 5$.

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{7}{x-2}$.

$\lim\limits_{x\to 5} \frac{7}{x-2} = \frac{7}{3}$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{u_n - 2} = \frac{7}{3}$.

Exercices de fixation

14 En utilisant la limite de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ en 0, calcule la limite de la suite (u_n) de terme général $u_n = n \sin \frac{1}{n}$.

SPÉCIMEN

15 Détermine la limite de la suite de terme général (u_n).

1) $u_n = \frac{1}{n}$; 2) $u_n = \frac{n+1}{n+2}$;

3) $u_n = \frac{\ln(n+1)}{n}$; 4) $u_n = \frac{n^2-1}{3n}$;

5) $u_n = \frac{\sqrt{n}+2}{n+1}$.

Suite de récurrentes et limites

Propriété (Théorème du point fixe)

Soit une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction numérique continue sur un intervalle I.

Si la suite (u_n) est convergente et que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$, alors la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $x \in I$, $f(x) = x$.



Remarque

Toute solution de l'équation $f(x) = x$ est appelée un point fixe de f.



On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}, \text{ pour } n > 0 \end{cases}$

On se propose de calculer la limite de la suite (u_n).

1. Démontrons que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$.
2. Démontrons que pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$.
3. Déduisons la limite de la suite (u_n).

On a :

1) • On a : $0 < 1 < 2$, ainsi, $0 < u_0 < 2$.

• Supposons que pour tout k supérieur à 0, $0 < u_k < 2$ et démontrons que : $0 < u_{k+1} < 2$.

On a : $0 < u_k < 2$

$1 < u_{k+1} < 3$

$1 < \sqrt{u_k + 1} < \sqrt{3}$

$0 < 1 < u_{k+1} < \sqrt{3} < 2$.

• Donc pour tout n supérieur à 0, $0 < u_n < 2$.

2) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 1} - u_n$

$= \frac{-u_n^2 + u_n + 1}{\sqrt{u_n + 1} + u_n}$

Pour le polynôme $-x^2 + x + 1$, on a : $\Delta = 5$.

$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(u_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2})}{\sqrt{u_n + 1} + u_n}$.

On a :

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$

donc, $u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 0$ et $u_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2} > 0$.

Donc pour tout n supérieur à 0, $u_{n+1} - u_n > 0$, soit pour tout n supérieur à 0, $u_{n+1} > u_n$.

3) La suite (u_n) est croissante et majorée par 2. Donc, elle converge.

On sait que la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$, donc la limite est solution de l'équation $f(x) = x$.

SPECIMEN

$\sqrt{x+1} = x$ et $x > 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 1 = 0$. Les solutions sont : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Comme pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$, la limite de la suite est : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercices de fixation

16 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 1, \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}.$$

On suppose que la suite (u_n) est convergente et à termes positifs.

Détermine la limite de la suite (u_n).

17 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}, \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}.$$

On suppose que la suite (u_n) est convergente et à termes positifs.

Détermine la limite de la suite (u_n).

Limites d'une suite géométrique

Propriétés

- *Si $a \leq -1$, alors la suite (a^n) n'a pas de limite.*
- *Si $-1 < a < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.*
- *Si $a = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$.*
- *Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.*

Exemples

Déterminons dans chacun des cas suivants, la limite de la suite (u_n) définie par :

a) $u_n = 2^n$.

b) $u_n = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

a) On a : $2 > 1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) On a : $-1 < -\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice de fixation

18 Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$, telles que : $u_n = (0{,}7)^n$; $v_n = 5^n$; $w_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

Calcule : a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

SPÉCIMEN

Limite et comparaison

Propriété

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels définies sur $\mathbb{N}$.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemples Déterminons la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \cos(n) - 2n$.

On a :

$-1 \leq \cos(n) \leq 1$

$-1 - 2n \leq \cos(n) - 2n \leq 1 - 2n$.

Pour tout entier naturel n, $-1 - 2n \leq u_n \leq 1 - 2n$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2n) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exercice de fixation

19 Détermine les limites des suites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+(-1)^n)$; 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\sin(n))$.

Propriété (Théorème des gendarmes)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$ *($L \in \mathbb{R}$),*

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Exemples Déterminons : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n} + 3$

On a : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$,

ainsi, $-\dfrac{1}{n} + 3 \leq \dfrac{\cos(n)}{n} + 3 \leq \dfrac{1}{n} + 3$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} + 3 = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 3$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n} + 3 = 3$.

Exercice de fixation

20 Détermine chacune des limites suivantes.

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

Propriétés

- *Si $\alpha < 0$, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.
- *Si $\alpha = 0$, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 1$.
- *Si $\alpha > 0$, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$.

SPÉCIMEN

Exercice de fixation

21 Pour chaque limite, choisis la réponse juste.

		A	B	C
1	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-2} =$	0	1	$+\infty$
2	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3} =$	0	1	$+\infty$
3	$\lim\limits_{n\to+\infty} n =$	0	1	$+\infty$
4	$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} =$	0	1	$+\infty$
5	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{1}{2}} =$	0	1	$+\infty$

Croissances comparées des suites (a^n), (n^α) et $(\ln n)$

Propriétés

- *Si $\alpha > 0$, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^\alpha} = 0$.
- *Si $a > 1$ et si $\alpha > 0$, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$.
- *Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = +\infty$.

Exemples

Étudions les limites éventuelles de la suite (u_n).

a) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$; b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{3^n}$;

c) $u_n = \dfrac{1}{n\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}$

On a :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^2} = 0$.

b) $\dfrac{\sqrt{n}}{3^n} = \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{3^n}$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{3^n} = 0$.

c) $\dfrac{1}{n\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n} = \dfrac{n^{-1}}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}$ et $0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n} = +\infty$.

Exercices de fixation

22 Étudie les limites éventuelles de la suite (u_n).

a) $u_n = n\ln n$; b) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^{0,1}}$;

c) $u_n = \sqrt{n} \times (0,5)^n$; d) $u_n = \dfrac{n^4}{(1,05)^n}$.

23 Étudie les limites éventuelles de la suite.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 2^n)$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - \ln n)$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n}{n^2}$; d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n^3}$.

SPECIMEN

1 Démontre que pour tout entier $n \geq 1$,
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2 Démontre que pour tout entier $n \geq 1$,
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3 Démontre que pour tout entier $n \geq 1$,
$1 \times 2 \times 3 + \ldots + n \times (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

4 Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.

5 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 3} \end{cases}$.

1. Démontre que pour tout nombre entier naturel n, $u_n > 0$.
2. a) Calcule u_1.
   b) Démontre par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
3. Étudie la convergence de la suite (u_n).

SPÉCIMEN

6 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$.

1. Démontre que (v_n) est une suite géométrique.
2. a) Détermine la limite de la suite (v_n).
   b) Détermine la limite de la suite (u_n).

7 Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par : $u_0 = -5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{2}$.

1. Exprime u_n en fonction de n.
2. Représente sur la droite (OI), les cinq premiers termes de la suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Calcule $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{20}$.

8 Démontre que toute suite (u_n) vérifiant la relation $u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n$ pour $n \geq 1$, est une suite arithmétique.

9 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + u_n}$.

1. a)Démontre que : pour tout nombre entier naturel n, $u_n > 0$.
   b) Démontre que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{1}{u_n}$ est une suite arithmétique.
2. a) Exprime v_n puis u_n en fonction de n.
   b) Calcule en fonction de n le nombre S_n définie par : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.
   c) Étudie la convergence de la suite (u_n).

SPÉCIMEN

10 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0 = 2$, $v_0 = 8$ et, telles que : $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$
et $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

1- Calcule u_1 et v_1.

2- Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $d_n = v_n - u_n$.

a) Démontre que (d_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme d_0 et la raison.

b) Déduis une expression de d_n en fonction de n,

c) Démontre que, pour tout élément $n \in \mathbb{N}$, $d_n > 0$.

d) Calcule la limite de la suite d_n.

3- a)Démontre que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$,
$u_{n+1} - u_n = \frac{d_n}{3}$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{d_n}{4}$.

b) Déduis-en les variations des suites (u_n) et (v_n).

c) Démontre que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$,
$u_0 < u_n < v_n < v_0$.

d) Déduis des questions 3.a) et 3.b) que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

4- a) Déduis de la question 3.a) pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n,

b) Déduis la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (v_n).

SPÉCIMEN

11 On considère la suite (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n^2 \end{cases} \quad et\ v_n = \ln(\frac{3}{2}u_n).$$

1. Calcule v_0.
2. Démontre que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
3. Exprime v_n en fonction de n.
4. Calcule la limite de (v_n).
5. Exprime u_n en fonction de v_n et déduis la limite de (u_n).
6. Pour tout entier naturel non nul n, on pose:

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{v-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}$.

a) Démontre que: $S_n = (1 - 2^n)\ln 2$.

b) Justifie que: $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$

c) Exprime T_n en fonction de n.

12 On considère la suite (u_n) à termes positifs définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{u_n} \end{cases}$.

1. f est la fonction définie sur l'intervalle]0;+∞[par : $f(x) = \frac{4x-3}{x}$.

(C) désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

a) Étudie les variations de f, puis dresse son tableau de variation.

b) Trace (C) et la droite (D) d'équation $y = x$.

c) Utilise (C) et (D) pour construire u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe (OI).

2. a) Démontre que: $f([2;3]) \subset [2;3]$.

b) Déduis, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $2 \leq u_n < 3$.

c) Démontre que la suite (u_n) est strictement croissante.

d) Déduis-en que la suite (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$.

a) Démontre que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b) Déduis la limite de la suite (v_n).

c) Détermine la limite de la suite (u_n).

SPÉCIMEN

13 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calcule u_1, et u_2.

2. a) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

b) Déduis la limite de la suite (u_n) .

3. Démontre que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - n + 1$.

a) Démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b) Déduis que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

14 Pendant le cours de génétique, le professeur de SVT explique à ses élèves de Terminale D l'expérience qui permet d'obtenir une race pure de souris.

On dispose d'une population P_0 de souris noires ayant les gènes de couleur noire et de la couleur blanche.

On la laisse se reproduire. On obtient une population P_1 de N petits avec la proportion $u_0 = \frac{n}{N}$ de souris noires.

On retire les souris blanches et on laisse se reproduire les souris noires de la population P_1.

On note u_n la proportion de souris noires après la n-ième reproduction.

SPÉCIMEN

On admet que la suite (u_n) est définie par : $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{3-u_n}$

1. Calcule u_1 pour $u_0 = 0{,}5$.
2. On pose : $v_n = u_n - 1$.
Démontre que la suite $(\dfrac{1}{v_n})$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Démontre que la suite (u_n) converge vers 1.
Interprète ce résultat du point de vue génétique.

15 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Démontre que (u_n) est à termes positifs et majoré par 5.
2. Étudie le sens de variation, puis la convergence de (u_n).
3. a) Démontre que pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3| \text{ et } |u_n - 3| \leq 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

b) Déduis-en : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

SPÉCIMEN

16 Monsieur Koudou, fondateur d'un établissement secondaire a recruté des enseignants. Il leur propose un salaire annuel de 750 000 F CFA.

Après quelques mois de travail, une grève des enseignants, pour la revalorisation de leur salaire, amène le fondateur à faire deux propositions de contrat, au choix, afin de relever les salaires.

Le premier contrat stipule que les enseignants auront chaque année une augmentation de

4% du salaire de l'année précédente.

Le deuxième contrat consiste à faire chaque année une augmentation forfaitaire de 30 000 F CFA.

Monsieur Yao, professeur d'anglais, veut s'engager pour 9 ans mais il hésite quant au choix du contrat. Il te sollicite.

Détermine, en utilisant tes connaissances mathématiques, le contrat le plus avantageux pour Monsieur Yao.

17 Dans le cadre de la lutte contre la COVID-19, des chercheurs d'un pays ont modélisé l'évolution de la pandémie par une fonction f définie sur $\mathbb{N}$ par :

$f(t) = 120\,t + 1$.

$f(0)$ désigne le nombre de cas de contamination déclaré le jour de l'annonce de la découverte de la maladie dans le pays. Pour $t \neq 0$, $f(t)$ désigne le nombre de nouveau cas de contamination au $t^{ème}$ jour après la déclaration du premier cas.

À l'issu d'un point de presse, le Ministre de la santé, estime que le gouvernement instaurera un couvre-feux, si le nombre total de cas de contamination dans le pays dépasse l0 000 personnes.

Ayant écouté cette information, un de tes camarades de classe estime que si cette tendance se poursuit selon la modélisation décrite par les chercheurs, le couvre-feu interviendra 10 jours après la déclaration du premier cas de COVID-19 dans ce pays.

Dans le cas de cette modélisation et à l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques, détermine le nombre de jours à partir duquel le couvre-feux interviendra, et dis si la déclaration de ton camarade de classe est oui ou non juste.

SPÉCIMEN

10 CALCUL INTÉGRAL

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition de l'intégrale d'une fonction continue - la définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle - les propriétés de l'intégrale : • linéarité ; • positivité de l'intégrale ; • relation de Chasles ; • inégalité et intégrale ; • inégalité de la moyenne (les 2 formes) ; - la technique de l'intégration par parties ; - la technique du changement de variable affine.
NOTER	une intégrale
CALCULER	- une intégrale en utilisant : • les primitives des fonctions usuelles ; • la relation de Chasles ; • une intégration par parties ; • un changement de variable affine ; • une fonction du type $u'\times(vou)$ - une aire - la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle - une intégrale en utilisant la parité ou la périodicité d'une fonction
DÉTERMINER	- le signe d'une intégrale - un encadrement d'une intégrale
INTERPRÉTER	- graphiquement une intégrale
ÉTUDIER	- les variations des fonctions du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$
REPRÉSENTER	- une allure d'une fonction du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$
TRAITER UNE SITUATION	- faisant appel au calcul intégral

SPÉCIMEN

Situation d'apprentissage

Au cours d'un exposé en Histoire- Géographie sur les infrastructures routières réalisées en Chine, les élèves de la promotion Terminale d'un établissement secondaire apprennent que le pont de Zhijingh, à Hubei, est un pont en arc qui a été achevé en 2009. Afin de le construire, les ingénieurs ont été amenés à étudier la résistance au vent.
Pour cela, ils ont calculé l'aire de la surface latérale grisée de la figure ci-dessous représentant un schéma de ce pont.





Émerveillés par ces informations, les élèves de cette promotion de Terminale décident de s'informer sur le calcul d'aire.

SPÉCIMEN

1 PROPRIÉTÉ ET DÉFINITION

Propriété - Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I.
Le nombre réel F(b) – F(a) est indépendant de toute primitive F de f sur I. Il est appelé intégrale de a à b de la fonction f.

Ce nombre réel est noté $\int_a^b f(t)\,dt$ ou $[F(t)]_a^b$.

$\int_a^b f(t)\,dt$ *est lue somme de a à b de f(t) dt.*



La fonction carrée est continue sur l'intervalle [0 ; 1]. Elle admet sur [0 ; 1] une intégrale. On a : $\int_0^1 x^2\,dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^1$.

On a : $[\frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{3}\times 1^3 - \frac{1}{3}\times 0^3$.

D'où : $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.



Remarque

Le nombre réel $\int_a^b f(t)\,dt$ *est indépendant de la variable t d'intégration :*

$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx$.

On dit que la variable d'intégration est muette.



Exercices de fixation

1 Coche les bonnes réponses dans chacun des cas suivants :

Soient F et G deux primitives d'une fonction *f* sur un intervalle I. Pour tous *a* et *b* de I,

on a: $\int_a^b f(x)\,dx =$

□ F(b) − F(a) ; □ G(a) − F(b) ; □ G(b) − G(a) ;
□ $[F(t)]_a^b$; □ $[G(t)]_b^a$.

2 Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

Justifie que la fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de *f* qui s'annule en x_0.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3 Calcule :

1) $\int_2^5 (2t-1)dt$; 2) $\int_3^1 \frac{1}{t^2}dt$;

3) $\int_0^1 t^2 dt$; 4) $\int_0^1 \frac{dt}{t}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Conséquence

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I.
On a :

$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ *et* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

SPECIMEN

Exemples

on a : $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$,

d'où : $\int_1^0 x^2\,dx = -1$

2 PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

1. Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Soient α et β deux nombres réels.
On a :

$$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)\,dt.$$

Exemples

1. Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle [0 ;1].

On a :

$$\int_0^1 (2f(u)-3g(u))\,du = 2\int_0^1 f(u)\,du - 3\int_0^1 g(u)\,du.$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 t)\,dt$.

D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\,dt = [\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$.

Exercices de fixation

4 Coche la bonne réponse dans chacun des cas suivants :

a) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux nombres réels de I. On a :

$\int_a^b (f(t)-2g(t))\,dt =$

☐ $2\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$;

☐ $2\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt$;

☐ $(2-\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t))\,dt$;

☐ $\int_a^b f(t)\,dt - 2\int_a^b g(t)\,dt$.

b) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux nombres réels de I, α et β deux nombres réels. On a : $\int_a^b (\alpha f(t)-\beta g(t))\,dt =$

☐ $\beta\int_a^b \big(f(t)dt+\alpha g(t)\big)dt$;

☐ $(\alpha-\beta)\left(\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt\right)$;

☐ $(\alpha+\beta)\left(\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt\right)$;

☐ $\alpha\int_a^b f(t)\,dt - \beta\int_a^b g(t)\,dt$.

5 Calcule :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\sin x)\,dx$; b) $\int_0^2 (7t+5t^2)\,dt$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$.

SPECIMEN

2. Relation de Chasles

Définition

Soit f une fonction continue sur un ensemble I et a, b et c des nombres réels appartenant à I.

On a : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.



$$\int_{-4}^{2}|t|\,dt = \int_{-4}^{0}(-t)\,dt + \int_{0}^{2} t$$
$$= [-\frac{1}{2}t^2]_{-4}^{0} + [\frac{1}{2}t^2]_{0}^{2}$$
$$= 8 + 2 = 10.$$

Exercices de fixation

6 Calcule l'intégrale : $\int_{-2}^{3} 2|t+1|dt$.

7 Calcule l'intégrale : $\int_{-2}^{3} 2|x-1|dx$.

3. Intégrale et inégalité

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b].

- *Si* $f \geq 0$ *sur [a ; b], alors* $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
- *Si* $f \leq g$ *sur [a ; b], alors* $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.



Remarque

On peut avoir $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$ *sans que la fonction f soit positive sur [a ; b]*



1. $\int_{-2}^{3} x^2\,dx \geq 0$, car la fonction carré est positive ou nulle sur l'intervalle [-2 ; 3].

2. Sachant que :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4};0\right],\ 1 \leq \frac{1}{\cos x} \leq \sqrt{2},$$

on a : $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} \frac{1}{\cos x}dx \leq \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$.

Exercices de fixation

8 On admet que pour tout nombre réel x, tel que $x \geq 1$, $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Déduis-en que : $0 < \ln 2 < 2\sqrt{2} - 2$.

9 Sans calcul, justifie que :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \geq 0$. b) $\int_{-2}^{-1} x^3\,dx \leq 0$.

SPÉCIMEN

10 Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Conséquence

Soit f une fonction continue sur [a ; b]. On a :

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

3 INÉGALITÉS DE LA MOYENNE

Propriété

Soit f une fonction continue sur [a ; b].

• Si les nombres réels m et M sont, tels que : $m \leq f(t) \leq M$ pour tout t de [a ; b], alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a).$$

• Si $|f(t)| \leq M$ pour tout nombre t de [a ; b], alors

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq M(b-a).$$

Exemples

Justifions que : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq 1$.

On a : $\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{4}], \frac{1}{1+x^2} \leq 1$,

d'où : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq \frac{\pi}{4}$ or $\frac{\pi}{4} < 1$.

On conclut que : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq 1$.

Démontrons que pour tous nombres réels x et y, on a :

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

• Si $x = y$, l'inégalité est triviale.

• Supposons $x \neq y$.

x et y étant des nombres réels, on a : $x < y$ ou $y < x$.
Supposons précisément que : $x < y$.

Pour tout nombre t, $|\cos x| \leq 1$.

En appliquant l'inégalité de la moyenne sur l'intervalle $[x ; y]$, on a : $\left| \int_x^y \cos t\,dt \right| \leq |x - y|$.

On en déduit que : $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

Finalement, pour tous nombres réels x et y, on a :

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

Exercice de fixation

11 Sans calculer l'intégrale, justifie que :

$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \right| \leq 2$.

Valeur moyen d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur [a ; b].
On appelle valeur moyenne de f sur [a ; b] le nombre réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$.

SPÉCIMEN

Exemples

L'intensité efficace I_{eff} d'un courant alternatif est l'intensité d'un courant continu qui produirait, à travers la même résistance R, le même effet calorifique pendant la durée d'une période T. Dans le cas d'un courant de type sinusoïdal :

Si $I(t) = I_{max} \sin(\omega t)$ est l'intensité du courant à l'instant t du courant alternatif, la loi de Joule donne :

$E(T) = RI_{eff}^2 \times T = \int_0^T RI(t)^2 dt$. On en déduit que :

$I_{max} = \sqrt{2} I_{eff}$.

Exercice de fixation

12 Dans chaque cas, détermine la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

1. f est telle que : $f(x) = x^2$; I = [0 ; 1].
2. f est telle que : $f(x) = e^2$; I = [−1 ; 1].
3. f est telle que : $f(x) = \ln x$; I = [1 ; 2].

4 TECHNIQUE DE L'INTÉGRATION PAR PARTIES

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle [a ; b] ($a \leq b$) et dont les fonctions dérivées u' et v' sont continues sur [a ; b].
On a :

$$\int_a^b u(t) \times v'(t)\, dt = [u(t) \times v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) \times v(t)\, dt.$$

Exemples

Soit à calculer $\int_0^1 xe^x\, dx$.

Appliquons la formule de l'intégration par parties.

Posons : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. On a : $u'(x) = 1$ et on peut prendre $v(x) = e^x$.

Par suite : $\int_0^1 xe^x\, dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx$;

d'où : $\int_0^1 xe^x\, dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1$;

on en déduit que : $\int_0^1 xe^x\, dx = 1$.

Remarque

Cette formule s'applique lorsque l'on n'a pas de primitive évidente. Il faut faire attention aux choix de $u(x)$ et $v'(x)$. Si on choisit $u(x) = e^x$ et $v'(x) = x$, on se rendra vite compte en appliquant la formule de l'intégration par parties qu'on complique la situation car dans l'intégrale apparait le terme x^2.

Exercices de fixation

13 À l'aide d'une intégration par parties, calcule $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$.

14 À l'aide d'une intégration par parties, calcule $\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\, dx$.

SPECIMEN

15 Calcule l'intégrale : $\int_1^e x \ln x \, dx$.

5 TECHNIQUE DU CHANGEMENT DE VARIABLE AFFINE

Point méthode

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$. α et β deux nombres réels, tels que $\alpha \neq 0$. Pour calculer une intégrale de la forme $\int_a^b f(\alpha t + \beta)\, dt$, $(\alpha t + \beta \in [a ; b])$, on peut procéder comme suit :

- *Poser : $u = \alpha t + \beta$;*
- *Déterminer dt en fonction de du. $\left(dt = \frac{1}{\alpha} du\right)$;*
- *Déterminer les nouvelles bornes de l'intégrale ;*
- *Achever les calculs.*





Soit n un entier naturel non nul.

Démontrons que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx .$$

Une idée peut être d'utiliser la formule du binôme de Newton avec les formules d'Euler. Mais ce sera laborieux.

On pense utiliser un changement de variable affine, mais laquelle ? Si on se souvient que le changement de x en $\frac{\pi}{2} - x$ échange un sinus en un cosinus et vice versa, on peut poser : $u = \frac{\pi}{2} - x$.

On a :

$x = \frac{\pi}{2} - u$; $x = 0$ équivaut à $u = \frac{\pi}{2}$;

$x = \frac{\pi}{2}$ équivaut à $u = 0$; $du = -dx$.

On a : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) du$.

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \, du$$

On conclut que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$.



Exercices de fixation

16 En utilisant un changement de variable, calcule :

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx .$$

SPECIMEN

17 En utilisant un changement de variable, calcule : $\int_0^2 (2x-3)^4\,dx$.

6 AUTRES TECHNIQUES D'INTÉGRATION

1. Utilisation d'une primitive

Exemples Calculons les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin x\,dx$.

● Calculons I.

En posant : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$; f est de la forme $\frac{u'}{u}$.

Par suite : $I = [\ln(1+e^x)]_0^1$.

D'où : $I = \ln(\frac{1+e}{2})$.

● Calculons J

En posant $g(x) = \sin^2 x$; g est de la forme $u'u$.

Par suite : $J = [\frac{1}{2}\sin^2 x]_0^{\frac{\pi}{4}}$. D'où : $J = \frac{1}{4}$.

Exercice de fixation

18 Calcule chacune des intégrales suivantes :

1) $\int_{-2}^3 \frac{2x+3}{2x^2+6x+1}dx$;

2) $\int_1^5 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx$;

3) $\int_2^4 \frac{2xdx}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$;

4) $\int_0^5 \sqrt{1+3x}\,dx$

2. Utilisation d'une linéarisation

Exemples Calculons : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$.

On linéarise $\cos^3 x$.

Écrivons : $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, on a :

$8\cos^3 x = (e^{ix}+e^{-ix})^3 = e^{3ix} + 3\,e^{2ix}\,e^{-ix} + 3e^{ix}\,e^{-2ix} + e^{-3ix}$;

SPÉCIMEN

Par suite :

$8\cos^3 x = (e^{3ix} + e^{-3ix}) + 3(e^{ix} + e^{-ix})$;

or $\cos 3x = \dfrac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2}$ et $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

D'où : $8\cos^3 x = 2\cos 3x + 6\cos x$. On conclut que :

$\cos^3 x = \dfrac{1}{4}\cos 3x + \dfrac{3}{4}\cos x$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \left[\dfrac{1}{12}\sin 3x + \dfrac{3}{4}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$.

On a le résultat : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \dfrac{2}{3}$.

Exercice de fixation

19 Calcule chacune des intégrales suivantes :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x\,dx$.

7 FONCTIONS DU TYPE : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I.

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, de I vers $\mathbb{R}$, est la primitive de f qui s'annule en a.

Exemples La fonction $x \mapsto \int_1^x \dfrac{dt}{t}$ de $]0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ est l'unique primitive de la fonction :

$t \mapsto \dfrac{1}{t}$ définie et continue sur $]0 ; +\infty[$ et qui s'annule en 1. C'est la fonction ln.

Exercice de fixation

20 Justifie que la fonction $x \mapsto \int_0^x \dfrac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}dt$ définie sur $\mathbb{R}$ est l'unique primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}$ définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0.

SPÉCIMEN

8 INTÉGRALE DE FONCTION PAIRE, IMPAIRE OU PÉRIODIQUE

Propriété (*périodicité*)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T et soit α et β deux nombres réels.

On a : $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{T} f(t)\,dt$ *et*

$\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$.

Exemples On a : $\int_{2\pi}^{4\pi} \cos x\,dx = \int_{0}^{2\pi} \cos x\,dx$, car la fonction cosinus est périodique de période 2π.

Exercice de fixation

21 Sans calculer chacune des intégrales, justifie que :

1) $\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = \int_{2\pi}^{4\pi} \sin x\,dx$;

2) $\int_{0}^{2\pi} \cos x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx$.

Propriété (*parité*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0. Soit a un élément de I.

- *Si f est paire, alors* $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$ *et* $\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt$.
- *Si f est impaire, alors* $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.

Exemples $\int_{-2\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = 0$, car la fonction sinus est impaire sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice de fixation

22

1) Justifie que : $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = 0$;

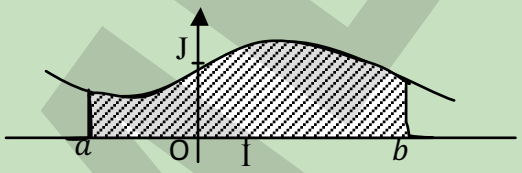
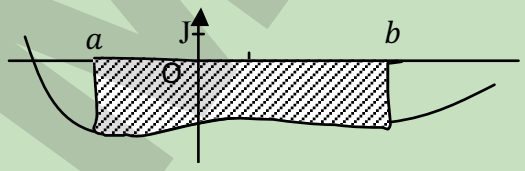
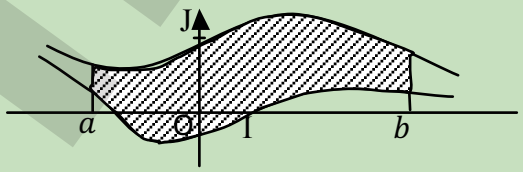
2) Justifie que : $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos x\,dx$.

SPÉCIMEN

9 CALCUL D'AIRES

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soient a et b deux éléments de I, tels que $a \leq b$.
Soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et de g dans le plan muni d'un repère orthogonal.

• Si *f* est positive sur $[a\,;b]$, alors l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $\int_a^b f(t)\,dt$	
• Si *f* est négative sur $[a\,;b]$, alors l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $-\int_a^b f(t)\,dt$	
• Si $f \leq g$ sur $[a\,;b]$, alors l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), (C_g), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $\int_a^b (g(t) - f(t))\,dt$	



Remarque

L'unité d'aire u.a vaut : 1. u.a = OI×OJ. (Si OI = 3cm et OJ = 2cm, alors 1. u.a = 3×2 cm² soit 6 cm².



Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 3 cm.

Calculons, en unité d'aire puis en cm², l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ et la courbe représentative de la fonction carré.

1. La fonction carré est continue et positive sur l'intervalle [0 ; 1]. Donc elle est intégrable sur [0 ; 1].

L'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ et la courbe représentative de la fonction carré est $\int_0^1 x^2\,dx$.

Or : $\int_0^1 x^2\,dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{3}$.

L'aire cherchée est $\frac{1}{3}$ u.a.

L'unité d'aire est 9 cm². L'aire de cette partie du plan est : $\frac{1}{3} \times 9$ cm². Soit 3 cm².

2. *f* et *g* désignent respectivement les fonctions carré et cube et (C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives de *f* et *g* dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Calculons en cm² l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ et les courbes représentatives de *f* et *g*.

L'aire $\mathcal{A}$ cherchée en unité d'aire est :

$\int_0^2 |f(x) - g(x)|\,dx$.

Sur l'intervalle [0 ; 1], (C_f) est au dessus de (C_g) et sur l'intervalle [1 ; 2], (C_g) est au dessus de (C_f).

SPECIMEN

Donc :

$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx + \int_1^2 [g(x) - f(x)]dx$.
D'où :

$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4]_0^1 + [\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3]_1^2$. On trouve en unité d'aire : $\mathcal{A} = \frac{3}{2}$. L'unité d'aire est 4 cm².
On en déduit que l'aire cherchée est 6 cm².

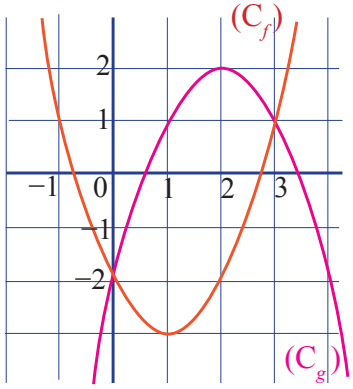
Exercices de fixation

23 On considère un rectangle (R) de longueur a cm et de largeur b cm. Justifie que l'aire en cm² de (R) est ab.

24 Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unité graphique 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.
Soit f une fonction continue et positive sur [1 ; 2], telle que : $f(x) = x^2 + x - 2$.
Calcule, en cm², l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) de f, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

25 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.
Soit f une fonction continue et négative sur [−2 ; 0], telle que : $f(x) = x^2 + x - 2$.
Calcule, en cm², l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) de f, la droite (OI) et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

26 Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $f(x) = x^2 - 2x - 2$ et $g(x) = -x^2 + 4x - 2$.
Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) sont représentées sur la figure ci-contre.
Pour tout x élément de [0 ; 3], $f(x) \leq g(x)$.
Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.



SPECIMEN

10 APPLICATIONS DU CALCUL INTÉGRAL

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] et n un entier naturel non nul. On considère la subdivision régulière $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, \ldots, n$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Remarque

Les sommes

$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{b-a}{n}i)$;

$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i)$ *et*

$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i)$ *sont des valeurs approchées de l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Exemples

Soit n un entier naturel non nul.

On pose : $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

Déterminons la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

C'est l'intervalle [0 ; 1] qui est subdivisé régulièrement :

$x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})$, *où* $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n = \ln 2$.

Exercice de fixation

27 Calcule les limites de chacune des suites de terme général S_n, ($n \in \mathbb{N}^*$):

a) $S_n = \frac{1}{n}(1 + \cos^2\frac{\pi}{n} + \ldots + \cos^2\frac{n\pi}{n})$;

b) $S_n = \frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{1^2+n^2}} + \frac{2}{\sqrt{2^2+n^2}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n^2}})$.

SPÉCIMEN

Conséquence : méthode des rectangles

On rapporte le plan à un repère orthogonal (O, I, J).

Soit f une fonction continue positive, croissante sur un intervalle [a ; b] et n un entier naturel non nul. On considère la subdivision régulière $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, *i = 0, ..., n. On pose :* $y_i = f(x_i)$. *On considère les rectangles* R_i *constitués des points M(x ; y) tels :* $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ *et* $0 \leq y \leq f(x_i)$, *i = 0, ..., n − 1. La somme des aires des rectangles* R_i *minore* $\int_a^b f(x)\,dx$. *On considère les rectangles* Q_i *constitués des points M(x ; y), tels que :* $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ *et* $0 \leq y \leq f(x_{i+1})$, *i allant de 0 à n−1. La somme des aires des rectangles* Q_i *majore* $\int_a^b f(x)\,dx$.

C'est-à-dire : $\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{b-a}{n}i) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i)$.

Remarque



Si on pose :

$U_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{b-a}{n}i)$ *et*

$V_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i)$,

alors

$\frac{u_n + v_n}{2}$ *est une valeur approchée de* $\int_a^b f(x)\,dx$ *à* $\frac{v_n - u_n}{2}$ *près.*

Si f une fonction continue positive et décroissante sur un intervalle [a ; b], alors les inégalités précédentes sont en sens inverse.



On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$.

On ne dispose pas en terminale de moyens pour le calcul de l'intégrale $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}$.

La méthode des rectangles permet d'avoir un encadrement et une valeur approchée de cette intégrale.

f est continue négative sur [0 ; 1].

Pour $n = 10$.

$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} f(\frac{1}{10}i) \leq \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx \leq \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9} f(\frac{1}{10}i)$.

Sous Excel, on a :

$3{,}03992599 \leq \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx \leq 3{,}23992599$.

3,13992599 est une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ à 0, 1 près.

Remarque



Avec des valeurs de n assez grands, on obtient un encadrement plus fin et une approximation plus fine.
Au niveau supérieur de l'enseignement, tu verras que cette intégrale vaut π.



Exercice de fixation

28 Pour chaque valeur de n donné, donne un encadrement et une valeur approchée de chacune des intégrales suivantes :

a) $n = 10$, $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$; b) $n = 20$, $\int_0^1 e^{-x^2}dx$;

c) $n = 15$, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

.....

.....

.....

.....

.....

SPECIMEN

1 Calcule les intégrales suivantes :

1) $\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx$; 2) $\int_0^1 x(1-x^2)^2dx$;

3) $\int_{-3}^7 \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^3}}$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2\, tdt.$

2 En utilisant une ou plusieurs intégrations par parties, calcule chacune des intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}cosxdx$;

3) $\int_1^e x^2\, lnxdx$; 4) $\int_1^e \frac{\ln(1+u)}{(1+u)^2}du$

3 En utilisant un changement de variable affine, calcule chacune des intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$; 2) $\int_0^1 x(1-x)^n dx$, n est un entier naturel non nul.

4 Calcule chacune des intégrales suivantes en utilisant une linéarisation.

1) $\int_0^{2\pi} cos^4 xdx$; 2) $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\cos^2 x$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 xcos^2 xdx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5 2xdx$.

SPECIMEN

5 Soit ω un nombre réel non nul, a et b deux nombres réels. On pose :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos^2 \omega t + b\sin^2 \omega t)dt$ et

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b\sin^2 \omega t + a\sin^2 \omega)dt$

1. Calcule
   a) I + J.
   b) I – J.
2. Déduis les valeurs de I et de J.

6 On considère la suite (I_n) définie par :

$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1. À l'aide d'une intégration par partie, établis une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
2. Calcule I_0.
3. Calcule I_n.

7 On considère la suite (I_n) définie par : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, établis une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}. $(n \geq 2)$
2. Déduis de ce qui précède, I_{2p} et I_{2p+1} $(p \in \mathbb{N})$.
3. a) Démontre que : $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \leq \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1$.

   b) Déduis : $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{(2\times4\times6\times\ldots\times2p)^2}{[1\times3\times5\times\ldots\times(2p-1)]^2(2p+1)}$.

8 On considère la suite (I_n) définie par :

$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1. Calcule I_0 et I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
3. Calcule l'intégrale J, telle que :

$J = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x + 1)e^x dx$.

SPÉCIMEN

9 On considère la fonction f définie par :

$f : \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$.
$x \longmapsto \tan x$.

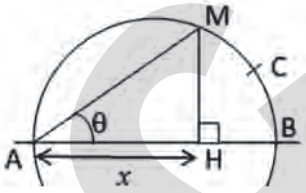
1. Démontre que f est une bijection. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
2. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}$ et on considère la fonction $h = gof$.
   a) Détermine les ensembles de définition de g et h.
   b) Calcule $h(0)$.
   c) Démontre que h est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et détermine sa fonction dérivée.
   d) Déduis de ce qui précède que : $g = f^{-1}$.
   e) Calcule l'intégrale I, telle que : $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.

10 Soit F l'application de $]0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. a) Étudie les variations de F.
   b) Déduis-en le signe de $F(x)$ pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$.
2. a) Détermine, sur $]0 ; +\infty[$, le signe de la fonction f définie par : $f(x) = F(x) - \ln x$.
   b) Déduis-en : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
3. Soit (C) la courbe représentative de F dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
   a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
   b) Précise la position de (T) par rapport à (C).
4. a) Démontre que : $\forall\, t \in]1 ; +\infty[$, $e^t > te^{\frac{1}{2}}$.
   b) Déduis-en que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$.
   c) Interprète graphiquement la limite précédente et le résultat de $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
5. Construis (T) et (C).

SPÉCIMEN

11 Soit (C) un cercle de diamètre [AB] et de rayon R. Un point M décrit le demi-cercle contenant le point C. Calcule la valeur moyenne de AM² dans chacun des cas suivants.



a) On définit la position de M sur le demi-cercle par l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ dont une mesure est θ.

b) On définit la position de M par la distance AH, où H est le projeté orthogonal de M sur (AB).

12 Soient $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$.

1. a) Calcule J + K et J − K.

   b) Déduis les valeurs exactes de J et K.

2. Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2 x \sin x + 4\sin^2 x)\,dx$.

13 Soit f et g deux fonctions définies sur $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$.

1. On suppose que f et g sont dérivables sur $]-1; +\infty[$. Calcule pour tout x appartenant à $]-1; +\infty[$, $f'(x)$ et $g'(x)$.

2. Calcule $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$.

3. Calcule à l'aide d'une intégration par parties, $J = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

SPECIMEN

14

1. a) Détermine les nombres réels *a, b* et *c,* tels que pour tout *x* élément de $\mathbb{R}\backslash\{-1; 0;1\}$, on ait :

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

b) Calcule $\int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}dx$.

2. $\int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)^2}dx$.

3. En utilisant une intégration par parties, calcule $\int_2^3 \frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}dx$.

15 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = (\frac{(2n)!}{n!n^n})\frac{1}{n}$.

1. Démontre que pour tout entier naturel *n* non nul, $\frac{(2n)!}{n!n^n} = (1+\frac{1}{n})\times(1+\frac{2}{n})\times\ldots\times(1+\frac{n}{n})$.

2. Déduis-en le calcul de la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

16 Le but de l'exercice est de donner par la méthode des rectangles un majorant de l'erreur absolue issue de l'approximation de l'intégrale d'une fonction dérivable sur un intervalle

[*a ; b*] dont la dérivée est continue sur cet intervalle.

Soit *f* une fonction de [*a ; b*] dans $\mathbb{R}$ dérivable et dont la dérivée est continue.

1. Démontre qu'il existe un nombre réel M strictement positif, tel que pour tout *x* appartenant à [*a ; b*] : $|f'(x)| \leq M$.

2. Démontre que : $\int_a^b |f(x)-f(a)|dx \leq M\frac{(b-a)^2}{2}$.

3. Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose :

$R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{b-a}{n}i)$ et $E_n = \int_a^b f(x)dx - R_n$.

a) Démontre que :

$$E_n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+\frac{b-a}{n}i}^{b+\frac{b-a}{n}(i+1)} (f(x)-f(a+\frac{b-a}{n}i))dx.$$

b) Déduis-en que : $|E_n| \leq M\frac{(b-a)^2}{2n}$.

4. Application :

5. On considère la fonction *f* de [0 ; 1] dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^{-x^2}$.

SPÉCIMEN

6. Détermine n de sorte que R_n soit une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,dx$ à 10^{-4} près.

17 Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$.

1. Démontre que : $I_1 = \frac{1}{2}\ln 2$.
2. Démontre que pour tout entier naturel non nul, $I_n \geq 0$.
3. Démontre que pour tout entier naturel non nul,

$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

4. a) Démontre que pour tout entier naturel non nul, la suite (I_n) est décroissante.

b) Étudie la convergence de la suite (I_n) puis détermine $\lim I_n$.

18 Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$I_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2\ln t}{t}dt$.

1. Démontre que pour tout entier naturel n non nul, $I_n = 2n - 1$.
2. Démontre que pour tout entier naturel n non nul, (I_n) n'est pas bornée.
3. Démontre que pour tout entier naturel n non nul, $(\frac{I_n}{n})$ est convergente.
4. Démontre que pour tout entier naturel n non nul, $I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n = n^2$.

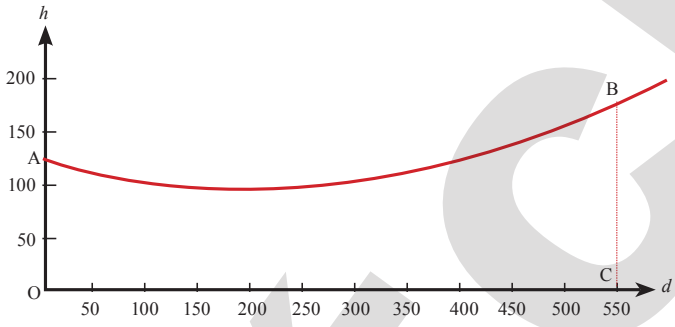
SPÉCIMEN

19 Une entreprise veut construire un pont de forme curviligne reliant deux quartiers A et B distants de 550 mètres, comme l'indique la figure ci-dessous. Pour assurer l'équilibre du pont, chaque distance d a été ajustée à une hauteur h définie par la relation :

$$h(d) = \frac{d^2}{1600} - \frac{d}{4} + 125.$$

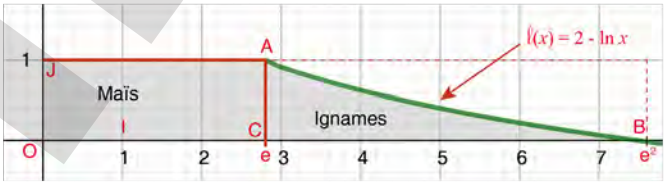
En attendant la fin des travaux et pour empêcher tout passage en dessous du pont, le maître d'œuvre doit couvrit la surface OABC avec un grillage synthétique. Il confit la tâche à un ouvrier. Celui-ci veut savoir combien de mètre carré de grillage il faut pour cette couverture. Ne sachant comment s'y prendre, il te sollicite.

Propose-lui une solution argumenté en utilisant tes connaissances mathématiques.



20 Un cultivateur dispose d'une grande parcelle rectangulaire pour ses cultures de maïs et d'igname comme l'indique la figure ci-dessous.
Malheureusement, une forte pluie a provoqué un glissement de terrain, réduisant la parcelle d'igname (voir figure).
Un expert a utilisé la fonction $\ell : x \mapsto 2 - \ln x$ pour modéliser la partie de la courbe entre A et B, dans le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1hm.
Déboussolé, le cultivateur veut déterminer la nouvelle superficie dont il disposera pour ses cultures, suite à ce glissement de terrain. N'y parvenant pas, il te sollicite.
Détermine cette nouvelle superficie à l'aide de tes connaissances mathématiques.

(On prendra 7,4 comme une valeur approchée de e^2 et on donnera l'arrondi d'ordre 0 du résultat trouvé)



SPÉCIMEN

11 STATISTIQUE À DEUX VARIABLES

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition d'une série statistique à deux caractères - la définition du point moyen d'un nuage de points - les tableaux de fréquences marginales - la formule de la covariance - la formule du coefficient de corrélation linéaire - les formules de calcul de a et b(resp. a' et b') dans l'équation $y = ax + b$ (resp. $x = a'y + b'$) d'une équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrées de y en x (resp. x en y).
ETABLIR	- les séries marginales à partir d'un tableau à double entrée représentant une série statistique à deux caractères
REPRÉSENTER	- un nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal - une droite d'ajustement de Y en fonction de X - une droite d'ajustement de X en fonction de Y
PLACER	- le point moyen d'un nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal
CALCULER	- les coordonnées du point moyen - la variance - la covariance - le coefficient de corrélation linéaire
INTERPRÉTER	- le coefficient de corrélation linéaire
DÉTERMINER	- une équation d'une droite d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés
ESTIMER	- la valeur de l'un des caractères connaissant la valeur correspondante de l'autre caractère : • à l'aide d'une équation d'une droite d'ajustement • à l'aide de la représentation graphique d'une droite d'ajustement
TRAITER UNE SITUATION	- faisant appel aux séries statistiques à deux caractères

Situation d'apprentissage

Le tableau ci-dessous donne le nombre total d'adhérents au club de mathématique en 2018 :

Mois x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'adhérents y_i	1 100	1 160	1 220	1 370	1 620	1 550	1 600	1 500	1 790	1940	2060	1 980

Une fondation veut octroyer une aide financière au club si le nombre d'adhérents dépasse 3 000 élèves. Les élèves veulent déterminer quand ils pourront recevoir ce don.
Ils décident d'étudier l'évolution du nombre d'adhérents en fonction du nombre de mois.

SPÉCIMEN

1 GÉNÉRALITÉ

1. Définition- Présentation

On considère une population d'effectif N. Si on étudie deux caractères X et Y de cette population, on dit que l'on étudie une série statistique double. Chaque individu de cette population est désigné par un nombre compris entre 1 et n. A chaque individu i ($1 \leq i \leq n$) correspond un couple $(x_i ; y_i)$, où x_i est la modalité du caractère X et y_i est la modalité du caractère Y associé à l'individu i.
L'ensemble des couples $(x_i ; y_i)$ définit une série statistique à deux variables.

Exemples

Tableau linéaire

La taille moyenne d'un jeune enfant est donnée, en fonction de son âge (en mois), dans le tableau suivant :

Age x_i(en mois)	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
Taille y_i(en cm)	66	71	74	77	80	83	85	88	90	92

La taille d'un enfant de 12 mois est de 74 cm.
Tous les caractères considérés dans la suite sont quantitatifs et les tableaux seront linéaires.

2. Nuage de points

Dans un repère orthogonal bien choisi, l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$, avec $1 \leq i \leq n$, est appelé le nuage de points associé à cette série statistique à deux variables.

3. Point moyen

Soit une série statistique à deux variables $(x_i ; y_i)$ ($1 \leq i \leq n$).
Notons $\overline{X}$ la moyenne des valeurs x_i et $\overline{Y}$ la moyenne des valeurs y_i. On a :

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{N} \text{ et } \overline{Y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{N}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
Le point G de coordonnées $(\overline{X} ; \overline{Y})$ est appelé le point moyen du nuage de points associé à cette série statistique à deux variables.

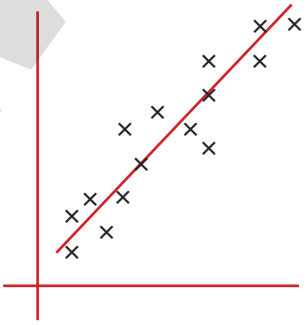
Exemples

Pour le Tableau linéaire ci-dessus on a : $\overline{X} = 19,5$ et $\overline{Y} = 80,6$. *Donc le point moyen G a pour coordonnées G(A9,5 ; 80,6).*

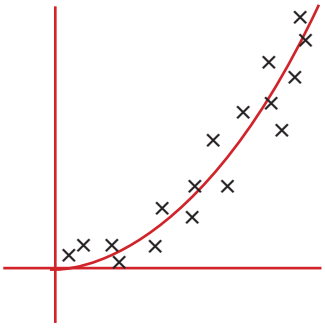
2 AJUSTEMENT AFFINE PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

1. Le principe de l'ajustement

Suivant la forme du nuage de points, on peut essayer de trouver une fonction f qui modélise le lien entre les deux caractères (c'est-à-dire que la courbe d'équation $y = f(x)$ passe le plus près possible de chacun des points).



Ajustement par une droite (ou affine)



Ajustement par une parabole

2. Covariance d'une série statistique double

Soit une série statistique à deux variables $(x_i ; y_i)$ ($1 \leq i \leq n$).
On appelle covariance de la série statistique double de variables X et Y, le nombre réel :
$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})$. *On la note : Cov(X ;Y).*

SPECIMEN



Remarques

- 1. $Cov(X;Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{X}.\bar{Y}$
- 2. $Cov(X;Y) = Cov(Y;X)$

3. Variance d'une série statistique

Soit une série statistique à deux variables $(x_i ; y_i)$ $(1 \leq i \leq n)$.
On appelle variance de la série statistique X le nombre réel : $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{X}^2$. On la note : V(X).



Remarque

$V(X) = Cov(X ; X)$



Pour l'exemple ci-dessus on a :
Cov(X ; Y) = 69,6.
V(X) = 74,235.
V(Y) = 66,031.

4. Écart-type

Soit une série statistique à deux variables $(x_i ; y_i)$ $(1 \leq i \leq n)$.
On appelle écart-type de la série statistique X, la racine carrée de la variance de X.
On la note : σ_X.



Remarques

L'Écart-type s'exprime dans la même unité que les valeurs observées.



Pour l'exemple ci-dessus on a :
$\sigma_X = 8{,}616$.
$\sigma_Y = 8{,}126$.

5. Coefficient de corrélation linéaire

Soit V(X) la variance de la série statistique de caractère X, V(Y) la variance de la série statistique de caractère Y et Cov(X,Y) la covariance de X et Y. On appelle coefficient de corrélation linéaire entre les caractères X et Y le nombre réel noté r, tel que :

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}.$$

Ce coefficient permet de voir la dépendance linéaire des deux caractères X et Y.



Remarques

- *Le coefficient de corrélation linéaire r est un nombre réel de même signe que Cov(X,Y) et on a: $-1 \leq r \leq 1$.*
- *Si $|r|$ est proche de 1, c'est-à-dire: $0{,}87 \leq r < 1$ ou $-1 < r \leq -0{,}87$, alors on dit qu'il y a une bonne corrélation linéaire ou une forte corrélation linéaire entre les deux caractères.*



Pour l'exemple ci-dessus on a :
$r = 0{,}99$.

6. Droites de régressions

Soit V(X) la variance de la série statistique de caractère X, V(Y) la variance de la série statistique de caractère Y et Cov(X,Y) la covariance de X et Y.
La droite (Δ) d'équation : $y = ax + b$ où

$a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$ *et* $b = \bar{Y} - a\bar{X}$ *est appelée la droite de régression de Y en X.*

La droite (Δ') d'équation : $x = a'y + b'$ avec :

$a' = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)}$ *et* $b' = \bar{X} - a'\bar{Y}$ *est appelée la droite de régression de X en Y.*

Chacune des équations de droite a été obtenue par la méthode des moindres carrés.

SPECIMEN



Remarques

- *Les droites (Δ) et (Δ') passent par le point moyen G du nuage de points.*

Si r est le coefficient de corrélation linéaire, on a :

- $aa' = r^2$ *et* $|r| = \sqrt{aa'}$;
- *Si* $a > 0$, *et* $a' > 0$, *alors* $r = \sqrt{aa'}$;
- *Si* $a < 0$, *et* $a' < 0$, *alors* $r = -\sqrt{aa'}$;
- *Si* $r^2 = 1$, *alors* $a = \frac{1}{a'}$ *et les deux droites sont confondues.*



Les derniers recensements de la population d'une ville de Côte d'Ivoire ont abouti aux données suivantes :

Année	1993	1995	1999	2002	2004	2006	2009
Nombre d'années x_i depuis1992	1	3	7	10	12	14	17
Population y_i (en milliers d'habitants)	4,4	4,7	4,8	4,9	5,5	5,5	5,7

On cherche à déterminer à partir de ces données la population de cette ville en 2020.

1. Représentons le nuage de points de la série statistique double (X ; Y).

1 cm pour le nombre d'années après 1992

1 cm pour mille habitants

2. a) Calculons les coordonnées du point moyen G de la série $(x_i ; y_i)$.

b) Déterminons la covariance Cov(X ; Y) de la série $(x_i ; y_i)$.

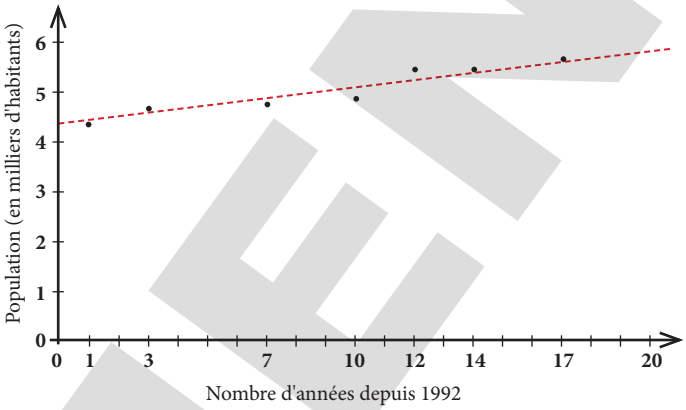
c) Déterminons les variances respectives V(X) et V(Y) des séries statistiques X et Y.

d) Calculons le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i ; y_i)$.

Un ajustement affine est-il approprié ?

3. Déterminons, par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de y en x, ainsi qu'une estimation de la population de cette ville en 2020.

1.



2. a) Calculons les coordonnées du point moyen G de la série $(x_i ; y_i)$.

$$\overline{X} = \frac{1+3+7+10+12+14+17}{7} = \frac{64}{7} \approx 9{,}1429 \text{ et}$$

$$\overline{Y} = \frac{4{,}4+4{,}7+4{,}8+4{,}9+5{,}5+5{,}5+5{,}7}{7} = \frac{35{,}5}{7} \approx 5{,}0714$$

b) Déterminons la covariance Cov(X ; Y) de la série $(x_i ; y_i)$.

$\text{Cov}(X ; Y) = \frac{1}{7}(1\times4{,}4 + 3\times4{,}7 + 7\times4{,}8 + 10\times4{,}9 + 12\times5{,}5 + 14\times5{,}5 + 17\times5{,}7) - 9{,}1429 \times 5{,}0714 = 2{,}347$

c) Déterminons les variances respectives V(X) et V(Y) des statistiques X et Y.

$V(X) = \frac{1}{7}(1^2 + 3^2 + 7^2 + 10^2 + 12^2 + 14^2 + 17^2) - (9{,}1429)^2 = 28{,}9796$

$V(Y) = \frac{1}{7}((4{,}4)^2 + (4{,}7)^2 + (4{,}8)^2 + (4{,}9)^2 + (5{,}5)^2 + (5{,}5)^2 + (5{,}7)^2) - (5{,}0714)^2 = 0{,}2078.$

d) Calculons le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i ; y_i)$.

Un ajustement affine est-il approprié ?

$$r = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{2{,}347}{5{,}383\times0{,}456} = 0{,}956.$$

Oui, un ajustement linéaire est approprié car : $0{,}87 \leq r < 1$.

3. Déterminons, par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de y en x, ainsi qu'une estimation de la population de cette ville en 2020.

On a : $a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{2{,}347}{28{,}9796} = 0{,}081.$

SPECIMEN

On a : $b = \overline{Y} - a\overline{X} = 5{,}0714 - 0{,}81 \times 9{,}1429 \approx 4{,}331$.
Une équation de la droite de régression est :
$y = 0{,}081x + 4{,}331$.
$2020 - 1992 = 28$.
On a : $y = 0{,}081 \times 28 + 4{,}331$.
$Y = 6{,}599$.
La population est estimée à 6 599 000 habitants en 2020.



Exercice de fixation

1 Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaires en millions de Francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où x désigne le numéro du mois et y le chiffre d'affaires correspondant.

x	1	2	3	4	5	6
y	12	13	15	19	21	22

1. Détermine Cov(X, Y).
2. Détermine V(X) puis V(Y).
3. Détermine le coefficient de corrélation r entre X et Y.

Interprète le résultat obtenu.

4. a) Détermine une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

   b) Détermine une équation de la droite de régression de X en Y par la méthode des moindres carrés.
5. En utilisant la droite (D), détermine une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7e mois.

SPÉCIMEN

1 On considère 10 salariés observés à l'aide de deux variables « âge » en années (X) et du « salaire » en milliers (Y). Les informations brutes sont données dans le tableau linéaire suivant :

Ages (en années)	15	20	26	34	37	43	44	50	52
Salaire	600	750	740	990	820	820	1075	995	910

Détermine le coefficient de corrélation entre X et Y. Interprète le résultat obtenu.

2 On considère la série statistique à 2 caractères, définie par le tableau ci-dessous :

x_i	8,1	11	14,4	15,2	21,5
y_i	9,7	12,8	18,5	22,8	31,5

1. Représente le nuage de points $(x_i ; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
2. Détermine les moyennes et les écarts types des deux séries (x_i) et (y_i).
3. Détermine une équation de la droite de régression de Y en X et la construire dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
4. Détermine y_i pour $x_i = 23,2$.

3 Une enquête a été réalisée auprès de 500 ménages. Elle porte sur la relation entre le nombre d'enfants des ménages (Y) et leurs dépenses annuelles de fournitures scolaires en milliers de francs CFA (X).

L'enquête fournit les résultats suivants :

X \ Y	1	2	3
Entre 0 et 100	71	24	37
Entre 100 et 200	37	4	12
Entre 200 et 300	36	11	16

1. Établis la distribution marginale du nombre d'enfants en pourcentage.

2. Établis la distribution marginale des dépenses annuelles de fournitures.

3. a) Détermine la proportion des ménages d'un enfant.

b) Détermine la proportion des ménages dont la dépense annuelle en fournitures scolaires est comprise entre 100 000 FCFA et 200 000 FCFA.

SPÉCIMEN

4 On considère la série statistique double suivante où une valeur de y est notée α.

x	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	13	12	14	16	α

On sait qu'une équation cartésienne de la droite de régression de y en x est : $y = 9x + 0{,}6$.

1. Détermine la valeur de α.
2. Déduis le coefficient de corrélation linéaire.

5 Le tableau suivant indique la répartition des dépenses mensuelles moyennes alimentaires des ménages de 3 personnes ayant un enfant mineur, suivant le revenu mensuel moyen en 1989.

Revenu mensuel moyen x_i (FCFA)	39 800	60 300	79 400	100 000	151 400	251 000	398 100
Dépenses alimentaires y_i (FCFA)	30 000	37 150	41 700	45 700	55 100	70 800	87 100

1. On pose $t_i = \ln x_i$ et $z_i = \ln y_i$.

Établis le tableau donnant les valeurs de z_i en fonction des valeurs de t_i.

(***ln désigne le logarithme népérien. Les résultats des calculs seront arrondis à 0,01 près***).

2. Représente le nuage de points $(t_i ; z_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
3. Détermine une équation de la droite de régression de z en t par la méthode des moindres carrés.
4. Déduis du résultat précédent une relation entre x et y de la forme $y = ax^b$.
5. Détermine les dépenses mensuelles moyennes alimentaires d'un ménage de 3 personnes qui a un salaire moyen de 20 000 FCFA en 1989.

SPÉCIMEN

6 On considère la série statistique à 2 caractères, définie par le tableau suivant :

t_i : *année*	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
x_i : *Nombre de spectacles présentés par une troupe théâtrale à Abidjan*	48	53	57	62	68	73	77
y_i : *Nombre de sachets de gnamankoudji de 50F vendus dans un restaurant d'Adjamé*	7 000	7 450	8 000	8 500	9 050	9 550	10 000

1. Construis dans le plan muni d'un repère orthogonal le nuage de points $(x_i ; y_i)$. On constate que sa forme allongée justifie un ajustement affine.
2. Détermine les coordonnées du point moyen.
3. Détermine le coefficient de corrélation linéaire.
4. Vérifie que la droite de régression de y en x a pour équation : $y = 103{,}08x + 2057{,}25$.

SPÉCIMEN

7 On considère la série statistique à 2 caractères, définie par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	198	881	1 256	1 489	1 804	1 983	2 104

8	9	10	11	13
2 247	2 312	2 468	2 541	2 639

1. Représente le nuage de points (x_i, y_i).
2. Posons $x' = \ln x$, représenter le nuage de points $(x'_i ; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
3. Détermine le coefficient de corrélation de la série double (x', y).
4. Détermine la droite de régression de y en fonction de x'.
5. Déduis que $y = a\ln x + b$, où a et b sont des nombres réels.

8 La série statistique double suivante indique les notes mensuelles d'un élève au cours des cinq premiers mois de l'année scolaire numérotés de 1 à 5.

Mois x_i	1	2	3	4	5
Note y_i	8	9	12	12	13

1. Représente le nuage de points (x_i , y_i) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
2. Détermine les coordonnées du point moyen G.
3. Détermine la moyenne et l'écart-type de chacune des deux séries X et Y.
4. Calcule la covariance de (X, Y) .
5. Détermine le coefficient de corrélation linéaire de cette série double.
6. Détermine une équation de la droite de régression de Y en X et la construire dans le plan muni du repère (O, I, J)

SPECIMEN

9 Le tableau ci-dessous donne l'ancienneté x_i en année et le salaire y_i en milliers de francs CFA par mois de chacun des huit ouvriers d'une exploitation agricole.

x_i	3	5	7	9	12	14	16	18
y_i	68	74	89	101	120	130	135	155

1. Représente le nuage de points en portant en abscisse les valeurs x_i et en ordonnées les valeurs y_i. Sur le graphique, on prendra pour unités : 1 cm pour 1 an en abscisse et 1 cm pour 10 milliers de francs CFA en ordonnées.
2. a) Calcule les coordonnées du point moyen G du nuage de points.
   b) Place G sur le graphique.
3. a) Vérifie que la covariance de la série double $(x_i ; y_i)$ est égale à 145.
   b) Démontre qu'une équation de la droite de régression de y en fonction de x par la méthode des moindres carrés est : $y = \frac{580}{101}x + \frac{4919}{101}$.
   c) Détermine le coefficient de corrélation linéaire r.
   d) Utilise l'ajustement linéaire réalisé pour déterminer le salaire d'un ouvrier dans sa 24ème année.

SPECIMEN

10 Le Tableau suivant est relatif aux voitures de petite cylindrée circulant dans une ville.

X désigne la Puissance en cv et *Y* désigne la durée des pneumatiques en milliers de kilomètres (centres des classes). Les fréquences données dans le tableau sont des pourcentages.

X \ *Y*	2	3	4	Total
20	0	8	30	38
25	5	20	7	32
30	25	3	2	30
Total	30	31	39	100

1. Donne une interprétation du nombre 7 du tableau.
2. La première et la dernière ligne ainsi que la première et la dernière colonne, définissent 2 séries statistiques dites distributions marginales.
   a) Extrais les séries marginales x et y, puis calcule les moyennes notées $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des séries x et y.

x	20	25	30
Fréquence			

y	2	3	4
Fréquence			

   b) Représente les 9 points de coordonnées $(x_i; y_i)$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J) sans tenir compte du « poids » de chaque point.
   c) Trace une droite passant « le plus près possible» des points du graphique. On dit qu'on a ajusté une droite à l'ensemble des points. Détermine une équation de la droite (D).
3. On peut se demander si la droite tracée est bien celle qui passe « le plus près» des points connus. Une méthode appelée « méthodes des moindres carrées» nous permettra d'estimer numériquement, et de façon objective, la qualité de l'ajustement réalisée. Pour cela:
   a) Donne les coordonnées du point moyen G(x, y).
   b) Calcule la variance V(x) de x et la variance V(y) de y.
   c) Calcule la covariance de (x, y).
   d) Détermine une équation de la droite (D) de régression de y en fonction de x.
   e) Détermine équation de la droite (D') de régression de x en fonction de y.
4. Calcule le coefficient de corrélation linéaire. Interprète le résultat obtenu.

SPÉCIMEN

11 Le tableau suivant indique, pour une même distance les variations des quantités y_i d'essence consommé de certaines voitures, suivant leurs puissances x_i (x_i est exprimé en chevaux et y_i en litres)

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	10	12	20	23	26	30	32	35

1. Représente graphiquement le nuage de points associé à cette série dans le plan muni d'un repère orthogonal :
- 1 cm sur l'axe des abscisses représente 1 cheval.
- 1 cm sur l'axe des ordonnées représente 5 litres.
2. Calcule les coordonnées du point moyen G et place ce point dans le même repère.
3. a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire r associé à cette série statistique.
   b) Interprète ce résultat.
4. Par la méthode des moindres carrés, détermine une équation de la droite de régression de y en x.
5. a) Détermine une estimation de la quantité d'essence consommée par une voiture de puissance 12 chevaux.
   b) Détermine une estimation de la puissance d'une voiture qui a consommé 50 litres d'essence pour cette distance.

SPÉCIMEN

SITUATION COMPLEXE

12 Le tableau ci-dessous donne le nombre total d'adhérents au club de mathématique en 2018.

Mois x_i de l'année 2018	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'adhérents y_i	1100	1160	1220	1370	1620	1550	1600	1500	1790	1940	2060	1980

Une fondation veut octroyer une aide financière au club si le nombre d'adhérents dépasse 3 000 élèves. Les élèves veulent déterminer quand ils pourront recevoir ce don.

Faisant partie de ce club, tu es sollicité par tes camarades pour déterminer la période (mois et l'année) à laquelle le club pourrait recevoir ce don.

Exploite le tableau ci-dessus pour répondre à la préoccupation des membres du club.

SPÉCIMEN

12 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition d'une équation différentielle - les solutions de chaque équation différentielle au programme
IDENTIFIER	- une équation différentielle
JUSTIFIER	- qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
RÉSOUDRE	- une équation différentielle du type $y' = ay$ (a réel) - une équation différentielle du type $y' = ay + b$ (a et b réels et $a \neq 0$) - une équation différentielle du type $y'' = 0$ - une équation différentielle du type $y'' = \omega^2 y$ (ω réel non nul) - une équation différentielle du type $y'' = -\omega^2 y$ (ω réel non nul)
DÉTERMINER	- la solution d'une équation différentielle du type $y' = a y + b$ (a et b réels) satisfaisant à une condition initiale donnée - la solution d'une équation différentielle du type $y'' = m y$ (m réel) satisfaisant à des conditions initiales données
TRAITER UNE SITUATION	- faisant appel aux équations différentielles

Situation d'apprentissage

L'enseignant de physique-chimie vous donne les informations suivantes :
«lors de la chute d'un parachutiste, le parachute fait subir une force de frottement opposée à sa vitesse. On suppose que le frottement $\vec{F}$ est proportionnel à la vitesse $\vec{v}$: $\vec{F} = -km\vec{v}$ (où k est le coefficient de frottement). le principe fondamental de la mécanique établit que :
$mg - kmv = ma$ (m est la masse, v sa vitesse, a son accélération et g la constante de gravitation).
En remarquant que l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, on obtient l'équation : $\frac{dv(t)}{dt} + kv(t) = g$.
La détermination d'une fonction v judicieusement choisie permettra de déterminer la position du parachutiste à tout instant t ».
Émerveillés par l'existence d'une équation qui met en relation une fonction et sa dérivée, les élèves décident de faire des recherches sur ces types d'équations.

SPECIMEN

1 GÉNÉRALITÉ

Définition

On appelle équation différentielle, toute équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.



L'équation $y'' + 5y' + y = 0$ est une équation différentielle à coefficient constant.

Exercices de fixation

1 Ordonne certains de ces groupes de mots pour obtenir une définition juste.

s'appelle une équation différentielle / et des dérivées successives de l'inconnue / toute équation/ dans laquelle apparaissent l'inconnue / dont l'inconnue est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2 Parmi les équations suivantes, entoure, celles qui sont des équations différentielles.

$2y^2 + y = 2$; $y' + 4 = 0$; $y^2 = 1$;

$y'' + 2y' + y = 5$; $5y + 3 = 0$.

2 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y' = ay$ (a EST UN NOMBRE RÉEL)

Propriété

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ (a est un nombre réel) sont les fonctions : $x \mapsto Ce^{ax}$ ($C \in \mathbb{R}$).



On considère l'équation différentielle $y' = -3y$. Déterminons les solutions de cette équation différentielle.

On a : $y' = ay$ avec $a = -3$. Donc les solutions sont de la forme $y = Ce^{-3x}$ ($C \in \mathbb{R}$).

Exercices de fixation

3 Entoure la lettre correspondant à la bonne réponse.

L'équation différentielle $y' = 3y$ a pour solution les fonctions :

A) $x \mapsto ke^{3x}$, $k \in \mathbb{R}$; *B)* $x \mapsto ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$;

C) $x \mapsto 3e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$; *D)* $x \mapsto 3e^{-kx}$, $k \in \mathbb{R}$.

4 Entoure la lettre correspondant à la bonne réponse.

L'équation différentielle $y' = -2y$ a pour solution les fonctions :

A) $x \mapsto ke^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$; *B)* $x \mapsto ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$;

C) $x \mapsto 2e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$; *D)* $x \mapsto 2e^{-kx}$, $k \in \mathbb{R}$.

SPÉCIMEN

Propriété

Soit $(x_0 ; y_0)$ un couple de nombres réels. L'équation différentielle $y' = a\,y$ (a est un nombre réel) admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0.



Trouvons les solutions des équations différentielles ci-dessous vérifiant les conditions initiales en regard.

$3y' - 2y = 0$; $y(2) = e^2$.

$y' - 2y = 0$; $y(-1) = -3$.

On a : $3y' - 2y = 0$; la solution générale est $y = Ce^{\frac{2}{3}x}$ ($C \in \mathbb{R}$). $y(2) = e^2$ donne $e^2 = Ce^{\frac{4}{3}}$, donc $C = e^{\frac{2}{3}}$.

Finalement : $y = e^{\frac{2}{3}(x+1)}$.

$y' - 2y = 0$; la solution générale est $y = Ce^{2x}$ ($C \in \mathbb{R}$).

$y(-1) = -3$ donne $-3 = Ce^{-2}$ donc $C = -3e^2$.

Finalement : $y = -3e^{2x+2}$.

Exercices de fixation

5 Résous l'équation différentielle $y' = 2y$.

Détermine la solution f de cette équation différentielle qui vérifie $f(1) = 0$.

6 Résous l'équation différentielle $y' = \frac{1}{3}y$.

Détermine la solution g de cette équation différentielle qui vérifie $g(6) = 2$.

3 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y' = a\,y + b$ (a et b réels et $a \neq 0$)

Propriété

Soit a et b deux nombres réels, avec $a \neq 0$. Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ sont les fonctions y_k définies sur $\mathbb{R}$ par $y_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$.



Trouvons les solutions des équations différentielles ci-dessous :

a) $y' = 2y + 3$; b) $5y' - 2y = 3$.

a) Les solutions sont les fonctions de la forme : $y = ke^{2x} - \frac{3}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.

b) On a : $5y' - 2y = 3$ soit $y' = \frac{2}{5}y + \frac{3}{5}$. Les solutions sont les fonctions de la forme :

$y = ke^{\frac{2}{5}x} - \frac{3}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercices de fixation

7 Entoure la lettre correspondant à la bonne réponse.

L'équation différentielle $y' = 2y + 5$ a pour solution les fonctions :

A) $x \mapsto ke^{2x} - \frac{5}{2}$, $k \in \mathbb{R}$; B) $x \mapsto ke^{-3x} - \frac{5}{2}$, $k \in \mathbb{R}$;

C) $x \mapsto ke^{2x} + \frac{5}{2}$, $k \in \mathbb{R}$; *D)* $x \mapsto ke^{-3x} + \frac{5}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.

8 Entoure la lettre correspondant à la bonne réponse.

L'équation différentielle $y' = 4y - 24$ a pour solution les fonctions :

A) $x \mapsto ke^{2x} - 6$, $k \in \mathbb{R}$; B) $x \mapsto ke^{4x} - 6$, $k \in \mathbb{R}$;

C) $x \mapsto ke^{4x} + 6$, $k \in \mathbb{R}$; *D)* $x \mapsto ke^{-3x} + 6$, $k \in \mathbb{R}$.

SPÉCIMEN

Propriété

Soit $(x_0 ; y_0)$ un couple de nombres réels.
L'équation différentielle $y' = a y + b$ admet une unique solution y vérifiant la condition $y(x_0) = y_0$.



Trouvons les solutions des équations différentielles ci-dessous vérifiant les conditions initiales en regard.
a) $y' - 2y = 3$; $y(0) = 3$.
b) $5y' - 2y = 3$; $y(-2) = 0$.

a) Les solutions sont : $y = ke^{2x} - \frac{3}{2}$, $k \in \mathbb{R}$. $y(0) = 3$ donne $3 = k - \frac{3}{2}$, soit $k = \frac{9}{2}$.
Donc : $y = \frac{9}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$

b) Les solutions sont : $y = ke^{\frac{2}{5}x} - \frac{3}{2}$, $k \in \mathbb{R}$. $y(-2) = 0$ donne $0 = ke^{-\frac{4}{5}} - \frac{3}{2}$, soit $k = \frac{3}{2}e^{\frac{4}{5}}$.
Donc : $y = \frac{3}{2}(e^{\frac{2}{5}(x+2)} - 1)$.



Exercices de fixation

9 Résous l'équation différentielle $y' = 2y + 4$.
Détermine l'unique solution f de l'équation différentielle $y' = 2y + 4$ qui vérifie $f(1) = 1$.

10 Résous l'équation différentielle $y' = \frac{1}{3}y + 2$.
Détermine l'unique solution h de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{3}y + 2$ qui prend la valeur 2 en 0.

4 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y'' = 0$

Propriété

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les fonctions : $x \mapsto ax + b$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$)



Justifions que les fonctions f et g définies par : $f(x) = 8x - 7$ et $g(x) = -\frac{x}{2} + 5$ sont des solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$.

- On a : $f'(x) = 8$ et $f''(x) = 0$, donc f est une solution de l'équation différentielle $y'' = 0$.
- On a : $g'(x) = -\frac{1}{2}$ et $g''(x) = 0$, donc g est une solution de l'équation différentielle $y'' = 0$.

SPÉCIMEN

Exercices de fixation

11 Entoure la lettre correspondant à la bonne réponse.
L'équation différentielle $y'' = 0$ a pour solution les fonctions :
A) $x \mapsto ke^{2x} + p$, $k \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$;
B) $x \mapsto kx + p$, $k \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$;
C) $x \mapsto kx^3 + p$, $k \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$.

12 Justifie que la fonction : $x \mapsto x + 8$ est une solution de l'équation différentielle $y'' = 0$.

Propriété

Soit $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ tout triplet de nombres réels. L'équation différentielle $y'' = 0$ admet une unique solution y dans $\mathbb{R}$, telle que :
$y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$.

Exemples

Trouvons les solutions des équations différentielles ci-dessous vérifiant les conditions initiales en regard.
a) $y'' = 0$; $y(-1) = 1$ et $y(1) = 3$;
b) $y'' = 0$; $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$.

a) $y'' = 0$; $y(-1) = 1$ et $y(1) = 3$, $y = ax + b$; $y(-1) = 1$ donne $-a + b = 1$ et
$y(1) = 3$ donne $a + b = 3$. La résolution du système donne $a = 1$ et $a = 2$.
La fonction cherchée est y telle que : $y = x + 2$.
b) La fonction solution de l'équation différentielle est la fonction y, telle que $y = x$.

Exercices de fixation

13 On considère l'équation différentielle (E) : $y'' = 0$.
Détermine l'unique solution p de (E) qui vérifie : p(1) = 2 et p(0) = 1.

14 Résous l'équation différentielle (F) : $y'' = 0$.
Détermine la solution u de (F) qui vérifie : $u(0) = 5$ et $u(2) = 9$.

5 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y'' = \omega^2 y$ (ω nombre réel non nul)

Propriété

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$ (ω nombre réel non nul) sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$).

SPECIMEN

Exemples

Déterminons les solutions de l'équation différentielle $y'' = 9y$.

Les solutions sont les fonctions y de la forme : $y = Ae^{3x} + Be^{-3x}$, $(A \in \mathbb{R}$ *et* $B \in \mathbb{R})$.

Exercices de fixation

15 Dans chacun des cas suivants, résous l'équation différentielle (E).

a) (E) : $y'' - y = 0$; b) (E) : $y'' - 4y = 0$;
c) (E) : $y'' - 3y = 0$.

16 Dans chacun des cas suivants, résous l'équation différentielle (E).

a) (E) : $4y'' - y = 0$; b) (E) : $16y'' - 9y = 0$;
c) (E) : $4y'' - 49y = 0$.

Propriété

Soit $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ tout triplet de nombres réels. L'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$ (ω nombre réel non nul) admet une unique solution y dans $\mathbb{R}$, telle que : $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$.

Exemples

Trouvons la solution de l'équation différentielle ci-dessous vérifiant les conditions initiales en regard :
$4y'' - y = 0$; $y(0) = 3$ et $y'(0) = -3$.

$4y'' - y = 0$; $y(0) = 3$ et $y'(0) = -3$.
Les solutions générales sont les fonctions y, telles que :

$y = Ae^{\frac{x}{2}} - Be^{\frac{-x}{2}}$. $(A \in \mathbb{R}$ *et* $B \in \mathbb{R})$

$y' = \frac{A}{2}e^{\frac{x}{2}} - \frac{B}{2}e^{\frac{-x}{2}}$.

On a ainsi : $A + B = 3$ et $\frac{A}{2} - \frac{B}{2} = -3$. Soit $A = -\frac{3}{2}$ et $B = \frac{9}{2}$.

En définitive : $y = \frac{-3}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{9}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

Exercices de fixation

17 Dans chacun des cas suivants, résous l'équation différentielle (E) et détermine la solution vérifiant la condition initiale donnée.

a) (E) : $f'' - 4f = 0$; $f(0) = 1$ et $f(\frac{1}{2}) = 2$;
b) (E) : $y'' - y = 0$; $y(0) = 1$ et $y(2) = 2$.

SPÉCIMEN

18 Dans chacun des cas suivants, résous l'équation différentielle (E) et détermine la solution vérifiant la condition initiale donnée.

a) (E) : $9f'' - f = 0$; $f(\frac{1}{3}) = 1$ et $f(1) = 18$;

b) (E) : $4f'' - 9f = 0$; $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

6 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y'' = -\omega^2 y$ (ω nombre réel non nul)

Propriété

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$ (ω nombre réel non nul) sont les fonctions : $x \mapsto A\cos \omega x + B \sin \omega x$ ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$).

Exemples

Déterminons les solutions des équations différentielles suivantes :

a) $y'' = -4y$;

b) $y'' + \pi^2 y = 0$.

a) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = -4y$ sont les fonctions :
$x \mapsto A\cos 2x + B \sin 2x$ ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$)

b) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = 0$ sont les fonctions :
$x \mapsto A\cos \pi x + B \sin \pi x$ ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$)

Exercices de fixation

19 Dans chacun des cas suivants, résous l'équation différentielle (E).

a) (E): $y'' + y = 0$; b) (E): $y'' + 4y = 0$;

c) (E): $y'' + 9y = 0$.

20 Dans chacun des cas suivants, résous l'équation différentielle (E).

a) (E): $4y'' + y = 0$; b) (E): $16y'' + 9y = 0$;

c) (E): $4y'' + 49y = 0$.

Propriété

Soit $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ tout triplet de nombres réels. L'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$ (ω nombre réel non nul) admet une unique solution f dans $\mathbb{R}$, telle que : $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

SPECIMEN

Exemples Déterminons la solution f de l'équation différentielle (E) : $4y'' + 49y = 0$, telle que :

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'(0) = -\sqrt{2}$.

La solution générale est f telle que :

$f(x) = A\cos\frac{7}{2}x + B\sin\frac{7}{2}x$. (A$\in \mathbb{R}$ et B $\in \mathbb{R}$).

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc $A\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + B\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

soit $\frac{\sqrt{2}}{2}A - \frac{\sqrt{2}}{2}B = 0$.

$f(x) = A\cos\frac{7}{2}x + B\sin\frac{7}{2}x$.

$f'(x) = -\frac{7}{2}A\sin\frac{7}{2}x + \frac{7}{2}B\cos\frac{7}{2}x$;

$f'(0) = -\sqrt{2}$, donc : $B = \frac{-2\sqrt{2}}{7} = A$.

Finalement : $f(x) = \frac{-2\sqrt{2}}{7}\cos\frac{7}{2}x - \frac{2\sqrt{2}}{7}\sin\frac{7}{2}x$.

Exercices de fixation

21 Dans chacun des cas suivants, résous l'équation différentielle (E) et détermine la solution f vérifiant la condition initiale donnée.

a) (E): $y'' + 4y = 0$; $f(0) = 1$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = 2$;

b) (E): $y'' + y = 0$; $f(0) = 1$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 4$.

22 Dans chacun des cas suivants, résous l'équation différentielle (E) et détermine la solution f vérifiant la condition initiale donnée.

a) (E): $9y'' + y = 0$; $f(\frac{\pi}{3}) = 1$ et $f(\pi) = 18$;

b) (E): $16y'' + 9y = 0$; $f(0) = 1$ et $f(\frac{3\pi}{4}) = 2$.

SPECIMEN

1

1. Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $3y'' + 12y = 0$.
2. Détermine $f'(x)$, f étant une solution de (E).
3. Détermine la solution f de (E) vérifiant la condition initiale : $f(\frac{\pi}{4}) = 2$ et $f'(\frac{\pi}{4}) = -1$.

2 On donne l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$ où a et b sont des nombres réels.

1. Soit l'équation différentielle (E_1) : $y' = y + 1$.
   a) Résous l'équation différentielle (E_1') : $y' = y$. Justifie que la fonction f telle que $f(x) = e^x$ est une solution de (E_1').
   b) Trouve le nombre réel k pour que la fonction f, telle que $f(x) = e^x + k$ soit une solution de (E_1). Donne cette solution.
2. Donne une solution de l'équation différentielle (E_2) : $y' = y + b$.
3. Donne une solution de l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$.

3 Soit l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9y = 0$, où y est une fonction de variable t et y'' sa dérivée seconde.

1. Résous l'équation différentielle (E).
2. Soit f une fonction qui est une solution de l'équation différentielle (E).

La courbe représentative de f passe par le point de coordonnées (0; 1) et admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$.

a) Donne les conditions initiales sur la fonction f à partir des informations données sur la courbe.

b) Détermine l'expression de la fonction f.

3. Vérifie que, pour tout réel t, $f(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$.

SPÉCIMEN

4 On considère l'équation différentielle: (E) : $y'' + 25y = 0$.

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résous l'équation (E).

2. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont on note f' la fonction dérivée, vérifiant les trois conditions suivantes:

• f est solution de l'équation différentielle (E) ;

• la courbe représentative de f dans un repère du plan passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6}; -2\right)$;

• $f'(0) = -5$;

Démontre que, pour tout réel x,
$f(x) = \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x$.

3. Vérifie que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$.

5 On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.

1. Démontre que la fonction $g : x \mapsto xe^{2x}$ est solution de (E).
2. Résous l'équation (G) : $y' = 2y$.
3. Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (G).
4. Déduis les fonctions solutions de l'équation (E).
5. Détermine la solution de l'équation qui s'annule en 1.

SPÉCIMEN

6 Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Résoudre l'équation différentielle: (1) $y' - \frac{1}{n}y = 0$

2. On considère l'équation différentielle (2) :

$$y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)}.$$

Détermine deux réels a et b, tels que la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de (2).

3. a) Démontre que, pour qu'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ soit solution de (2), il faut et il suffit que $h - g$ soit solution de (1).

   b) Déduis-en toutes les solutions de (2).

SPÉCIMEN

SITUATION COMPLEXE

7 Des élèves de terminale étudient le refroidissement d'un objet porté à 100°C dans un milieu ambiant de 10°C. L'étude consiste à déterminer le temps de refroidissement de l'objet; c'est-à-dire le nombre de minutes qu'il faut pour que la température de l'objet passe en dessous de 15°C.

On note $\theta(t)$ la différence, à l'instant t, entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant. t est exprimé en minutes et $\theta(t)$ en degrés Celsius (°C).

L'étude du phénomène physique conduit à l'équation différentielle (E) : $\theta'(t) = -\theta(t) \ln 3$.

Les élèves effectuent un contrôle de la température de l'objet après chaque minute (le premier contrôle ayant lieu à l'instant $t = 1$).

En utilisant tes connaissances en mathématique, détermine le nombre de minutes qu'il faudra pour que la température de l'objet passe en dessous de 15°C.

SPÉCIMEN

3

EXEMPLE DE DEVOIR DE NIVEAU



3ème TRIMESTRE

SPECIMEN

Exercice 1 (2 points)

BAC Blanc UEMOA 2019

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indique son numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

1. f et g sont deux fonctions.
a, b et l sont, soit des nombres réels, soit $-\infty$, soit $+\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = l$, alors
a) $\lim\limits_{x\to b}(fog)(x) = -\infty$; b) $\lim\limits_{x\to a}(gof)(x) = l$; c) $\lim\limits_{x\to b}(fog)(x) = l$; d) $\lim\limits_{x\to a}(gof)(x) = b$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ est égale à :
a) $-\infty$; b) 0 ; c) -1 ; d) 1.

3. Soit n un entier naturel non nul.
La dérivée de la fonction $x \mapsto (3x-1)^n$ sur $\mathbb{R}$ est :
a) $x \mapsto (3x-1)^{n-1}$; b) $x \mapsto 3n(3x-1)^{n-1}$; c) $x \mapsto 3(3x-1)^{n-1}$; d) $x \mapsto n(3x-1)^{n-1}$

4. Si pour tout nombre réel non nul x, $3-\dfrac{1}{x} < f(x) < \dfrac{1}{x}+3$, alors la limite de f en $+\infty$ est égale à :
a) 0 ; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) 3.

Exercice 2 (2 points)

Écris le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La fonction $x \longmapsto -\sin x \cos^4 x$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto 2 + \cos^5 x$ sur $\mathbb{R}$.
2	Si une fonction f admet un extrémum en a, alors $f'(a) = 0$.
3	La fonction $x \mapsto 2x - \sqrt{2x+4}$ est dérivable en -2.
4	La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} 3+x, & si \quad x \le -1 \\ x^2+x, & si \quad x > -1 \end{cases}$ est continue en -1.

Exercice 3 (2 points)

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3.
Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des feuillus.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères, alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre dans son stock.
On considère les événements suivants :
- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 » ;
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2» ;
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 » ;
- C : « l'arbre choisi est un conifère » ;
- F : « l'arbre choisi est un feuillu ».

a) Construis un arbre pondéré traduisant la situation.
b) Calcule la probabilité pour que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
c) Justifie que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.
d) L'arbre choisi est un conifère. Détermine la probabilité qu'il l'ait acheté chez l'horticulteur H_1 (on arrondira le résultat à 10^{-3} près).

SPECIMEN

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.
a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
b) Calcule la probabilité pour que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères.
On arrondira le résultat à l'ordre 3.

Exercice 4 (3 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives i ; $2i$ et 1.
On considère l'application f qui, à tout point M du plan d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{2iz}{z - i}$

1. Détermine les affixes des points M du plan, tels que : $f(M) = M$.

2. Détermine, sous forme algébrique, les affixes des points B' et C', images respectives des points B et C par f.

3. a) Démontre que, pour tout point M distinct de A, l'affixe z' de M' vérifie : $z' - 2i = \dfrac{-2}{z - i}$

b) Déduis-en que, si le point M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1, alors son image M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 5 (5 points)

Soit la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x) = 2x - \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm.

1. Démontre que f est une fonction impaire, puis interprète graphiquement ce résultat.

2. a) Détermine la limite de f en 0, puis interprète graphiquement le résultat.
b) Détermine la limite de f en $+\infty$.

3. a) Démontre que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = 2x - 1 - \dfrac{2}{e^x - 1}$.

b) Démontre que la droite (D_1) d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote à la courbe (C_f).
c) Étudie la position relative de (C_f) et (D_1) sur $]0 ; +\infty[$.

4. a) Démontre que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = 2 + \dfrac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$.

b) Étudie les variations de f sur $]0; +\infty[$.

c) Dresse le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

5. Construis la courbe (C_f) sur $\mathbb{R}^*$ et ses asymptotes.

Exercice 6 (4 points)

Une usine fabrique et commercialise des sachets de poudre de cacao. Sa capacité journalière de production est comprise entre 1 000 et 3 000. On suppose que toute la production est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en milliers de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle [1 ; 3] par la fonction B définie par : $B(x) = \dfrac{-1}{2}x^2 + x + 2 + 2\ln x$.
Le Directeur de l'usine veut accroître le chiffre d'affaires de l'entreprise. Il demande donc au comptable de l'usine le nombre de sachets à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal. Le comptable t'associe à ce projet.
Détermine le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour obtenir un bénéfice maximal.

SPECIMEN

Format de l'épreuve de maths série D

L'épreuve comporte six (6) exercices et évalue les trois (3) compétences de la classe de Terminale D.

EXERCICE 1 : Test objectif (niveaux de taxonomie 1 ou 2).
EXERCICE 2 : Test objectif (niveaux de taxonomie 1, 2 ou 3).
EXERCICE 3 : Exercice de renforcement en test subjectif
EXERCICE 4 : Exercice d'approfondissement en test subjectif.
EXERCICE 5 : Exercice d'approfondissement en test subjectif.
EXERCICE 6 : Situation complexe.

SPÉCIMEN

Commentaires

- ✓ Un exercice de renforcement porte sur plusieurs habiletés d'une même leçon.
- ✓ Un exercice d'approfondissement porte sur plusieurs habiletés de plusieurs leçons.
- ✓ Les exercices de renforcement et d'approfondissement ne doivent pas être contextualisés.
- ✓ Un exercice peut porter sur plusieurs compétences.
- ✓ Les exercices 3, 4, 5 et 6 couvriront les trois (3) compétences au programme.
- ✓ Les tests objectifs porteront sur des leçons qui n'auront pas été prises en compte par les exercices 3, 4, 5 et 6.

Distribution des leçons selon les compétences et les thèmes

Compétences	Thèmes	Leçons
Compétence 1	Géométrie du plan	Leçon 1 : Nombres complexes et géométrie du plan
Compétence 2	Thème 1 : Calculs algébriques	Leçon 1 : Nombres complexes
	Thème 2 : Fonctions	Leçon 1 : Limites et continuité Leçon 2 : Dérivabilité et étude de fonctions Leçon 3 : Primitives Leçon 4: Fonctions logarithmes Leçon 5: Fonctions exponentielles, fonctions puissances Leçon 6 : Calcul Intégral Leçon 7 : Suites Numériques Leçon 8 : Équations différentielles
Compétence 3	Thème 1 : Modélisation d'un phénomène aléatoire	Leçon 1 : Probabilité conditionnelle et variable aléatoire
	Thème 2 : organisation et traitement des données	Leçon 1 : Statistiques à deux variables

Attribution des points par exercices

Exercice 1 (test objectif)	04 pts
Exercice 2 (test objectif)	
Exercice 3 (renforcement)	11 pts
Exercice 4 (approfondissement)	
Exercice 5 (approfondissement)	
Exercice 6 (situation complexe)	05 pts

SPÉCIMEN

SUJET 1

Exemple d'épreuve de Mathématiques – Série D

Cette épreuve comporte trois (3) pages
Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré. Tout modèle de calculatrice scientifique non graphique est autorisé

Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Exercice 1 (2 points)

Écris le numéro de chaque énoncé suivi de Vrai si l'énoncé est vrai ou de Faux si l'énoncé est faux.

N°	Énoncés
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=1$.
2	f désigne une fonction numérique non définie en un point a. Si la limite à gauche de f en a est égale à la limite à droite de f en a, alors f possède une limite au point a.
3	La fonction : $x \longmapsto 2\sin x - \cos 3x + \pi$ est une primitive de la fonction : $x \longmapsto 2\cos x + 3\sin 3x$.
4	On appelle écart-type d'une série statistique X, le carré de la variance de X.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacune des énoncés ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont données dont une seule est juste. Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncés	Réponses	
1	f est la fonction définie par : $f(x) = e^{\tan 2x}$	A	$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -4e^{\sqrt{3}}$.
		B	$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = e^{\sqrt{3}}$.
		C	$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2e^{\sqrt{3}}$.
		D	$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 8e^{\sqrt{3}}$.
2	Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = 0$ sont les fonctions :	A	$x \longmapsto k + e^{-2x}$ $(k \in \mathbb{R})$.
		B	$x \longmapsto Be^{2x} + Ae^{-2x}$ $(A \in \mathbb{R} ; B \in \mathbb{R})$.
		C	$x \longmapsto A\cos 2x + B\sin 2x$ $(A \in \mathbb{R} ; B \in \mathbb{R})$.
		D	$x \longmapsto (A\sin 2x + B\cos 2x)e^{2x}$ $(A \in \mathbb{R} ; B \in \mathbb{R})$.

SPÉCIMEN

3	Soit G la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $G(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \lvert \sin t \rvert \, dt$ · On suppose que G est dérivable sur]0 ; +∞[.	A	$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $G'(x) = \lvert \sin \sqrt{x} \rvert$.
		B	$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $G'(x) = \sqrt{x} \lvert \sin \sqrt{x} \rvert$.
		C	$\forall x \in]\,0 ; +\infty[$, $G'(x) = \dfrac{\lvert \sin \sqrt{x} \rvert}{2\sqrt{x}}$.
		D	$\forall x \in]\,0 ; +\infty[$, $G'(x) = \dfrac{\lvert \sin x \rvert}{2\sqrt{x}}$.
4	Soit (u) la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n}{3}$.	A	La suite (u) est croissante.
		B	La suite (u) diverge vers $-\infty$.
		C	La suite (u) est décroissante.
		D	La suite (u) diverge vers $+\infty$.

Exercice 3 (4 points)

Dans une population d'une région, la probabilité d'être un fumeur est de 0,52. On sait d'autre part que dans cette population, 30% des fumeurs et 10% des non fumeurs présentent un test positif à la COVID-19.

1. Détermine la probabilité pour un individu de cette population d'être testé négatif à la COVID-19 sachant que cet individu est un fumeur.
2. Détermine la probabilité pour un individu de cette population d'être testé positif à la COVID-19 sachant que cet individu est un non fumeur.
3. Détermine la probabilité pour qu'un individu de cette population soit un fumeur testé positif à la COVID-19.
4. Détermine la probabilité pour qu'un individu de cette population soit un non fumeur testé positif à la COVID-19.
5. Déduis des questions 3 et 4, que la probabilité pour qu'un individu de cette population soit testé positif à la COVID-19 est de 0,204.
6. Détermine la probabilité pour un individu d'être un fumeur sachant qu'il a été testé positif à la COVID-19.

Exercice 4 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I , J). (*On prendra 2cm comme unité graphique.*)
On considère les nombres complexes *a, b,* et *c,* tels que : $a = -1 + i$; $b = 3(1 + i)$ et $c = 2$.

1. Écris chacun des nombres *a, b,* et *c* sous forme trigonométrique.
2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives *a, b* et *c*.
   a) Place les points A, B et C dans le repère (O, I, J).
   b) Justifie que ABC est un triangle rectangle et isocèle.

Soit *f* l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe *z* associe le point M' d'affixe *z'*, tel que : $z' = 2iz + 1 - 2i$.

3. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation *f*.
4. Détermine les affixes des points A' et B', tels que : A' = *f*(A) et B' = *f*(B).
5. Détermine $\dfrac{A'B'}{AB}$ et $Mes\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}\right)$.
6. Soit *g* la similitude directe de centre A qui applique le point C sur le point B.
   On pose : I' = *g*(I). (*I est le point d'affixe 1.*)
   Détermine l'affixe du point I'.

SPECIMEN

Exercice 5 (4 points)

Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

1. Justifie que la limite de la fonction f en +∞ est égale à 0.
2. Détermine la limite de f à droite en 0.
3. Interprète chacun des résultats précédents.

On suppose que f est dérivable sur]0 ; +∞[

4. Démontre que : ∀ $x \in$]0 ; +∞[, $f'(x) = \dfrac{(2-\ln x)\sqrt{x}}{2x^2}$.
5. Étudie les variations de la fonction f sur]0 ; +∞[.
6. Dresse le tableau de variation de la fonction f.
7. Construis la courbe (C_f) sur]0 ; +∞[et ses asymptotes.
8. Justifie que l'équation $f(x) = -5$ admet sur]0 ; +∞[, une solution unique α, telle que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}6$.

Exercice 6 (5 points)

Tu accompagnes ton petit frère à l'hôpital. Il doit recevoir de son médecin une dose de chacun de deux médicaments A et B.

Après avoir administré au patient une dose initiale du médicament A, le médecin vous informe que le médicament B ne peut être administré que si la quantité du médicament A, présent dans le sang du patient est inférieure à 75% de la dose initiale.

Ayant un autre rendez-vous 3 heures après l'administration du médicament A, ton petit frère estime qu'il pourra recevoir sa dose du médicament B avant l'heure de son rendez-vous.

En utilisant les données ci-dessous, et en basant ton argumentation sur tes connaissances mathématiques, vérifie l'affirmation de ton petit frère.

Données *: la quantité de médicament f(t) (exprimé en cm³) contenue dans le sang après un temps t (exprimé en heures) est donnée par la formule :* $f(t) = 2e^{\frac{-t}{12}}$.

La dose initiale correspond à f(0).

SPECIMEN

SUJET 2

Exemple d'épreuve de Mathématiques – Série D

Cette épreuve comporte trois (3) pages
Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré. Tout modèle de calculatrice scientifique non graphique est autorisé

Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Exercice 1 (2 points)

Écris le numéro de chaque énoncé suivi de Vrai si l'énoncé est vrai ou de Faux si l'énoncé est faux.

N°	Énoncés
1	La fonction : $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et a pour dérivée la fonction : $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}$.
2	f désigne une fonction numérique telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J). Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI), en $+\infty$.
3	Une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{(\cos x)^2} - \cos x$ sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est la fonction : $x \longmapsto \tan x - \sin x + \frac{\pi}{2}$.
4	Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $+\infty$.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacune des énoncés ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont données dont une seule est juste. Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncés	Réponses	
1.	Le plus petit entier naturel n, tel que : $1-\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0{,}95$ est :	A	2.
		B	4.
		C	3.
		D	5.
2.	Les solutions de l'équation différentielle $y'' = -y$ sont les fonctions :	A	$x \mapsto k + e^{-2x}$ $(k \in \mathbb{R})$.
		B	$x \mapsto Ae^x + Be^{-2x}$ $(A \in \mathbb{R} ; B \in \mathbb{R})$.
		C	$x \mapsto B\cos x + A\sin x$ $(A \in \mathbb{R} ; B \in \mathbb{R})$.
		D	$x \mapsto (Ax + B)e^x$ $(A \in \mathbb{R} ; B \in \mathbb{R})$.

SPÉCIMEN

3.	Dans un hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Chaque fois qu'un client s'intéresse à un ordinateur de ce modèle, la probabilité pour qu'il l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de 10 clients qui se sont intéressés à ce modèle. La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté l'ordinateur a pour valeur arrondie au millième :	A	0,900.
		B	0,092.
		C	0,002.
		D	0,267.
4.	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\ln\frac{2}{3}} =$	A	$-\infty$.
		B	0.
		C	$+\infty$.
		D	1.

Exercice 3 (3 points)

Le tableau ci-dessous donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population féminine.

X	36	42	48	54	60	66
Y	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1. Représente graphiquement le nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). (0,5 cm pour 1 an et 3 cm pour l'unité de tension artérielle).
2. Calcule la moyenne et la variance des séries statistiques associées aux caractères X et Y.
3. a) Détermine une équation de la droite de régression de Y en fonction de X.
   b) Détermine une équation de la droite de régression de X en fonction de Y.
   c) Représente ces deux droites sur le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.
4. Détermine le coefficient de corrélation linéaire.
5. En te basant sur ces données, dis si une femme de 70 ans qui a une tension artérielle maximale de 16,2 a oui ou non une tension normale.

Exercice 4 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 3 cm.

On considère les points B et D d'affixes respectives : $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_D = \sqrt{3} - i$.

1. Place les points B et D.
2. Justifie que ODB est un triangle équilatéral.
3. Soit E le point d'affixe z_E tel que : $z_E = e^{\frac{-i\pi}{3}}$. r désigne la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $t_{2\overrightarrow{OJ}}$ la translation de vecteur $2\overrightarrow{OJ}$.

On pose : A = r(E) et C = $t_{2\overrightarrow{OJ}}$ (E).

a) Justifie que l'affixe z_A du point A est : $z_A = e^{\frac{i\pi}{6}}$.
b) Détermine l'affixe z_C du point C.
c) Justifie que A est le milieu du segment [OB].

On pose : $Z = \dfrac{z_c - z_A}{z_B - z_A}$.

a) Détermine un argument du nombre complexe Z.
b) Déduis-en que la droite (CD) est la médiatrice du segment [OB].

SPÉCIMEN

Exercice 5 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 1 cm.

I) Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(t) = t - \ln t$.

1. a) Détermine la limite de g en 0 et interprète ce résultat.
   b) Détermine la limite de g en $+\infty$.
   On suppose que g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
2. a) Étudie le sens de variation de la fonction g et dresse son tableau de variation.
   b) Déduis de la question 2.a) que : $\forall\, t \in]0 ;+\infty[,\ g(t) \geq 1$.

II) On considère la fonction f définie sur $]0 ;+\infty[$ par : $f(x) = \int_1^x \frac{t}{g(t)} dt$.

1. Justifie que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
2. Étudie selon les valeurs de x le signe de $f(x)$.
3. Détermine $f'(x)$ pour tout x élément de l'intervalle $]0 ;+\infty[$.
4. Étudie le sens de variation de f (*On ne déterminera pas de limite pour la fonction f*).
5. Justifie que : $\forall\, t \in]\,0 ; 1]$, $\frac{t}{g(t)} \leq t$.
6. Déduis-en que : $\forall\, x \in]\,0 ; 1]$, $\frac{x^2-1}{2} \leq f(x) \leq 0$ et que f admet une limite finie L en 0.
7. Justifie que : $\forall\, t \in [1 ; +\infty[$, $\frac{t}{g(t)} \geq 1$.
8. Déduis de la question précédente, la limite de f en $+\infty$.

Exercice 6 (5 points)

Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu à 100 (en milliers de francs CFA). Le coût de production unitaire noté $U(x)$ exprime le coût de production par objet produit.

Un expert a déterminé qu'il est égal à : $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$, où x est un élément de l'intervalle $[10 ; 100]$.

Conscient de la baisse du bénéfice réalisé par l'entreprise, le Directeur convoque une réunion des actionnaires et émet deux préoccupations au cours de cette réunion :

1. *Comment déterminer le nombre d'objet à fabriquer pour minimiser le coût de production unitaire et quel sera le bénéfice de l'entreprise dans ce cas ?*
2. *Comment déterminer le nombre d'objets à fabriquer pour avoir un bénéfice maximum et quel sera le bénéfice de l'entreprise dans cet autre cas ?*

De retour à la maison, ton Papa, actionnaire de l'entreprise te soumet les deux préoccupations du Directeur. Réponds à chacune de ces préoccupations, en basant ton argumentation sur tes connaissances mathématiques.

SPECIMEN

SUJET 3

Exemple d'épreuve de Mathématiques – Série D

Cette épreuve comporte trois (3) pages
Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré. Tout modèle de calculatrice scientifique non graphique est autorisé

Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Exercice 1 (2 points)

Écris le numéro de chaque énoncé suivi de Vrai si l'énoncé est vrai ou de Faux si l'énoncé est faux.

N°	Énoncés
1	Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.
2	Soit f une fonction croissante sur l'intervalle]2 ; 5[. Si f ne possède pas une limite finie à gauche de 5, alors f n'est pas majorée sur l'intervalle] 2 ; 5[.
3	L'équation différentielle $y' - 3(1 + \tan^2 x) = 0$ a pour solution sur $]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}[$, les fonctions : $x \longmapsto 3\tan x + K$ où K est un nombre réel .
4	La variance d'une série statistique X de valeurs x_i $(1 \leq i < n)$ est le nombre réel $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{X}^2$ où X désigne la moyenne de la série statistique X.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacune des énoncés ci-dessous, quatre réponses sont données dont une seule est juste.
Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncés	Réponses	
1.	f est la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x}\sin\sqrt{x}$.	A	$f'(0) = 0$.
		B	$f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
		C	$f'(0) = 1$.
		D	f n'est pas dérivable en 0.
2.	g est la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4} - \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.	A	g ne possède pas de limite en $+\infty$.
		B	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
		C	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
		D	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -3$.
3.	On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R},\ x^{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.	A	l'équation (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
		B	l'équation (E) a pour solution : $e^{\frac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$.
		C	l'équation (E) a pour solution : $\dfrac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
		D	l'équation (E) a pour solution : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

SPÉCIMEN

4.	On pose : $k = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, dx$.	A	K = 0.
		B	K > 0.
		C	K < 0.
		D	K = 1.

Exercice 3 (4 points)

On considère la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x supérieur à $\frac{1}{2}$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.

1. Justifie que : $\forall\, x \geq 1, f(x) \geq 1$.
2. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

On définit deux suites numériques (v_n) et (w_n), telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ et $w_n = \ln(v_n)$.

3. Justifie que les suites (v_n) et (w_n) sont définies pour tout entier naturel n.
4. Démontre que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
5. Exprime pour tout entier naturel n, v_n et w_n en fonction de n.
6. Déduis-en que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.
7. Détermine la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 (3 points)

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par : $P(z) = z^2 + (1 - 4i)z - 3 - 3i$.

1. Justifie que $-1 + i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. Déduis-en la seconde solution.
3. On munit le plan complexe d'un repère orthonormé (O, I, J) et on considère la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que : $z' = -iz - 2$.
   a) Détermine la nature et les éléments caractéristique de la transformation f.
   On désigne par B le point d'affixe $3i$.
   b) Justifie que le point C tel que $C = f(B)$ appartient à la droite (OI).
   c) Détermine une équation de la droite (D) image de la droite (BC) par la transformation f.
4. Soit h l'homothétie de centre C et de rapport -2.
   Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation hof.

SPECIMEN

Exercice 5 (4 points)

1. Détermine la solution de l'équation différentielle : $g' + 2g = 0$ qui prend la valeur $\frac{1}{4}$ en 0.
2. Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = \frac{1}{4}e^{-2x}$.
   a) Étudie le sens de variation de la fonction f.
   b) Dresse le tableau de variation de la fonction f.
   c) Justifie que f est une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
   d) Construis la courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
   On prendra : OI = OJ = 1 cm.
3. Soit f^{-1} la bijection réciproque de la fonction f.
   a) Dresse le tableau de variation de la fonction f^{-1}.
   b) Détermine l'expression de $f^{-1}(x)$.
   c) Construis la courbe représentative (C') de f^{-1} dans le plan muni du repère (O, I, J).
4. Détermine en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par (C'), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ (*on donnera l'arrondi d'ordre 0 du résultat*).

Exercice 6 (5 points)

Lors de la fête de fin d'année du lycée, le professeur principal décide de récompenser ton camarade Konan, le meilleur élève de ta classe. Il lui remet en guise de cadeau, un billet qui peut lui permettre de participer plusieurs fois à une tombola.
L'organisateur de la tombola explique à Konan le principe du jeu :
« Cette urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 noires, toutes indiscernables au toucher. Il te faut tirer 3 boules de l'urne, selon l'une des deux options suivantes :

- ✓ *Option A : tirer simultanément les 3 boules de l'urne.*
- ✓ *Option B : tirer successivement 3 boules de l'urne. Chaque boule tirée est remise dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant.*
  - *Si les 3 boules tirées sont blanches, tu gagnes 15000 francs.*
  - *Si tu tires exactement 2 boules blanches sur les trois boules tirées, tu gagnes 5000 francs.*
  - *Si tu ne tires aucune boule blanche sur les trois boules tirées, tu ne gagnes rien* ».

Konan veut choisir l'option qui a le plus de chance de lui procurer le gain moyen le plus élevé après un grand nombre de participations à ce jeu. Il est hésitant.
À l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques, détermine l'option conforme au vœu de Konan.

SPECIMEN

SUJET 4

BACCALAURÉAT BLANC
UEMOA
SESSION 2021

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES - SÉRIE D

Cette épreuve comporte quatre (03) pages numérotées 1 sur 3 ; 2 sur 3 et 3 sur 3 .
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles de calculs sont aussi autorisées

Exercice 1 (2 points)

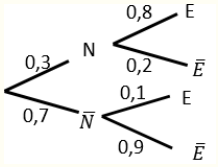
Pour chaque énoncé, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Écris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.

N°	Énoncé	Réponses proposées	
1	Soit f une fonction et α un nombre réel. S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur l'intervalle $]\alpha\ ; +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$	A	$-\infty$
		B	0
		C	α
		D	$+\infty$
2	Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle fermé $[a\ ;\ b]$, alors $f([a\ ;\ b])$ est l'intervalle	A	$[f(b)\ ;\ +\infty[$
		B	$]f(a)\ ;\ f(b)[$
		C	$[f(b)\ ;\ f(a)]$
		D	$]-\infty\ ;\ f(a)]$
3	Soit f une fonction, d'un intervalle I sur un intervalle J. Si f est continue et strictement décroissante sur I alors sa bijection réciproque g est :	A	strictement croissante sur I
		B	strictement croissante sur J
		C	strictement décroissante sur I
		D	strictement décroissante sur J
4	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} =$	A	$-\infty$
		B	0
		C	1
		D	$+\infty$

SPECIMEN

Exercice 2 (2 points)

Pour chaque énoncé, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Écris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.

N°	Énoncé	Réponses proposées	
1	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} =$	A	$-\infty$
		B	0
		C	1
		D	$+\infty$
2	On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{-}3 + \frac{1}{x^2+1}$ La représentation graphique de f, dans un repère, admet en $+\infty$, une asymptote oblique d'équation :	A	$y = x$
		B	$y = -x + 3$
		C	$y = x - 3$
		D	$y = -3$
3	On donne l'arbre pondéré suivant :  La probabilité $P_N(E)$ est :	A	0,3
		B	0,2
		C	0,8
		D	$\frac{3}{8}$
4	Soient A et B deux évènements tels que $P_B(A) = 0{,}25$; $P(A\cap B) = 0{,}15$ et $P(A) = 0{,}4$; La valeur de P(B) est :	A	0,06
		B	0,0375
		C	0,6
		D	0,3

Exercice 3 (3 points)

a est un nombre réel. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2ax^2 + 2$ si $x \leq 2$ et
$f(x) = \frac{\sqrt{x+14}-4}{x-2}$ si $x > 2$.
Détermine a pour que f soit continue en 2.

Exercice 4 (3 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ par : $f(x) = \frac{x^4+2x^3-4x^2-2x+5}{x^2-1}$.

1. Justifie que : $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3 + \frac{2}{x^2-1}$.

2. Détermine les nombres réels a et b tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$, $\frac{2}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

3. *a*) Détermine les primitives de f sur $]1 ; +\infty[$.

b) Détermine la primitive de f qui s'annule en 2.

SPECIMEN

Exercice 5 (5 points)

On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$.

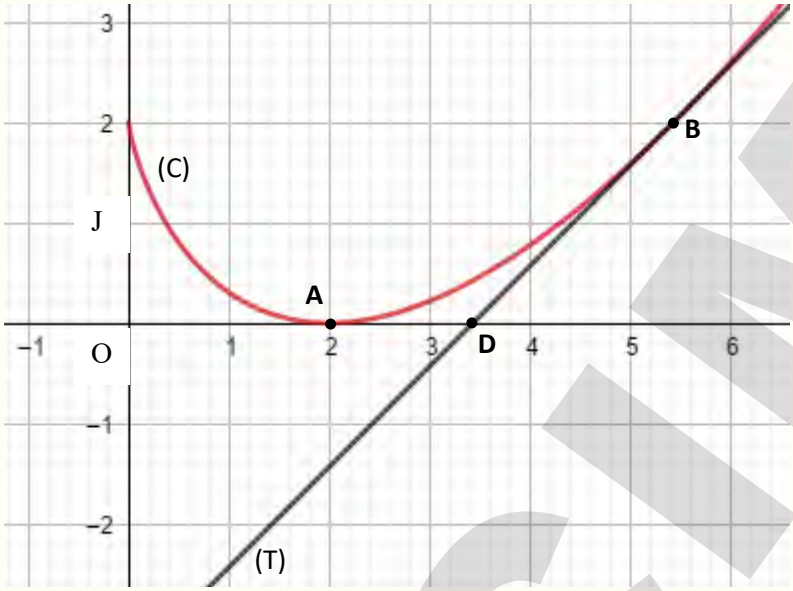
On donne ci-dessous :

♦ la courbe représentative (C) de f sur]0 ; +∞[;

♦ la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 2e,

♦ B(2e; 2) un point du plan.

♦ D le point d'intersection de la droite (T) avec l'axe des abscisses.



1. Calcule les limites de f en 0 et en +∞.

2. Justifie que B appartient à (C).

3. *a*) Justifie que : $\forall\, x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \ln(\frac{x}{2})$.

b) Détermine une équation de la tangent (T).

4. Détermine par calcul les coordonnées du point D.

5. Dresse le tableau de variation de f sur]0 ; +∞[.

Exercice 6 (5 points)

La Mairie de ta localité décide de récompenser les élèves de Terminale à la fin du premier semestre à travers un jeu. Pour y participer, il faut faire partie des meilleurs élèves de sa classe.

Ce jeu consiste à tirer au hasard une boule dans un sac contenant n boules blanches, n+2 boules jaunes et 6 boules noires, n étant un entier naturel non nul.

Chaque boule a la même chance d'être tirée (les boules sont indiscernables au toucher).

- Si la boule tirée est jaune, le joueur gagne 100 000 F
- Si la boule tirée est blanche, le joueur gagne 5 000 F
- Si la boule tirée est noire, le joueur remet la boule dans le sac et procède à un nouveau tirage et s'il tire une boule jaune, il gagne 50 000 F sinon il gagne 5 000 F

Les organisateurs désirent déterminer le nombre de boules blanches et de boules jaunes à mettre dans le sac pour que la probabilité de gagner au moins 50 000 F soit maximale.

A partir de tes connaissances, détermine le nombre de boules blanches qui répondent aux préoccupations des organisateurs.

SPECIMEN

EXERCICE 1

1-D ; 2-C ; 3-D ; 4-B..... 0,5×4

EXERCICE 2

1-B ; 2-C ; 3-C ; 4-C..... 0,5×4

EXERCICE 3

$f(2) = 8a + 2$	**1**
$\frac{\sqrt{x+14}-4}{x-2} = \frac{x+14-16}{(x-2)(\sqrt{x+14}+4)} = \frac{1}{\sqrt{x+14}+4}$, si $x \neq 2$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{\sqrt{x+14}-4}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x+14}+4} = \frac{1}{8}$	**1**
$8a + 2 = \frac{1}{8}$ $8a = \frac{-15}{8}$ Donc $a = \frac{-15}{64}$.	**1**

EXERCICE 4

1) Justification correcte	**0,5**
2) $a = 1$ et $b = -1$	2×0,5
3) a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + \ln(x-1) - \ln(x+1) + k$, si $x \in]1\ ;+\infty[$ et $k \in \mathbb{R}$.	**0,75**
b) $F(2) = \frac{8}{3} + 4 - 6 - ln3 + k = 0$ $= \frac{8-6}{3} - ln3 + k = 0$ Donc : $k = -\frac{2}{3} + ln3$ $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + \ln(x-1) - \ln(x+1) - \frac{2}{3} + ln3$	**0,75**

EXERCICE 5

Corrigé	
1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} xlnx - xln2 - x + 2 = 2$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x(\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + \frac{2}{x} = +\infty$	0,5 0,5
2) $f(2e) = 2$	1
3.a) Justification correcte	0,5
b) $y = x - 2e + 2$	1
4) $D(2e-2; 0)$	0,5
5)	1

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖	2 ↘	0	↗	$+\infty$

SPÉCIMEN

EXERCICE 6

Il s'agit de déterminer la valeur de n de boules blanches pour que le maximum d'élèves obtiennent au moins 50 000.

Il faut calculer en fonction de n la probabilité de l'évènement G « obtenir au moins 50 000»

On va déterminer la valeur de n pour cette probabilité soit maximale.

Soit X la variable aléatoire associé au gain du joueur.

X prend les valeurs : 5 000 ; 50 000 et 100 000

Deux gains sont supérieurs ou égaux à 50 000. Ce sont 50 000 et 100 000 F.

$P(X=100\,000) = \frac{n+2}{2n+8}$

$P(X=50\,000) = \frac{6}{2n+8} \times \frac{n+2}{2n+8}$

$P(G) = \frac{n+2}{2n+8} + \frac{6}{2n+8} \times \frac{n+2}{2n+8} = \frac{n^2+9n+14}{2(n+4)^2}$

Soit $f(x) = \frac{x^2+9x+14}{2(x+4)^2}$

Pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-x^2+4x+32}{2(x+4)^4}$

Le signe de f' dépend du signe de $-x^2 + 4x + 32$

f est croissante sur $[0 ; 8]$ et décroissante sur $[8 ; +\infty[$

La fonction atteint son maximum en 8 et P(G) = 0,52.

La plus grande valeur que peut prendre P(G) est 0,52 pour $n = 8$.

Pour que les élèves aient plus de chance de gagner au moins 50 000 F, il faut 8 boules blanches et 10 boules jaunes.

Critères	Indicateurs	Barème de notation
CM1 : **Pertinence**	- Je vais déterminer le nombre de boules blanches pour que le maximum d'élèves obtiennent au moins 50 000 F. - Je vais donc calculer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins 50 000 F.	**0,75 point** 1 *ind* → 0,5 2 *ind* → 0,75
CM2 : **Utilisation correcte des outils mathématiques en situation**	- Obtenir au moins 50 000 F c'est obtenir 50 000 F ou 100 000 F - P(50 000 F) - P(100 000 F) - P(50 000 F) + P(100 000 F) - Calcul d'une dérivée - Recherche du maximum d'une fonction	**2,5 point** 1 *ind sur* 6 → 0,5 2 *ind sur* 6 → 1 3 *ind sur* 6 → 1,5 4 *ind sur* 6 → 2,5
CM3 : **Cohérence de la réponse**	- Le résultat produit est conforme au résultat attendu - Le résultat produit est en adéquation avec la démarche - La qualité des enchainements de la démarche	**1,25 point** 1 *ind sur* 3 → 0,75 2 *ind sur* 3 → 1,25
CP : **Critère de perfectionnement**	- Concision - Originalité - Bonne présentation	**0,5 point** 1 *ind sur* 3 → 0,25 2 *ind sur* 3 → 0,5

SPÉCIMEN

FORMULAIRE DE RÉVISION



SPÉCIMEN

FORMULAIRE

1 COMBINATOIRE - DÉNOMBREMENTS

Card (A∪B) = Card A + Card B − Card (A∩B).
Card (A×B) = Card A × Card B.

Soit E un ensemble de *n* éléments.

Nombre de permutations de E :

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$; 0! = 1.

Nombre d'arrangements de *p* éléments de E :

$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1), p \le n.$

Nombre de sous-ensembles de *p* éléments de E :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

$C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$ $(p \le n)$.

2 PROBABILITÉS

Ω est l'univers d'une expérience aléatoire.

Si A et B sont incompatibles : P(A∪B) = P(A) + P(B).

Dans le cas général :

P(A∪B) = P(A) + P(B) − p(A∩B)

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$.

Si $A_1 \ldots, A_n$ forment une partition de A,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \frac{Card\ A}{Card}$.

Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé

P(A∩B) = P(A|B) × P(B) ; P(A|B) se note aussi $P_B(A)$ Cas où A et B sont indépendants :

P(A∩B) = P(A) × P(B).

Formule des probabilités totales

B_1 ; B_2 ; …, B_n sont des évènements d'un univers Ω de probabilité non nulle.

Si les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω, alors

$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$

Variable aléatoire

Fonction de répartition: F(*x*) = P(X ≤ *x*).

Espérance mathématique: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$.

Variance: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$.

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2.$$

Écart-type : $\sigma_x = \sqrt{V(X)}$.

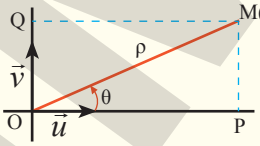
3 CALCULS ALGÉBRIQUES DANS ℂ

• A. Nombres complexes

Forme algébrique: $z = x + iy$. $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Forme trigonométrique et exponentielle :

$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}^+$



$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{u}$

$\overline{OP} = x = \mathrm{Re}(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \mathrm{Im}(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$.

$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z}.\overline{z'}$

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}.$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient, d'une puissance

$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z|\,|z'|$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$$

$$\frac{|z|}{|z'|} = \left|\frac{z}{z'}\right|$$

$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}.$

SPÉCIMEN

Inégalité triangulaire

$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

• B. Identités remarquables

(Valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

$(a + b)^2 = i + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$;

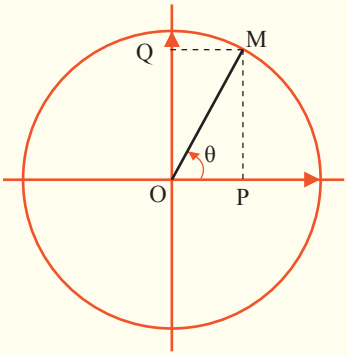
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$;

$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$;

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$; $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

• C. Trigonométrie



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,$

$k \in \mathbb{Z}$

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$; $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

Formules d'addition

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a)$; $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a).$

Formules de transformation

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$

$\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formule de Moivre et applications

Pour tout entier naturel non nul n : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Soit encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Racines $n^{ièmes}$ de l'unité

$u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, où $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Les solutions de $z^n = a$, où $a = \rho e^{i\alpha}$, sont $z_k = z_0 u_k$ où

$z_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}}$.

• D. Équation du second degré

(Soit a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.
L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

SPÉCIMEN

$z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\ }}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\ }}{2a}$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z}_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-}}{2a}$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

• E. Suites arithmétiques, suites géométriques

(Formules valables sur C et donc sur $\mathbb{R}$.)

Suites arithmétiques

- ✓ Par une formule de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ (r est la raison).
- ✓ Par une formule explicite : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$.
- ✓ Somme de termes consécutifs

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{Premier terme + dernier terme}}{2}.$$

- ✓ On écrit aussi :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n).$$

- ✓ Cas particulier : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Suites géométriques

- ✓ Par une formule de récurrence : $v_{n+1} = q \times v_n$ (q est la raison).
- ✓ Par une formule explicite : $v_n = q^n \times v_0$ ou $v_n = q^{(n-p)} \times v_p$.
- ✓ Somme de termes consécutifs

$$\text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

- ✓ On écrit aussi : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

$$= v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

- ✓ Cas particulier : $1 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$.

4 FONCTIONS

• A. Propriétés algébriques des fonctions usuelles

➲ *1. Fonctions logarithmes et exponentielles*

$\ln x = \int_1^x \dfrac{dt}{t}$ $(x > 0)$

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

Pour $a > 0$ et $b > 0$:

$\ln ab = \ln a + \ln b$.

$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

$\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

$\ln a^x = x \ln a$.

$e^0 = 1$.

$e^{a+b} = e^a e^b$.

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$.

$(e^a)^b = e^{ab}$.

Si $x \in]-\infty ; +\infty[$ et $y \in]0 ; +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \text{In}y$

$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$

➲ *2. Fonctions puissances*

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$ $\qquad x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ $\qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

$x^0 = 1$ si $x \neq 0$

si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;+\infty[$ et $y \in [0;+\infty[$, alors $y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$.

• B. Limites usuelles de fonctions et de suites

➲ *1. Fonctions*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$.

SPÉCIMEN

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$; si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

Comportement à l'origine de ln x, x^α

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} x^\alpha = +\infty$.

Comportement à l'origine de : ln (1 + x), e^x, sin x, $(1+x)^\alpha$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$; $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$.

Croissances comparées à l'origine

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$.

➲ 2. Suites

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$. Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.

Si $\alpha > 0$, et $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.

Si $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Si $0 < a < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.

• C. Dérivées et primitives

(Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

➲ 1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

f(x)	*f '(x)*	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty\,;+\infty[$
x	1	$]-\infty\,;+\infty[$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\lim\limits_{x\to+\infty} u_x = 5.$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0\,;+\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty\,;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty\,;+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty\,;+\infty[$
e^{rx}, $r \in \mathbb{R}$	re^{rx}	$]-\infty\,;+\infty[$

➲ 2. Opérations sur les dérivées

$(f+g)' = f' + g'$. $(kf)' = kf'$, $k \in \mathbb{R}$.

$(fg)' = f'g + fg'$. $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$; $(gof)' = (g'of)f'$.

$(e^u)' = e^u u'$.

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, avec u à valeurs strictement positives.

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$.

• D. Calcul intégral

Formules fondamentales

Si F est une primitive de *f*, alors

$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

SPÉCIMEN

Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, alors $g'(x) = f(x)$.

$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$.

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$$

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt.$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt.$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$,

alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.

Valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

Intégration par parties

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt.$$

• E. Équations différentielles

Types d'équation	*Fonctions solutions*	*Intervalles*
$y' - ay = 0$	$x \longmapsto ke^{ax}$; $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y' = ay + b$	$x \longmapsto ke^{ax} - \frac{a}{b}$; $k \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$	$\mathbb{R}$
$y'' = 0$	$x \longmapsto ax + b$; $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$.	$\mathbb{R}$
$y'' - \omega^2 y = 0.\ (\omega \neq 0)$	$x \longmapsto Ae^{\omega x} + B\,e^{-\omega x}$; $A \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y'' + \omega^2 y = 0.\ (\omega \neq 0)$	$x \longmapsto A\cos \omega x + B \sin \omega x$; $A \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

5 STATISTIQUE

- ***Moyenne***

$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ et $\overline{Y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$,

n est l'effectif total.

- ***Variance***

$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2$ et

$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \overline{Y}^2$.

- ***Covariance***

$Cov(X;Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$.

- ***Coefficient de corrélation linéaire***

$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$.

Si $|r|$ est proche de 1 , c'est-à-dire : $0{,}87 \leq r < 1$ ou $-1 < r \leq -0{,}87$, alors on dit qu'il y a une bonne corrélation linéaire ou une forte corrélation linéaire entre les deux caractères X et Y.

- ***Droites de régression***

$y = ax + b$ où $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$ est appelée la droite de régression de Y en X.

$x = a'y + b'$ avec : $a' = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)}$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$ est appelée la droite de régression de X en Y.

SPÉCIMEN

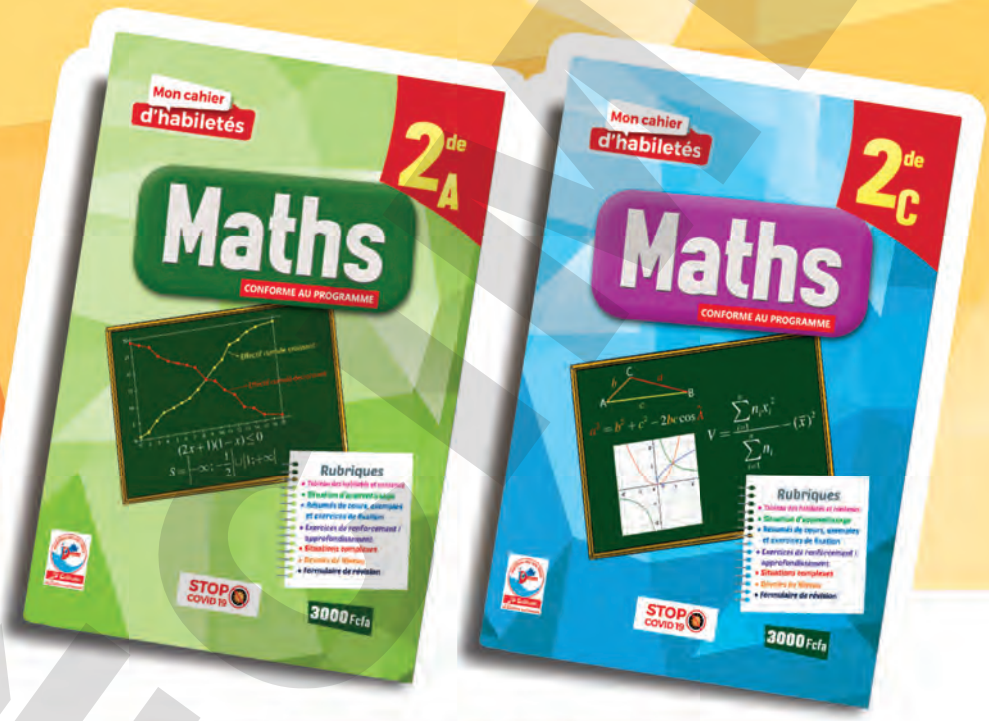
SPECIMEN



SPÉCIMEN

Achevé d'imprimer sous les presses de : JD Éditions
Pour le compte de JD Éditions.
Tél. : 25 23 00 17 50
Mise en page : JD Éditions
3ème trimestre 2020
Dépôt légal N° 10765 du 23 septembre 2013

De la même collection



MESURES BARRIÈRES



ISBN : 979-10-91832-06-9
9 791091 832069

SPÉCIMEN