

Collection NAMO

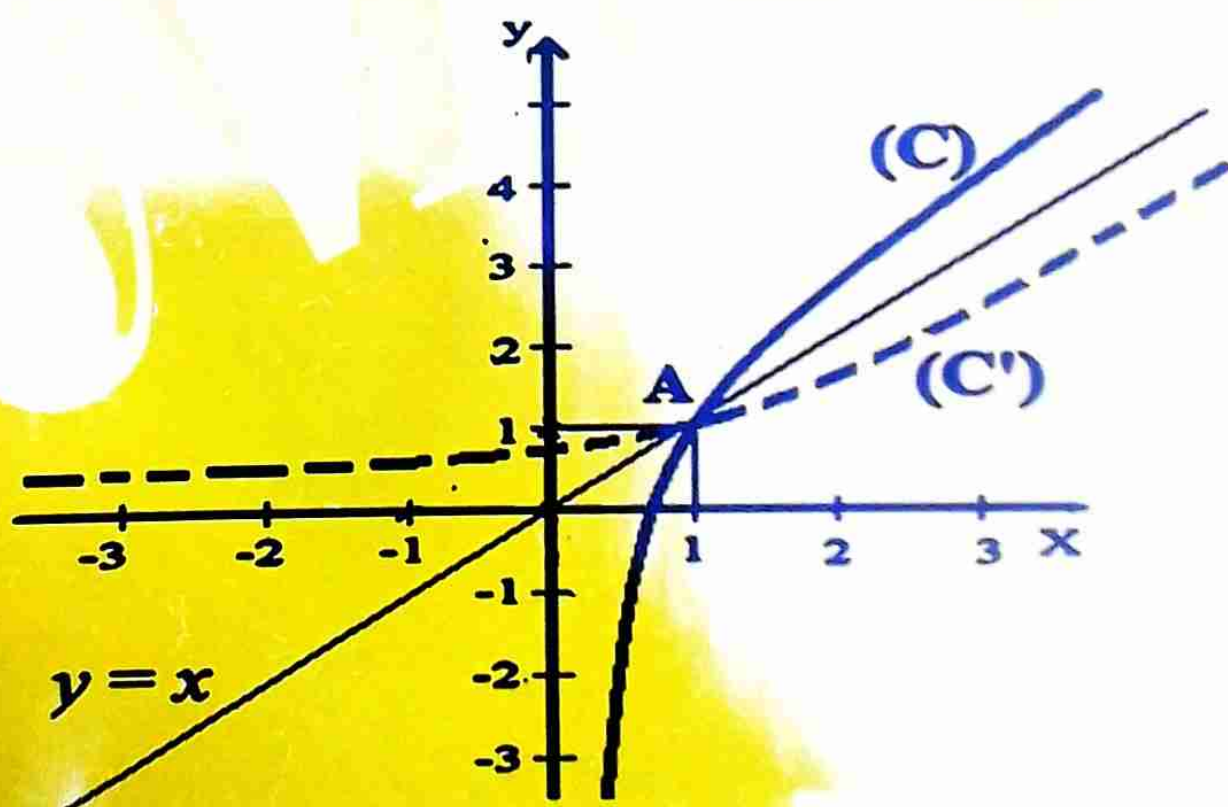
REPUBLIQUE DU NIGER

Fraternité - Travail - Progrès

Mathématiques

T^{le} D

3^{ème} Edition Janvier 2021



M. Yazi Alidou **N**asser

&
M. Himadou **M**oussa

Dans la même collection

- Pour la classe de 6^{ème} : livrets d'exercices de Maths ; Physique - Chimie ; Français et Anglais
- Pour la classe de 5^{ème} : livrets d'exercices de Maths ; Physique - Chimie ; Français et Anglais
- Pour la classe de 4^{ème} : livrets d'exercices de Maths ; Physique - Chimie ; Français et Anglais
- Pour la classe de 3^{ème} : livrets d'exercices de Maths ; Physique - Chimie ; SVT ; Français et Anglais
- Pour la classe de 3^{ème} : livret résumé du cours Maths et Physique - Chimie
- Pour la classe de 2^{nde} A : livrets d'exercices de Mathématiques
- Pour la classe de 2^{nde} C : livrets d'exercices de Maths et Physique - Chimie
- Pour la classe de 1^{ère} A : livrets d'exercices de Mathématiques
- Pour la classe de 1^{ère} C/D : livrets d'exercices de Maths et Physique - Chimie
- Pour la classe de 1^{ère} A : livrets d'exercices de Mathématiques et Anglais
- Pour la classe de 1^{ère} C/D : livrets d'exercices de Maths ; Physique - Chimie ; SVT et Anglais
- Pour la classe de 1^{ère} C/D : livrets résumés du cours Maths et Physique - Chimie

Interdit de Photocopier

Pour vous en procurer contacter le :

96 53 83 51

90 86 54 49

94 06 62 40

N.B: "Pour être sûr de soi aux examens et concours en Mathématiques traiter le maximum des exercices"

N° d'adhésion 21266 BNDA Niamey - niger

ISBN



9 782355 100055

Avant-propos

La collection NAMO est un ouvrage conforme au nouveau programme officiel au Niger. Cet ouvrage est traité avec une démarche très progressive d'apprentissage des mathématiques dans la continuité du cycle.

Nous espérons que cet ouvrage sera un outil qui servira à :

- ✓ L'enseignant de traiter des exercices d'applications du cours des différents chapitres.
- ✓ L'amélioration du niveau des élèves et des résultats de fin d'année des candidats au BAC et d'autres concours.

Nous sommes disposés à recevoir toutes les bonnes volontés pour leurs remarques, critiques et suggestions qui permettront d'améliorer ce document.

Enfin nous remercions tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la rédaction de ce document.

Contact :

Cel : 96 69 52 81

Email : yazinass@gmail.com

SOMMAIRE

Nombres complexes.....	2
Calcul de probabilités – Variables aléatoires.....	17
Fonctions logarithmes – Propriétés des fonctions continues ou dérivables –	
Fonctions exponentielles – Etude des fonctions numériques	28
Calcul intégral.....	61
Suites numériques.....	71
Equations différentielles.....	81
Statistique.....	86
Sujets BAC de 2010 à 2020.....	95

NOMBRES COMPLEXES

Résumé du cours

Soit $z = a + ib$ (avec a et b deux nombres réels) un nombre complexe.

1) Module et argument d'un nombre complexe sous forme algébrique

Le module z est : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Un argument de z est donné par :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(Z)}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

2) Ecriture trigonométrique ou écriture exponentielle d'un nombre complexe

Soit $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

- Forme trigonométrique : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

- Forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$.

3) Conjugué d'un nombre complexe sous forme algébrique et sous forme exponentielle

Le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib = re^{-i\theta} = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$.

Propriétés

$$1) \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} ; \quad 2) \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'} ; \quad 3) \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} ;$$

$$4) \bar{\bar{z}} = z \text{ si } z \text{ est un réel ;} \quad 5) \bar{\bar{z}} = -z \text{ si } z \text{ est imaginaire pur.}$$

4) Module et argument

$$\triangleright |z \times z'| = |z| \times |z'| \text{ et } \arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ et } (z \neq 0 \text{ et } z' \neq 0).$$

$$\triangleright \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ et } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ et } (z \neq 0 \text{ et } z' \neq 0).$$

$$\triangleright |z^n| = |z|^n \text{ et } \arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ et } (z \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z}).$$

5) Résolution d'une équation du second degré

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et c réels.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\triangleright$ Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$\triangleright$ Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution : $z_1 = \frac{-b}{2a}$.

$\triangleright$ Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

Mathématiques Terminale D

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

6) Différentes formes du nombre complexe

a) z est réel pur ($z \in \mathbb{R}$)

- l'écriture algébrique est $z = a \cos \theta$.
- l'argument est $\arg z = 0 + k\pi$.
- le conjugué est $z = \bar{z}$.

b) z est imaginaire pur ($z \in C$)

- l'écriture algébrique est $z = ia \sin \theta$.
- l'argument est $\arg z = (\frac{\pi}{2}) + k\pi$.
- le conjugué est $z = -\bar{z}$.

7) Calcul de distance

$$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

8) Calcul des angles

$$\text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + k2\pi.$$

9) Perpendicularité de deux droites (AB) et (CD)

Si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un nombre imaginaire pur ou $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

10) Comment montrer que trois points sont alignés

Si $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right)$ est un nombre réel ou $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right) = 0 + k2\pi$ alors les points A, B et C sont alignés.

11) Nature du triangle ABC

- Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ai$ (avec a un réel non nul) alors ABC est un triangle rectangle en A.
- Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ alors ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
- Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\theta}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\theta}$ ($\theta \neq k\pi$) alors ABC est un triangle isocèle en A.
- Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ alors ABC est un triangle équilatéral.

12) L'ensemble des points M tel que :

- $|Z - Z_A| = r$ est le cercle de centre A et de r .
- $|Z - Z_A| = |Z - Z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

13) Quelques formules trigonométriques

a) Angles associés

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(-x) = \cos x;$$

$$\sin(-x) = -\sin x;$$

$$\text{tg}(-x) = -\text{tg} x;$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x;$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x;$$

$$\text{tg}(\pi - x) = -\text{tg} x;$$

Mathématiques Terminale D

$$\begin{aligned}\cos(\pi + x) &= -\cos x; & \sin(\pi + x) &= -\sin x; & \operatorname{tg}(\pi + x) &= \operatorname{tg} x; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x; & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x; & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{\operatorname{tg} x}; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x; & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x; & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\frac{1}{\operatorname{tg} x}.\end{aligned}$$

b) Formules d'addition

$$\begin{aligned}\cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b; & \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b; \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b; & \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b.\end{aligned}$$

c) Formules de duplication

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1; & \sin 2a &= 2 \sin a \cos a; \\ \cos^2 a &= \frac{1 + \cos 2a}{2}; & \sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2}.\end{aligned}$$

d) Formules de transformation de produit en somme

$$\begin{aligned}\cos a \cos a &= \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]; & \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]; \\ \frac{1}{2} \sin a \cos b &= \sin(a + b) + \sin(a - b); & \frac{1}{2} \cos a \sin b &= \sin(a + b) + \sin(a - b).\end{aligned}$$

14) Elément caractéristiques d'une transformation du plan

	$a \in \mathbb{R}^*$		$a \in \mathbb{R}^*, a = a e^{i\theta}$	
	$a = 1$	$a \neq 1$	$ a = 1$	$ a \neq 1$
Bijection Complexe	$f(z) = az + b$			
Transformations du plan	Translation de vecteur $\vec{u}$	Homothétie de : rapport $ a $ centre $\Omega(\omega)$	Rotation : angle θ centre $\Omega(\omega)$	Similitude Plane Directe de : rapport angle θ , centre $\Omega(\omega)$
Eléments caractéristiques	L'affixe de $\vec{u}$ est b	- Rapport $ a $ - centre : $\omega = \frac{b}{1-a}$	- $\theta = \arg(a)$ - $\omega = \frac{b}{1-a}$	- Rapport $ a $ - $\theta = \arg(a)$ - centre : $\omega = \frac{b}{1-a}$

15) Cosinus et sinus de quelques angles particuliers

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Mathématiques Terminale D

16) Racines carrées d'un nombre complexe

Soit $Z = a + ib$ et soit $z = x + iy$ une racine carrée de Z .

$$z^2 = Z \Leftrightarrow |z|^2 = |Z| \text{ et } (x + iy)^2 = a + ib$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = |Z| \text{ et } (x^2 - y^2 + 2xyi) = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |Z| & (1) \\ x^2 - y^2 = a & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases}$$

Remarque : - Si $b > 0$ alors x et y ont le même signe.

- Si $b < 0$ alors x et y ont des signes contraires.

17) Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

- Les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité sont : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$ avec $n \geq 2$.

- Les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe a non nul sont : $z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ où $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$ et $\theta = \arg(a)$.

Exercice d'application 1

Soit P le polynôme défini dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - z^2 + (5 + 7i)z + 10 - 2i$

1) Montrer que P possède une racine imaginaire pure.

2) En déduire une factorisation de P de la forme $P(z) = (z - 2i)Q(z)$ où Q est un polynôme du second degré à coefficients complexes.

3) Résoudre alors $P(z) = 0$ et factoriser complètement le polynôme P .

Correction

1) $2i$; 2) $Q(z) = z^2 + (-1 + 2i)z + i + 5i$; 3) $S_{\mathbb{C}} = \{2i; -1 + i; 2 - 3i\}$

$$P(z) = (z - 2i)(z + 1 - i)(z - 2 + 3i)$$

Exercice d'application 2

Linéariser les expressions suivantes :

$$1) \sin^2 x ; \quad 2) \cos^4 x ; \quad 3) \cos x \sin^2 x ; \quad 4) \cos^2 x \sin^2 x.$$

Correction

$$1) \sin^2 x = [1 - \cos(2x)]/2 ; \quad 2) \cos^4 x = \frac{1}{8} [\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3] ;$$

$$3) \cos x \sin^2 x = -\frac{1}{4} [\cos(3x) - \cos(x)] ; \quad 4) \cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{8} (-\cos(4x) + 1).$$

Exercice d'application 3

1) a) Calculer $(3 - 2i)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante: $z^2 - 4z - 1 + 12i = 0$.

2) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives $a = -1 + 2i$, $b = 5 - 2i$ et $c = 3 + 2i$.



Mathématiques Terminale D

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application S_1 dans le plan complexe P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 - i)z - 2 - i.$$

Déterminer l'affixe du point D qui a pour image par S_1 le point C. Placer le point D.

c) Donner l'écriture complexe de la similitude directe S_2 du plan P de centre le point B, d'angle de mesure $\frac{-\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Déterminer l'affixe de E image du point C par S_2 . Placer le point E.

Correction

1) a) Calcul de : $(3 - 2i)^2 = 5 - 12i$

b) Résolution de $z^2 - 4z - 1 + 12i = 0$

Discriminant réduit est $\Delta' = 5 - 12i = (3 - 2i)^2$ alors les solutions sont :

$$z_1 = 5 - 2i \text{ et } z_2 = -1 + 2i$$

2) a) Représentation des points A, B et C.

b) Nature et éléments caractéristiques de S_1

Écriture complexe donnée est $z' = (1 - i)z - 2 - i$

$$(1 - i) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

l'affixe du point D est $z_0 = -1 + 2i = a$.

S_1 est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

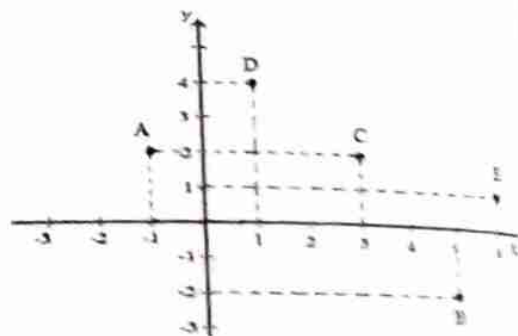
Affixe du point D ; on sait que $S_1(D) = C$ donc $d = 1 + 4i$. Représentation de D.

c) Détermination de l'écriture complexe de S_2

$z' = az + b$ avec $a = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1 - i)$ et B est point fixe d'où :

$$z' = \frac{1}{2}(1 - i)z + \frac{1}{2}(7 + 3i)$$

Affixe du point E : on sait que $S_2(C) = E$ donc $e = 6 + i$. Placement de E.



Série d'exercices

Exercice 1

1) Donner la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes :

$$z_1 = -1 + \frac{1}{2}i ; \quad z_2 = i ; \quad z_3 = (1 + 2i)^2 ; \quad z_4 = (1 + i)^3 ;$$

$$z_5 = \frac{i}{1 + 3i} ; \quad z_6 = \frac{1 + i}{2 + i} ; \quad z_7 = (1 + i)^{-3} ; \quad z_8 = -i + 3.$$

Mathématiques Terminale D

2) Donner les conjugués de chacun des nombres complexes :

$$z_1 = 2 + 3i ; \quad z_2 = -i ; \quad z_3 = (1 - i)^3 ; \quad z_4 = (1 + i\sqrt{2})^3 ;$$

$$z_5 = \frac{3}{1-2i} ; \quad z_6 = \frac{1-i}{2-i} ; \quad z_7 = (1+i)^{-2} ; \quad z_8 = -4i^* - 1.$$

3) Placer dans le plan complexe les points M_i d'affixes z_i :

$$z_1 = 2 + 3i ; z_2 = -i - 3 ; z_3 = -1 + 2i ; z_4 = 2 - i ; z_5 = i ; z_6 = -2.$$

Exercice 2

Soient $z_1 = 3 + 4i$ et $z_2 = i - 1$.

Calculer $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $2z_1 - 3z_2$; $z_1 z_2$; z_1^2 .

Exercice 3

Ecrire sous la forme $x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2 + 3i)^3 ; \quad z_2 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} ; \quad z_3 = \left(\frac{i-1}{2}\right)(1+i)^2 ; \quad z_4 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}.$$

Exercice 4

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} ; \quad z_2 = 6e^{3i\pi} ; \quad z_3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}} ; \quad z_4 = e^{-i\frac{5\pi}{3}} ; \quad z_5 = e^{-i\frac{6\pi}{4}} ; \quad z_6 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

Exercice 5

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$z_1 = 2 + 2i ; \quad z_2 = 1 - i ; \quad z_3 = \sqrt{3} + i ; \quad z_4 = 4 ; \quad z_5 = -2i ;$$

$$z_6 = (1+i)^5 ; \quad z_7 = (1+i\sqrt{3})^2 ; \quad z_8 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad z_9 = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} ; \quad z_{10} = \frac{1-i}{1+i}$$

Exercice 6

Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2 ; \quad z_2 = -3i ; \quad z_3 = 1 + i ; \quad z_4 = \sqrt{3} + 3i ; \quad z_5 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} ;$$

$$z_6 = \frac{\sqrt{3}+3i}{1-i} ; \quad z_7 = (1-i)^3 ; \quad z_8 = 1 + i\sqrt{3} ; \quad z_9 = \frac{1}{1-i}$$

Exercice 7

On donne les nombres complexes :

$$z = (\sqrt{6} + i\sqrt{2})\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \text{ et } z' = \frac{1-i\sqrt{3}}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

1) Ecrire z et z' sous forme algébrique $a + ib$.

2) Déterminer le module puis un argument de z ; z' et zz' .

3) Déterminer le module puis un argument de $Z = \frac{z}{z'}$. Ecrire Z sous forme algébrique.

Mathématiques Terminale D

Exercice 8

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = 1 + i$$

- 1) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique et exponentielle.
- 2) En déduire une forme trigonométrique de $z_1 \times z_2$.
- 3) Déterminer la forme algébrique de $z_1 \times z_2$.
- 4) En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- 1) $z^2 - 5iz - 7 + i = 0$;
- 2) $z^2 + 2iz\sqrt{2} - 2(1 + i) = 0$;
- 3) $z^2 + z + 1 = 0$;
- 4) $z^2 - 2z + 2 = 0$;
- 5) $iz^2 + (1 + 2i)z - 1 = 0$;
- 6) $(1 - 2i)z^2 + 2iz - 1 = 0$;
- 7) $z^2 + \sqrt{3}z - 5 + 3i\sqrt{3} = 0$;
- 8) $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$;
- 9) $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$;
- 10) $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0$;
- 11) $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$;
- 12) $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$;
- 13) $z^2 + iz + 5 - 5i = 0$;
- 14) $z^2 + z - iz - 5i = 0$;
- 15) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$;
- 16) $z^4 - (3 + 2i)z^2 + 8 - 6i = 0$.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- 1) $z^2 = -3$;
- 2) $z^2 = 2i$;
- 3) $z^2 = 1 + i$;
- 4) $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$;
- 5) $z^2 = 3 - 4i$;
- 6) $z^3 = 8i$;
- 7) $4z^4 = -i$;
- 8) $(z + 1)^4 = -16$;
- 9) $z^3 = 2 + 2i$.

Exercice 11

1) Linéariser les expressions suivantes :

- a) $\sin^4 x$;
- b) $\cos^5 x$;
- c) $\sin^6 x$;
- d) $\cos^6 x$;
- e) $\cos^3 x \sin^2 x$;
- f) $\cos^2 x \sin^3 x$;
- g) $2\cos^2 x - 3\sin^2 x - 4$;
- h) $\sin x \cos x - 5\cos^3 x$.

2) Ecrire $\cos(4x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ puis en déduire une linéarisation de $2\cos(4x)\sin^2 x$.

3) Montrer que :

$$a) \cos^3 x \sin x = \frac{2 \sin(2x) + \sin(4x)}{8} ; \quad b) \cos x \sin^3 x = \frac{2 \sin(2x) - \sin(4x)}{8} ;$$

$$c) \cos x \sin^4 x = \frac{\cos(5x) - 3 \cos(3x) + 2 \cos(x)}{16} .$$

Exercice 12

Soit l'équation (E) : $(1 - 2i)z^2 + (1 + i)z - i = 0$

Mathématiques Terminale D

- 1) Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $8 - 6i$ puis en déduire celles de $8 + 6i$.
- 2) Montrer que l'équation (E) a pour discriminant $\Delta = 8 + 6i$.
- 3) En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 13

Dans chacun des cas suivants que peut-on dire des points A, B et C ?

- 1) $z_A = -1 - 2i$; $z_B = -10 - 8i$; $z_C = 2$;
- 2) $z_A = 2 + i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 2 + 2i$;
- 3) $z_A = -1 + i\sqrt{3}$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$; $z_C = 2$;
- 4) $z_A = 2 + i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 1 - i$.

Exercice 14

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout point P, on associe z_P son affixe.

- 1) On considère l'équation (E) : $z^3 + 8 = 0$.
 - a) Déterminer les réels a, b et c tels que $z^3 + 8 = (z + 2)(az^2 + bz + c)$ pour tout complexe z .
 - b) Résoudre l'équation (E) (on donnera les solutions sous la forme $x + iy$ puis sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un réel positif).
- 2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives -2 ; $1 - i\sqrt{3}$ et $1 + i\sqrt{3}$, et la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
 - a) Placer A, B et C dans le plan.
 - b) Démontrer que $R(A) = B$, $R(B) = C$ et $R(C) = A$. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 15

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité : 1cm).

On considère le polynôme P tel que : $P(z) = z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i$.

- 1) a) Montrer que $-i$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
b) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que : $P(z) = (z + i)(az^2 + bz + c)$.
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- 2) On note A, B et C les points d'affixes respectives $4 + i$, $4 - i$, $-i$.
 - a) Placer ces points dans le repère que l'on complètera dans la suite de l'exercice.
 - b) Soit S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ avec Ω le point d'affixe 2. Calculer l'affixe de S.



Mathématiques Terminale D

c) Démontrer que les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer (C).

3) A tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.

a) Déterminer les affixes des points A', B' et C' associés respectivement aux points A, B et C.

b) Vérifier que A', B' et C' appartiennent à un cercle (C') de centre P, d'affixe i .

c) Déterminer son rayon et tracer (C').

4) a) Pour tout nombre $z \neq 2$, exprimer $|z' - i|$ en fonction de z .

b) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle (C). Démontrer que :

$$|z' - i| = 2\sqrt{5}.$$

c) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle (C).

Exercice 16

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) : $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

1) a) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme

$(z - 2)(az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

b) En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Placer les points A, B et D d'affixes respectives :

$$z_A = -2 - 2i, z_B = 2 \text{ et } z_D = -2 + 2i.$$

b) Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

3) Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

a) Calculer les affixes z_E et z_F des points E et F.

b) Placer les points E et F.

4) a) Vérifie que $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$ puis en déduire la nature du triangle AEF.

b) Soit I le milieu de [EF]. Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 17

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne les points I, A et B d'affixes respectives $z_I = 1$, $z_A = 1 - 2i$ et $z_B = -2 + 2i$ et (C) le cercle de diamètre [AB].

Mathématiques Terminale D

On complètera la figure au fur et à mesure. (Unité graphique : 2cm)

- 1) Déterminer le centre Ω du cercle (C) et calculer son rayon.
- 2) Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$. Ecrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle (C)
- 3) On considère un point E d'affixe z_E appartenant au cercle (C) tel que $(\overline{\Omega I}, \overline{\Omega E}) = \frac{\pi}{4}$.
 - a) Préciser le module et un argument de $z_E + \frac{1}{2}$.
 - b) En déduire que $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$.
- 4) Soit R l'application du plan P dans qui associe à tout point M d'affixe z , le point M' d'affixe z' tel que $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}(z + \frac{1}{2})$.
 - a) Déterminer la nature de R et ses éléments caractéristiques.
 - b) Soit K le point d'affixe $z_K = 2$. Déterminer par le calcul l'image de K par R

Exercice 18

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$.
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C et P d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$, $z_P = 3 + 2i$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.
 - a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B dans la translation $t_{\vec{w}}$.
 - b) Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.
 - c) Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Placer les points P, Q, R et S.

- 3) a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.
- b) Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ puis en déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.
- c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté (C). On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon.
- 4) La droite (AP) est-elle tangente au cercle (C) ?

Exercice 19

A) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $2z^2 - (\sqrt{3} + 1)(1 + i)z + 2i = 0$.

- 1) Vérifier que : $[(\sqrt{3} + 1)(1 + i)]^2 - 16i = [(\sqrt{3} - 1)(1 - i)]^2$.

Mathématiques Terminale D

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b.

b) Vérifier que $b^2 = a$.

c) Déduire les racines carrées du nombre complexe a.

2) Soit C le point d'affixe $c = a + b$.

a) Placer les points A, B et C.

b) vérifier que $c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 + z - c = 0$.

a) Vérifier que b est une solution de (E').

b) On désigne par d l'autre solution de (E'). Montrer que $d = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

c) Placer le point D d'affixe d.

Exercice 20

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1 + 3i)z - 2 + i = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) On pose $f(z) = z^3 - (2 + 3i)z^2 + (4i - 1)z + 2 - i$.

a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ une solution réelle que l'on déterminera.

b) Déterminer les nombres complexes b et c tels que : $f(z) = (z - 1)(z^2 + bz + c)$ quelque soit $z \in \mathbb{C}$.

c) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$.

3) Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $1 + 2i, i, 1$.

Placer les points A, B et C puis déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 21

Soit l'équation (E) : $z^2 + (1 - 3i)z - 2i - 2 = 0$.

On désigne par z_1 et z_2 les deux solutions de (E).

1) a) Sans calculer z_1 et z_2 , vérifier que $|z_1 \times z_2| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_1 \times z_2) = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

b) Vérifier que $z_1 = 2i$ est une solution de (E).

c) En déduire l'écriture exponentielle puis l'écriture algébrique de z_2 .

2) Soit (E') : $z^3 - (1 + 3i)z^2 - (4 - 4i)z + 2(2i + 2) = 0$.

Mathématiques Terminale D

a) Vérifier que 2 est une solution de (E') .

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') .

3) Soit $(E_1) : z^2 + 2e^{i\theta}z + e^{2i\theta} - 1 = 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) .

4) Soit A, B et C les points d'affixes respectives : $2e^{i\theta}$, $1 + e^{i\theta}$ et $-1 + e^{i\theta}$.

a) Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

b) Montrer que OBAC est un rectangle.

Exercice 22

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) Placer les points A, B, C et I d'affixes respectives $-2i$, $1 + i$, $4 + 2i$ et 2.

b) Vérifier que I est le milieu de [AC].

2) a) Calculer les affixes u et v des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Montrer que ABC est un triangle isocèle en B.

3) a) Soit $D = S_I(B)$. Calculer l'affixe du point D.

b) Montrer que ABCD est un losange.

4) Déterminer les ensembles suivants :

$\Delta = \{M(z) \text{ tel que } |z - 2| = |z + 2i|\}$; $\Delta' = \{M(z) \text{ tel que } |2z + 4i| = 4\}$.

$\Delta'' = \{M(z) \text{ tel que } |iz - i + 1| = |z - 4 - 2i|\}$;

Exercice 23

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que

$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC].

1) Soit f la similitude directe qui transforme B en J et C en A.

a) Déterminer le rapport et l'angle de f .

b) Déterminer $f(AC)$ et $f(AB)$. En déduire $f(A)$.

c) On désigne par Ω le projeté orthogonal de A sur la droite (IC). Montrer que Ω est le centre de f .

Exercice 24

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z

associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3})$.

1) Montrer que f une similitude directe dont on précisera le centre Ω , le rapport et l'angle.

Mathématiques Terminale D

2) Soit M_0 d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$. Donner la forme trigonométrique de $z_0 - z_\Omega$.

Exercice 25

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et C d'affixes respectives -1 et 1 .

Soit le E le point construit pour que ACE soit équilatéral directe ; on a donc

$(\vec{AC}, \vec{AE}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$. Calculer l'affixe du point E et construire le point E .

Soit f la similitude directe d'expression complexe : $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{3-i\sqrt{3}}{4}$.

Déterminer les éléments caractéristiques de f .

Exercice 26

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A_0, A_1 et A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5 - 4i$, $z_1 = -1 - 4i$ et $z_2 = -4 - i$.

1) Justifier l'existence d'une unique similitude directe telle que : $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.

2) Etablir que l'écriture complexe de S est $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3-i}{2}$.

3) En déduire le rapport, l'angle et l'affixe z_Ω du centre Ω de la similitude S .

Exercice 27

1) On considère le polynôme $P(z)$ défini dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par $P(z) = z^3 + 2(5 - 2i)z^2 - 2(4 + 23i)z - 4(8 - 27i)$.

a) Montrer que l'équation : $P(z) = 0$, a une solution réelle, puis déterminer les nombres complexes u et v tels que : $P(z) = (z - 2)(z^2 + uz + v)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

2) a) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points A, B et C , d'affixes respectives : $a = 2$; $b = -1 + 5i$ et $c = -11 - i$, et on désigne par S la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C . Placer les points A, B et C .

b) Calculer : $\alpha = \frac{c-b}{b-a}$, puis préciser le module et un argument de α .

c) En donnant une interprétation géométrique du module et d'un argument du nombre complexe α , préciser le rapport et l'angle de la similitude S , puis donner la nature du triangle ABC .

d) (C) désigne le cercle circonscrit au triangle ABC .

Mathématiques Terminale D

Déterminer l'affixe du centre I et le rayon R de (C).

c) Donner l'écriture complexe de la similitude S.

C

Exercice 28

1) a) Calculer $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$

b) En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les solutions de l'équation : $z^2 - i = 0$.

2) On pose $P(z) = z^3 + z^2 - iz - i$ où z est un nombre complexe.

a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine réelle α que l'on déterminera.

b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.

A₁

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 2 cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $z_C = -1$.

a) Déterminer la forme exponentielle de z_A et z_B .

b) Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe.

4) Soit D le symétrique de A par rapport à l'axe des réels.

a) Donner l'affixe z_D du point D sous forme algébrique.

b) Démontrer que : $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la nature du triangle ACD.

5) Soit E le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}i$ et F son symétrique par rapport à O.

On considère la similitude directe S qui transforme E en A et F en B.

a) Déterminer l'écriture complexe de S et ses éléments caractéristiques.

b) Soit (C) le cercle de centre E et de rayon 1. Déterminer l'image (C') de (C) par S.

Exercice 29 : BAC 1999

Dans $\mathbb{C}$, corps des nombres complexes, on considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 - 4iz^2 - (6+i)z + 3i - 1$$

1) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sachant que cette équation admet une racine imaginaire pure notée z_0 .

2) Acheter de résoudre cette équation. On désignera par z_1 la racine de l'équation $P(z) = 0$ ayant une partie réelle négative et par z_2 l'autre racine.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) , placer les points M_0 , M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0 , z_1 et z_2 .

4) Montrer qu'il existe une similitude directe unique de centre M_0 qui transforme M_1 en M_2 . Donner une mesure de l'angle et le rapport de cette similitude.

Mathématiques Terminale D

5) Soit C l'ensemble des points M du plan qui sont les centres des similitudes directes transformant M_1 en M_2 dans un rapport égal à $\sqrt{2}$. Déterminer C et le tracer dans le plan complexe.

Exercice 30 : BAC 2004

1) Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3 - m(1+i)z^2 + im^2z = 0$ où m est un complexe donné non nul.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b) Soient O, A, B les points images des solutions de l'équation (E) tels que B soit l'image de A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Montrer que OAB est un triangle isocèle rectangle en O .

2) a) Déterminer m pour que l'équation (E) admette pour solution le complexe $1+i$.

b) Résoudre l'équation (E) dans chacun des cas trouvés.

3) Soit M le point d'affixe m . On suppose que M décrit dans le plan complexe le cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 - x = 0$.

a) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).

b) Déterminer l'image du cercle (C) par la rotation R .

Exercice 31 : BAC 2006

1) Dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, soit P le polynôme en z suivant :

$$P(z) = z^3 + (-7 + 2i)z^2 + (15 - 4i)z - 25 + 10i.$$

Calculer $P(5 - 2i)$ et résoudre l'équation $P(z) = 0$.

2) Soit S la similitude plane directe de centre I d'affixe $z_I = -3 - 2i$ et qui transforme le point A d'affixe $z_A = 1 + 2i$ en B d'affixe $z_B = 5 - 2i$.

a) Déterminer f , l'application complexe associée à S .

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S .

c) Soit (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1; -2)$. Déterminer l'équation de la droite (D') image de la droite (D) par S .

Exercice 32 : BAC 2008

$$\text{Soit } P(z) = 3z^3 + (-5\sqrt{3} + 10i)z^2 + (5 - 15\sqrt{3}i)z + 24i$$

1) a) Calculer $P(-3i)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) , on considère les points $A(0; -3)$, $B(\sqrt{3}; -1)$, $C(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3})$.

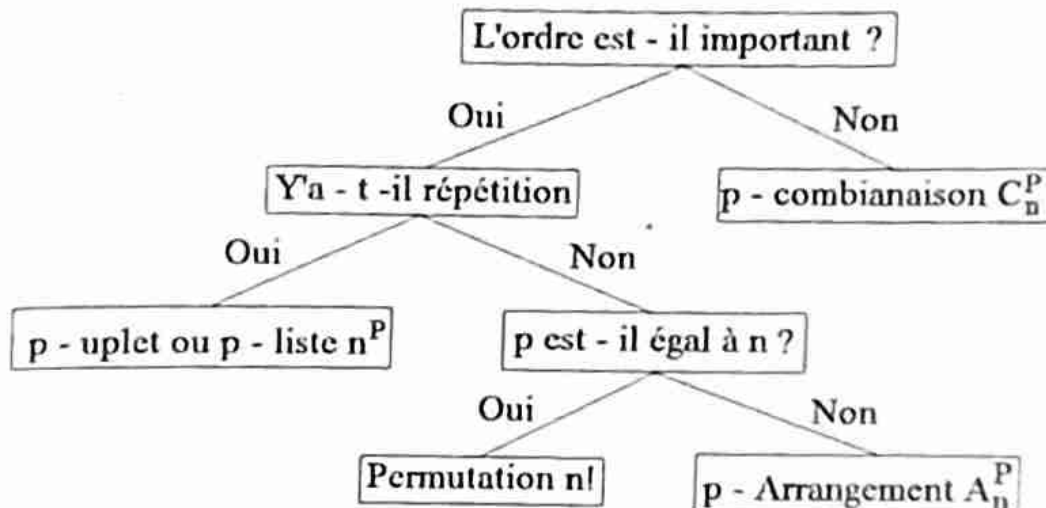
Déterminer les éléments géométriques de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C .

PROBABILITE

Résumé du cours

1) Les principaux modèles de probabilité

Pour un tirage de p éléments dans un ensemble de n éléments



2) Le choix du modèle de probabilité

- Lorsqu'on parle de tirage successif avec remise alors le modèle mathématique est :
p - liste (n^p).
- Lorsqu'on parle de tirage successif sans remise alors le modèle mathématique est :
l'arrangement ($A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$) avec $n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 1!$.
- Lorsqu'on parle de tirage simultané alors le modèle mathématique est :
la combinaison ($C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! p!}$).

Propriétés

$$A_n^0 = 1; \quad A_n^1 = n; \quad A_n^n = n; \quad C_n^0 = 1; \quad C_n^1 = n; \quad C_n^n = 1; \quad C_n^{n-1} = n.$$

3) Probabilité simple

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} \text{ avec } \begin{cases} \text{Card } A = \text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A \\ \text{Card } \Omega = \text{nombre total de cas possibles} \end{cases}$$

4) Probabilité conditionnelle

Soient 2 événements A et B de probabilité non nulle tels que $A \cap B \neq \emptyset$.

La probabilité de réalisation de A quand B est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B ou probabilité de A sachant B .

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Mathématiques Terminale D

5) Indépendance

Deux événements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'autre. On a alors : $\begin{cases} P_B(A) = p(A) \\ P_A(B) = p(B) \end{cases} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

6) Espérance mathématique d'une variable aléatoire

$$E(X) = \sum x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots$$

7) Variance et écart-type d'une variable aléatoire

$$a) V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum x_i^2 p_i - (E(X))^2 ; \quad b) \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

8) Epreuve de Bernoulli

C'est une épreuve aléatoire ne conduisant qu'à 2 éventualités :

succès noté p ; échec noté $q = 1 - p$.

9) Loi binomiale

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de succès.

La probabilité d'avoir exactement k succès est : $p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Exercice d'application 1

Une enquête menée auprès d'une population d'un village sur une maladie a donné les résultats suivants :

- 98% des tests sont positifs chez les individus atteints.

- 99% des tests sont négatifs chez les individus sains.

Pour un individu pris au hasard dans la population ciblée, on désigne par :

A : " l'individu est atteint par le virus ",

T : " le test est positif ".

1) On suppose que cette maladie touche 5% de la population ciblée.

a) Illustrer la situation par un arbre pondéré.

b) Quelle est la probabilité pour qu'un individu choisi au hasard ait un test positif ?

c) Quelle est la probabilité pour qu'un individu dont le test est positif soit atteint par le virus ?

2) On désigne par x le pourcentage d'individus malades dans la population ciblée par le test. Montrer que la probabilité qu'un individu dont le test est positif soit atteint par le virus

est dans ce cas : $P(x) = \frac{98x}{97x+1}$

Correction

Soit les événements A : " L'individu est atteint par le virus du sida "

T : " le test est positif ".

Mathématiques Terminale D

On donne : $P(A) = 0,05$; $P(\bar{A}) = 0,95$; $P(T/A) = 0,98$; $P(\bar{T}/\bar{A}) = 0,99$.

1) a) Illustration de la situation par un arbre pondéré

b) La probabilité d'avoir un test positif:

$$P(T) = P(T \cap A) + P(T \cap \bar{A})$$

$$P(T) = P(A).P(T/A) + P(\bar{A}).P(T/\bar{A}) = 0,0585$$

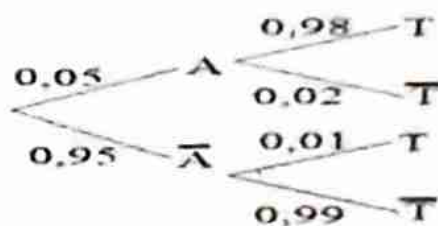
c) La probabilité d'être atteint si le test est positif:

$$P(A/T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{P(A).P(T/A)}{P(T)} = 0,8376$$

2) La probabilité d'être atteint si le test est positif avec $P(A) = x$; $P(\bar{A}) = 1 - x$.

$$P(T) = P(A).P(T/A) + P(\bar{A}).P(T/\bar{A}) = x \times 98 \cdot 10^{-2} + (1 - x)10^{-2} = (97x + 1)10^{-2}$$

$$P(A \cap T) = x \times 98 \cdot 10^{-2} \text{ d'où: } P(A/T) = \frac{x \times 98 \cdot 10^{-2}}{(97x + 1)10^{-2}} = \frac{98x}{97x + 1}$$



Exercice d'application 2

Une cage contient dix souris : cinq blanches (trois femelles et deux mâles), trois grises toutes femelles et deux marrons (un mâle et une femelle). Une épreuve consiste à retirer simultanément et au hasard trois souris de la cage.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Les trois souris retirées sont de même sexe » ;

B : « Les trois souris retirées sont de même couleur »

2) Sachant que les trois souris retirées sont femelles, calculer la probabilité pour qu'elles soient de même couleur.

3) a) On désigne par X l'aléatoire numérique qui à chaque tirage associe le nombre de souris blanches obtenues. Etablir la loi de probabilité de X.

b) Calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart type.

Correction

1) Calculons la probabilité de chacun des événements A et B :

$$P(A) = \frac{C_3^3 C_7^0 + C_3^0 C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{1 + 35}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10} ; \quad P(B) = \frac{C_5^1 C_5^0 + C_3^3 C_2^0}{C_{10}^3} = \frac{10 + 1}{120} = \frac{11}{120}$$

2) Calculons la probabilité pour qu'elles soient de même couleur.

$$P = \frac{C_3^3 C_7^0 + C_3^0 C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

3) a) Etablissons la loi de probabilité de X.

$$X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_5^0 C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12} ;$$

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12} ;$$

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12} ;$$

$$P(X = 3) = \frac{C_5^3 C_5^0}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12} ;$$

Mathématiques Terminale D

$X(\Omega)$	0	1	2	3	Total
$P(X)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

b) Calculons son espérance mathématique, sa variance et son écart type.

$$E(X) = \sum x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots$$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times \frac{1}{12} = \frac{18}{12} = 1,5.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum x_i^2 p_i - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{12} + 1^2 \times \frac{5}{12} + 2^2 \times \frac{5}{12} + 3^2 \times \frac{1}{12} = \frac{34}{12}$$

$$V(X) = \frac{34}{12} - \left(\frac{18}{12}\right)^2 = \frac{34}{12} - \frac{324}{144} = \frac{84}{144} = 0,58$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,76$$

Série d'exercices

Exercice 1

E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus.

On choisit au hasard l'un de ces nombres.

1) Quelle est la probabilité des événements suivants :

A : « le nombre est un multiple de 2 » ; B : « le nombre est un multiple de 4 » ;

C : « le nombre est un multiple de 5 » ;

D : « le nombre est un multiple de 2 mais pas de 4 »

2) Calculer la probabilité de : a) $A \cap B$; b) $A \cup B$; c) $A \cap C$; d) $A \cup C$.

Exercice 2

On jette 3 dés identiques non pipés puis on lit les faces supérieures de chaque dé.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : « obtenir des résultats comportant un seul 4 ».

B : « obtenir des résultats comportant exactement deux 4 ».

C : « obtenir des résultats ne comportant aucun 4 ».

D : « obtenir des résultats formés de trois chiffres différents ».

Exercice 3

Une urne contient douze boules : sept rouges numérotées : 0,7,7,8,8,8,9 et cinq noires numérotées : 0,0,7,8,9.

On tire successivement sans remise quatre boules de l'urne. Déterminer la probabilité d'obtenir :

A : « quatre numéros » ;

B : « un nombre de quatre chiffres différents » ;

C : « le nombre 80 » ;

D : « le nombre 8078 où les couleurs sont alternées ».

Mathématiques Terminale D

Exercice 4

On dispose de 3 marques d'appareils portables, notées respectivement M_1 , M_2 et M_3 .

$\frac{1}{2}$ des appareils provient de M_1 , $\frac{1}{8}$ de M_2 , et $\frac{3}{8}$ de M_3 .

13% des appareils de marque M_1 sont rouge ; 5% des appareils de marque M_2 sont rouges et 10% des appareils de marque M_3 sont rouges.

On choisit au hasard un appareil emballé.

- 1) Calculer la probabilité que l'appareil choisi soit de marque M_3 .
- 2) Calculer la probabilité que l'appareil de marque M_2 choisi soit rouge.
- 3) Calculer la probabilité que l'appareil choisi ne soit pas de couleur rouge.
- 4) Sachant que l'appareil choisi est rouge. Calculer la probabilité qu'il soit de la marque M_1 .

Exercice 5

Une entreprise en matériel informatique fabrique des disquettes 4% des disquettes fabriquées sont défectueuses. L'unité de contrôle rejette 3% des bonnes disquettes et 95% des disquettes défectueuses.

- 1) Quelle est la probabilité pour qu'une disquette choisie défectueuse et acceptée par l'appareil de contrôle ?
- 2) Quelle est la probabilité pour qu'une disquette soit bonne et refusée ?
- 3) Quelle est la probabilité pour qu'il ait une erreur de contrôle ?
- 4) Déterminer la probabilité pour qu'une disquette soit acceptée par l'appareil de contrôle.

Exercice 6

Une urne contient 10 boules indiscernables au touchées : six noire numérotées 1, 1, 2, 2, 2, 3 et quatre blanches numérotées 1, 1, 2, 3.

1) On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « avoir exactement deux boules noires et une boule blanche ».

B : « avoir au moins une boule noire ».

C : « la boule n°2 est tirée pour la première fois au deuxième tirage ».

2) On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne. Calculer la probabilité des évènements suivants :

D : « obtenir trois boules noires ».

E : « la somme des trois numéros inscrits sur les boules tirées est paire ».

F : « obtenir trois boules noires ou une somme paire ».

Mathématiques Terminale D

Exercice 7

Une urne contient quatre boules blanches numérotées : -1, 0, 0, 1 et cinq boules noires numérotées : -1, 1, 1, 2, 2.

1) On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « obtenir des boules bicolores ».

B : « obtenir des boules dont le produit des numéros est nul ».

C : « obtenir des boules dont le produit est une puissance de 2 ».

D : « $A \cap B$ ».

E : « il reste dans l'urne le même nombre de boules blanches que de boules noires ».

2) On tire successivement sans remise trois boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

F : « obtenir exactement deux boules blanches » ; G : « obtenir une somme nulle ».

Exercice 8

On dispose d'un sac contenant 8 boules blanches, 7 boules noires et 5 boules vertes.

On tire 5 boules du sac.

1) Calculer la probabilité de tirer simultanément 2 blanches, 1 noire et 2 vertes.

2) Calculer la probabilité de tirer successivement sans remise 2 blanches, 1 noire et 2 vertes.

3) Calculer la probabilité de tirer successivement sans remise 2 blanches, 1 noire et 2 vertes dans cet ordre.

4) Calculer la probabilité de tirer successivement avec remise 2 blanches, 1 noire et 2 vertes.

5) Calculer la probabilité de tirer successivement avec remise 2 blanches, 1 noire et 2 vertes dans cet ordre.

Exercice 9

Une urne contient 5 boules blanches indiscernables et 8 boules noires indiscernables.

On tire successivement 6 boules de l'urne en remettant chaque fois la boule tirée.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « obtenir 5 boules noires et une boule blanche, dans cet ordre ».

B : « obtenir une boule noire au plus ».

C : « obtenir trois boules blanches et trois noires ».

D : « obtenir une boule blanche au moins ».

Exercice 10

On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée.

1) Calculer la probabilité des événements suivants :

Mathématiques Terminale D

A : « obtenir trois fois "pile" »

B : « obtenir deux "pile" et un "face" ou un "pile" et deux "face" »

C : « obtenir "face" au plus une fois ».

2) Montrer que les événements B et C sont indépendants.

3) Soit X la variable aléatoire discrète représentant le nombre de piles obtenus.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer la fonction de répartition $F(X)$.

c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type.

Exercice 11

Pour faire la promotion d'un produit, une entreprise décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des produits mises en vente.

Parmi les produits gagnants, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma.

1) Un client achète un produit. On considère les événements suivants :

A : " le client achète un produit gagnant "

B : " le client gagne exactement une place de cinéma "

C : " le client gagne exactement deux places de cinéma "

a) Donner $P(A)$, $P(B / A)$ et $P(C / A)$

b) Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est $P = 0,3$.

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client.

Déterminer la loi de probabilité de X et l'espérance mathématique de X.

Exercice 12

I) Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.

Soit les événements suivants :

A : « Les trois boules sont rouges ».

B : « Les trois boules sont de la même couleur ».

C : « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente ».

1) Calculer les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

2) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de X, $E(X)$ et $V(X)$.

II) On remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n + 5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes.

Mathématiques Terminale D

On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.

Soit les événements suivants :

D : « Tirer deux boules rouges. » ; E : « Tirer deux boules de la même couleur. »

a) Montrer que la probabilité de l'évènement D est $P(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

b) Calculer la probabilité $P(E)$ de l'évènement E en fonction de n . Pour quelles valeurs de n a-t-on $P(E) \geq \frac{1}{2}$?

Exercice 13

Une urne contient 4 boules rouges, 5 boules vertes et 3 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne, on suppose que les tirages sont équiprobables.

1) Quel est la probabilité d'obtenir :

- a) Deux boules blanches ;
- b) Deux boules de couleurs différents.

2) On note sur chaque boule rouge le chiffre 1, sur chaque boule verte le chiffre -1 et sur chaque boule blanche le chiffre 0.

On considère la variable aléatoire X qui à chaque tirage fait correspondre la somme de chiffre inscrit sur les deux boules tirées.

- a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
- b) Déterminer la loi de probabilité de X .
- c) Calculer l'espérance mathématique la variance et l'écart type de X .

Exercice 14

On considère une urne U_1 contenant 2 boules blanches et 3 boules rouges et une urne U_2 contenant 2 boules blanches et 2 boules rouges.

On tire une boule de U_1 et une boule de U_2 .

1) a) Calculer la probabilité de l'évènement suivant : A : « Obtenir deux boules de même couleur ».

b) Sachant qu'on a obtenu deux boules de couleurs différentes, quelle est la probabilité pour que la boule rouge soit tirée de U_1 .

2) Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de boules blanches tirées.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

3) On répète l'épreuve 4 fois de suite en remettant à chaque fois la boule dans l'urne où elle est tirée. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

F : « Obtenir au plus une fois deux boules de même couleur » ?

G : « Obtenir deux boules de même couleur pour la 1^{ère} fois à la 3^{ème} épreuve » ?

Mathématiques Terminale D

Exercice 15

Lors d'une kermesse organisée par un lycée, on utilise une urne contenant : 6 billets A et 4 billets B, indiscernables au toucher.

On tire simultanément et au hasard 3 billets de l'urne. Lors du tirage, un prix est remis à toute personne ayant obtenu au moins 2 billets B. Après chaque tirage, les billets sont remis dans l'urne.

1) Une personne effectue un tirage. On note X , la variable aléatoire égale au nombre de billets B obtenus.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer son espérance mathématique

2) Quelle est la probabilité d'obtenir un prix ?

3) Une partie comporte 4 tirages consécutifs. Un lot est remis à toute personne ayant obtenu au moins 3 prix dans la partie.

Quelle est la probabilité d'obtenir un lot au cours d'une partie ?

Exercice 16 : BAC 2001

Pour élire leur conseiller départemental, les habitants du village de ZATA ont à choisir parmi 3 candidats : Ado, Bala et Kadri.

Chaque électeur vote pour un seul candidat.

A la fin du vote, on a constaté que 60% des habitants de ZATA ont effectivement voté.

On suppose que la probabilité pour qu'un électeur choisisse Ado est égale à $\frac{3}{8}$, celle de Bala est égale à $\frac{1}{2}$ et celle de Kadri est égale à $\frac{1}{8}$ et ceci indépendamment des autres électeurs.

1) On prend au hasard et successivement 5 habitants de ZATA.

Quelle est la probabilité que ces 5 habitants aient effectivement voté ?

2) Calculer la probabilité pour qu'un habitant quelconque de ZATA choisisse Bala.

3) On prend au hasard 5 habitants de ZATA et on note X la variable aléatoire égale au nombre de voix obtenues par Bala.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

4) Calculer la probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse Kadri.

5) Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et P_n la probabilité pour que, parmi n habitants qui votent, aucun ne choisisse Kadri.

Calculer P_n .

6) Quel est le nombre minimum d'habitants qui doivent voter pour que Kadri obtienne au

moins une voix avec une probabilité supérieure ou égale $\frac{15}{16}$?

Exercice 17 : BAC 2003

Un sac contient trois boules indiscernables au toucher marquées 1, 2 et 3. Une épreuve consiste à prélever une première boule du sac dont le numéro sera noté a , puis sans la remettre dans le sac, une seconde boule dont le numéro sera noté b .

Au résultat $(a ; b)$ d'une épreuve, on associe l'application du plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ dans lui-même, qui à tout point M d'affixe

$z = x + iy$ fait correspondre le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que : $z' = \alpha \cdot z$ avec

$$\alpha = \frac{a}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}b\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}b\right) \right].$$

1) Quelles sont les résultats $(a ; b)$ possibles ?

Caractériser géométriquement les applications correspondantes.

2) Soit A le point d'affixe $z_0 = \sqrt{3} + i$ et A' le point d'affixe $z_0' = \alpha \cdot z_0$, image de A par l'application associée au résultat d'une épreuve.

Calculer le module et l'argument z_0 et ceux de z_0' suivant les valeurs $(a ; b)$.

3) Calculer la probabilité de l'évènement :

E_1 : « O, A, A' alignés », puis celle de l'évènement E_2 : « z_0' est imaginaire pur ».

4) Quelle est la loi de probabilité de l'aléa numérique X qui au résultat $(a ; b)$ d'une épreuve associe le module de z_0' ?

Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 18 : BAC 2005

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et une pièce dont on distingue les côtés pile (P) et face (F).

A chaque lancer, on associe le nombre complexe $z = \rho e^{i\frac{n\pi}{6}}$ défini de la manière suivante : $\rho = 1$ si face (F) apparaît sur la pièce ; $\rho = 2$ si pile (P) apparaît sur la pièce ; n est le nombre lu sur la face supérieure du dé.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm). On note M le point d'affixe z et Y son ordonnée.

1) La pièce et le dé ne sont pas truqués.

a) Déterminer l'ensemble des points M que l'on peut obtenir et les placer dans

$(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Les points obtenus seront notés A_n pour $\rho = 1$ et B_n pour $\rho = 2$, n étant l'entier lu sur le dé).

Mathématiques Terminale D

b) Quelle est la probabilité pour que l'ordonnée Y soit égale à 1 ?

2) On remplace le dé par une deuxième pièce non truquée.

Le jeu consiste à lancer les deux pièces non truquées.

Avant de les lancer un joueur doit payer m francs.

Si le lancer amène une seule face, le joueur gagne 5 F, si le lancer amène deux faces, il gagne 30 F. Si non il perd la partie (c'est-à-dire il gagne 0 F).

On appelle X le gain net obtenu, gain exprimé en fonction de m .

a) Déterminer la probabilité d'obtenir deux faces et celle d'obtenir une face.

b) Dresser la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

c) Calculer l'espérance mathématique de X .

d) Quel doit être le prix de la partie pour que ce jeu soit équitable ?

e) On donne $m = 10$.

i) Calculer la variance et l'écart type de X .

ii) Définir la fonction de répartition F de X et la tracer.

Exercice 19 : BAC 2007

Une urne contient 5 jetons portant respectivement les chiffres 1, 1, 1, 2 et 2. Les jetons portant des chiffres identiques sont indiscernables. On effectue trois tirages successifs d'un jeton en ne remettant pas à chaque fois le jeton tiré de l'urne.

Ces chiffres, dans l'ordre où ils sont tirés, sont appelés x , y et z .

1) Donner les éléments de Ω l'univers des éventualités.

2) On définit la probabilité d'un événement élémentaire $\{(x, y, z)\}$ par :

$$P\{(x, y, z)\} = a(x + y + z) + b \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

Déterminer a et b sachant que P est une probabilité et que les événements :

$A = \{(x, y, z) \in \Omega, x = 1\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \Omega, y = z\}$ satisfont la propriété

$$P(A) - P(B) = \frac{4}{35}.$$

3) On suppose que $a = \frac{1}{10}$ et $b = -\frac{2}{7}$.

On désigne par X la variable aléatoire qui prend la valeur 3 si les chiffres sont impairs, la valeur 1 si un chiffre est impair et les deux autres pairs, et prend la valeur -2 s'il y a un chiffre pair et deux chiffres impairs.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique et son écart type.

FONCTIONS NUMÉRIQUESRésumé du cours**1) Limites****1) Somme**

f	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
G	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$	$\ell + \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

2) Produit

f	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
G	ℓ'	∞	∞	∞
$f \times g$	$\ell \times \ell'$	∞ Signe du produit	Forme indéterminée	∞ Signe du produit

3) Quotient

f	ℓ	ℓ	0	ℓ	∞	∞
G	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ	∞
$\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm \infty$ à gauche/à droite	Forme indéterminée	0	∞ Signe du quotient	Forme indéterminée

4) Formes indéterminées

Les différentes formes indéterminées sont : $+\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0 \times \infty$.

Pour lever l'indétermination :

- $+\infty - \infty$: on factorise le terme dominant
- $\frac{\infty}{\infty}$: on factorise le terme dominant au numérateur et au dénominateur puis simplifier.
- $\frac{0}{0}$: on factorise le terme tendant vers 0 au numérateur et au dénominateur puis simplifier
- $0 \times \infty$: on se ramène en général à l'une des formes $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

5) Limite de référence de la fonction logarithme

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ; & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 ; & c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(+1x)}{x} = 1 ; \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty ; & e) d) \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 ; & f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1. \end{array}$$

6) Limite de référence de la fonction exponentielle

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ; & c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ; \end{array}$$

Mathématiques Terminale D

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.

7) Limites de référence mixte

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln x = 0$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^a e^x = 0$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$

II) Asymptotes et branches infinies

1) Asymptotes

Limite	Interprétation
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	(D) : $x = a$ est asymptote verticale à (c_f) .
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$	(D') : $y = b$ est asymptote horizontale à (c_f)
$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	(D'') : $y = ax + b$ est asymptote oblique à (c_f) .

2) Branches infinies

Limite	Interprétation
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	(c_f) admet une branche parabolique de direction l'axe (OI).
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$	(c_f) admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ).

III) Continuité et prolongement par continuité

1) Définition

Soit a un nombre réel et f une fonction définie en a .

f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

2) Propriété

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche en a , à droite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Remarque

Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

3) Prolongement par continuité en a

Définition - Propriété

Soit f une fonction non définie en a .

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est finie, on dit que f admet un prolongement par continuité en a .

Mathématiques Terminale D

Le prolongement de f par continuité en a est la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x), \forall x \in Df \\ g(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \end{cases} \text{ La fonction } g \text{ est continue en } a.$$

IV) Fonctions continues et strictement monotones

Propriété 1

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I dans $f(I)$

Propriété 2

f est une bijection d'un intervalle I dans un intervalle J .

Si f est continue et strictement monotone sur I alors sa bijection réciproque f^{-1} est également continue et strictement monotone sur J .

De plus f et f^{-1} ont le même sens de variation.

Propriété 3 : Théorèmes des valeurs intermédiaires

- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors pour tout $x \in f(I)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique.
- Soit f une fonction. Si f est continue et strictement monotone sur $[a ; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires (c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$) alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle ouvert $]a ; b[$.

V) Dérivabilité

1) Dérivabilité en a

Pour étudier la dérivabilité en un point on calcule $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Si cette limite existe, vérifier alors qu'elle est finie.

2) Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a . f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche en a , dérivable à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

3) Tangente

a) Equation de la tangente

Une équation de la tangente (T) à (C_f) au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

b) Tangente verticale

Si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ alors (C_f) admet une tangente verticale au point A d'abscisse a .

Mathématiques Terminale D

VI) Dérivation

1) Dérivée des fonctions élémentaires

Fonction f	Fonction f'	Ensemble de dérivabilité
$x \rightarrow \ln x$	$x \rightarrow \frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$x \rightarrow e^x$	$x \rightarrow e^x$	$\mathbb{R}$
$x \rightarrow \frac{1}{x}$	$x \rightarrow -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[\text{ ou }]0, +\infty[$
$x \rightarrow x^r$	$x \rightarrow rx^{r-1}$	$\mathbb{R}$
$x \rightarrow \frac{1}{x^r}$	$x \rightarrow -\frac{r}{x^{r+1}}$	$]-\infty, 0[\text{ ou }]0, +\infty[$
$x \rightarrow \sqrt{x}$	$x \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x \rightarrow \sin x$	$x \rightarrow \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \rightarrow \cos x$	$x \rightarrow -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \rightarrow \tan x$	$x \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{-\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, (k \in \mathbb{Z})$
$x \rightarrow \cotan x$	$x \rightarrow -\frac{1}{\sin^2 x}$	$]k\pi; \pi + k\pi[, (k \in \mathbb{Z})$

2) Opération et composition sur les dérivées

Fonction	Dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$k \cdot f$	$k \cdot f'$
$f \times g$	$f'g + g'f$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$
$f \circ g$	$g' \times (f' \circ g)$
f^r	$rf' \times f^{r-1}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$\cos f$	$-f' \times \sin(f)$
$\sin f$	$f' \times \cos(f)$
$\ln f$	$\frac{f'}{f}$
e^f	$f' e^f$

3) Fonction réciproque

Pour calculer la dérivée de la réciproque $(f^{-1})'(\beta)$ d'une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I , on peut procéder comme suit :

- On détermine α , la solution de l'équation $f(x) = \beta$
- On calcule $f'(\alpha)$ et on vérifie que $f'(\alpha) \neq 0$ puis on conclue : $(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}$

VII) Logarithme népérien et exponentielle népérienne

1) a) Propriétés algébriques de la fonction $\ln$

- ① $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$; ② $\forall a > 0 \text{ et } r \in \mathbb{Q}, \ln(a^r) = r \ln a$;
 ③ $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$; ④ $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; ⑤ $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

b) Conséquences des variations de la fonction $\ln$

- $\forall a > 0 \text{ et } b > 0, \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\forall a > 0 \text{ et } b > 0, \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

c) Cas particuliers

- * $\forall a > 0, \ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$; * $\ln a < 0 \Leftrightarrow a < 1$
- * $\forall a > 0, \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$; * $\ln a < 0 \Leftrightarrow a < e$; * $\ln(e^a) = a$

2) a) Propriétés Algébriques de la fonction $\exp(x)$

$\forall a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$:

Mathématiques Terminale D

$$* e^{a+b} = e^a \times e^b; \quad * e^{na} = e^{a^n}; \quad * e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}; \quad * e^{-b} = \frac{1}{e^b} \quad * (e^a)^b = e^{ab}$$

Remarque : $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-1} = \frac{1}{e}$

b) Conséquences des variations de $\exp(x)$

$$* e^a = e^b \Leftrightarrow a = b; \quad * e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0; \quad * e^a < e^b \Leftrightarrow a < b, \\ * e^a < 1 \Leftrightarrow a < 0; \quad * e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b); \quad * e^{\ln(a)} = a.$$

3) Fonction exponentielle de base a

- Soit $a \in]0, +\infty[$. On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \rightarrow a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

- $\forall x \in]0, +\infty[$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$ on a : $x^r = e^{r \cdot \ln(x)}$.

VIII) Périodicité, parité, axe de symétrie, centre de symétrie

1) Fonctions périodiques

$$f \text{ est périodique de période } T \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, (x) + T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

2) Fonctions paires, fonctions impaires

$$a) f \text{ est paire} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases} \quad b) f \text{ est impaire} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

3) Axes de symétrie, centre de symétrie

* La droite $(\Delta) = a$, est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f , lorsque pour $x \in \mathbb{R}$, $(a-x) \in D_f$ on a : $f(a+x) = f(a-x)$.

Ou pour $x \in \mathbb{R}$, $(2a-x) \in D_f$ on a : $f(2a-x) = f(x)$.

* Le point $\Omega(a; b)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction f , lorsque pour $x \in \mathbb{R}$, $(a-x) \in D_f$ et $(a+x) \in D_f$ on a :

$$f(a+x) + f(a-x) = 2b.$$

Ou pour $x \in \mathbb{R}$, $(2a-x) \in D_f$ et $(a+x) \in D_f$ on a : $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

IX) Positions relatives d'une courbe et d'une droite

Pour étudier les positions relatives de (C_f) par rapport à (D) la droite d'équation $y = ax + b$; on peut procéder comme suit :

- On calcule la différence $[f(x) - (ax + b)]$
- On étudie le signe de cette différence puis on conclue :
 - Si sur I , $[f(x) - (ax + b)] > 0$ alors (C_f) est au-dessus de (D) sur I .
 - Si sur I , $[f(x) - (ax + b)] < 0$ alors (C_f) est au dessous de (D) sur I .
 - Si sur I , $[f(x) - (ax + b)] = 0$ alors (C_f) et (D) se coupent.

Exercice d'application

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, par : $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Montrer que (C_f) admet un centre de symétrie en un point d'abscisse 1.
- 2) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Que peut-on en déduire pour (C_f) ?
- 3) Montrer que : $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}$.
- 4) Montrer que la droite d'équation $y = x + 2$ asymptote oblique pour (C_f) en $+\infty$.
- 5) Montrer que $f'(x) = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$ puis étudier son signe.
- 6) Dresser le tableau de variation de f .
- 7) Tracer (C_f)

Correction

- 1) Montrons que (C_f) admet un centre de symétrie en un point d'abscisse 1.

Le domaine de définition est centré en 1, de plus pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f(2a-x) + f(x) = f(2-x) + f(x) = 2b, \text{ on trouve } f(2-x) + f(x) = 6$$

Alors $b = 3$. Donc le point Ω de coordonnées $(1 ; 3)$ est centre de symétrie de (C_f) .

- 2) Déterminons les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et par symétrie } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \text{ et par symétrie } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

- 3) Montrons que : $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}$.

Pour tout $x \neq 1$, $ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}$, en identifiant le numérateur de cette fraction avec celui de $f(x)$, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \text{ alors } f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}.$$

- 4) Montrer que la droite d'équation $y = x + 2$ asymptote oblique pour (C_f) en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{3}{x-1} - (x + 2) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x-1} = 0 \text{ alors la}$$

droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

Puisque $\Omega \in (D)$, nous pouvons déduire que (D) est aussi asymptote à (C_f) en $-\infty$.

- 5) Montrons que $f'(x) = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$ puis étudions son signe.

Mathématiques Terminale D

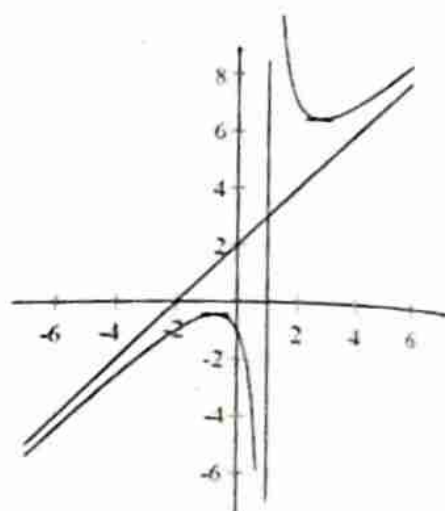
Pour $x \neq 1$, f est dérivable comme quotient de deux polynômes, et :

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

Pour tout $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x - 2$, polynôme ayant pour racines $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$ qui, d'après la règle du signe du trinôme est positif si et seulement si $x \in]-\infty; 1 - \sqrt{3}[\cup]1 + \sqrt{3}; +\infty[$

6) Dressons le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{3}$	1	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$3 - 2\sqrt{3}$	$+\infty$	$3 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$



7) Traçons (C_f)

Série d'exercices

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, calculer $f(-x)$ puis conclure :

1) $f(x) = \frac{-3x^2+5}{|x|}$; 2) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$; 3) $f(x) = 3x^2 - x + 4$.

Exercice 2

Déterminé l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$; 2) $f(x) = \frac{x^2-2}{|x|}$; 3) $f(x) = x^5 - x^3 + \frac{4}{x+1}$;

4) $f(x) = \frac{-2x}{\sqrt{-x^2+4}}$; 5) $\frac{x}{2+|x|}$; 6) $\frac{x^2}{\sqrt{4+9x^2}}$.

Exercice 3

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$

1) Déterminer les images directes suivantes :

a) $f([-5; 3])$; b) $f([0; -1])$; c) $f([2; 5])$.

2) Déterminer les images réciproques suivantes :

a) $f^{-1}([-2])$; b) $f^{-1}(\{1\})$; c) $f^{-1}([-1; 1])$.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3}$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$;

Mathématiques Terminale D

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}; \quad e) \lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \sqrt{\frac{x^3-1}{x-1}} \right); \quad f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{\sqrt{5+x}-2};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-5x}{x-3}; \quad h) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{3x-6}; \quad i) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4};$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} \right); \quad k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right); \quad l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^2-2x+6}{4x^2-x+1};$$

$$m) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3\sqrt{x} + x^2); \quad n) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{x-4}; \quad o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}$$

Exercice 5

Démontrer que : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-3} = 1$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = 1$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$.

Exercice 6

1) Etudier la continuité de f en α dans les cas suivants :

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 1-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}; \quad \alpha = 1; \quad b) f(x) = \frac{x-1}{3-2x}; \quad \alpha = \frac{3}{2};$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{x+1} & \\ f(-1) = 1 \end{cases}; \quad \alpha = -1; \quad d) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} & \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \alpha = 0$$

2) Peut-on prolonger la fonction f par continuité au point α donné ?

Si oui, préciser ce prolongement g .

$$a) f(x) = \frac{\sqrt{2x+7}-1}{9-x^2}; \quad \alpha = -3 \quad b) f(x) = \frac{x^2+8}{x+2}; \quad \alpha = -2$$

Exercice 7

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, puis son ensemble de dérivabilité.

$$1) f(x) = x^2 - \frac{3}{x}; \quad 2) f(x) = \frac{3x^2+4}{2x+1}; \quad 3) f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}; \quad 4) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

Exercice 8

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$. Démontrer que f est dérivable en 3 et calculer $f'(3)$.

$$2) \text{ Soit } f \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9

Déterminer la dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$1) f(x) = -5x^2 + 2x - 3; \quad 2) f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 5x; \quad 3) f(x) = -\sqrt{x} + \frac{x^2}{2};$$

$$4) f(x) = -x^4 - 5x^3 - x^2 + 7; \quad 5) f(x) = (x+3)^2; \quad 6) f(x) = (-2x^2 - 3x)^5;$$

$$7) f(x) = (-x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x)^4; \quad 8) f(x) = 2\sqrt{x^2+4};$$

Mathématiques Terminale D

- 9) $f(x) = x^3(1 + \sqrt{x})$; 10) $f(x) = \frac{1}{3}(2x^3 - 1)\sqrt{2x - 1}$;
11) $f(x) = \sqrt{-3x^2 + x - 6}$; 12) $f(x) = (2x + 3)(3x - 7)$; 13) $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x + 1}$;
14) $f(x) = (x - 1)^2(3 - x)^3$; 15) $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)(x + \sqrt{x})$; 16) $f(x) = \left(\frac{1+x}{\sqrt{x+1}}\right)^3$.

Exercice 10

1) Pour chacune des fonctions suivantes déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a .

a) $f(x) = x^3 - 3x + 6$; $a = 1$ b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$; $a = 3$

2) Dans chacun des cas suivants montrer que la fonction f admet le point $I(a ; b)$ comme centre de symétrie :

a) $f(x) = 2x - 3 - \frac{3}{x+2}$; $I(-2 ; -7)$; b) $f(x) = \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$; $I(1 ; 0)$

3) Dans chacun des cas suivants montrer que la fonction f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie :

a) $f(x) = x^2 - 3$; $x = 0$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; $x = 2$.

Exercice 11

1) Calculer les limites suivantes puis en déduire les éventuelles asymptotes :

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{2x^2 + 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{3x}$

2) Déterminer les équations des asymptotes verticales des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 3x - 10}$; b) $f(x) = \frac{9}{x^2 - 9}$; c) $f(x) = \frac{2(x+2)^2}{(x-3)(x+1)}$

3) Déterminer les équations des asymptotes horizontales des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + 4}$; b) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 3}$; c) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-3)(x+1)}$

4) Déterminer les équations des asymptotes obliques des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$; b) $f(x) = x - \frac{2}{x}$; c) $f(x) = -x + 1 - \frac{3}{x+1}$

Exercice 12

1) Etudier la dérivabilité en 0 de $x \mapsto x\sqrt{x}$

2) Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -1.

Exercice 13

On donne f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f .

2) Ecrire f sans valeur absolue

Mathématiques Terminale D

- 3) Démontrer que f est continue sur D .
- 4) Représenter la courbe représentative de f .

Exercice 14

1) f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt{x}$

- a) Étudier la dérivabilité de f en 0.
- b) Dans un repère orthogonal, la courbe représentant f admet-elle une tangente au point d'abscisse 0 ?

2) g est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2\sqrt{x}$

- a) Étudier la dérivabilité de g en 0.
- b) Dans un repère orthogonal, la courbe représentant g admet-elle une tangente au point d'abscisse 0 ?

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $]0 ; 1]$ par $f(x) = 2 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

On désigne par (C) la courbe de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité graphique : 2 cm).

- 1) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
- 2) a) Vérifier que pour tout $x \in]0 ; 1[$, $f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ et dresser le tableau de variation de f .
- b) Étudier les variations de f sur $]0 ; 1[$. En déduire que pour tout $x \in]0 ; 1[$ on a :

$$f(x) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

- c) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 3) a) Montrer que f possède une fonction réciproque qu'on note f^{-1} définie sur $] -\infty ; 2]$.
- b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $] -\infty ; 2]$ et que pour tout $x \leq 2$: $0 \leq (f^{-1})(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$.
- c) Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \leq 2$.
- 4) Montrer que pour tout $x \in] -\infty ; 2]$, on a $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(x-2)^2}}$.

Exercice 16

Soit la fonction g définie par $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- 1) a) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
- b) Dresser le tableau de variation de g .
- c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
- b) Étudier les variations de f .
- 3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

Mathématiques Terminale D

- 4) Déterminer le domaine de continuité et de dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} de f ainsi que son sens de variation.
- 5) a) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
b) Calculer $f^{-1}(2)$ puis calculer $(f^{-1})'(2)$ de deux manières différentes puis en déduire la construction de la tangente à $C_{f^{-1}}$ au point $A(2; f^{-1}(2))$.
c) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 17

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [0; 1] \\ \sqrt{x^2-1} & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative.

- 1) a) Etudier la continuité de f sur $[0; +\infty[$.
b) Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à C_f en $+\infty$.
- 2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
- 3) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1.
b) Interpréter géométriquement les résultats trouvés précédemment.
- 4) Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f .
- 5) Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice 18

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^2 - 1|$

(C) est la courbe représentant f dans un repère orthonormé. On note A le point de (C) d'abscisse 1.

- 1) a) Montrer que f est dérivable à droite en 1.
b) Déterminer une équation de la tangente à droite à la courbe (C) au point A .
- 3) a) Montrer que f est dérivable à gauche en 1.
b) Déterminer une équation de la tangente à gauche à la courbe (C) au point A .
- 4) La fonction est-elle dérivable en 1 ?
- 5) Tracer la courbe (C) et les tangentes à la courbe au point A .

Exercice 19

Faire une étude complète des fonctions suivantes :

- a) Domaines de définition, de continuité ;
b) Parité et éléments de symétrie du graphe ;
c) Limites aux bornes du domaine, comportement asymptotique, position du graphe par rapport à l'asymptote oblique ou horizontale, le cas échéant ;

Mathématiques Terminale D

d) Dérivée et tableau de variations ;

e) Dérivée seconde et concavité du graphe ; équations des tangentes aux points d'inflexion

f) Tableau des images et représentation graphique.

$$1) f(x) = \frac{4x}{x^2+1}; \quad 2) f(x) = -x + 1 - \frac{4}{x}; \quad 3) f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 1cm.

1) Déterminer les réels a ; b et c tel que pour tout x : $f(x) = ax + b + \frac{cx}{3x^2+1}$

2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4) Dresser le tableau des variations de f .

5) Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0. Tracer A , (T) et la courbe (C) .

6) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$. On notera α cette solution. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

Exercice 21

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x - \sqrt{|x-1|}$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Donner l'expression de f sans valeur absolue sur $[1; +\infty[$ et sur $-\infty; 1]$.

2) Etudier la dérivabilité de f en 1.

3) Etudier la fonction sur $] -\infty; 1]$.

4) Etudier la fonction sur $[1; +\infty[$.

5) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

6) Tracer la courbe (C_f) .

Exercice 22

Soit la fonction f définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = 2\cos x$.

1) Etudier les variations de f .

2) Construire la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 23

On considère la fonction trigonométrique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$.

On note (C) la représentation graphique de f dans le repère orthonormé.

Mathématiques Terminale D

- 1) Montrer que f est impaire.
- 2) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative (C) ?
- 3) Calculer $f(0)$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$; $f(\pi)$.
- 4) Soit x un nombre réel. Comparer $f(\pi + x)$ et $f(x)$. Que peut-on en déduire pour f ?
- 5) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ puis strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.
- 6) Représenter graphiquement la fonction f sur $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

Fonctions logarithmes népériennes

Exercice d'application

Partie A

Soit la fonction f définie par : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

- 1) Quel est l'ensemble de définition de g ?
- 2) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- 3) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variations.
- 4) En déduire que pour tout $x > 0$, on a : $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

- 1) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
En déduire que (C_f) admet une asymptote verticale dont on précisera.
- 2) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- 3) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
- 4) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) .
b) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D) .
c) Déterminer une équation cartésienne de la droite (T) tangente à (C_f) au point A d'abscisse 1.
- 5) Démontrer que f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- 6) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que : $0,5 < \alpha < 1$.

Mathématiques Terminale D

7) Construire dans un même repère (C_f) , (C_f^{-1}) et (T) .

Correction

Partie A

1) L'ensemble de définition de g .

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} =]0; +\infty[$$

2) Calculons les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2 - 2\ln x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 - 2\ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x + \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0.$$

3) Etudions le sens de variation de g puis dressons son tableau de variations.

g est dérivable sur D_g .

$$\forall x \in D_g, g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2 \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right).$$

$$\forall x \in D_g, g'(x) \text{ est du signe de } x^2 - 1. g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

$$\forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0 \text{ alors } g \text{ est strictement décroissante sur }]0; 1[.$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0 \text{ alors } g \text{ est strictement croissante sur }]1; +\infty[.$$

$$g'(1) = 0.$$

Tableau de variation de g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
g	$+\infty$	3	$+\infty$

4) En déduisons que pour tout $x > 0$, on a : $g(x) > 0$.

La fonction g étant décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$, admet un minimum en

1 qui vaut 3 alors $g(x) \geq 3 > 0$. Ainsi $\forall x > 0$, on a : $g(x) > 0$.

Partie B

1) Calculons les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. En déduisons que (C_f) admet une asymptote verticale dont on précisera.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{2\ln x}{x} \right) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{2\ln x}{x} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ alors (C_f) admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.

Mathématiques Terminale D

2) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout x de $]0; +\infty[$ on a :

$$f'(x) = 1 + 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \text{ alors } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

3) En déduisons le sens de variation de f puis dressons son tableau de variation.

$f'(x)$ est du signe de $g(x)$ car $x^2 > 0$ alors pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

4) a) Montrons que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) = 0$ alors la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

b) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D).

$$f(x) - x = \frac{2 \ln x}{x}.$$

$$\text{Posons } \frac{2 \ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$\forall x \in]0; 1]$, $f(x) - x \leq 0$ alors (C_f) est en dessous de (D).

$\forall x \in [1; +\infty[$, $f(x) - x \geq 0$ alors (C_f) est au dessus de (D).

c) Déterminons une équation cartésienne de la droite (T) tangente à (C_f) au point A d'abscisse 1.

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1). \quad f(1) = 1 \text{ et } f'(1) = 3.$$

$$\text{Alors (T) : } y = 3x - 2.$$

5) Démontrons que f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $f(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[$.

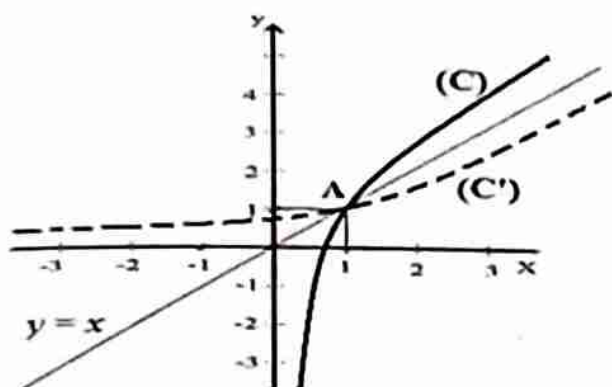
6) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que : $0,5 < \alpha < 1$.
 f étant une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$; donc l'équation $f(x) = 0$ admet une

Mathématiques Terminale D

solution α dans $]0; +\infty]$; de plus on a : $f(0,5) \approx -2,27$ et $f(1) = 1$ donc

$f(1) \times f(0,5) < 0$ d'où $0,5 < \alpha < 1$.

7) Construction dans un même repère (C_f) , (C_f^{-1}) et (T) .



Série d'exercices

Exercice 1

Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci - dessous :

- | | | |
|---|-----------------------------------|--|
| 1) $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + 2\ln x$; | 2) $f(x) = \ln(2x - 5)$; | 3) $f(x) = \ln(-3x + 1)$; |
| 4) $f(x) = x\ln x - x$; | 5) $f(x) = x^2\ln x$; | 6) $f(x) = x\ln(2x - 3)$; |
| 7) $f(x) = 2x(1 - \ln x)$; | 8) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$; | 9) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; |
| 10) $f(x) = \frac{x - \ln x}{x}$; | 11) $f(x) = \ln(4 - x) + \ln x$; | 12) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$; |
| 13) $f(x) = \ln x^2$; | 14) $f(x) = (\ln x)^2$; | 15) $f(x) = x\ln x$; |
| 16) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$; | 17) $f(x) = \ln(x^2)$; | 18) $f(x) = (\ln x)^3$; |

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x)$ | 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)\ln x$; | 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3\ln x)$; |
| 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$; | 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x)\ln x$; |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x}$; | 8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + \ln x\right)$; | 9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x}\ln x)$; |
| 10) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2\ln x)$; | 11) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2$; | 12) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x}$; |
| 13) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln x}$; | 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln x}{\ln x}$; | 15) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$; |
| 16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x}$; | 17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$; | 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2\ln x - 1)$; |

Mathématiques Terminale D

- 19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{2x+3}$; 20) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$; 21) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$;
22) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ (Poser $X = \frac{1}{x}$) ; 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$ (Poser $X = 2x$).

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{x+2} \right)$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de D_f de f .
- 2) Justifier que f est dérivable sur D_f et calculer sa dérivée f' .
- 3) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- 4) Donner le tableau des variations de f sur D_f .

Exercice 4

1) On considère la fonction f définie par $f(x) = x - 2 - 2x \ln x$.

- a) Préciser l'ensemble de définition de f .
- b) Calculer la dérivée de f . En déduire les variations de f sur D_f .
- c) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- d) Déterminer le signe de $f(x)$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{\ln x}{(x-2)^2}$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .
- b) Calculer la dérivée de g et montrer que pour tout $x \in D_g$, $g'(x) = \frac{f(x)}{x(x-2)^3}$.
- c) En déduire les variations de g sur D_g .
- d) Déterminer les limites de g aux bornes de D_g . Que peut-on en déduire pour la courbe de g ?
- e) Déterminer une équation de la tangente à (C_g) au point d'abscisse $x = 1$.
- e) Tracer la courbe (C_g) .

Exercice 5

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2}{x} + \ln(x^2)$.

- 1) Donner l'ensemble de définition D_f de f .
- 2) Déterminer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$ et 0^- .
- 3) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{2+2x \ln x}{x}$. En déduire la limite de f en 0^+ .
- 4) Démontrer que pour tout x de D_f , $f'(x) = \frac{2(x-1)}{x^2}$.
- 5) En déduire les variations de f sur D_f .
- 6) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative (C_f) de f au point A d'abscisse $x = 1$.

Mathématiques Terminale D

- 7) Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 8) Montrer que l'équation (E) : $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α .
- 9) En déduire le signe de f sur D_f .

Exercice 6

Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 3 - 3\ln x + x^3$.

1) a) Montrer que $g'(x) = \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$.

b) Déterminer le signe de $g'(x)$.

c) En déduire les variations de la fonction g sur $]0 ; +\infty[$.

2) Calculer $g(1)$ puis déduire des questions précédentes que la fonction g est strictement positive sur $]0 ; +\infty[$.

3) Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 3\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4) Etablir que, pour tout nombre réel x positif, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

5) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

6) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 7

1) Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g .

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

2) Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(Unité : 2cm).

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C).

c) Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) puis montrer que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on précisera.

d) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

e) Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à (Δ) . Préciser les coordonnées du point B.

Mathématiques Terminale D

- f) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α . Exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de α .
Montrer que le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est supérieur à 1. On admettra que $0,31 < \alpha < 0,32$.
g) Représenter la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + x - 3x \ln x$.

- 1) Peut-on prolonger f par continuité au point $x_0 = 0$? Si oui déterminer son prolongement g .
- 2) Déterminer l'intervalle I de définition de g .
- 3) Etudier la continuité et la dérivabilité de g au point d'abscisse $x_0 = 0$.
- 4) a) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
b) Montrer que sur $[1; 2]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α .
- 5) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ puis interpréter.
- 6) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

Exercice 9

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln|x| - \frac{\ln|x|}{x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Démontrer que $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
- 2) Etudier les limites de f aux bornes de D .
- 3) Etudier les branches infinies de (C).
- 4) Justifier que f est dérivable en tout point de D_f et que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ avec $g(x) = \ln|x| + x - 1$.
- 5) a) Etudier les variations de la fonction g .
b) Démontrer que, pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $g(x) < 0$.
c) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.
d) Dresser le tableau des variations de f .
e) Tracer la courbe (C).

Exercice 10

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}(x + \ln x)$ définie sur $D_f =]0; +\infty[$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f .

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = -x + 1 - 2\ln x$.

- 1) Calculer les limites de h en 0^+ et en $+\infty$.

Mathématiques Terminale D

- 2) Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.
- 3) Calculer $h(1)$ et en déduire le signe de $h(x)$ pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$.
- 4) a) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- b) Montrer que : $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.
- c) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation complet.
- 2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur D_f et que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.
- 5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
- a) Démontrer que g réalise une bijection de $[1 ; +\infty[$ sur un intervalle I à préciser. On désigne par g^{-1} l'application réciproque de g .
- b) Résoudre dans I l'équation $g^{-1}(x) = e$.
- c) Calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e})$.
- 6) Construire (C) et (T) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

Exercice 11 : BAC 2003

On désigne par f_m la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f_m(x) = \ln(x^2 - m)$ où $m \in \mathbb{R}$ ($\ln$ désigne le logarithme népérien).

- 1) a) Indiquer suivant les valeurs de m , l'ensemble de définition de f_m et les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
- b) Etudier la parité de f_m .
- c) Etudier les variations de f_m . Donner les différents tableaux de variation de f_m selon les valeurs de m .
- d) Donner la nature des branches infinies des courbes représentatives (C_m) des fonctions f_m lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.
- e) Tracer dans un même repère orthonormé (unité : 2cm) les courbes (C_{-1}) , (C_0) et (C_1) .
- 2) Dans cette question, on pose $m = -\frac{3}{4}$.

a) On se propose d'étudier la position de la courbe $(C_{-\frac{3}{4}})$ par rapport à la demi-droite D dont une équation est $y = x$, pour x positif seulement.

Pour cela on considère la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = x - \ln(x^2 + \frac{3}{4})$.
Etudier le sens de variation de cette fonction.

Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $g(0)$ et $g(\frac{3}{2})$.

En déduire que $g(x)$ est positif et la position de $(C_{-\frac{3}{4}})$ par rapport à D .

Mathématiques Terminale D

N B : On ne demande pas l'étude de la limite de g quand x tend vers $+\infty$, ni la représentation graphique de g .

On donne : $\ln 2 = 0,69$ et $\ln 3 = 1,09$.

b) Montrer que la fonction $f_{-\frac{3}{4}}$ définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un ensemble que l'on précisera.

Déterminer la fonction réciproque ; indiquer son ensemble de définition et son sens de variation.

c) Tracer dans un même repère orthonormé (unité : 2cm) autre que le précédent, la représentation graphique de $f_{-\frac{3}{4}}$ pour x positif et celle de sa fonction réciproque.

3) Dans cette question, on pose $m = 0$.

Calculer l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées x et y vérifiant :

$$\begin{cases} \alpha \leq x < 1 \\ f_0(x) \leq y < 0, (\alpha \in]0 ; 1[) \end{cases}$$

Quelle est la limite de cette aire quand α tend vers 0 par valeurs supérieures ?

Exercice 12 : BAC 2006

Partie A

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction g_n définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$g_n(x) = -nx \ln x + 2 - x.$$

1) Etudier le sens de variation de g_n sur $]1, +\infty[$.

2) a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet sur $]1, +\infty[$ une unique solution α_n appartenant à $]1, 2[$.

b) En déduire le signe de $g_n(x)$ sur $]1, +\infty[$.

Partie B

n étant un entier naturel non nul, on considère la fonction numérique f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x & \text{si } x \in]0, 1] \\ f_n(x) = (2-x)^n \ln x & \text{si } x \in]1, +\infty[\\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé. (Unités : 4 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

1) a) Etudier la continuité de f_n en $x_0 = 0$.

b) Etudier la dérivabilité de f_n en $x_0 = 0$ et en donner une interprétation graphique.

c) Montrer que f_n est dérivable en $x_1 = 1$ et déterminer une équation de la tangente (T) à

Mathématiques Terminale D

(C_n) au point d'abscisse 1.

2) Calculer suivant la parité de n : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

3) a) Calculer $f'_n(x)$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

b) Etudier le signe de $f'_n(x)$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

4) a) Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[, f'_n(x) = \frac{(2-x)^{n-1}}{x} \times g_n(x)$.

b) Montrer que $f_n(\alpha_n) = \frac{(2-\alpha_n)^{n+1}}{n\alpha_n}$.

5) On suppose désormais n pair.

a) Dresser le tableau de variation de f_n .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$, interpréter graphiquement le résultat.

c) Construire (C_2) . On prendra $\alpha_2 = 1,35$.

6) Soit β un nombre réel de l'intervalle $]0, 1[$.

a) Déterminer A_β l'aire géométrique, en cm^2 , du domaine limité par (C_2) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x_0 = \beta$ et $x = 1$.

b) Calculer $\lim_{\beta \rightarrow 0} A_\beta$.

Fonctions exponentielles

Exercice d'application

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + x - 2$.

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

3) On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que (C) admet la droite (D) d'équation $y = x - 2$ comme asymptote oblique en $+\infty$.

4) Préciser la position relative de (C) par rapport à (D) .

5) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

6) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que :
 $-1,2 < \alpha < -1,1$ et $1,8 < \beta < 1,9$

7) Construire (C) .

Mathématiques Terminale D

Correction

1) Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\frac{e^{-x}}{-x} + 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e^{-x}}{-x} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{x} \right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + x - 2) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty.$$

2) Etudions le sens de variation de f puis dressons son tableau de variations.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $f'(x) = -e^x + 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$f'(0) = 0.$$

Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ 	-1	$+\infty$ 

3) Montrons que (C) admet la droite (D) d'équation $y = x - 2$ comme asymptote oblique en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0$ alors la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

4) Précisons la position relative de (C) par rapport à (D).

$f(x) - (x - 2) = e^{-x}$. Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \geq 0$ alors (C) est au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

5) Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interprétons graphiquement le résultat obtenu.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} + 1 - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e^{-x}}{-x} + 1 - \frac{2}{x} \right) = -\infty.$$

Alors (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $-\infty$.

6) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que :

$$-1,2 < \alpha < -1,1 \text{ et } 1,8 < \beta < 1,9.$$

f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et

Mathématiques Terminale D

$f(]-\infty; 0]) = [f(0); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[= [-1; +\infty[$; $0 \in [-1; +\infty[$ alors l'équation $f(x) = 0$

admet une solution unique α dans $]-\infty; 0]$. De plus $f(-1,2) \approx 0,12$ et $f(-1,1) \approx -0,1$

donc $f(-1,2) \times f(-1,1) < 0$ et $-1,2 < \alpha < -1,1$.

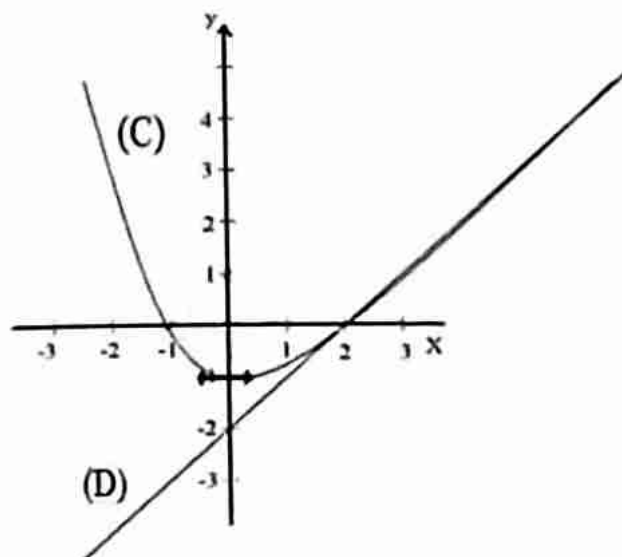
D'autre part : f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et

$f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-1; +\infty[$; $0 \in [-1; +\infty[$ alors l'équation $f(x) = 0$

admet une solution unique β dans $[0; +\infty[$. De plus $f(1,8) \approx -0,03$ et $f(1,9) \approx 0,05$ donc

$f(1,8) \times f(1,9) < 0$ et $1,8 < \beta < 1,9$.

7) Construction de (C).



Série d'exercices

Exercice 1

Pour tout x , on pose : $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x)$ et $g(x) = -\frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$. Démontrer que :

1) $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$; 2) $f(2x) = [f(x)]^2 - 1$; 3) $g(2x) = 2f(x) \times g(x)$.

Exercice 2

Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci-dessous :

1) $f(x) = xe^x$; 2) $f(x) = \frac{1}{x}e^x$; 3) $f(x) = x^2 - 2(x-1)e^x$;

4) $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$; 5) $f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}$; 6) $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$;

7) $f(x) = 2(x-1)e^{x-1}$; 8) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$; 9) $f(x) = \ln(3 + e^{-x})$.

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2 + 1} - \frac{x}{2} \right)$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x^2}{x} \right) e^{-x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)(2 - e^{-x})$;

Mathématiques Terminale D

- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^x - x} \right)$; 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x^2 - 5x + 4}$; 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \right)$;
7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 + e^x)$; 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{xe^x}{e^x + 1} \right)$; 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [1 + (1 + 2x)e^{-2x}]$;
10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}} \right)$; 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{e^{3x+1}} \right)$; 12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - xe^{x-1})$;
13) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \right)$; 14) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 + e^x)$; 15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{xe^x}{e^x + 1} \right)$;
16) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{3x} \right)$; 17) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{e^{x-1} - 1} \right)$; 18) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{e^{2x} - e}{2x - 1} \right)$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x+1}$.

- 1) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.
- 2) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
- 3) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
- 4) Déterminer la dérivée de la fonction.
- 5) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$

- 1) Montrer que les droite (D) et (Δ) d'équation respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont asymptotes à (C_f).
- 2) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f .
- 3) Tracer (D), (Δ) et (C_f) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 4) La courbe semble avoir un point de symétrie. Justifier.

Exercice 6

On considère la fonction dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

- 1) On note la fonction g dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 e^x - 1$. Étudier le sens de variation de la fonction g .
 - 2) Démontrer qu'il existe un unique réel α appartient à $]0,703; 0,704[$.
 - 3) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 - 4) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
 - 5) Démontrer que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur $]0; +\infty[$.

Mathématiques Terminale D

Exercice 7

La fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)e^{2x} - (x+1)$.

1) Déterminer la dérivée de la fonction f .

Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

2) On note f'' la fonction dérivée de f' .

Vérifier que, pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = 4xe^{2x}$.

3) Montrer que, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0 .

4) a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, puis dresser son tableau de variation.

b) Montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; x_0]$.

c) Calculer $f(2)$ puis en déduire que sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur. Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

Exercice 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x + \frac{1}{2} \left(\frac{e^x+1}{e^x-1} \right)$ sur $]0 ; +\infty[$ et g la fonction définie par : $g(x) = 2e^x - 5e^x + 2$ sur $] -\infty ; +\infty[$.

1) Montrer que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a $f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x-1}$.

2) Montrer que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a $f(x) = 2x - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{e^x-1}$.

3) Résoudre l'équation $g(x) = 0$ puis factoriser $g(x)$.

4) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) représentative de f .

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

6) Montrer que la fonction dérivée de f est du signe de la fonction g et dresser le tableau de variation de f .

7) Représenter (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).

Exercice 9

Partie A

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1) + e^{-x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Mathématiques Terminale D

- 2) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) à $+\infty$.
- 3) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
- 4) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
- 5) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
- 6) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet deux solutions α et β ($\alpha < \beta$) sur $\mathbb{R}$.
- 7) Vérifier les inégalités suivantes: $-1,51 < \alpha < -1,50$ et $2,94 < \beta < 2,95$.
- 8) Tracer (C) et (D) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

On note g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0; +\infty[$.

- 1) Démontrer que g est une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
- 2) Donner l'ensemble sur lequel la fonction réciproque g^{-1} est dérivable. Justifier votre réponse.
- 3) Calculer $g(1)$, $g'(1)$ puis en déduire $(g^{-1})'(e^{-1})$.
- 4) Tracer la courbe (Γ) représentative de la fonction g^{-1} dans le même repère ;

Exercice 10

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) On considère g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - x + e^x$.
Dresser le tableau des variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g(x)$.
- 2) Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
- 3) Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
- 4) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 5) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
b) Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
- 6) a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
b) Etudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (T).
- 7) Tracer (C) et (T).

Exercice 11

Partie A

Soit la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ (a , b et c sont des réels).

On note (C) sa représentation graphique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Mathématiques Terminale D

La courbe (C) passe par le point $A(0 ; 1)$, admet une tangente parallèle à (Ox) au point d'abscisse 1 et $f'(0) = -6$.

- 1) Exprimer en fonction de a , b et la dérivée f' de f .
- 2) Déterminer les coefficients a , b et c .

Partie B

Soit la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = (x^2 - 5x + 1)e^{-x}$.

On note (C) sa représentation graphique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter.
- 2) Calculer $f(0)$.
- 3) Calculer la dérivée $f'(x)$.
- 4) En déduire le tableau de variation (complet) de la fonction f .
- 5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
- 6) Tracer (C) et (T) dans le repère.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + x - e^{-\frac{x}{2}}$

On note (C) sa représentation graphique dans le un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(Unités : 2 cm)

- 1) a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1 + x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
- c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
- 2) a) Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
- b) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- c) Tracer la courbe (C) et la droite (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) On considère g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.
- 2) a) Etudier les variations de g et en déduire son signe.
- b) Justifier alors le domaine de définition de f .
- 3) a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter.
- b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- c) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Etudier la position de (C) et de (T).
- 3) Tracer la courbe (C) et la droite (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Mathématiques Terminale D

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{1+x}{x+e^{-x}}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique : 4 cm.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$, par : $g(x) = x + 2 - e^x$.

1) Etudier le sens de variation de g et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α dans $[0 ; +\infty[$, que : $1,14 < \alpha < 1,15$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

1) a) Montrer que, pour tout réel $x \in [0 ; +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{e^{-x}g(x)}{(x+e^{-x})^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f .

2) a) Montrer que, pour tout réel $x \in [0 ; +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}} + 1$.

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter.

c) Dresser le tableau de variation de f .

3) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

4) Etablir que pour tout réel $x \in [0 ; +\infty[$, on a : $f(x) - x + 1 = \frac{(x+1)u(x)}{x+e^{-x}}$ avec $u(x) = 1 - x - e^{-x}$.

b) Etudier le sens de variation de u sur $[0 ; +\infty[$, puis en déduire le signe de $u(x)$.

c) Déduire des questions précédentes, la position de (C) par rapport à (T).

5) Tracer (T) et (C).

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

1) Justifier que h est une bijection de $[0 ; \alpha]$, sur un intervalle J que l'on précisera.

Soit h^{-1} , la bijection réciproque de h .

2) a) Sur quel intervalle h^{-1} est-elle dérivable ? Justifier.

b) Sans expliciter h^{-1} , calculer $(h^{-1})'(1)$.

3) Construire la courbe (C') de (h^{-1}) dans le repère précédent.

Exercice 15

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x} \text{ et } g(x) = 1 - (x^2 + 1)e^{-x}.$$

Mathématiques Terminale D

On note (C) sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Etudier le sens de variation de g .
- 2) Calculer $g(0)$ puis déduire le signe de g .
- 3) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 4) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
- 5) Dresser le tableau des variations de f .
- 6) Etudier les branches infinies de (C).
- 7) Construire la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$.

Exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]-\infty ; 0]$ par : $g(x) = xe^x - x$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- 2) Pour tout nombre réel x élément de l'intervalle $]-\infty ; 0]$, calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
- 3) Démontrer que la courbe représentative (C_g) de g admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.
- 4) Dresser le tableau de variation de la fonction g' ; en déduire le signe de $g'(x)$.

Partie B

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} xe^x - x, & \text{si } x \leq 0 \\ 2x(-1 + \ln x), & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- 1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
- 2) Démontrer que f est continue en 0.
- 3) a) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter.
- b) Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et étudier son signe.
- 4) Dresser le tableau de variation de f .

5) $J \rightarrow f(J)$

$x \mapsto \varphi(x) = f(x)$, où $J = [1 ; +\infty[$.

- a) Démontrer que φ est une bijection. Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ .
- b) Prouver que la fonction dérivée première $(\varphi^{-1})'$ de φ^{-1} est positive sur $f(J) \setminus \{-2\}$.

Partie C

(C_f) est la courbe représentative de la fonction f dans le repère.

- 1) Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $-\infty$.

Mathématiques Terminale D

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et conclure.

3) (C_h) désigne la courbe représentative de la fonction h définie par : $h(x) = -f(x)$. Construire les courbes (C_f) et (C_h) et les tangentes en O dans un même repère.

Exercice 17

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x + 1}$. (C) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Montrer que pour tout réel x , on a : $f'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$, puis en déduire le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que pour tout réel x on a : $\frac{4}{e^{-x} + 1} = 4 - \frac{4}{e^x + 1}$.

b) En utilisant le résultat précédent, montrer que pour tout x réel on a :

$f(-x) = -f(x)$. Que peut-on en déduire ?

4) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x - 2)$.

a) Étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe (C) .

b) Préciser la position de (C) par rapport à (D) .

5) Montrer que la droite (D') d'équation $y = x + 2$ est aussi asymptote oblique à (C) .

6) Déterminer une équation de la tangente à (C) au point O, origine du repère.

7) représenter graphiquement (D) , (D') et (C) dans le repère.

Exercice 18

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1) Étudier les variations de f .

(Pour l'étude de la limite de la fonction en $+\infty$, on pourra vérifier que : $f(x) = 1 - \frac{3}{e^x + 1}$).

Préciser les asymptotes.

2) Montrer que le point $I(0; \frac{1}{2})$ est centre de symétrie pour la courbe.

3) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point I.

4) Construire (C) et (T) .

Préciser l'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

Mathématiques Terminale D

Exercice 19 : BAC 2008

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

A) Soit la fonction numérique g_n définie sur $]-\infty ; 0]$ par : $g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

Dresser le tableau de variations de g_n et en déduire que $g_n(x)$ est négatif ou nul pour x appartenant à $]-\infty ; 0]$.

B) Soit la fonction numérique f_n définie par : $f_n(x) = \begin{cases} xe^x - nx & \text{si } x \leq 0 \\ x^n(1 - \ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 4 cm).

1) a) Etudier la continuité de f_n en $x = 0$.

b) Etudier la dérivabilité de f_n en $x = 0$.

2) a) Calculer $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b) Etudier le signe de $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3) a) Calculer $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b) Déduire la partie A) le signe $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

4) Dresser le tableau de variations de f_n .

5) Cas où $n = 1$ ou $n = 2$.

a) Etudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression $f_2(x) - f_1(x)$.

b) En déduire la position relative des courbes (C_1) et (C_2) et montrer que (C_1) et (C_2) se coupent en trois points dont on précisera les coordonnées.

6) a) Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_1) en $-\infty$.

b) Montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C_2) en $-\infty$.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ces résultats.

7) Construire (C_1) et (C_2) sur le même graphique.

8) Calculer en intégrant par parties, l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes (C_1) et (C_2) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 20 : BAC 2009 (Partie B)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \ln(x+1) + e^{-x} - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et dresser le tableau de variation de f sur $]-\infty, 0]$.

Mathématiques Terminale D

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{h(x)}{e^x(1+x)}$

En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

4) Montrer que la restriction de f à $] -\infty; -1[$ est une bijection de $] -\infty; -1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

5) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

Résolutions équations et inéquations

Série d'exercices

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $2e^x - 5 = 0$;

2) $e^{2x} - 5 = 0$;

3) $e^{x^2-2} = e^{-2x+1}$;

4) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$;

5) $(e^{3x} - 5)(e^x + 2) = 0$;

6) $2e^{2x} - 7e^x + 3 = 0$;

7) $e^{2x} > 1$;

8) $e^{2x+5} < e^{1-x}$;

9) $\frac{e^x+3}{e^x+1} > 2$;

10) $e^x + e^{-x} - 6 > 0$;

11) $e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0$;

12) $3(e^x)^2 + e^x - 4 < 0$;

13) $2\ln x - 5 = 0$;

14) $\ln(3x-4) = \ln(2x+1)$;

15) $\ln(4x-3) = \ln(1+x)$;

16) $\ln(x^2+x+1) = \ln(x^2-2x+1)$;

17) $\ln(2x-5) + \ln(x) = \ln(3x-2)$;

18) $\ln^2 x - 7\ln x + 6 = 0$;

19) $2(\ln x)^2 + 3\ln x - 2 = 0$;

20) $\ln(5x^2+6x+1) > 0$;

21) $\ln(2x+2) \leq 2\ln x$;

22) $2\ln(x+4) \geq \ln(2-x)$;

23) $(\ln x)^2 - \ln x - 6 \geq 0$;

Exercice 2

1) Soit $A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$. Montrer que $A(x) = x^3 - x^2 - x + 2$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{3x} - e^{2x} - e^x + 2 = 0$; b) $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0$

Exercice 3

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^2$:

1) $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 3 \\ \ln \sqrt{x} - \ln \sqrt{y} = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} e^x + 2e^y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^x + y^x = -1 \\ 3 \times 2^x - y^x = 33 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 3 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy = -15 \\ e^x e^y = e^{-2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} \ln x + \ln y = -2\ln 4 \\ e^x e^y = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

Mathématiques Terminale D

- Si $f \geq 0$ sur I alors $A = \int_a^b f(x)dx \times UA$
- Si $f \leq 0$ sur I alors $A = -\int_a^b f(x)dx \times UA$

UA est l'unité d'aire

b) Calcul de l'aire d'une partie du plan délimitée par deux courbes

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et (D) la droite d'équation $y = ax + b$
l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe de (C_f) , la droite (D) et les droites
d'équation $x = a$ et $x = b$ est donnée par : $A = \left[\int_a^b f(x) - (ax + b)dx \right] \cdot UA$

Exercice d'application

Partie A

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm, on désigne
par (C) la courbe représentative de f et (T) celle de g .

On pose : $g(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ et $f(x) = e^x g'(x)$.

- 1) Montrer que : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1 + e^x)$
- 2) Calculer la limite de f en $-\infty$.
- 3) Etablir que f est strictement décroissante puis en déduire son signe.
- 4) Déterminer alors le signe de $g'(x)$ ainsi que le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

- 1) Etudier la limite de f en $+\infty$.
- 2) Calculer la limite de $f(x) - 1 + x$ en $+\infty$. Interpréter.
- 3) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 4) Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$, dresser ensuite son tableau de variation.
- 5) Tracer (C) et (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 6) Soit a un réel positif. Calculer l'intégrale : $I(a) = \int_0^a g(x) \cdot dx$. Que représente $I(a)$?
- 7) Etudier la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Correction

1) Montrons $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1 + e^x)$

On sait que : $g'(x) = -g(x) + \frac{1}{1+e^x} = -e^{-x} \ln(1 + e^x) + \frac{1}{1+e^x}$ d'où :

$$f(x) = e^x g'(x) = e^x \left[-e^{-x} \ln(1 + e^x) + \frac{1}{1+e^x} \right] = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1 + e^x).$$

Alors $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1 + e^x)$

- 2) Calculons la limite de f en $-\infty$.

Mathématiques Terminale D

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

3) Établissons que f est strictement décroissante puis en déduisons son signe

$$f'(x) = -\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} \text{ la dérivée de } f \text{ est négative sur } \mathbb{R}, \text{ donc } f \text{ est strictement décroissante.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, f est négative sur $\mathbb{R}$.

4) Déterminons alors le signe de $g'(x)$ ainsi que le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = e^x g'(x), f \text{ et } g' \text{ ont le même signe sur } \mathbb{R} \text{ car pour tout } x \in \mathbb{R} e^x > 0$$

$g'(x)$ est négative sur $\mathbb{R}$ et g est strictement décroissante.

Partie B

1) Étudions la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) \right] = -\infty.$$

2) Calculons la limite de $f(x) - 1 + x$ en $+\infty$. Interprétons.

$$f(x) - 1 + x = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln[e^x(1+e^{-x})] - 1 + x = \frac{e^x}{1+e^x} - 1 - \ln(1+e^{-x})$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1-x)] = 0$$

La droite d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

3) Dressons le tableau de variations de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
f	0	$-\infty$

4) Étudions les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$, dressons ensuite son tableau de variation.

$$g(x) = e^{-x} \ln(1+e^x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \text{ et } \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^x} \times \frac{1+e^x}{e^x} \text{ d'où}$$

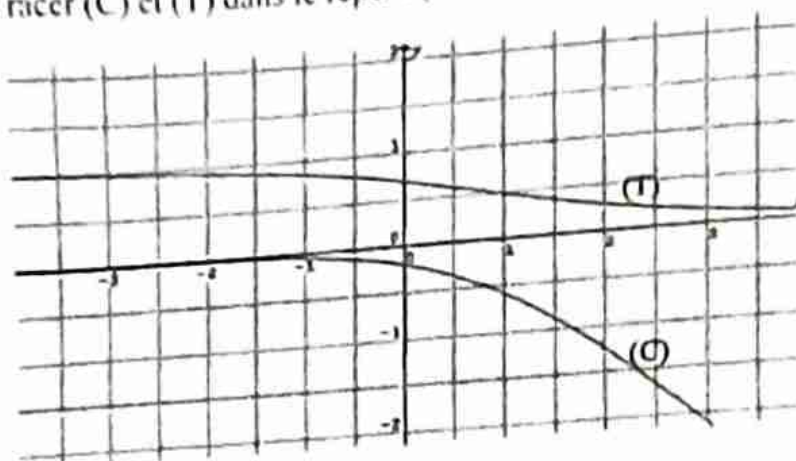
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{\ln Y}{Y} \times \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1+X}{X} = 0 \times 1 = 0$$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		-
g	1	0

Mathématiques Terminale D

5) Tracer (C) et (T) dans le repère (O, $\hat{i}$, $\hat{j}$).



6) Calculons l'intégrale $I(a)$

$$I(a) = \int_0^a g(x) \cdot dx = [G(x)]_0^a = [x - (e^{-x} + 1) \ln(1 + e^x)]_0^a$$

$$I(a) = a - (e^{-a} + 1) \ln(1 + e^a) + 2 \ln 2$$

$I(a)$ est l'aire du domaine compris entre (T), l'axe (Ox), l'axe (Oy) et la droite d'équation $x = a$.

7) Etudions la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

$$I(a) = -g(a) - \ln[e^a(1 + e^{-a})] + a + 2 \ln 2$$

$$\text{On trouve } \lim_{x \rightarrow +\infty} I(a) = 2 \ln 2$$

Série d'exercices

Exercice 1

Déterminer une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$ sur $I =]0 ; +\infty[$; 2) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ sur $I =]0 ; \infty[$;

3) $f(x) = \frac{3}{3x-4}$ sur $I =]\frac{4}{3} ; +\infty[$; 4) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$;

5) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur $I =]-1 ; 1[$

Exercice 2

1) Déterminer une primitive de la fonction f proposée sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{1}{4} e^x$; b) $f(x) = e^{-x}$; c) $f(x) = e^{2x+3}$; d) $f(x) = x e^{x^2}$; e) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{e^{-x}+1}$.

a) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{3e^x}{e^x+1}$.

CALCUL INTEGRAL

Résumé du cours

1) Notion d'intégrale

Soit F une primitive quelconque de f sur intervalle I , a et b sont 2 éléments de I . On appelle intégrale de f entre a et b le nombre réel défini par : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

On écrit aussi : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

2) Propriétés

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\text{Relation de Chales : } \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$\text{Linéarité : } \begin{cases} \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \\ \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b [kf(x) + k'g(x)]dx = k \int_a^b f(x)dx + k' \int_a^b g(x)dx \end{cases}$$

Intégration :

- Intégrale d'une fonction paire, impaire ou périodique

$$\bullet \text{ Si } f \text{ est paire alors } \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

$$\bullet \text{ Si } f \text{ est impaire alors } \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

$$\bullet \text{ Si } f \text{ est périodique } T \text{ alors } \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

- Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle I , dont les dérivées f' et g' sont continue sur I .

Soient a et b deux éléments de I , on a :

$$\int_a^b f(t) \cdot g'(t)dt = [f(t) \cdot g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t) \cdot g(t)dt$$

3) Propriété (calcul d'aires)

a) Calcul de l'aire d'une partie du plan délimitée par l'axe des abscisses et une courbe

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I de représentation graphique (C) .

On note A la partie du plan délimitée par la courbe de (C) , (OI) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Mathématiques Terminale D

b) Déduisez en la primitive F de f qui s'annule pour $x = 0$.

3) Donner la dérivée de la fonction g définie par : $g(x) = (x+1)\ln(x+1)$ et en déduire $K = \int_0^5 \ln(x+1) dx$.

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_2^5 e^x dx ; \quad 2) \int_2^5 -e^{-x} dx ; \quad 3) \int_0^2 2e^{2x-1} dx ; \quad 4) \int_1^2 (e^{2t} + e^t - 3) dt$$

$$5) \int_{-1}^1 e^{3x+1} dx ; \quad 6) \int_0^1 \frac{e^x}{e^{x+1}} dx ; \quad 7) \int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x (e^x - 3) dx ; \quad 8) \int_0^1 \frac{e^{-x}-2}{e^x} dx.$$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie.

$$1) I = \int_1^e x \ln x dx ; \quad 2) I = \int_0^1 (x+2)e^x dx ; \quad 3) I = \int_1^{e^2} \ln t dt ;$$

$$4) I = \int_1^2 (x-2)e^{2x} dx ; \quad 5) I = \int_0^\pi (x-1) \cos x dx ; \quad 6) I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx ;$$

$$7) I = \int_0^\pi e^x \cos x dx ; \quad 8) I = \int_0^1 (x+2)e^x dx ; \quad 9) I = \int_{-1}^0 x e^x dx ;$$

$$10) I = \int_{-1}^0 (x+2)e^{x+1} dx ; \quad 11) I = \int_0^\pi e^x \sin x dx ; \quad 12) I = \int_0^\pi e^{2x} \cos x dx.$$

Exercice 5

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ et $g(x) = \frac{4x^2-5x+1}{x+3}$.

1) a) Trouver les réels a et b tels que, pour tout réels x de $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$, on a :

$$f(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$$

b) En déduire : $I = \int_4^5 \frac{1}{x^2-9} dx$

2) a) Trouver trois réels a , b et c tels que pour tout réel de $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, on a :

$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}.$$

b) En déduire : $I = \int_{-2}^0 \frac{4x^2-5x+1}{x+3} dx$

3) a) Prouver que pour tout réel x : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduire : $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx.$

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une primitive

$$1) I = \int_0^4 (x-3) dx ; \quad 2) I = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 4x + 3) dx ; \quad 3) I = \int_1^2 \left(x^2 + x - \frac{1}{x}\right) dx ;$$

$$4) I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx ; \quad 5) I = \int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx ; \quad 6) I = \int_0^3 \frac{1}{(2x+1)^2} dx ;$$

$$7) I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x} dx ; \quad 8) I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx ; \quad 9) I = \int_0^1 5e^{3x} dx ;$$

$$10) I = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-4} dx ; \quad 11) I = \int_0^1 t e^{t^2-1} dt ; \quad 12) I = \int_{-1}^0 (2x+3)(x^2+3x-5) dx.$$

Mathématiques Terminale D

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

- 1) $I = \int_0^3 \frac{t \ln(1+t^2)}{1+t^2} dx$ poser $u = 1 + t^2$; 2) $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$ poser $t = e^x$;
3) $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ poser $u = \frac{x}{x+1}$

Exercice 8

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ et $g(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$.

- 1) Démontrer que $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$ et $g(x) = e^{2x} - \frac{e^{2x}}{1+e^x}$.
2) En déduire le calcul de 2 intégrales : $I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx$ et $J = \int_0^{\ln 2} g(x) dx$

Exercice 9

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x - 3y = 2\ln 2 \\ x + y = 4\ln 2 \end{cases}$.

- 2) on pose $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$ et $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$.

Calculer $I - 3J$ et $I + J$. En déduire les valeurs exactes de I et J .

Exercice 10

- 1) On considère les fonctions g et h définies pour tout x réel par :

$$g(x) = xe^x - e^x \text{ et } h(x) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x.$$

Calculer les dérivées des fonctions g et h .

- 2) En utilisant la question 1), calculer $J = \int_0^{\frac{3}{2}} xe^x dx$ et $K = \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 e^x dx$.

- 3) Soit E la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) , les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{3}{2}$.

En utilisant ce qui précède, donner une valeur numérique décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de l'aire de E exprimée en cm^2 .

Exercice 11

Soit $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- 1) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

- 2) a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

Mathématiques Terminale D

- c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (Δ) .
- d) Déterminer les coordonnées du point A de (C) sachant que (C) admet en A une tangente (T) parallèle à (Δ) .
- e) Tracer (C) , (Δ) et (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 3) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par (Δ) , la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 12

- 1) Soit $f(x) = 1 + e^x(1 - x)$
 - a) Montrer que $f'(x) = -xe^x$.
 - b) Dresser le tableau de variation de f .
 - c) Montrer que C_f admet une branche infinie de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.
 - d) Montrer que $(D) : y = 1$ est asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.
 - e) Montrer que $f(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in [1; 2]$.
- 2) a) Soit g la restriction de f sur $[0; +\infty[$, montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur un intervalle que l'on précisera, et préciser son sens de variation.
- b) Tracer C_g et $C_{g^{-1}}$ dans un même repère.
- 3) a) Calculer $\int_a^b xe^x dx$ puis comparer : $\int_0^\alpha f(x) dx$ et $\int_\alpha^2 f(x) dx$.
- b) Calculer, en fonction de α , l'aire du domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite $x = 2$.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 3)e^{-x}$.

- 1) a) Étudier la limite de f en $-\infty$.
- b) Étudier la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 2) a) Démontrer que pour tout réel x , on a : $f'(x) = (-2x - 1)e^{-x}$.
- b) Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
- c) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de f .
- 3) a) Vérifier que pour tout réel x , on a : $f(x) = f'(x) + 2e^{-x}$.
- b) En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
- 4) On considère l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Mathématiques Terminale D

- Calculer la valeur exacte de I , puis donner une valeur approchée de I à 10^{-3} près.
- Etudier le signe de $f(x)$ sur $[0 ; 1]$.
- Interpréter I comme l'aire, en unités d'aire, d'un domaine du plan à définir.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

- Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.
- Etudier le sens de variation de f et étudier la limite de f en $+\infty$.
- Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[0 ; +\infty[$.
- Soit (T) la tangente à la courbe représentative (C) de f au point d'abscisse 1. Déterminer l'équation de (T) .
- Tracer la courbe représentative (C) de f et la droite (T) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Soit $\lambda \in]0 ; e]$. On pose $I(\lambda) = \int_{\lambda}^e f(x) dx$.
 - Calculer $I(\lambda)$ pour $\lambda \in]0 ; e]$.
 - Calculer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0.
 - En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $(x = 0)$ et $(x = e)$.

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Dresser le tableau de variation de f .
- Déterminer les branches infinies de (C) .
 - Tracer (C) .
- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - Tracer la courbe (C') représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f .
 - Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x > 0$.
- Vérifier que pour tout réel x , on a : $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.
 - Soit λ un réel strictement négatif.
Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par la courbe (C') , l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y = \lambda$ et $y = 0$.

Mathématiques Terminale D

Exercice 16

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x} \text{ et } g(x) = 1 - x^2 - \ln x.$$

1) Etudier les variations de g .

2) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

3) Etudier les variations de f .

4) Démontrer que la courbe (C_f) admet la droite (Δ) d'équation $y = -x + 3$ comme

asymptote oblique. Etudier la position de (C_f) par rapport à (Δ) .

5) Déterminer les coordonnées du point A de (C_f) où la tangente (T) à (C_f) est parallèle à (Δ) .

Donner une équation de cette tangente.

6) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1]$; puis une solution unique β dans $[3 ; 4]$.

7) Tracer (C_f) et (Δ) dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

8) Déterminer l'aire A de la région du plan limitée par (C_f) ; la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Exercice 17 : BAC 2007

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1 & \text{si } x < 1 \\ (x-1)\ln x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(où $\ln$ désigne le logarithme népérien).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f et par (Δ) la première bissectrice.

1) Montrer que f est continue et dérivable en 1.

2) a) Montrer que pour tout $x < 1$ on a : $f'(x) > 0$.

b) Montrer que pour tout $x > 1$ on a : $f'(x) > 0$.

c) Dresser le tableau de variations de f .

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que pour tout $x < 1$ on a : $f(x) - (x+1) = (x-1) \left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right] - 1$.

Montrer que la courbe (C) admet la droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote quand x tend vers $-\infty$.

Mathématiques Terminale D

c) En admettant les inégalités $\frac{x-1}{x-2} \leq (x-1) \left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right] \leq 1$ pour tout $x < 1$, en déduire la position de (C) par rapport à (D) pour tout $x < 1$.

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une solution α appartenant à $\left] -1; -\frac{1}{2} \right[$.

4) Construire (C).

On précisera les points d'intersection de (C) avec (Δ).

5) En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan linéaire limitée par (Δ), (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

6) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qu'elle admet une réciproque f^{-1} (on ne demande pas de calculer $f^{-1}(x)$).

b) Construire la courbe (Γ) de f^{-1} dans le même repère que (C).

c) Calculer l'aire $\mathcal{A}_{\text{boucle}}$ de la courbe par (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 18 : BAC 2000 (Partie B)

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = -\left(x + \frac{1}{3}\right) e^{-3x}.$$

Soit (C) la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 3 cm.

1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

2) Donner l'équation de la droite (T_1) tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $x = -\frac{1}{3}$.

3) Donner l'équation de la droite (T_2) tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $x = \frac{1}{3}$.

4) Tracer (T_1), (T_2) et (C).

5) Soit t un réel positif.

Calculer l'intégrale : $I(t) = \int_{-\frac{1}{3}}^t g(x) dx$.

6) Déterminer la limite de $I(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

SUITES NUMÉRIQUESRésumé du cours1) Sens de variation d'une suite

Pour étudier le sens de variation d'une suite U :

- On calcule la différence $U_{n+1} - U_n$ puis on étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n > 0$ alors la suite (U_n) est strictement croissante.
 - Si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n < 0$ alors la suite (U_n) est strictement décroissante.
 - Si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = 0$ alors la suite (U_n) est constante (ou stationnaire).

2) Démonstration par récurrence

Pour démontrer par récurrence que P_n , qui dépend d'un entier naturel n , est vraie pour tout n , on procède en trois étapes, comme suit :

- Prouver que la propriété est vraie pour le terme initial (P_0 est vraie)
- Supposer que la propriété P_k est vraie pour tout entier k et ensuite démontrer que la propriété P_{k+1} est vraie.
- Conclure alors $\forall n \in \mathbb{N} p_n$ est vraie.

3) Suite arithmétique – Suite géométrique

Suites	Arithmétiques	Géométriques
Définition	La suite (U_n) est dite arithmétique de raison r si $\forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} - U_n = r$	La suite (U_n) est dite géométrique de raison q si $\forall n \in \mathbb{N} ; \frac{U_{n+1}}{U_n} = q$
Démonstration	Etablir que $U_{n+1} - U_n$ est un réel indépendant de n	Etablir que $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est un réel indépendant de n .
Terme général (U_n en fonction de n)	$\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = U_p + (n - p)r$ $U_n = U_0 + nr$ (U_0 1 ^{er} terme)	$\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = q^{n-p} \cdot U_p$ $U_n = q^n \cdot U_0$ (U_0 1 ^{er} terme)
Somme des termes consécutifs	$S_{(p;n)} = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$ $S_{(p;n)} = \frac{n - p + 1}{2} (u_p + u_n)$ $S_{(0;n)} = \frac{1}{2} (n + 1)(u_0 + u_n)$	$S_{(p;n)} = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$ $S_{(p;n)} = \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \times u_p$ $S_{(0;n)} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \times u_0$

Sens de variation	(U_n) est croissante si $r > 0$ (U_n) est décroissante si $r < 0$ (U_n) est constante si $r = 0$	*Si $q < 0$ alors (U_n) n'est pas monotone. *Si $q > 0$ - (U_n) est croissante si $q > 1$. - (U_n) est décroissante si $0 < q < 1$. - (U_n) est constante si $q = 1$.
Limite	$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ -\infty & \text{si } r < 0 \\ U_0 & \text{si } r = 0 \end{cases}$	*Si $q < 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$. *Si $q \in]1 ; +\infty[:$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{cases} -\infty & \text{si } u_0 < 0 \\ +\infty & \text{si } u_0 > 0 \end{cases}$ *Si $q \in]-\infty ; -1[: (U_n)$ n'a pas de limite.
Convergence	U_n est convergente si $r = 0$.	U_n est convergente si $q = 1$ ou $ q < 1$.
Divergence	U_n est divergente si $r \neq 0$.	U_n est divergente si $q = -1$ ou $ q > 1$.
Relation entre trois termes consécutifs d'une suite	Trois réels a, b et c sont en progression arithmétique si et seulement si $2b = a + c$.	Trois réels a, b et c sont en progression géométrique si et seulement si $b^2 = a \times c$.

Exercice d'application

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3 .

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

b) Dédire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

3) On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n .

c) Dédire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

d) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n .

e) Soit la somme S'_n définie pour tout entier naturel n par $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

En déduire l'expression de S'_n en fonction de n .

Mathématiques Terminale D

Correction

1) Calculons u_1, u_2 et u_3 .

$$\text{Si } n = 0 \text{ alors } u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$$

$$\text{Si } n = 1 \text{ alors } u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 \Rightarrow u_2 = -\frac{14}{9}$$

$$\text{Si } n = 2 \text{ alors } u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 \Rightarrow u_3 = -\frac{14}{27}$$

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4, u_n \geq 0$.

$$\text{Si } n = 3 \text{ alors } u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 \Rightarrow u_4 = \frac{67}{81} \text{ donc } u_n \geq 0$$

Alors la propriété est P_n est vraie pour $n \geq 4$.

Montrons que P_{n+1} est vraie c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 0$.

Comme $n \geq 4$ alors $n - 2 > 0$ et $\frac{1}{3}u_n \geq 0$.

Alors $\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq 0$.

b) Déduisons que pour tout entier naturel $n \geq 5, u_n \geq n - 3$.

$$u_5 = \frac{1}{3}u_4 + 5 - 2 = \frac{553}{243} \approx 2,28 \text{ alors } u_5 \geq 5 - 3.$$

La propriété P_n est vraie pour $n \geq 5$.

Montrons que la propriété P_{n+1} est vraie.

$$n \geq 5 \text{ alors } u_n \geq n - 3 \Rightarrow u_{n+1} \geq \frac{1}{3}(n - 3) + n - 2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq \frac{1}{3}n + n - 1 - 2, \text{ comme } n \geq 5 \text{ alors } \frac{1}{3}n \geq 1 \text{ donc } u_{n+1} \geq 1 + n - 1 - 2 \text{ d'où } u_{n+1} \geq n - 2.$$

Alors la propriété P_{n+1} est vraie.

3) a) Démontrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

$$v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2}$$

$$v_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n.$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme

$$v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}.$$

b) Exprimons v_n en fonction de n .

$$v_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

c) Déduisons que : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

Mathématiques Terminale D

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \Rightarrow u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

$$\Rightarrow u_n = -\frac{1}{2} \times \left[-\frac{25}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4} \text{ alors } u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

d) Déterminons l'expression de S_n en fonction de n .

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = -\frac{25}{2} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \right) = -\frac{25}{2} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \right).$$

$$\Rightarrow S_n = -\frac{75}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right]$$

e) Dédudons l'expression de S'_n en fonction de n .

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$S'_n = \left(-\frac{1}{2}v_0 - \frac{21}{4} \right) + \left(-\frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2} - \frac{21}{4} \right) + \dots + \left(-\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4} \right)$$

$$S'_n = -\frac{1}{2}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) - \frac{21}{4}(n+1) = -\frac{1}{2}S_n - \frac{21}{4}(n+1)$$

$$S'_n = \frac{75}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right] - \frac{21}{4}(n+1)$$

Série d'exercices

Exercice 1

1) u est une suite arithmétique telle que $u_5 = 30$ et de raison -3 .

a) Calculer u_1 , u_{30} et u_{11} .

b) Déterminer le rang n tel que $u_n = -132$.

2) v est une suite géométrique telle que $v_5 = 1,6$ et de raison 2 .

a) Calculer v_1 , v_9 et v_{18} .

b) Déterminer le rang n tel que $v_n = 204,8$. (sachant que $2^3 = 8$; $2^4 = 16$ etc...)

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 17 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$

1) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

2) Cette suite est-elle arithmétique ou géométrique ? Donner sa raison.

3) Exprimer u_n en fonction de u_0 et de n .

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - a$; a étant un réel.

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et de a .

Déterminer une valeur de a pour laquelle la suite (v_n) est géométrique.

2) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.

Mathématiques Terminale D

Exprimer v_n en fonction de n . En déduire une expression de u_n en fonction de n .

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 4u_n + 9$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 . La suite u est-elle une suite géométrique ?

2) On pose pour tout entier naturel : $v_n = u_n + 3$.

a) Montrer que $v_{n+1} = 4u_n + 12$.

b) En déduire que v est une suite géométrique de raison 4.

c) Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de n .

3) On pose $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ et $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

Montrer que $S = 4^n - 1$ puis en déduire S' .

Exercice 5

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout n , $u_{n+1} = 2u_n + n + 1$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3 . La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2) On pose : $v_n = u_n + n + 2$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 .

3) Démontrer que, pour tout n , $v_{n+1} = 2v_n$.

4) En déduire l'expression de v_n en fonction n .

5) Démontrer que, pour tout n , $u_n = 3 \times 2^n - n - 2$.

6) Etudier le sens de variation de (u_n) .

7) Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Exercice 6

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = 3U_n + 7 \end{cases}, \forall n \geq 0$.

Soit a et b deux nombres réels. On pose : $V_n = aU_n + b$ pour tout entier naturel n .

1) Exprimer V_{n+1} en fonction de U_n .

2) Déterminer a et b tels que $V_{n+1} = 3V_n$.

3) En déduire une expression de V_n en fonction de n .

4) Soit $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{10}$.

a) Calculer $S' = V_0 + V_1 + \dots + V_{10}$.

b) Exprimer S en fonction de S' puis en déduire la valeur de S .

Exercice 7

On considère (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de deuxième terme $v_1 = 12$

1) Montrer que la raison de cette suite est 4.

2) Calculer v_n en fonction de n .

Mathématiques Terminale D

3) Soit $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

a) Calculer S en fonction de n .

b) Déterminer l'entier n pour que S soit égale 63.

Exercice 8

Soit (u_n) une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = 3u_n + 8$; $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Calculer u_1 et u_2 .

b) Dédire que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 4$.

a) Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de n .

3) Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = v_n + 3n - 1 - 3^n$.

Montrer que w_n est une suite arithmétique de raison 3.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$; $S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n$; $S_2 = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ et

$$S_3 = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

Exprimer S_1 ; S_2 et S_3 en fonction de n .

Exercice 9

On considère la suite U définie par : $U_1 = \frac{1}{4}$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{2+2U_n}$.

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 < U_n \leq 1$.

b) Montrer que U est décroissante et déduire qu'elle est convergente.

2) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = 1 + \frac{1}{2U_n}$.

a) Montrer que V est une suite géométrique de raison 2.

b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $U_n = \frac{1}{3 \times 2^{n-2}}$.

c) Déterminer la limite de la suite U_n quand n tend vers $+\infty$.

3) Soit W la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \frac{2^n}{n}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 3$: $\frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{3}{2}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 3$: $W_n \geq 4 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}$.

c) Déterminer la limite de W_n quand n tend vers $+\infty$.

4/ Soit S_n la suite définie par : $S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n = 6n \left(W_n - \frac{n+3}{3n}\right)$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Mathématiques Terminale D

Exercice 10

On considère la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{U_n + 1} \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N} : U_n \geq 2$.
- b) Montrer que U est décroissante.
- c) Dédire que U est convergente et calculer sa limite.
- 2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(U_n - 2)$.
- b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Exercice 11

Soit la suite de nombres complexes (Z_n) définie par :
$$\begin{cases} z_0 = \sqrt{3} - i \\ z_{n+1} = (1 + i)z_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

- A) On pose $u_n = |z_n|$.
- 1) Calculer u_0 .
- 2) Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
- 3) Exprimer u_n en fonction de n .
- 4) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- B) 1) Déterminer la forme algébrique de z_1 .
- 2) Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + i$. En déduire la forme exponentielle de z_1 .
- 3) Dédire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 12

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

On pose $v_n = u_n - 3$.

- 1) a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 .
- b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 13

A) 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $9z^2 - 6z + 2 = 0$.

Mathématiques Terminale D

On note a et b les deux solutions de l'équation, u étant la solution dont la partie imaginaire est positive.

2) Ecrire a et b sous forme trigonométrique.

B) Soit la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points M_n du plan complexe d'affixe z_n telle que: $z_0 = 1$ et pour tout entier n : $z_{n+1} = \frac{1+i}{3} z_n$.

1) Pour tout entier naturel n , on pose: $u_n = \arg(z_n)$

a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$.

b) Exprimer u_n en fonction de n .

2) Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $v_n = |z_n|$.

a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

3) Déduire de ce qui précède l'expression de z_n en fonction de n .

4) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n :

a) z_n est-il réel? Déterminer alors z_n .

b) z_n est-il imaginaire pur?

5) Pour tout entier naturel n , calculer $w_n = |z_{n+1} - z_n|$ en fonction de n .

On remarquera que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

6) On pose: $k_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

Exprimer k_n en fonction de n .

Exercice 14

Au cours de l'année 2000, la production a été de 25000 unités. Cette production subit une baisse de 4% chaque année.

On note $P_0 = 25000$ et P_n la production prévue au cours de l'année $2000 + n$.

1) Montrer que P_n est une suite géométrique dont on donnera la raison.

2) Calculer P_5 .

3) Si la production descend au-dessous de 15000 unités, l'usine sera en faillite, quand cela risque-t-il d'arriver si la baisse de 4% par an persiste?

Exercice 15 : BAC 2000

En 1990, l'effectif de la population d'une région donnée est P_0 et, avec un accroissement annuel de 1,2%, devient P_n , n années après.

1) Montrer que (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire l'expression de P_n en fonction de n et P_0 .

Mathématiques Terminale D

2) En quelle année cette région aura-t-elle une population double de ce qu'elle était en 1990 ?

3) En 1990, le nombre d'agriculteurs de cette région, que l'on désigne par A_0 représente les 78% de la population totale.

Chaque année, ce pourcentage diminue de 0,5%.

En désignant par A_n le nombre d'agriculteurs au bout de n années après 1990, exprimer alors A_n en fonction de P_n .

Trouver l'année à partir de laquelle le nombre d'agriculteurs représente moins de la moitié totale de la région.

NB : On donne : $\ln 2 = 0,6931$; $\ln(1,012) = 0,0119$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Exercice 16 : BAC 2004

I. On considère la suite (u_n) définie par ses premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n$ (1)

1) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

2) Déterminer v_n en fonction de n . En déduire u_n en fonction de n .

3) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

II. On définit la suite (w_n) par ses premiers termes w_0 et w_1 avec :

$w_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $w_1 \in \mathbb{R}_+^*$, et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \sqrt[5]{(w_{n+1})^2(w_n)^3}$

1) Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = \ln(w_n)$ (où $\ln$ désigne le logarithme népérien) vérifie la relation (1).

2) En déduire la limite de la suite (t_n) , puis de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 17 : BAC 2005

On considère la suite numérique (U_n) définie par son premier terme $U_1 = 2e$ et par la relation de récurrence $U_{n+1} = \frac{U_n}{e - U_n}, n > 0$.

Soit V_n définie par $V_n = \frac{U_n + e}{U_n}$.

1) Calculer U_2 et montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2, U_n < 0$.

2) a) Calculer V_{n+1} en fonction de U_n .

b) Calculer V_{n+1} en fonction de V_n .

3) Soit la suite (W_n) définie par $W_n = V_{n+1} - eV_n$ pour $n \geq 1$.

a) Déterminer la nature de la suite (W_n) .

b) Calculer $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$.

Mathématiques Terminale D

c) Calculer la limite de $\ln \left| \frac{1+S_n}{1+n} \right|$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 18 : BAC 2007

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{U_n^2}{2U_n - 1}$ pour tout entier naturel n .

1) Montrer par récurrence que $U_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

2) On pose $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n}$ et $W_n = \ln V_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite (W_n) est géométrique.

b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n, V_n puis U_n en fonction de n .

c) En déduire la limite de la suite (U_n) .

Exercice 19 : BAC 2008

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par la donnée de son premier terme u_1 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2 + \frac{4}{u_n + 1}$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

1) Démontrer qu'il existe deux valeurs de u_1 pour lesquelles la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.

On suppose désormais que la suite n'est pas constante et que $u_1 > 1$.

2) Démontrer par récurrence que $u_n > -1$, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

3) On pose $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 2}$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n en fonction de n et calculer la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.

4) Exprimer u_n en fonction de v_n .

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Résumé du cours

1) Equation différentielle du premier ordre

Pour résoudre une équation différentielle du premier ordre à coefficient constants sans second membre, on peut procéder comme suit :

Écrire l'équation différentielle sous la forme $f' + af = 0$

Donner les résultats de l'équation différentielle sous la forme $f_k(x) = ke^{-ax}$ $k \in \mathbb{R}$

2) Equation différentielle du second ordre

Pour résoudre une équation différentielle du second ordre à coefficient constants sans second membre, on peut procéder comme suit :

Écrire l'équation différentielle sous la forme $f'' + af' + bf = 0$ $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

Faire ressortir l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$

(en remplaçant dans l'équation différentielle f'' par r^2 , f' par r et f par 1)

Résoudre l'équation caractéristique.

Donner les résultats de l'équation différentielle en tenant compte des solutions de l'équation caractéristique. Ainsi :

Si l'équation caractéristique admet	Alors la solution générale est :
2 solutions réelles distinctes r_1 et r_2	$f_{k_1 k_2}(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$
Une unique solution réelle r	$f_{k_1 k_2}(x) = (k_1 x + k_2) e^{rx}$
2 solutions complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$	$f_{k_1 k_2}(x) = k_1 \cos \beta x + k_2 \sin \beta x e^{\alpha x}$

Exercice d'application

On considère l'équation différentielle : (E) : $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$.

1) On désigne par u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^2 e^{-x}$. Vérifier que u est une solution de l'équation différentielle (E).

2) On pose pour tout réel x , $f(x) = g(x) + u(x)$. Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si g est solution de l'équation différentielle :

(E') : $y'' + 2y' + y = 0$.

3) Résoudre l'équation différentielle (E').

4) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

Mathématiques Terminale D

c) Déterminer la fonction f solution de (E), telle que : $f(0) = 0$ et $f'(0) = -3$.

Correction

1) Vérifions que u est solution de (E) :

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = (4x - 2x^2)e^{-x}$; la fonction u' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u''(x) = (2x^2 - 8x + 4)e^{-x}$; et on a pour tout réel x ,

$$u''(x) + 2u'(x) + u(x) = (2x^2 - 8x + 4)e^{-x} + 2(4x - 2x^2)e^{-x} + 2x^2e^{-x} = 4e^{-x}$$

Ainsi u est bien une solution de (E)

2) Montrons que la fonction f est solution de (E) si et seulement si g est solution de l'équation différentielle : (E') : $y'' + 2y' + y = 0$.

• Supposer que la fonction $f = g + u$ est solution de (E) implique que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et par suite g également, et que pour tout réel x on

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 4e^{-x} ; \text{ comme } u \text{ est solution de (E), alors}$$

$(f - u)'' + 2(f - u)' + (f - u)$ est la fonction nulle ce qui implique que la fonction que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 2y' + y = 0$.

• Réciproquement, supposer que la fonction $g = f - u$ est solution de (E') implique que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et par suite f également, et que pour tout réel x on a :

$$(f - u)''(x) + 2(f - u)'(x) + (f - u)(x) = 0, \text{ ce qui implique que pour tout réel } x \text{ on a :}$$

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = g''(x) + 2g'(x) + g(x) = 4e^{-x}, \text{ et que } f \text{ est solution de l'équation différentielle (E)}$$

3) a) Résolvons l'équation (E')

(E') est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. Elle a pour équation caractéristique : $r^2 + 2r + 1 = 0$, qui admet une racine double $r_0 = -1$.

(E') a donc pour solutions générales les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \rightarrow (ax + b)e^{-x}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels arbitraires.}$$

b) Déduisons les solutions de l'équation différentielle (E).

Selon la question 2 qui précède les solutions générales de (E) s'obtiennent comme somme des solutions générales de (E') et de la solution particulière u .

Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \rightarrow (2x^2 + ax + b)e^{-x}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels arbitraires.}$$

c) Déterminons la fonction f solution de (E), telle que : $f(0) = 0$ et $f'(0) = -3$.

$$\text{Avec } f(x) = (2x^2 + ax + b)e^{-x} \text{ on a } f'(x) = (-2x^2 + (4 - a)x + a - b)e^{-x} ;$$

les fonctions f solutions de (E) telle que l'on ait : $f(0) = 0$ et $f'(0) = -3$, sont définies par

$$\text{les réels } a \text{ et } b \text{ solutions du système : } \begin{cases} b = 0 \\ a - b = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -3 \end{cases}$$

Ainsi la fonction f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 - 3x)e^{-x}$

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1) $4y'' + y = 0$; 2) $y'' + 3y = 0$; 3) $y'' + 3y' + 2y = 0$; 4) $y'' + 2y' + y = 0$.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(E) : $y' - \frac{3}{2}y = 0$; (E') : $y' - 2y = 0$ et (E'') : $y'' - 4y' + 3y = 0$.

b) Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur 3 en 0.

c) Déterminer la solution de (E') qui prend la valeur 1 en 0.

d) Déterminer la solution f de (E'') telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

Exercice 2

1) a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 0$

b) En déduire les solutions de : $y'' + 2y' = 0$.

2) a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = ae^{-x} + b$ soit solution de (E') : $y'' + 2y' = 2e^{-x} - 6$

b) Démontrer que f est solution de (E') si et seulement si $f - g$ est solution de (E).

c) En déduire la résolution de l'équation (E').

3) Déterminer la solution φ de (E') vérifiant $\varphi(\ln 2) = -\frac{7}{4}$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1) Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).

2) Démontrer que y est solution de (E) si et seulement si $(y - f)$ est solution de (E) : $y' + y = 0$.

3) Résoudre l'équation (E) et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - y = 0$

2) a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E') : $y' - y = 2 - 2x$

b) Démontrer que f est solution de (E') si et seulement si $f - g$ est solution de (E).

c) En déduire la résolution de l'équation (E').

3) Déterminer la solution φ de (E') vérifiant $\varphi(0) = 1$.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle (E₁) : $y'' + y' = e^{-x}$.

1) En posant $z = y'$, montrer que z est solution de l'équation (E₂) : $z' + z = e^{-x}$

Mathématiques Terminale D

2) a) Déterminer le réel a pour que la fonction $g(x) = axe^{-x}$ soit une solution de l'équation différentielle (E_2) .

b) Montrer que z est solution de (E_2) si et seulement si $z - g$ est solution de (E_0) : $y' + y = 0$.

c) Résoudre l'équation (E_2) et donner une solution de (E_2) telle que $z(0) = 1$.

3) Déterminer la solution f de (E_1) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 6

On considère les équations différentielles : $y' + 3y = 0$ (E_0) et $y' + 3y = \sin x$ (E) .

1) Résoudre l'équation (E_0) sur $\mathbb{R}$.

2) a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\cos x + b\sin x$.

Déterminer un couple de réels $(a ; b)$ pour que g soit une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) .

b) Montrer qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si la fonction $(f - g)$ est une solution de (E_0) .

c) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) .

Exercice 7

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' + y = \frac{1}{e^x + 1}$.

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E_0) : $y' + y = 0$.

2) Prouver que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ est une solution de l'équation différentielle (E) .

3) Démontrer qu'une fonction h , dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $h - f$ est solution de l'équation différentielle (E_0) .

4) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .

Exercice 8

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = x - 1$.

1) Trouver deux réels a et b tels que $u(x) = ax + b$ soit une solution de (E) .

2) Démontrer que fonction v est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.

3) Résoudre (E') .

4) En déduire les solutions de (E) .

5) Déterminer la solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$.

Exercice 9

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

1) Soit h la fonction définie par : $h(x) = 2xe^{2x} + 1$.

Démontrer que h est solution de (E) .

Mathématiques Terminale D

2) Résoudre (E) : $y' - 2y = 0$.

3) a) Montrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E).

b) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

c) Déterminer la solution φ de (E) vérifiant $\varphi(0) = 0$.

Exercice 10

On considère l'équation différentielle : (E) : $4y'' + 4y' + y = x + 2$.

1) On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x - 2$. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E).

2) On pose l'équation différentielle : (E') : $4y'' + 4y' + y = 0$.

Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E').

3) Résoudre l'équation différentielle (E').

4) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

5) Déterminer la fonction h solution de (E), telle que : $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$.

Exercice 11 : BAC 2000 (Partie A)

On considère les deux équations différentielles (E) et (H) suivantes dans lesquelles y est une fonction numérique de la variable réelle x , e désignant la base du logarithme népérien : (E) :

$$y' - 9y = 6e^{-3x}; \quad (H) : y'' - 9y = 0.$$

1) Vérifier que la fonction numérique u définie par $u(x) = -xe^{-3x}$ est une solution particulière de (E).

2) Déterminer la solution générale de la solution (H).

3) Soit f une fonction numérique deux fois dérivable.

a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - u)$ est solution de (H).

b) En déduire toutes les solutions de (E) et donner la solution particulière f de (E) vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ et } f'(0) = 0.$$

Exercice 12 : BAC 2009 (Partie A)

On considère l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 1 - x$. (1)

1) Déterminer un polynôme g du premier degré solution de l'équation (1).

2) a) Démontrer qu'une fonction h , deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 0. \quad (2)$$

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d) Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$.

Résumé du cours**1) Nuage de points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

L'ensemble des points M_{ij} de coordonnées $(x_i ; y_j)$ est appelé nuage de points associé à la série.

2) Point moyen d'un nuage de points

On appelle point moyen d'un nuage de points représentant une série, le point G de coordonnées (X_G, Y_G) où $X_G = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{N}$ et $Y_G = \bar{Y} = \frac{\sum y_i}{N}$.

3) Ecart moyen

$$e_m = \frac{1}{N} \sum_1^p n_i |x_i - \bar{x}|$$

4) Variance

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_1^k n_i (x_i - \bar{x})^2 \text{ ou } V(x) = \frac{1}{N} \sum_1^k n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

5) Covariance

$$\text{Cov}(x ; y) = \frac{1}{N} \sum x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y} \text{ ou } \text{Cov}(x ; y) = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

6) Ecart type

$$\sigma = \sqrt{V(x)}$$

7) Droite de régression de Y en X

La droite (D) de régression de Y en fonction de X passe par le point $G(\bar{X}, \bar{Y})$ point moyen du nuage de point.

Son équation est : $y = ax + b$. avec $a = \frac{\text{COV}(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$.

8) Droite de régression de X en Y

La droite (D') de régression de X en fonction de Y passe par le point $G(\bar{X}, \bar{Y})$ point moyen du nuage de point.

Son équation est $x = a'y + b'$. Avec $a' = \frac{\text{COV}(X,Y)}{V(Y)}$ et $b' = \bar{X} - a'\bar{Y}$

Remarque : $G(\bar{X}, \bar{Y})$ appartient aux 2 droites de régression.

Pour tracer ces droites, il suffit donc de déterminer un autre point vérifiant l'équation.

9) Corrélation linéaire

Deux variables statistiques X et Y sont dites en corrélation linéaire lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en Y sont des droites.

Mathématiques Terminale D

a) Coefficient de corrélation linéaire

On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double caractère

(X, Y) , le nombre réel r défini par $r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$

b) Propriétés

. Si $0,87 \leq |r| \leq 1$ on considère que la corrélation linéaire entre 2 variables est forte.

. Si $r = 1$ on dit que la corrélation est parfaite.

Exercice d'application

Le tableau suivant donne la part du temps partiel au sein de la population (les valeurs pour 2000 et 2004 sont les résultats d'une estimation).

Année x_i	1980	1985	1990	1995	1997	2000	2004
Part du temps partiel en % : y_i	8,3	11	12	15,6	16,8	18	20

On étudie la série statistique $(x_i ; y_i)$ pour $1980 \leq x_i \leq 1997$.

1) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ pour $1980 \leq x_i \leq 1997$. On prendra 1 cm pour une part de 2% en ordonnée, 2 cm pour 5 ans en abscisse en prenant pour origine le point (1980 ; 0).

2) Déterminer les coordonnées de G, point moyen de la série statistique $(x_i ; y_i)$. Le placer sur le graphique.

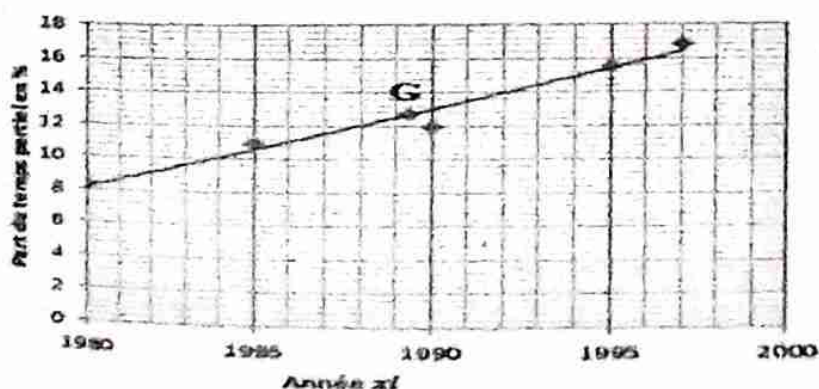
3) a) Donner la valeur arrondie à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i ; y_i)$. Un ajustement affine est-il justifié ?

b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (a et b arrondis à 10^{-3} près). Représenter cette droite sur le graphique.

c) Peut-on considérer que les estimations sur 2000 et 2004 faites par la revue ont été réalisées en utilisant l'équation obtenu à la question 3) b) ?

Correction

1) Représentons dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$



Mathématiques Terminale D

$$2) \bar{x} = \frac{1989+1985+1990+1995+1997}{5} = \frac{9947}{5} = 1989,4 ;$$

$$\bar{y} = \frac{8,3+11+12+15,6+16,8}{5} = \frac{63,7}{5} = 12,74$$

G(1989,4 ; 12,74). Plaçons le point G (voir figure).

$$3) a) r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \text{ avec}$$

$$\sigma_{xy} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y} = \left(\frac{1}{5} \times 126820,6 \right) - 1989,4 \times 12,74 = 19,164$$

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - (\bar{x})^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{5} \times 19788759 \right) - (1989,4)^2} \approx 6,28$$

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - (\bar{y})^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{5} \times 859,49 \right) - (12,74)^2} \approx 3,097$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{19,164}{6,28 \times 3,097} = 0,985$$

Le coefficient de corrélation linéaire est proche de 1 donc un ajustement affine de la série semble justifié.

$$b) y = ax + b$$

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} = \frac{5 \times 126820,6 - 9947 \times 63,7}{5 \times 19788759 - (9947)^2} \approx 0,486$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} = \frac{63,7 \times 19788759 - 9947 \times 126820,6}{5 \times 19788759 - (9947)^2} \approx -953,915$$

$$y = 0,486x - 953,915$$

c) On calcule une estimation de la part de temps partiel en remplaçant x par 2000 et 2004 dans l'équation de la droite des moindres carrés, on obtient :

$$y_{2000} = 2000 \times 0,486 - 953,915 = 18,085$$

$$y_{2004} = 2004 \times 0,486 - 953,915 = 20,029$$

On peut penser que les estimations faites pour les années 2000 et 2004 ont été réalisées à l'aide de l'équation trouvée à la question précédente car les valeurs trouvées par le calcul très proches de celles du tableau.

Série d'exercice

Exercice 1

Une enquête est faite auprès de 1000 personnes afin d'étudier la progression d'une épidémie. Le tableau ci-dessous montre le nombre d'individus (y_i) ayant été contaminés, à la date (x_i), exprimée en jours.

Mathématiques Terminale D

x_i	1	2	5	10	15	20
y_i	88	172	306	420	485	500

1) a) Dans un plan repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, placer les points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.

Echelle : 0,5 cm pour 1 jour en abscisse et 1 cm pour 50 individus en ordonnée.

2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.

3) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres.

Exercice 2

Une société de vente de produits dispose de 20 guichets. Le tableau ci-dessous donne le temps moyen d'attente à un guichet en fonction du nombre de guichets ouverts :

Nombre de guichets ouverts x	3	4	5	6	8	10	12
Temps moyen d'attente (en minutes) y	16	12	9,6	7,9	6	4,7	4

1) Construire le nuage de points $M_i (x_i ; y_i)$ correspondant à cette série statistique (échelle :

1 cm pour un guichet ouvert en abscisse et 1 cm pour une minute d'attente en ordonnée).

2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.

3) Déterminer l'équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés puis représenter cette droite.

4) En utilisant l'équation de (D) , calculer :

a) Le nombre de guichets à ouvrir pour que le temps moyen d'attente par guichet soit de 5 minutes.

b) Le temps moyen d'attente par guichet si 15 guichets sont ouverts.

Exercice 3

L'évolution des bénéfices annuels d'une société ont été indiqués dans le tableau suivant :

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Bénéfice en millions de francs y_i	64	75	100	113	125	127

1) a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal. On prendra 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

b) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage. (Arrondir au dixième près). Placer le point G dans le repère.

Mathématiques Terminale D

- 2) On envisage de représenter le bénéfice y comme une fonction affine du rang x de l'année.
- a) Donner une équation de la droite d'ajustement (D) obtenue par la méthode des moindres carrés. (Arrondir les coefficients au centième près).
- b) Tracer cette droite (D) dans le repère.
- c) Quelle prévision ferait-il pour le bénéfice en 2005 avec cette approximation ?

Exercice 4

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du pourcentage d'arbres abattus dans une forêt de 2000 à 2008.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentage y	85	78	73	66	57	51	47	44	43

- 1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x ; y)$ dans le repère orthogonal.
- 2) Calculer $\bar{x}$, $\bar{y}$ et $\text{cov}(x, y)$.
- 3) Calculer le coefficient de corrélation. Un ajustement affine est-il fiable ? Si oui, déterminer la droite de régression de y en x et la construire.
- 4) Donner une estimation du pourcentage d'arbres abattus en 2012.

Exercice 5

Le tableau ci-dessous donne la charge maximale y_i en tonnes, qu'une grue peut lever pour une longueur x_i en mètre.

Longueur x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
Charge y_i	10	9	8	7	6	5,5	5	4,5	4	3,5	3,2

- 1) Représenter le nuage de points $(x_i ; y_i)$ dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 1 cm pour 2 m en abscisses et 1 cm pour une tonne en ordonnées.
- 2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y .
- 3) Déterminer la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Construire cette droite dans le repère précédent.
- 4) En utilisant cette équation, déterminer la charge maximale que peut lever la grue à 26 mètres.

Exercice 6

Dans une entreprise, z désigne la somme en millions des produits vendus en fonction du temps x (exprimé en mois). En posant $y = \ln(z)$, on a obtenu le tableau suivant :

Mathématiques Terminale D

	1	2	3	4	5
x_i	13,3	12,9	12,5	12,1	11,7
y_i					

- 1) Représenter dans un repère orthogonal la série $(x ; y)$ par un nuage de points.
- 2) a) Déterminer $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x , σ_y .
- b) Calculer le coefficient de corrélation du couple $(x ; y)$. Interpréter ce résultat.
- c) Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de y en x .
- d) Exprimer z en fonction de x et donner une valeur approchée de z quand x vaut 10 mois.

Exercice 7

L'évolution de la population active d'une région de 2006 à 2012 est donnée par le tableau suivant :

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Population active (en milliers) y_i	3435	3522	3604	3689	3769	3845	3923

- 1) a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal.

b) Ce nuage permet-il d'envisager un ajustement affine ?

- 2) a) Ecrire une équation de la droite (D) de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. (Les coefficients seront arrondis à l'unité).

b) Tracer cette droite (D) dans le repère.

- c) En utilisant cet ajustement, estimer la population active en l'an 2015.

Exercice 8

Le tableau suivant résume la consommation y d'une voiture en fonction de sa vitesse x pour un parcours donné :

x (km / h)	80	90	100	110	120
y (litres / 100 km)	4	4,8	6,3	8	10

- 1) a) Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ associé à cette série-statistique.

(Echelle : 2 cm pour 10 km / h en abscisse et 1 cm pour 1 litre en ordonnée).

- b) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le repère.

2) Calculer $\text{cov}(x ; y)$ puis interpréter le résultat obtenu.

- 3) a) Montrer que la droite de régression de y en x est (D) : $y = 0,152x - 8,58$.

b) Estimer la consommation au 100 km de la voiture pour une vitesse de 130 km/h.

Mathématiques Terminale D

Exercice 9

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du chiffre d'affaires réalisé à l'exploitation par une entreprise :

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L'indice du chiffre d'affaires y_i	100	101	107	122	127	139	136	157	165

- 1) a) Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ associé à la série double dans un repère orthogonal. On prendra : pour origine le point (0 ; 100) ; 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 10 points d'indice sur l'axe des ordonnées.
- b) Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série statistique et placer ce point sur le repère. (On donnera la valeur décimale arrondie au dixième de l'ordonnée de G)
- 2) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série double (arrondir au centième près). Ce résultat permet-il un ajustement affine ? Pourquoi ?
- 3) Soit (D) la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
 - a) Déterminer la valeur décimale arrondie au dixième du coefficient directeur de la droite (D).
 - b) En utilisant les coordonnées du point moyen G, donner une équation de la droite (D). Tracer cette droite sur le repère précédent.

Exercice 10

Le tableau suivant décrit le nombre moyen d'objets (y) qu'un ouvrier produit au $x^{\text{ième}}$ jour où il travaille sur une chaîne.

x_i	1	3	5	7	9
y_i	27	41	46	48	49

- 1) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points associé à la série statistique ($x_i; y_i$). On prendra 1 cm pour un jour en abscisse et 1 cm pour 5 objets en ordonnées.
- 2) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage et placer sur le repère.
- 3) a) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série ($x_i; y_i$).

Mathématiques Terminale D

- b) Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Représenter la droite (D) sur le graphique.
- c) Un ajustement affine de ce nuage de points est-il acceptable ? Justifier la réponse.

Exercice 11

Pour lancer un nouveau produit P sur le marché, une société de la place effectue un sondage auprès des éventuels clients. Dans le tableau ci-dessous : x représente le prix de vente unitaire du produit P exprimé en centaines de francs CFA ; y représente la quantité du produit P demandée en millier.

Prix de vente unitaire x_i	3	3,5	4,5	6,5	8	10
Demande y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25

- 1) a) Représenter graphiquement le nuage des points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal.

Echelle : 1 cm pour une centaine de francs CFA sur l'axe des abscisses et 2 cm pour un millier sur l'axe des ordonnées.

- b) La forme du nuage suggère-t-elle un ajustement affine ? Justifier la réponse.

- 2) On effectue le changement de variable suivant : $w_i = \ln y_i$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

- a) Recopier et compléter le tableau suivant : (les valeurs de w_i seront arrondies à 10^{-4} près)

x_i	3	3,5	4,5	6,5	8	10
w_i						

- b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i; w_i)$.

- c) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de w en x .

- d) En déduire qu'il existe deux nombres réels α et β tels que : $y = \alpha \cdot \beta^x$.

Donner les valeurs approchées de α et β à 10^{-3} près.

Déterminer une estimation de la demande y en fonction du prix x .

- e) En supposant que cette tendance est maintenue, déterminer le nombre d'unités de produit P que les consommateurs sont prêts à acheter si le prix de vente unitaire est fixé à 15 centaines de francs CFA.

Exercice 12 : BAC 2002

Le budget d'une entreprise, en fonction du temps exprimé en années, est donné millions de

Mathématiques Terminale D

francs par le tableau suivant :

Temps (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Recettes (y_i)	4	5	5	7	8	9	9	9
Dépenses (z_i)	4	5	α	8	7	8	β	9

- Représenter le nuage des points des recettes en fonction du temps.
 - Déterminer par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement des recettes par rapport au temps. Tracer cette droite.
- 2) On suppose que la moyenne des dépenses, notée $\bar{z}$, est égale à 7 et que la variance $V(z)$ vaut 3.

Déterminer α et β tel que $\alpha < \beta$.

Exercice 13 : BAC 2003

Le tableau suivant donne la répartition de cent mélanges selon les deux caractères x et y suivants :

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	Total n_j
1	6	2	1	0	0	9
2	5	12	8	1	1	27
3	2	7	15	11	3	38
4	0	1	8	14	3	26
Total n_i	13	22	32	26	7	100

On donne :

$$\sum_{j=1}^4 n_j x_j = 281 ; \quad \sum_{j=1}^4 n_j x_j^2 = 875 ; \quad \sum_{i=0}^4 n_i y_i = 192 ; \quad \sum_{i=0}^4 n_i y_i^2 = 496$$

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^4 n_{ij} x_j y_i = 604$$

- Calculer pour la série x (en tenant compte des effectifs n_j pour la valeur de x) la moyenne arithmétique $\bar{x}$ et l'écart type σ_x .
 - Calculer pour la série y (en tenant compte des effectifs n_i pour la valeur de y) la moyenne arithmétique $\bar{y}$ et l'écart type σ_y .
- 2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
- Existe-t-il une liaison entre les deux variables x et y ? Justifier la réponse.

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^3 - 3\sqrt{3}iz^2 - (9 - 3\sqrt{3}i)z + 8 = 0$ (E).

1) Montrer que (E) possède une solution réelle z_1 que l'on déterminera.

2) Résoudre (E).

3) Ecrire les trois solutions z_1, z_2, z_3 sous forme trigonométrique, (avec $|z_2| < |z_3|$).

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les trois points M_1 d'affixe z_1 , M_2 d'affixe z_2 et M_3 d'affixe z_3 .

Soit S la similitude plane directe transformant M_1 en M_2 et M_2 en M_3 . Préciser les éléments caractéristiques de S .

Exercice 2

On considère l'équation différentielle : $y'' + 4y = 3\sin(x)$. (1)

1) Déterminer le réel α pour que la fonction g définie par $g(x) = \alpha\sin(x)$ soit une solution de (1).

2) a) Démontrer qu'une fonction f , deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$. (2)

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d) Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'(\pi) = 0$.

Problème

A) On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = |x + 1| + \frac{1}{x-1}$.

1) Donner l'ensemble de définition de f et écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

2) Etudier les limites aux bornes du domaine de définition de f .

3) Etudier la dérivabilité de f en -1 .

4) Etudier la variation de f et dresser son tableau de variation.

5) Montrer que la courbe représentative (C) de f admet trois asymptotes dont on donnera les équations.

6) Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité : 2cm).

7) Montrer que la restriction de f à $[0 ; 1[$ est une bijection de $[0 ; 1[$ sur un intervalle J que

Mathématiques Terminale D

l'on précisera. Tracer la courbe représentative de la réciproque dans le même graphique que (C).

8) a) Calculer les intégrales : $S_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} f(x)dx$ et $S_2 = \int_{-1}^0 f(x)dx$.

b) En déduire l'aire de la portion du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\sqrt{2}$ et $x = 0$.

B) a) A toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement supérieurs à 1, on associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

Sachant que (v_n) est une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$) et de premier terme $v_1 = 0$, donner l'expression du terme général u_n en fonction de n et de r .

b) Comment choisir le réel r pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit convergente ? Dans ce cas donner la limite.

c) Calculer, en fonction de u_n , l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) de f , les droites d'équations $y = x + 1$, $x = 2$ et $x = u_n$.

Session 2011

Exercice 1

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{6+u_n}{2+u_n}$.

1) Montrer par récurrence que tous les termes de cette suite sont strictement positifs.

2) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \frac{-2+u_n}{3+u_n}$.

a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Donner l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2

Une urne contient trois boules blanches, trois boules rouges et trois boules noires.

On prélève simultanément trois boules de l'urne.

Les prélèvements sont supposés équiprobables.

1) Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore, c'est-à-dire composé d'une seule couleur.

2) Calculer la probabilité d'un prélèvement tricolore, c'est-à-dire composé de trois couleurs.

3) Déduire des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement bicolore c'est-à-dire composé de deux couleurs.

Mathématiques Terminale D

4) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore.

Problème

A) On considère l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = x - 1$ (1)

1) Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit une solution de l'équation différentielle (1).

2) a) Démontrer qu'une fonction h , deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. (2)

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d) Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$.

B) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité : 1cm.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 - e^x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C).

3) Tracer (D) et (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) a) Soit α un réel strictement négatif.

Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

b) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha)$.

5) a) Montrer que la restriction de f à $[0 ; +\infty[$ est une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe représentative de la réciproque sur le même graphique que (C).

C) Soit m un réel et la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = m(x + 1) - e^x$.

On note Γ_m la courbe représentative de f_m .

1) Trouver l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m admet un maximum.

2) Soit le point M_m d'ordonnée maximale de Γ_m .

Donner une équation de l'ensemble des points M_m .

Session 2012

Exercice 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la

Mathématiques Terminale D

transformation ponctuelle F , qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = m^3 z + m(m+1)$, $m \in \mathbb{C}^*$.

- 1) Donner la nature de la transformation F .
- 2) On suppose que $m = 1 + i$. Donner dans ce cas, les éléments géométriques de F .
- 3) Déterminer l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une translation.
- 4) Déterminer l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une homothétie de rapport 8.

Exercice 2

- 1) Linéariser l'expression $f(x) = \sin^3 x \cos x$.
- 2) Chercher une primitive de $f(x) - \frac{1}{4} \sin 2x$.

Problème

A) On considère l'équation différentielle : $y'' + y' - 2y = -3e^x$. (1)

1) Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^x$ soit une solution de l'équation différentielle (1).

2) a) Démontrer qu'une fonction h , deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 0$. (2)

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d) Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$.

B) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 1 cm).

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)e^x$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x = -1$.

3) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) a) Soit α un réel supérieur à 1.

Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

b) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

5) a) Montrer que la restriction de f à $] -\infty ; 0]$ est une bijection de $] -\infty ; 0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe représentative de la réciproque sur le même graphique que (C).

Mathématiques Terminale D

- 6) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel m , le nombre de points d'intersection de (C) avec la droite (Δ_m) d'équation $y = m$.

Session 2013

Exercice 1

- 1) Trouver les racines carrées du nombre complexe $5 - 12i$.

- 2) Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation :

$$(z + 2i)(z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i) = 0.$$

- 3) Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives : $2i$, $2 - i$ et $-1 - 3i$.

Soit S la similitude plane directe de laissant le point B invariant et transformant A en C.

- a) Trouver la relation liant l'affixe z du point M et l'affixe z' de son image M' par S .

- b) Déterminer les éléments caractéristiques de S .

Exercice 2

On considère la suite numérique définie par son premier terme $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 3}.$$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .

- 2) Soit la suite (v_n) la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_n + 2}\right)$.

- a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

- b) Exprimer v_n , puis de u_n en fonction de n .

Problème

- A) On considère l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = -x + 3$. (1)

- 1) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (1).

- 2) a) Démontrer qu'une fonction h , deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. (2)

- b) Résoudre l'équation différentielle (2).

- c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

- d) Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions $h(0) = 0$ et $h'(0) = -1$.

- B) On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^x - 1$.

- 1) Étudier les variations de u et dresser son tableau de variation.

- 2) a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α .

Mathématiques Terminale D

b) Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.

c) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x .

C) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 2cm)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)(e^x - 1)$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout réel x , $f'(x) = u(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

2) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

b) Préciser les positions relatives de (C) et (D) .

3) Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\alpha = 0,55$).

4) Soit λ un réel strictement négatif.

a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.

b) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

5) a) Montrer que la restriction de f à $] -\infty ; 0]$ est une bijection de $] -\infty ; 0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C) .

Session 2014

Exercice 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 + (-7 + 2i)z^2 + (15 - 4i)z - 25 + 10i.$$

1) a) Vérifier que $P(5 - 2i) = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

2) Soit S la similitude plane directe de centre I d'affixe $z_I = -3 - 2i$ et qui transforme le point A d'affixe $z_A = 1 + 2i$ en B d'affixe $z_B = 5 - 2i$.

a) Déterminer f , l'application complexe associée à S .

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S .

Exercice 2

On considère la suite réelle (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$.

On considère la suite réelle (v_n) définie par : $v_n = \ln(u_n + 1)$.

1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Mathématiques Terminale D

- 2) Exprimer v_n , puis de u_n en fonction de n .
- 3) Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n .

Problème

A) On considère l'équation différentielle : $y'' - y' = e^x$. (1)
1) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$ est une solution de l'équation différentielle (1).

2) a) Démontrer qu'une fonction h , deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$. (2)

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d) Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions $h(0) = -4$ et $h'(0) = 1$.

B) On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^x - 4$.

1) Étudier les variations de u et dresser son tableau de variation.

2) a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α .

b) Vérifier que $1,2 < \alpha < 1,3$.

c) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x .

C) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 1 cm).

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - 4\ln(x)$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{u(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

2) Tracer le (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\alpha = 1,25$).

3) Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$.

a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[2; +\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de $[2; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de g dans le même graphique que (C) .

5) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, où m est un paramètre réel.

Session 2015

Exercice 1

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^4 + 4iz^2 + 12 = 0$.

Mathématiques Terminale D

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $1 + i$ et $\sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

Soit S la similitude de centre O qui transforme A en B.

- Déterminer les éléments caractéristiques de S.
- Soit (D) la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Déterminer une équation de la droite (D') image de la droite (D) par S.

Exercice 2

Une urne contient quatre boules roses, trois boules vertes et deux boules jaunes indiscernables. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1) Déterminer la probabilité d'obtenir :

- les trois couleurs.
- les deux boules jaunes.
- au moins une boule jaune.

2) Soit X la variable aléatoire qui à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules jaunes tirées.

- Déterminer la loi de probabilité de X.
- Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.
- Définir la fonction de répartition de X.

Problème

A) On considère l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 2e^{x+1}$. (1)

1) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 e^{x+1}$ est une solution de l'équation différentielle (1).

2) a) Démontrer qu'une fonction h, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. (2)

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d) Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions $h(0) = e$ et $h'(0) = -e$.

B) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 1cm).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer la dérivée f' de f et dresser le tableau de variation de f.

2) Tracer le (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

Mathématiques Terminale D

$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{x+1}$ soit une primitive de f .

- 4) Soit λ un réel strictement négatif.
- a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.
- b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $-\infty$.
- 5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.
- a) Montrer que g est une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- b) Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de g dans le même graphique que (C).
- 5) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$, où m est un paramètre réel non nul.

Session 2016

Même sujet que BAC 2012-

Session 2017

Exercice 1

On considère l'équation (E) : $z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0$.

- 1) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 .
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
- 3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = 2i$ et $z_C = 6 - 2i$.
- a) Placer les points A, B, C dans le plan complexe.
- b) Montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un réel. Que peut-on en déduire ?
- c) Soit S la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ transformant A en B. Donner l'écriture complexe de S et préciser son centre Ω .

Exercice 2

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

- 1) Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
- 2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$.

Montrer que la suite (v_n) vérifie pour tout entier naturel n : $v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$.

- 3) On définit les suites (x_n) et (y_n) par $x_n = v_{n+1} - v_n$ et $y_n = v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$.

- a) Montrer que (x_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.
- b) Montrer que (y_n) est une suite constante.

Mathématiques Terminale D

c) Vérifie que $v_n = \frac{2}{3}(y_n - x_n)$ puis en déduire l'expression de v_n en fonction de n .

4) a) Montrer que $u_n = \left[e^{\frac{2}{3} \ln 2} \right]^{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

b) En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.

Problème

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + \ln x$.

1) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur $]0; +\infty[$.

b) Montrer que $0,548 < \alpha < 0,549$.

3) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{1 + \ln x}{2x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ayant comme unité graphique 4 cm.

1) a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est asymptote à (C) . Etudier la position de (C) par rapport à l'asymptote (D) .

2) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) a) Montrer que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha}$.

b) Donner alors un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

4) a) Calculer les coordonnées du point C où la tangente est parallèle à (D) . Donner une équation de cette tangente (T) .

b) Tracer (C) , (D) et (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Soit λ un réel supérieur à $\frac{1}{e}$.

Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C) , (D) et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = \lambda$. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Session 2018

Exercice 1

1) Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$, où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Mathématiques Terminale D

a) Résoudre l'équation (E).

b) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

2) Calculer la valeur moyenne de f sur $[0; 1]$.

3) Déterminer en fonction de n la valeur moyenne de f sur $[n; n+1]$.

4) Soit u_n la suite définie par $u_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n}$ pour tout entier $n \geq 0$.

a) Calculer la valeur de u_0 , u_1 et u_2 .

b) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Déterminer la valeur exacte de la somme :

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9.$$

Exercice 2

Le tableau ci-dessous rend compte de l'évolution de la population d'un village de 1995 à 2001.

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Nombre d'habitants y_i	3000	2545	2165	1840	1566	1332	1135

Le maire du village se demande quelle sera la population du village en 2005.

1) Dessiner le nuage des points $M_i(x_i; y_i)$ ainsi que la droite des moindres carrés.

2) Quel constat faites-vous par rapport à la question du maire ?

3) En fait, on peut penser à un ajustement par une courbe d'équation $y = ab^x$ avec $0 < b < 1$ et $a > 0$. On peut déduire $\ln y = x \ln b + \ln a$, d'où l'idée de prendre $z = \ln y$.

a) Compléter le tableau suivant

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$	8,01						

b) Donner une équation de moindres carrés pour la série $(x_i; z_i)$.

c) Déduisez-en a et b tels que $y = ab^x$.

d) Estimer la population du village en 2005.

Problème

1) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1; 0[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$.

a) Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-1; 0[$.

b) Calculer la dérivée f' de f et étudier son signe. Déduisez-en le sens de variation de f .

Mathématiques Terminale D

- c) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $] -1 ; 0[$.
- d) Montrer que la fonction f admet un maximum sur $] -1 ; 0[$, et déduisez - en le signe de $f(x)$ sur cet intervalle.
- e) Dessiner la courbe C_f représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 4 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).
- 2) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
- Déduisez - en sur l'intervalle $] -1 ; 0[$, la primitive F , s'annulant pour $x = -\frac{1}{2}$ de la fonction f .
- 3) On considère la fonction g définie sur $] -1 ; 0[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{-x}{x+1}\right)$.
- a) Etudier les limites de g aux bornes de l'intervalle $] -1 ; 0[$.
- b) Vérifier que, pour tout x de $] -1 ; 0[$, on a : $g'(x) = f(x)$.
- Déduisez - en les variations de g sur $] -1 ; 0[$.
- c) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $] -1 ; 0[$.

Session 2019

Exercice 1

Une grave maladie affecte le cheptel bovin d'un certain pays. On estime que 7% des bovins sont atteints. On vient de mettre au point un test pour diagnostiquer la maladie et on a établi que :

- Quand le test est positif, l'animal est malade dans 95% des cas.
- Quand le test est négatif, l'animal est cependant malade dans 2% des cas.

On note M l'évènement « être malade » et T l'évènement « avoir un test positif ». On note $p(T) = x$.

- 1) Faire un arbre pondéré qui traduit cette situation.
- 2) a) Montrer que $p(M) = 0,02 + 0,93x$.
b) En déduire la valeur exacte de x .
- 3) Un animal est atteint par la maladie. Quelle est la probabilité que son test ait été négatif ?

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^3 - (4 + i\sqrt{3})Z^2 + (3 + 4i\sqrt{3})Z - 3i\sqrt{3} = 0$.

- 1) Montrer que cette équation admet deux solutions réelles (on les notera α et β avec $\alpha < \beta$) et une solution imaginaire pure notée ω .
- 2) Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout nombre complexe z , $f(z) = az + b$

Mathématiques Terminale D

où a et b sont des complexes.

a) Déterminer a et b de telle sorte que $f(\omega) = \omega$ et $f(\alpha) = \beta$.

b) Calculer le module et l'argument de a .

c) Caractériser la transformation T du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .

Problème

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

Partie A

On définit la fonction f sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1)$.

1) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2) Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

Soit C la courbe représentative de f dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et A le point de C d'abscisse 3.

Soit B le point de C d'abscisse $\frac{5}{4}$, P le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O, \vec{u})$ et H le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O, \vec{v})$.

3) a) Calculer l'ordonnée de A .

b) Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des B , P et H .

c) Placer les points A , B , P et H et représenter la courbe C .

Partie B

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. À tout point M du plan d'affixe z la rotation associe le point M' d'affixe z' .

1) a) Donner z' en fonction de z .

On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x', y' réels).

b) Exprimer x' et y' en fonction de x et y , puis x et y en fonction de x' et y' .

c) Déterminer les coordonnées des points A' , B' et P' images respectives des points A , B et P par la rotation.

2) On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$ et Γ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Montrer que lorsqu'un point M appartient à C , son image M' décrit Γ .

b) Placer sur le même graphique les points A' , B' , P' et tracer la courbe Γ (l'étude des variations de g n'est pas demandée).

Partie C : Calcul d'intégrales

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de

Mathématiques Terminale D

même aire.

- 1) a) Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} g(x)dx$ puis interpréter graphiquement cette intégrale.
- b) Déterminer, en unité d'aires, l'aire A du domaine plan D limité par les segments $[AO]$, $[OH]$ et $[HB]$ et l'arc de C d'extrémité B et A .
- 2) On pose $I = \int_{\frac{3}{4}}^3 \ln(\sqrt{1+x} - 1)dx$.

Trouver une relation entre A et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

Session 2020

Exercice 1

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + 2Z + 10 = 0$.
- 2) Déterminer les nombres complexes u et v tels que :
$$\begin{cases} -2u + v = 1 + 13i \\ -u + v = 4 + 8i \end{cases}$$
- 3) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -1 + 3i$, $z_B = -1 - 3i$, $z_C = 3 - 5i$ et $z_D = 7 + 3i$
- a) Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (unité : 1 cm)
- b) Démontrer que le triangle (BAD) est rectangle en A , et que le triangle (BCD) est rectangle en C .
- c) En déduire que les quatre points A, B, C et D sont sur un même cercle (Γ) dont on précisera le centre I et le rayon. Tracer (Γ) sur la figure.
- 4) Démontrer que les points C' et D' , images respectives des nombres conjugués de z_C et z_D sont sur le cercle (Γ) .

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

- 1) Démontrer par récurrence que $u_n - 1 > 0$.
- 2) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
- a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.
- b) Pour tout nombre entier naturel n , exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Problème

Soit la f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$.

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Mathématiques Terminale D

(unité graphique 1 cm).

Partie A

- 1) a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. En déduire que C admet une asymptote. Préciser la position de C par rapport à l'asymptote au voisinage de $-\infty$.
- b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- 2) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation. On calculera les valeurs exactes des extremums.
- 3) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C avec les axes de coordonnées.
- 4) Soit T la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0. Déterminer le coefficient directeur de T.
- 5) Construire T et C.

Partie B

- 1) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 2e^x$.
- 2) Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = 2e^x + 2f(x) - f'(x)$.
- a) Démontrer que F est une primitive de f . Calculer $F(x)$.
- b) En déduire l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan ensemble des points $M(x; y)$ tels que :
$$\begin{cases} \alpha \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad (\alpha \text{ est un réel négatif.})$$

Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

1^{er} groupe

Exercice 1

Ali souhaite épargner de l'argent pour les études à l'université de son fils qui est en classe de troisième cette année. Son ami banquier lui conseille d'ouvrir un compte d'épargne dans sa banque et y déposer le 1^{er} de chaque mois une somme de 10 000F. La banque lui verse à la fin de chaque mois 8% d'intérêt immédiatement capitalisé. Il ouvre alors un compte en faisant un dépôt initial de 100 000F le 1^{er} janvier 2020. On note u_n l'argent disponible dans son compte au bout de n mois le 1^{er} jour du mois.

- 1) Déterminer le montant dans le compte d'Ali au 1^{er} février 2020, puis au 1^{er} mars 2020.
- 2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- 3) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = 125\,000 + u_n$.
- a) Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.

Mathématiques Terminale D

- b) Exprimer v_n en fonction de n , puis en déduire u_n en fonction de n .
- c) Quel sera le montant dans le compte d'Ali au 1^{er} août 2023 année prévue de l'obtention du bac de son fils.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x - 2}$ où a et b sont des réels.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Déterminer les valeurs des réels a et b pour que :
 - i) La courbe de f passe par l'origine,
 - ii) La tangente à la courbe de f à l'origine a pour coefficient directeur 1.
- 3) On donne $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$
 - a) Etudier le sens de variation de f .
 - b) Justifier que pour tout x élément de D_f , $f(x) = \frac{e^{-x}-1}{1-2e^{-x}}$
 - c) Calculer les limites aux bornes de D_f .
 - d) Donner les asymptotes de C_f puis tracer dans un repère orthonormé la courbe f .
 - e) Calculer l'aire A du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 0,5$.