

Formules

- Coût total, $C_T(x)$ = coûts variables + coûts fixes
- Coût marginal, noté $C_m(x) = C_T'(x)$
- Coût moyen, noté $C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}$
- Recette, noté $R(x) = \text{Prix} * \text{quantité}(x)$
- Bénéfice, noté $B(x) = R(x) - C_T(x)$
- Pour déterminer la quantité optimale à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice :
 - 1) Calcule $B(x) = R(x) - C_T(x)$
 - 2) Calcule $B'(x)$
 - 3) On pose $B'(x) = 0$
 - 4) Puis, on établit le tableau de signe après le tableau de variation.

Exercice 1

Une entreprise produit un certain nombre x de crayons de couleur par jour où : (x exprimé en millier).

Lorsque la quantité x est comprise entre 3 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euro est donné par : $C(x) = x^3 - 48x + 600$.

L'entreprise vend chaque millier de crayons à 99 euros.

- 1) En supposant que toute la production du jour est vendue, déterminer la recette journalière en fonction de x que l'on notera $R(x)$.
- 2) Montrer que la bénéfice $B(x)$, exprimé $B(x)$, exprimé en euro, est donné par :
 $B(x) = -x^3 + 147x - 600$ avec $[3; 10]$.
- 3) Etudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[3; 10]$. Dresser le tableau de variation de la fonction B .
- 4) En déduire le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ?

Exercice 2

Dans un champ, un producteur de pastèque cultive, ramasse et conditionne de 1 à 45 kg de pastèque par semaine durant la période de production de la pastèque. Chaque kilo de pastèque est vendu à 950 F CFA.

On désigne par $f(x)$ le coût moyen, en euro par kg, pour x kg de pastèque traités en une semaine.

On estime que la fonction f est définie sur $[1; 45]$ par : $f(x) = x^2 - 60x + 1\,250$.

- 1) Justifier que le coût de production totale $C(x)$ pour x kg de pastèque est donné, en F CFA, par :
 $C(x) = x^3 - 60x^2 + 1\,250x$.
- 2) Exprimer le bénéfice $B(x)$, en euro, réaliser par ce producteur pour x kg de pastèque conditionnés et vendus.
- 3)
 - a) Calculer $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de B sur $[1; 45]$.

- b) Pour quelles quantités de pastèque de bénéfice du producteur est-il maximal ? Arrondir le résultat à 100 g près. Quel est alors ce bénéfice maximal, à 100 F CFA près ?

Exercice 3

Une entreprise fabrique une quantité x d'un produit, exprimée en milliers de tonnes, dont le coût marginal C est défini sur $[0; 10]$ par : $C(x) = \frac{x^2+x+4}{x+1}$.

Le but du problème est d'étudier le coût total C_T et le coût moyen C_m de la production, puis de minimiser le coût moyen. Les coûts sont exprimés en milliers de francs.

Partie A : Etude de la fonction C_T

- 1) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x de $[0; 10]$; $C(x) = ax + \frac{b}{x+1}$
- 2) La fonction C_T est la primitive de C qui s'annule pour $x = 0$. Déterminer C_T .

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire f .

On considère la fonction f définie sur $[0; 10]$; $C(x) = x^2 + \frac{8x}{x+1} - 8 \ln(x+1)$

- 1) Montrer que $\forall x \in [0; 10]$ la dérivée f' de f est donnée par $f'(x) = \frac{2x(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.
- 2) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 10]$. On admettra que la fonction f s'annule pour $\alpha = 1,712$.
- 3) Etudier le signe de f sur $[0; 10]$.

Partie C : Etude du coût moyen C_m .

La fonction C_m est définie sur $]0; 10[$ par $C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{x}{2} + 4 \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right)$.

- 1) Calculer la dérivée C'_m puis vérifier que $C'_m(x) = \frac{f(x)}{2x^2}$ où f est la fonction auxiliaire introduite dans la **Partie B**.
- 2) Etudier le sens de variation de C_m sur $]0; 10[$.
- 3) Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum et quel est ce coût ?

Exercice 4

Une entreprise produit et vend un modèle de pièce pour automobiles. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 6]$ par : $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8 \ln x$

$f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaine de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1; 6]$. On note f' sa fonction dérivée.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

- 1)
 - a) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1; 6]$, $f'(x) = \frac{-2(x-1)(x-4)}{x}$.

- b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1; 6]$.
 - c) En déduire le tableau de variation sur l'intervalle $[1; 6]$.
 - d) Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.
- 2)
- a) Prouver que la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b) En déduire une primitive de la fonction F de la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 6]$.
- 3) Calculer la valeur de la moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1; 6]$.

Exercice 3 [Bac 2014 TSECO 5 points]

Le but de cet exercice est de déterminer le bénéfice maximum réalisable pour la vente d'un produit « alpha » fabriqué par une entreprise. Toute l'étude porte sur un mois complet de production.

Le coût marginal de fabrication du produit « alpha » par l'entreprise est modélisé par la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1; 20]$ par : $C_m(q) = 4(0,2q^2 - 2q)e^{-0,2q}$

q étant la quantité exprimée en tonnes et $C_m(q)$ son coût exprimé en milliers de francs CFA.

1-/ La fonction coût total est modélisée par la fonction C_T définie sur l'intervalle $[1; 20]$ par : $C_T(q) = 4q - q^2e^{-0,2q}$. Vérifier que cette fonction C_T est une primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[1; 20]$. (1 pt)

2-/ La fonction coût moyen, notée C_M est la fonction définie sur l'intervalle $[1; 20]$ par :

$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}$$

a-/ Vérifier que $C_M(q) = 4 - qe^{-0,2q}$ (0,5 pt)

b-/ Déterminer la fonction dérivée C'_M de la fonction C_M (1 pt)

c-/ Pour quelle production mensuelle q_0 (exprimée en tonne) l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal ? (1 pt)

Quel est ce coût ? Pour cette production q_0 , quelle est la valeur du coût marginal ? (1,5 pt)

Corrigé : Bac 2014 [TSECO]

Le coût marginal de fabrication du produit « alpha » par l'entreprise est modélisé par la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1; 20]$ par : $C_m(q) = 4 + (0,2q^2 - 2q)e^{-0,2q}$

q étant la quantité exprimée en tonnes et $C_m(q)$ son coût exprimé en milliers de francs CFA.

1) La fonction coût total est modélisée par la fonction C_T définie sur l'intervalle

$$[1; 20] \text{ par : } C_T(q) = 4q - q^2e^{-0,2q}.$$

Vérifions que C_T est une primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[1; 20]$.

$$C_m(q) = 4 + (0,2q^2 - 2q)e^{-0,2q}$$

$C_T(q)$ est une primitive de $C_m(q)$ si et seulement $C'_T(q) = C_m(q)$

$$U = -q^2$$

$$U' = -2q$$

$$V = e^{-0,2q}$$

$$V' = -0,2e^{-0,2q}$$

$$C'_{T(q)} = 4 + (0,2q^2 - 2q)e^{-0,2q}$$

$$C'_{T(q)} = C_{m(q)} = 4 + (0,2q^2 - 2q)e^{-0,2q}$$

Donc $C_{T(q)}$ est une primitive de $C_{m(q)}$.

- 2) La fonction coût moyen, notée C_M est la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par :

$$C_M(q) = \frac{C_{T(q)}}{q}$$

- a) Vérifions que $C_{M(q)} = 4 - qe^{-0,2q}$

$$C_{M(q)} = \frac{4q - q^2e^{-0,2q}}{q} = \frac{q(4 - qe^{-0,2q})}{q} = 4 - qe^{-0,2q}$$

$$\Rightarrow C_{M(q)} = 4 - qe^{-0,2q}$$

- b) Déterminons la fonction dérivée C'_M de la fonction C_M

$$C'_M(q) = -e^{-0,2q} + 0,2qe^{-0,2q} = (0,2q - 1)e^{-0,2q}$$

$$\Rightarrow C'_M(q) = (0,2q - 1)e^{-0,2q}$$

- c) Déterminons la production mensuelle q_0 (exprimée en tonne) l'entreprise à un coût moyen minimal.

$$e^{-0,2q} > 0 \text{ alors le signe de } C'_M(q) \text{ dépend du signe de } 0,2q - 1$$

$$\text{Posons } 0,2q - 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{0,2} = 5$$

Le tableau de signe de C_M

q	1	5	20
C_M		-	+

D'après le tableau ci-dessus, C_M admet un minimum en $q = 5$, donc $q_0 = 5$

Déterminons ce coût, le coût moyen minimal correspond à :

$$C_M(5) = 4 - 5e^{-0,2(5)} = 2,1606, \text{ soit environ } 2\,160,6 \text{ Francs CFA.}$$

Le coût marginal

$$C_{m(5)} = 4 + (0,2 * 5^2 - 2 * 5)e^{-0,2(5)} = 2,1606 = 2,1606 * 1000 = 2\,160,6$$

Soit environ 2 160,6 Francs CFA.

Exercice 4 [Bac 2016 8 points]

On suppose d'étudier les effets du volume de la récolte mondiale d'un produit agricole sur les prix atteints par ce produit. Par la suite, x désigne la quantité récoltée en millions de tonnes. La recette totale en milliers de francs CFA est donnée par la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $R(x) = -0,4x^2 + 8x$.

- 1) Etudiez la fonction R et la représenter graphiquement (2 pts)
- 2) L'ensemble des charges totales (entraînées par la récolte) est donné par la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 25 + x$.
 - a) Déterminez les points d'intersection de cette droite avec la parabole précédente représentant la recette totale. (1 pt)
 - b) Déterminez graphiquement la zone correspondant à un gain. (2 pts)
- 3) Déterminez la fonction bénéfice B et la représenter graphiquement. (3 pts)
 Déterminez la valeur de x pour laquelle le bénéfice atteint son maximum. (3 pts)

Problème [Bac 2014 : Sujet de remplacement 10 points]**Partie A**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{10e^x}{e^x+4}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

- 1)
 - a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
En écrivant $f(x) = 10 - \frac{40}{e^x+4}$; déterminer la limite de f en $+\infty$ puis en déduire l'équation des asymptotes à la courbe (C) .
 - b) Calculer la dérivée f' de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f .
- 2) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $\ln 4$.
- 3) Tracer sur un même graphique la courbe (C) ; Ces asymptotes et la tangente (T) .

Partie B :

Une entreprise fabrique un certain produit P. On appelle x le nombre de tonnes de produit fabriquées. +

On note $C(x)$ leur coût global de fabrication, exprimée en milliers d'euros.

La fonction coût marginal, C' est la dérivée de la fonction C .

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $C'(x) = f(x)$; où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

De plus, on suppose qu'il n'y a pas de charges fixes, donc que $C(0) = 0$.

- 1)
 - a) Montrer que le coût total est donné par $C(x) = \int_0^x f(t)dt$.
 - b) Exprimer $C(x)$ en fonction de x .
 - c) Qu'elle est le coût total de 5 tonnes de ce produit P ? On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la dizaine d'euros près.
- 2) On appelle $C_m(x)$, le coût moyen défini, pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$
 - a) Exprimer $C_m(x)$, en fonction de x .
 - b) Vérifier que, pour tout $x \in [0; +\infty[$; $C_m(x) = 10 + \frac{10 \ln(1+4e^{-x})}{x} - \frac{10 \ln 5}{x}$
 - c) En déduire la limite de $C_m(x)$ en $+\infty$.

Corrigé : Problème du BAC 2014 : Sujet de remplacement**Partie A :**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{10e^x}{e^x+4}$.

- 1)
 - a) Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10e^x}{e^x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10(0)}{0+4} = 0$$

En écrivant $f(x) = 10 - \frac{40}{e^x+4}$; déterminons la limite de f en $+\infty$ puis en déduisons l'équation des asymptotes à la courbe (C) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 - \frac{40}{e^x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 - \frac{40}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 - \frac{40}{0} = 10 - 0 = 10$$

En déduisons l'équation des asymptotes à la courbe (C)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $-\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 10$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$.

b) Calculons la dérivée f' de la fonction f puis dressons le tableau de variation de f .

$f(x)$ est une fonction rationnelle de forme $\frac{u}{v}$ donc sa dérivée $f'(x) = \frac{u'v - vu'}{v^2}$ avec $u = 10e^x$ et $v = e^x + 4$ on a donc : $u' = 10e^x$ et $v' = e^x$

$$f'(x) = \frac{10e^x(e^x+4) - e^x(10e^x)}{(e^x+4)^2} = \frac{10e^x(e^x+4 - e^x)}{(e^x+4)^2} = \frac{40e^x}{(e^x+4)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{40e^x}{(e^x+4)^2}$$

Dressons le tableau de variation

$$f'(x) = \frac{40e^x}{(e^x+4)^2} > 0, \text{ d'où } \forall x \in D_f; f(x) \text{ est strictement croissante}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	10

2) Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $\ln 4$.

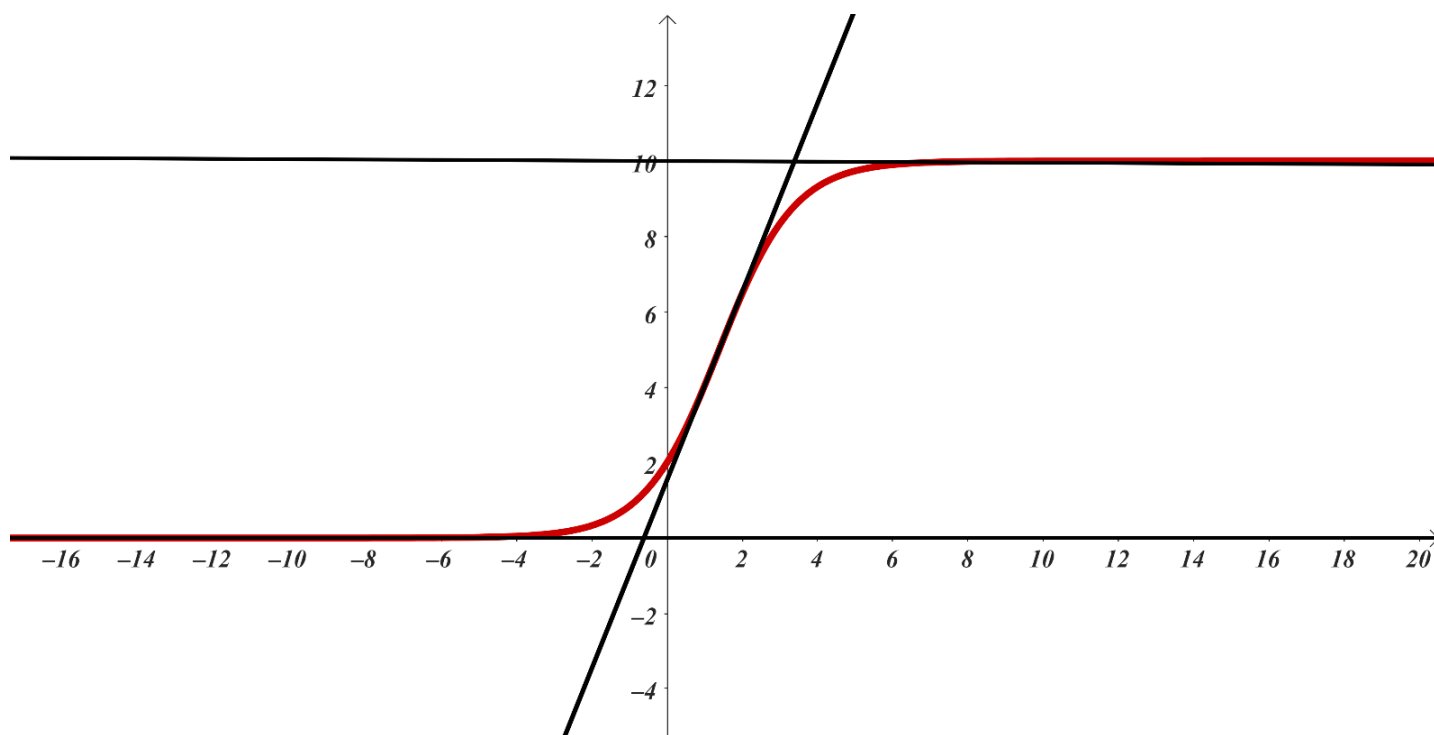
$$T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f'(\ln 4)(x - \ln 4) + f(\ln 4)$$

$$f(\ln 4) = \frac{10e^{\ln 4}}{e^{\ln 4}+4} = \frac{10 \cdot 4}{4+4} = \frac{40}{8} = 5 \text{ et } f'(\ln 4) = \frac{40e^{\ln 4}}{(e^{\ln 4}+4)^2} = \frac{160}{64} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\text{D'où } y = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}\ln 4 + \frac{7}{4} = \frac{5}{2}(x - \ln 4) + 5$$

$$T: y = \frac{5}{2}(x - \ln 4) + 5$$

3) Traçons sur un même graphique la courbe (C) ; Ces asymptotes et la tangente (T).



Partie B :

Une entreprise fabrique un certain produit P. On appelle x le nombre de tonnes de produit fabriquées. +

On note $C(x)$ leur coût global de fabrication, exprimée en milliers d'euros.

La fonction coût marginal, C' est la dérivée de la fonction C .

Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, on a $C'(x) = f(x)$; où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

1)

a) Montrons que le coût total est donné par $C(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, on a $C'(x) = f(x)$. Intégrons cette égalité sur $[0 ; +\infty[$;

alors on a : $\int_0^x c'(x)dt = \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow [C(x)]_0^x = \int_0^x f(t)dt$

$\Leftrightarrow C(x) - C(0) = \int_0^x f(t)dt$

b) Exprimons $C(x)$ en fonction de x .

Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, on a $C'(x) = f(x)$. Intégrons cette égalité sur $[0 ; +\infty[$;

alors on a : $\int_0^x c'(x)dt = \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow C(x) = \int_0^x \frac{10e^t}{e^t+4} dt = 10 \int_0^x \frac{e^t}{e^t+4} dt$

$= 10[\ln(e^t + 4)]_0^x = 10[(\ln(e^x + 4)) - (\ln(e^0 + 4))]$

$= 10[\ln(e^x + 4)) - (\ln(1 + 4))] = 10[\ln(e^x + 4) - \ln 5] = 10 \ln\left(\frac{e^x+4}{5}\right)$

D'où on a : $C(x) = 10 \ln\left(\frac{e^x+4}{5}\right)$.

c) Déterminons le coût total de 5 tonnes de ce produit P.

le coût total de 5 tonnes du produit P est donné par : $C(5) = 10 \ln\left(\frac{e^5+4}{5}\right) = 34,17$ euros

2) On appelle $C_m(x)$, le coût moyen défini, pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$

a) Exprimons $C_m(x)$, en fonction de x .

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10 \ln\left(\frac{e^x+4}{5}\right)}{x} = \frac{10}{x} \left(\ln\left(\frac{e^x+4}{5}\right) \right) \Rightarrow C_m(x) = \frac{10}{x} \left(\ln\left(\frac{e^x+4}{5}\right) \right)$$

b) Vérifions que, pour tout $x \in [0; +\infty[$; $C_m(x) = 10 + \frac{10 \ln(1+4e^{-x})}{x} - \frac{10 \ln 5}{x}$

$$\begin{aligned} C_m(x) &= \frac{10 \ln\left(\frac{e^x+4}{5}\right)}{x} = \frac{10 \ln(e^x+4) - 10 \ln 5}{x} = \frac{10 \ln(e^x(1+\frac{4}{e^x})) - 10 \ln 5}{x} \\ &= \frac{10 \ln e^x + 10 \ln(1+4e^{-x}) - 10 \ln 5}{x} = \frac{10x + 10 \ln(1+4e^{-x}) - 10 \ln 5}{x} \\ &\Rightarrow C(x) = 10 + \frac{10 \ln(1+4e^{-x}) - 10 \ln 5}{x} \end{aligned}$$

c) En déduisons la limite de $C_m(x)$ en $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 + \frac{10 \ln(1+4e^{-x}) - 10 \ln 5}{x} = 10 + \frac{10 \ln 1 - 10 \ln 5}{+\infty} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = 10 + 0 = 10 \end{aligned}$$

Exercice 3 [Bac 2015 TSECO 8 points]

A-//

on considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (2x + 10)e^{-0,5x+1}$

1) On not f' sa fonction dérivée.

a) Justifier que pour tout x de $[0; +\infty[$: $f(x) = (-x - 3)e^{-0,5x+1}$

b) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$

2) Justifier que la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = (-4x - 28)e^{-0,5x+1}$ est une primitive de f sur le même intervalle.

3) Calculer l'intégrale $I = \int_4^6 f(x)dx$ (on donnera la valeur arrondie à 0,01 près).

B-//

La demande de produits à base du beurre de karité fabriqués par une association féminine est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie A-//. Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers de produits, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines de francs CFA.

1)

a) Calculer le nombre de produits demandés, à l'unité près lorsque le prix unitaire est fixé à 400 FCFA.

b) Calculer le nombre de produits demandés, à l'unité près lorsque le prix unitaire est fixé à 600 FCFA.

2) Déterminer la demande moyenne à une unité près, lorsque le prix unitaire est compris entre 400 et 600 FCFA.

C-//

L'élasticité de la demande est exprimée par la fonction E définie par :

$$E(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)}$$

(En économie, l'élasticité de la demande exprime l'effet des variations du prix de vente d'un produit sur le niveau de demande de ce produit).

1) Vérifier que, pour tout x de $[0; +\infty[$,

$$E(x) = -\frac{x^2 + 3x}{2x + 10}$$

- 2) Calculer le prix pour lequel l'élasticité est égale à -2 , c'est-à-dire qu'il s'agit de résoudre $E(x) = -2$.

Corrigé : BAC 2015_Exercice 3

A-//

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = (2x + 10)e^{-0,5x+1}$

- 1) On note f' sa fonction dérivée.

a) Justifions que pour tout x de $[0; +\infty[$: $f'(x) = (-x - 3)e^{-0,5x+1}$
 $f(x)$ étant à la forme $U * V$, sa fonction dérivée $f'(x) = U' * V + V' * U$

$$U = 2x + 10 \quad U' = 2$$

$$V = e^{-0,5x+1} \quad V' = -0,5e^{-0,5x+1}$$

Donc

$$f'(x) = 2e^{-0,5x+1} - 0,5e^{-0,5x+1}(2x + 10) = (2 - x - 5)e^{-0,5x+1} = (-x - 3)e^{-0,5x+1}$$

b) Etudions le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
 $\forall x \in [0; +\infty[$; $e^{-0,5x+1} > 0$ donc $f'(x)$ à le même signe que $-x - 3$

Posons $-x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-

Donc $\forall x \in [0; +\infty[$. $f'(x) < 0$ d'où f est strictement décroissante.

- 2) Justifions que la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = (-4x - 28)e^{-0,5x+1}$ est une primitive de f sur le même intervalle.

$F(x)$ est une primitive de sur $[0; +\infty[$ de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$.

$F(x)$ est à la forme $U * V$ alors $F'(x) = U' * V + V' * U$

$$U = -4x - 28 \quad U' = -4$$

$$V = e^{-0,5x+1} \quad V' = -0,5e^{-0,5x+1}$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= -4e^{-0,5x+1} + (-4x - 28)(-0,5e^{-0,5x+1}) \\ &= (-2x + 14 - 4)e^{-0,5x+1} = (-2x + 10)e^{-0,5x+1} \end{aligned}$$

Donc $F(x)$ est une primitive de f .

- 3) Calculons l'intégrale $\int_4^6 f(x)dx$

$$\int_4^6 f(x)dx = \int_4^6 F(x)dx = [(-4x - 28)e^{-0,5x+1}]_4^6 = F(6) - F(4)$$

$$= (-4(6) - 28)e^{-0,5(6)+1} - (-4(4) - 28)e^{-0,5(4)+1} = -52e^{-2} + 44e^{-1} \approx \mathbf{9,15}$$

B-//

La demande de produits à base du beurre de karité fabriqués par une association féminine est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie A-//. Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers de produits, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines de francs CFA.

1)

- a) Calculons le nombre de produits demandés, à l'unité près lorsque le prix unitaire est fixé à 400 F CFA.

$$f(4) = (2(4) + 10)e^{-0,5(4)+1} = 6,6218$$

Donc pour $x = 400$, le nombre de produits demandés est égale à $6,6218 * 1\,000 \approx 6\,622$ Francs CFA.

- b) Calculons le nombre de produits demandés, à l'unité près lorsque le prix unitaire est fixé à 600 F CFA.

$$f(6) = (2(6) + 10)e^{-0,5(6)+1} = 2,977$$

Pour $x = 600$, le nombre de produits demandés est égale à $2,977 * 1\,000 = 2\,977$ Francs CFA.

C-//

L'élasticité de la demande est exprimée par la fonction E définie par :

$$E(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)}$$

- 1) Vérifions que pour tout x de $[0; +\infty[$; $E(x) = -\frac{x^2+3x}{2x+10}$

$$E(x) = x \left(\frac{(-x-3)e^{-0,5x+1}}{(2x+10)e^{-0,5x+1}} \right) \text{ en simplifiant par } e^{-0,5x+1} \text{ on obtient :}$$

$$E(x) = x \left(\frac{-x-3}{2x+10} \right) = -\frac{x^2+3x}{2x+10} \text{ donc } E(x) = -\frac{x^2+3x}{2x+10}$$

- 2) Calculons le prix pour lequel l'élasticité est égale à -2, en résolvant $E(x) = -2$

$$E(x) = \frac{x^2+3x}{2x+10} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 4x + 20 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 20 = 0, \text{ calculons } \Delta \text{ pour résoudre l'équation.}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-20) = 1 + 80 = 81$$

$$\Delta = 81 \text{ alors } \sqrt{\Delta} = 9$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-9}{2} = -4 \quad \text{et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+9}{2} = 5$$

$$x_1 = -4 \notin [0; +\infty[\text{ et } x_2 = 5 \in [0; +\infty[$$

Donc le prix pour lequel l'élasticité est égale à -2 est : **500 F CFA**

Problème [Bac 2017 11points]

Une ébénisterie fabrique entre 10 et 40 bibliothèques par mois. On estime que le coût de fabrication de q bibliothèques est $C(q) = 10q^3 + 5000q + 20000$ en FCFA. Chaque bibliothèque est vendue à 32 000 FCFA.

1.

- a) Détermine le cout de fabrication de 12 bibliothèques. **(1pt)**
 b) L'ébéniste dégage – t – il des bénéfices pour la fabrication de 12 bibliothèques ? **(2pts)**

2. On note $B(q)$ le bénéfice en FCFA obtenu par la fabrication et la vente de q bibliothèques.

- a) Montre que $B(q) = -10q^3 + 27\,000q - 20\,000$. **(2pts)**
 b) Etudie les variations de B sur l'intervalle $[10 ; 40]$. **(2pts)**
 c) Dresse le tableau de variation de B sur $[10 ; 40]$. **(2pts)**
 d) En déduis le nombre de bibliothèques que l'ébénisterie doit fabriquer et vendre par mois pour dégager un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal ?

Corrigé

Une ébénisterie fabrique entre 10 et 40 bibliothèques par mois. On estime que le coût de fabrication de q bibliothèques est $C(q) = 10q^3 + 5000q + 20000$ en FCFA. Chaque bibliothèque est vendue à 32 000 FCFA.

1)

- a) Déterminons le coût de fabrication de 12 bibliothèques.
 $C(12) = 10(12)^3 + 5\,000(12) + 20\,000 = \mathbf{97\,280 \text{ francs CFA}}$
 b) L'ébéniste dégage – t – il des bénéfices pour la fabrication de 12 bibliothèques :
 $R(12) = 32\,000 * 12 = 384\,000$
 $B(12) = R(12) - C(12) = 384\,000 - 97\,280 = \mathbf{286\,720 > 0}$, donc l'ébéniste dégage alors des bénéfices.

2) On note $B(q)$ le bénéfice en FCFA obtenu par la fabrication et la vente de q bibliothèques.

- a) Montrons que $B(q) = -10q^3 + 27\,000q - 20\,000$
 $B(q) = R(q) - C(q)$; $R(q) = \text{prix} * q = 32\,000q$
 $B(q) = 32\,000q - 10q^3 - 5\,000q - 20\,000$
 $\Rightarrow \mathbf{B(q) = -10q^3 + 27\,000q - 20\,000}$

- b) Etudions les variations de B sur l'intervalle $[10 ; 40]$.

Calculons $B'(q)$

$$B'(q) = -30q^2 + 27\,000$$

Posons $B'(q) = 0$

$$-30q^2 + 27\,000 = 0 \Rightarrow q = \sqrt{\frac{27\,000}{30}} = 30$$

q	10	30	40
$B'(x)$	+	0	-

Pour $q \in [10 ; 30]$, $B'(q) \geq 0$ alors B est croissantePour $q \in [30 ; 40]$, $B'(q) \leq 0$ alors B est décroissante

- c) Dressons le tableau de variation

q	10	30	40
-----	----	----	----

$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	240 000	520 000	420 000

$$B(10) = -10(10)^3 + 27\,000(10) - 20\,000 = 240\,000$$

$$B(30) = -10(30)^3 + 27\,000(30) - 20\,000 = 520\,000$$

$$B(40) = -10(40)^3 + 27\,000(40) - 20\,000 = 420\,000$$

- d) Le nombre de bibliothèques que l'ébénisterie doit fabriquer et vendre par mois pour dégager un bénéfice maximal est **30**.

Ce bénéfice maximal est **520 000 FCFA**.

Problème [Bac 2019 10 points]

Les coûts de production d'un bien de grande consommation sont calculés par l'expression

$CT(x) = 0,1x^2 + 16\,000$, où x est le nombre d'unités produites et $CT(x)$ est le coût total en francs de la production de x unités. Chaque article étant vendu 100 F pièce. On désigne par $RT(x)$ la recette totale de l'entreprise. L'entreprise peut produire au maximum 1 000 unités.

- 1) Montre que la fonction BT est définie par :
 $BT(x) = -0,1x^2 + 100x - 16\,000$
- 2) Etudie le sens de variation de la fonction $CT(x)$ sur l'intervalle $I = [0; 1000]$ et représente graphiquement cette variation dans un repère orthogonal où 1 cm représente 100 unités sur l'axe des abscisses et 1000 F sur l'axe des ordonnées.
- 3) Représente graphiquement la fonction $RT(x)$ dans le même repère. D'après le graphique, sur quel intervalle la courbe de RT est-elle au-dessus de CT ?
- 4) Etudie le signe de $BT(x)$. A quel intervalle doit appartenir x pour que l'entreprise réalise un bénéfice ?

Corrigé

Les coûts de production d'un bien de grande consommation sont calculés par l'expression

$CT(x) = 0,1x^2 + 16\,000$, où x est le nombre d'unités produites et $CT(x)$ est le coût total en francs de la production de x unités. Chaque article étant vendu 100 F pièce. On désigne par $RT(x)$ la recette totale de l'entreprise. L'entreprise peut produire au maximum 1 000 unités.

- 1) Montrons que la fonction BT est définie par : $BT(x) = -0,1x^2 + 100x - 16\,000$
 $BT(x) = RT(x) - CT(x)$
 $RT(x) = \text{prix} * \text{la quantité}(x) = 100x$ Donc $BT(x) = 100x - (0,1x^2 + 16\,000)$
 $\Rightarrow BT(x) = 100x - 0,1x^2 - 16\,000$ D'où **$BT(x) = -0,1x^2 + 100x - 16\,000$**

- 2) Etudions le sens de variation de la fonction $CT(x)$ sur l'intervalle $I = [0; 1\,000]$

$$CT(x) = 0,1x^2 + 16\,000$$

Calculons la dérivée du $CT(x)$

$$CT'(x) = 0,2x ; \text{ posons } CT'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Tableau de signe

x	0	1 000
$CT'(x)$		+

Pour $x \in [0; 1\,000]$ $CT'(x) > 0 \Rightarrow CT(x)$ est croissante

Représentation graphique de $CT(x)$

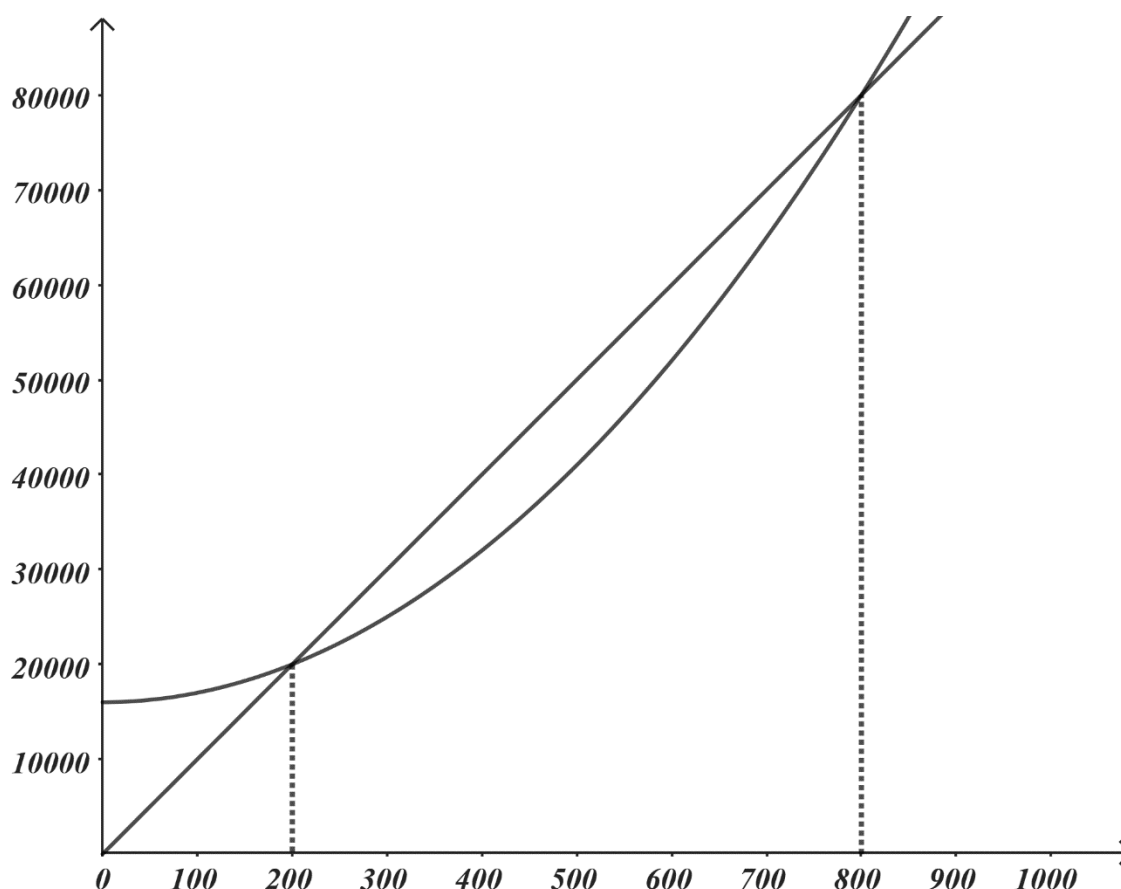


Tableau de variation

x	0	1 000
$CT'(x)$	+	
$CT(x)$	16 000	116 000

$$CT(0) = 0,1(0)^2 + 16\,000 = 16\,000$$

$$CT(1\,000) = 0,1(1000)^2 + 16\,000 = 116\,000$$

3) Représentation de la fonction $RT(x)$ (voir figure)

4) Etudions le signe de $BT(x)$.

$$\text{Posons } BT(x) = 0 \Rightarrow -0,1x^2 + 100x - 16\,000 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (100)^2 - 4(-0,1)(-16\,000) = 3\,600 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3600} = 60$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-100 - 60}{2(-0,1)} = 800$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-100 + 60}{-0,2} = 200$$

Tableau de signe

x	0	200	800	1000
$BT(x)$	—	ϕ	+	ϕ —

$$\forall x \in [0; 200[\cup [800; 1\,000[\quad BT(x) \leq 0$$

$$\forall x \in]200; 800[\quad BT(x) \geq 0$$

Pour l'entreprise réalise un bénéfice x doit appartenir à l'intervalle $]200; 800[$.

Problème [Bac 2021]

Dans un centre de prise en charge des malades de la Covid-19, les infectiologues ont modélisé la quantité de chloroquine (en mg) administrée à un patient suivant l'évolution de la maladie, par la fonction g définie par $g(t) = -t^3 + 6t^2 + 9$ où t désigne le nombre de jours d'hospitalisation.

- 1) Calcule la quantité de chloroquine reçue par un patient admis au centre de prise en charge au : 2^{ième} ; 4^{ième} ; 5^{ième} et 6^{ième} jour.
- 2) Dresse le tableau de variation de la fonction g sur $[0; 6]$.
- 3) Trace dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentant la quantité de chloroquine. Unité (1 cm pour 1 jour sur l'axe (Ox) , 1 cm pour 10 mg sur l'axe (Oy)).
- 4) Détermine graphiquement le nombre de jours qui correspond à une dose de 36 mg de chloroquine.
- 5) Un patient est déclaré guéri lorsque la quantité de chloroquine reçue par jour n'atteint plus 10 mg. Détermine graphiquement à partir du combienième jour, un patient soumis à ce traitement sera déclaré guéri.

Corrigé

$g(t) = -t^3 + 6t^2 + 9$ où t désigne le nombre de jours d'hospitalisation .

- 1) Calculons la quantité de chloroquine reçue par un patient admis au centre de prise en charge au : 2^{ième} ; 5^{ième} et 6^{ième} jour.
 $g(2) = -(2)^3 + 6(2)^2 + 9 = -8 + 24 + 9 = 25$ mg
 $g(4) = -(4)^3 + 6(4)^2 + 9 = -64 + 96 + 9 = 41$ mg
 $g(5) = -(5)^3 + 6(5)^2 + 9 = -125 + 150 + 9 = 34$ mg
 $g(6) = -(6)^3 + 6(6)^2 + 9 = -216 + 216 + 9 = 9$ mg
 $g(2) = 25$ mg ; $g(4) = 41$ mg ; $g(5) = 34$ mg et $g(6) = 9$ mg
- 2) Dressons le tableau de variation de la fonction g sur $[0; 6]$.

Calculons $g'(t)$

$$g(t) = -t^3 + 6t^2 + 9 \Rightarrow g'(t) = -3t^2 + 12t$$

$$\text{posons } g'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 12t = 0 \Rightarrow t(-3t + 12) = 0$$

$$\Rightarrow t = 0 \text{ et } -3t = -12 \Rightarrow t = -\frac{12}{-3} = 4$$

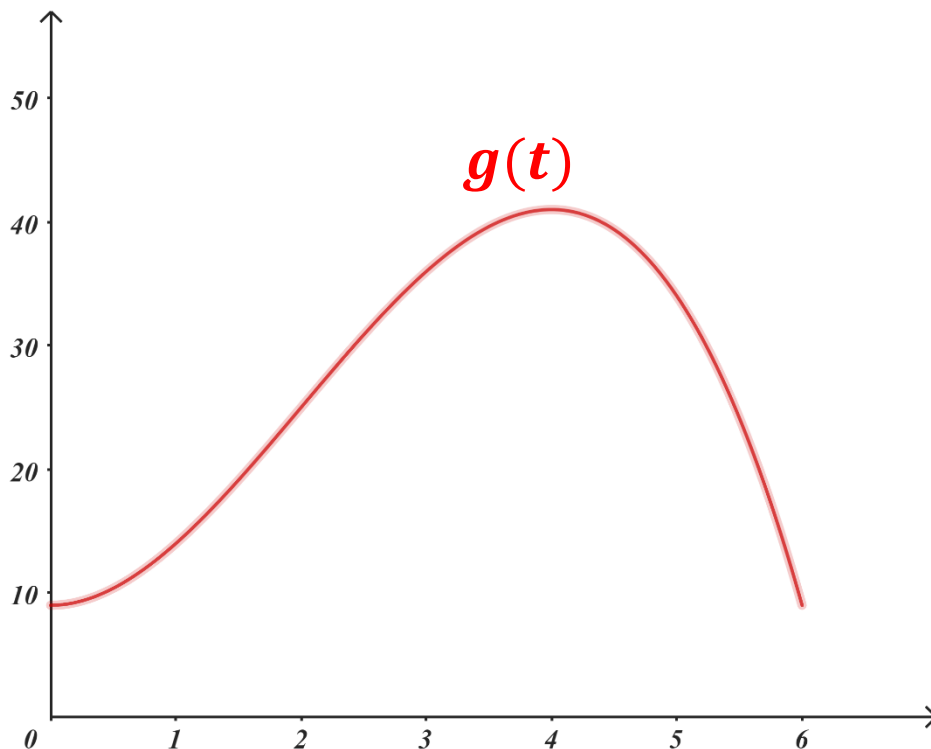
Tableau de variation

t	0	4	6
$g'(t)$	+	ϕ	-
$g(t)$	9	41	9

$$g(0) = -(0)^3 + 6(0)^2 + 9 = 9 \text{ mg}$$

$$g(4) = 41 \text{ mg et } g(6) = 9 \text{ mg}$$

- 3) Traçons dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentant la quantité de chloroquine. Unité (1 cm pour 1 jour sur l'axe (Ox) , 1 cm pour 10 mg sur l'axe (Oy)).



- 4) Déterminons graphiquement le nombre de jours qui correspond à une dose de 36 mg de chloroquine.
 $g(t) = -t^3 + 6t^2 + 9 = 36$
 $g(3) = -(3)^3 + 6(3)^2 + 9 = -27 + 54 + 9 = 36$ mg
 Donc le nombre de jours qui correspond à une dose de 36 mg de chloroquine est 3.
- 5) Un patient est déclaré guéri lorsque la quantité de chloroquine reçue par jour n'atteint plus 10 mg. Déterminons graphiquement à partir du combienième jour, un patient soumis à ce traitement sera déclaré guéri.
 Comme $g(6) = 9$ mg < 10 mg donc c'est à partir du **6^e jour** qu'un patient soumis à ce traitement sera déclaré guéri.

Problème [Bac 2022 9 pts]

Une entreprise produit et vend un modèle de pièce pour automobiles. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 6]$ par : $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8 \ln x$; $f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaine de milliers de francs, obtenu pour la vente de x centaines de pièces. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1; 6]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

- 1)
 - a) Calcule $f'(x)$.
 - b) Etudie le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1; 6]$.
 - c) Dresse le tableau de variation f .
 - d) Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximale ? Calcule ce bénéfice au franc près.
- 2) On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g : x \mapsto g(x) = -x - x \ln x$.
 - a) Prouve que $g : x \mapsto g(x) = -x + x \ln x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$
 - b) Dédus-en une primitive F de la fonction f sur $[1; 6]$.

- c) Calcule la valeur moyenne de la fonction f sur $[1; 6]$. on donnera une valeur décimale arrondie au dixième.

Corrigé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 6]$ par : $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8 \ln x$;

$f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaine de milliers de francs, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.

1)

- a) Calculons $f'(x)$

$$f'(x) = -2x + 10 - 8 * \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{x} = \frac{2(-x^2 + 5x - 4)}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(-x^2 + 5x - 4)}{x}$$

- b) Etudions le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1; 6]$.

$$\text{Posons } f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(-(-4)) = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 3}{-2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 3}{-2} = \frac{2}{2} = 1$$

Tableau de signe

x	1	4	6
$f'(x)$	+	0	-

Pour $x \in [1; 4]$ $f'(x) \geq 0$

Pour $x \in [4; 6]$ $f'(x) \leq 0$.

- c) Dressons le tableau de variation de f .

Tableau de variation

x	1	4	6
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$15 - 8 \ln 4$	$15 - 8 \ln 6$

$$f(1) = -(1)^2 + 10(1) - 9 - 8 \ln 1 = -1 + 10 - 9 - 0 = 0$$

$$f(4) = -(4)^2 + 10(4) - 9 - 8 \ln 4 = -16 + 40 - 9 - 8 \ln 4 = 15 - 8 \ln 4$$

$$f(6) = -(6)^2 + 10(6) - 9 - 8 \ln 6 = -36 + 60 - 9 - 8 \ln 6 = 15 - 8 \ln 6$$

- d) La quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximale est 400 pièces.

Calculons ce bénéfice maximal est $f(4) = 15 - 8 \ln 4 \approx 3,9096 * 10000 = \mathbf{39\ 096}$

- 2) On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g : x \mapsto g(x) = -x + x \ln x$.

- a) Prouvons que $g : x \mapsto g(x) = -x + x \ln x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$
 $g(x)$ est une primitive de la $x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$ si et seulement $g'(x) = \ln x$

Calculons $g'(x)$

$$g'(x) = -1 + \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)x = -1 + \ln x + 1 = \ln x \text{ donc } g(x) \text{ est une primitive de la fonction } x \mapsto \ln x \text{ sur }]0; +\infty[.$$

- b) Dédudisons une primitive F de la fonction f sur $[1; 6]$.

$$f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8 \ln x \Rightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{10x^2}{2} - 9x - 8(-x + x \ln x).$$

- c) Calculons la valeur moyenne de la fonction f sur $[1; 6]$

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{6-4} \int_1^6 f(x) dx = \frac{1}{5} [F(x)]_1^6 = \frac{1}{5} [F(6) - F(1)]$$

$$F(6) = -\frac{6^3}{3} + \frac{10(6)^2}{2} - 9(6) - 8(-6 + 6 \ln 6) = -72 + 180 - 54 - 38$$

$$\Rightarrow F(6) = 16$$

$$F(1) = -\frac{1^3}{3} + \frac{10(1)^2}{2} - 9(1) - 8(-1 + 1 \ln 1) = -\frac{1}{3} + 5 - 9 + 8 = \frac{11}{3}$$

$$m = \frac{1}{5} \left[16 - \frac{11}{3} \right] = 2,4658 \approx 2,5.$$

Problème [Bac 2023 8 points]

La production d'oignons d'une coopérative agricole, en fonction de la durée t exprimée en jours est modélisée par la fonction f , définie par $f(t) = 20t^3 - 60t$ sur $[0; 30]$, jours de production.

- 1) Trouve le domaine de définition D_f de f .
- 2) Calcule $f'(t)$ et dresse le tableau de variation de f .
- 3) Trouve la date de production assurant une perte minimale ; que vaut cette perte ?
- 4) Calcule la production pour $t = 30$ jours ;
- 5) Trace dans un repère orthonormé, la courbe exprimant la production d'oignons pendant 30 jours.
On prendra :
 - a) Un (1) cm pour deux jours en abscisse ;
 - b) Un (1) cm pour cent mille (100 000) kg en ordonnée.

Corrigé

La production d'oignons d'une coopérative agricole, en fonction de la durée t exprimée en jours est modélisée par la fonction f , définie par $f(t) = 20t^3 - 60t$ sur $[0; 30]$, jours de production.

- 1) Trouvons le domaine de définition D_f de f .
 f est une fonction polynôme définie sur $[0; 30]$, Alors $D_f = [0; 30]$.
- 2) Calculons $f'(t)$ et dressons le tableau de variation de f .
 $f(t) = 20t^3 - 60t = 20(3t^2) - 60 \Rightarrow f'(t) = 60t^2 - 60 = t^2 - 1$
 $\Rightarrow f'(t) = t^2 - 1$
 Posons $f'(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 1 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} t = -\sqrt{1} = -1 \notin [0; 30] \\ t = \sqrt{1} = 1 \in [0; 30] \end{cases}$

Tableau de variation

t	0	1	30
$f'(t)$		-	+
$f(t)$	0	-40	538 200

$$f(0) = 20(0)^3 - 60(0) = 0$$

$$f(1) = 20(1)^3 - 60(1) = -40$$

$$f(30) = 20(30)^3 - 60(30) = 538\,200$$

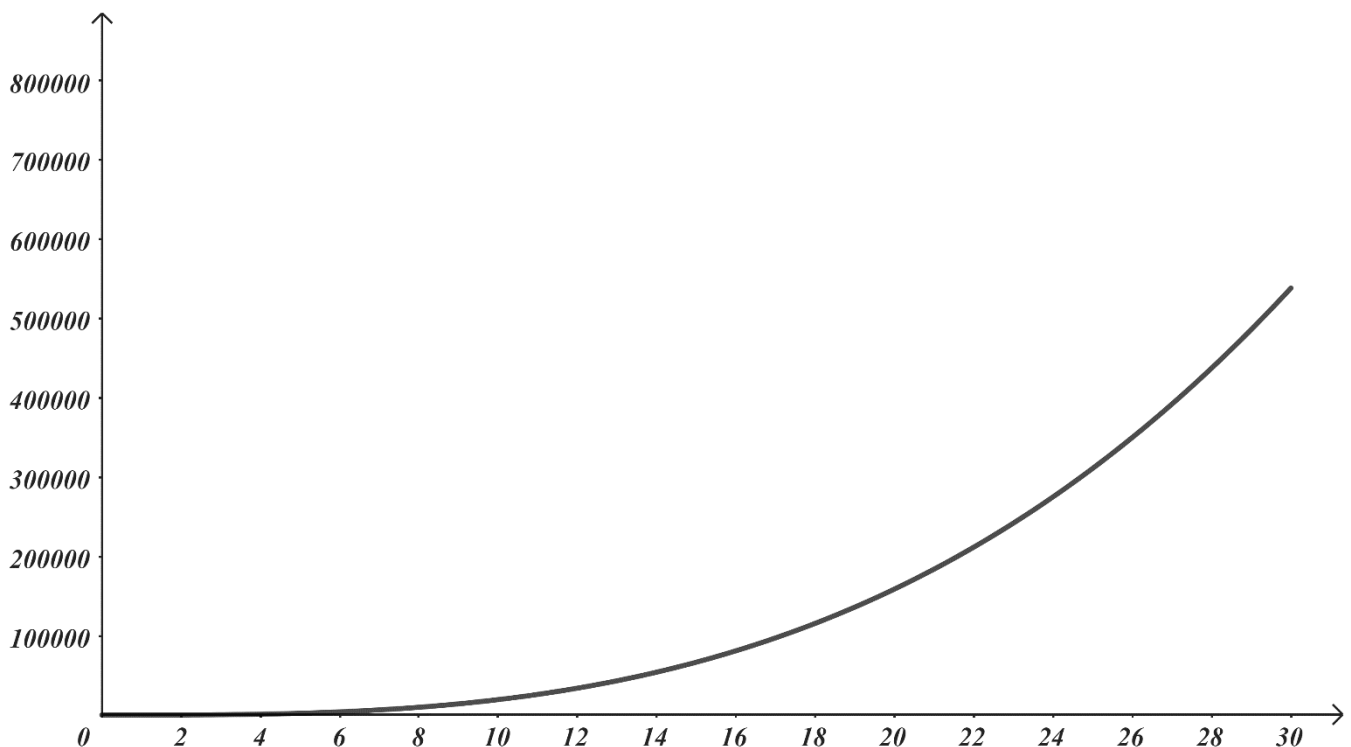
- 3) Trouvons la date de production assurant une perte minimale et déterminons la valeur de cette perte.
La production est minimale pour $t = 1$ jour et cette perte est 40 kg

- 4) Calculons la production pour $t = 30$ jours .

$$f(30) = 538\,200, \text{ alors cette production est } 538\,200 \text{ kg.}$$

- 6) Traçons dans un repère orthonormé, la courbe exprimant la production d'oignons pendant 30 jours.
Unité graphique :

- Un (1) cm pour deux jours en abscisse ;
- Un (1) cm pour cent mille



Problème [Bac 2024 8 points]

Une usine fabrique et vend des boîtes de jeu pour enfants. Après la fabrication et la vente de q centaines de boîtes de jeu, le bénéfice net réalisé en un mois s'exprime, en milliers de F CFA, par : $B(q) = -q^2 + 90q - 261$ pour q compris entre 3 et 60.

- 1) Calcule $B'(q)$ puis étudie son signe sur $[3; 60]$.
- 2) Déduis-en les variations de la fonction B sur $[3; 60]$.
- 3) Dresse le tableau de variations de B sur $[3; 60]$.
- 4) Pour quel nombre de boîtes de jeu fabriquées et vendues, le bénéfice réalisé par cette usine est-il maximal ?

Corrigé

$$B(q) = -q^2 + 90q - 261 \text{ avec } q \in [3; 60]$$

- 1) Calculons $B'(q)$ et étudions son signe sur $[3; 60]$

$$B'(q) = -2q + 90. \text{ Posons } B'(q) = 0 \Rightarrow -2q + 90 = 0 \Rightarrow q = \frac{90}{2} = 45$$

q	3	45	60
$B'(q)$	+	$\bigcirc$	-

$$\forall q \in [3; 45], B'(q) > 0$$

$$\forall q \in [45; 60], B'(q) < 0$$

2) Les variations de la fonction B sur $[3; 60]$

$\forall q \in [3; 45], B'(q) > 0 \Rightarrow B(q)$ est une fonction croissante.

$\forall q \in [45; 60], B'(q) < 0 \Rightarrow B(q)$ est une fonction décroissante.

3) Dressons le tableau de variation de B sur $[3; 60]$

q	3	45	60
$B'(q)$	+	$\bigcirc$	-
$B(q)$	0	1764	1 539

$$B(3) = -(3)^2 + 90(3) - 261 = 0$$

$$B(45) = -(45)^2 + 90(45) - 261 = 1\,764$$

$$B(60) = -(60)^2 + 90(60) - 261 = 1\,539$$

4) Pour 45 boîtes de jeu fabriquées et vendues, le bénéfice réalisé par cette usine est maximal

Problème [Bac 2018 STG]

Le bénéfice réalisé par la vente de matériels informatiques par l'entreprise "GNETA" est modélisé pour $x \in [1; 60]$ par la fonction $B(x) = -5\,000x + 75\,000(\ln x)$ où x est le nombre de matériels informatiques et est exprimé en F CFA.

1) Calcule le bénéfice après la vente de 3 matériels, de 5 matériels.

2) Calcule où est la fonction dérivée de la fonction B .

3) Dresse le tableau de variation de B .

4) Reproduis et complète le tableau suivant :

x	1	10	20	30	40	50	60
$B(x)$							

5) Trace la courbe de B dans un repère orthogonal.

Problème [Bac 2019 STG & BAC 2016 TSECO 10 points]

On se propose d'étudier les effets du volume de la recette mondiale du thé sur les prix atteints par ce produit. Par la suite, x désigne la quantité donnée en million de tonnes. La recette totale en million de francs CFA est donnée par la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $R(x) = -0,4x^2 + 8x$.

1) Etudie et représente graphiquement la fonction R .

2) L'ensemble des charges totales (entraînées par la récolte) est donné par la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x + 25$.

a) Détermine les points d'intersection cette droite avec la parabole précédente représentant la recette totale.

b) Détermine graphiquement la zone correspondante au gain.

3)

a) Détermine la fonction bénéfice B et la représente graphiquement dans le même repère que la fonction recette R .

b) Détermine la valeur de x pour laquelle le bénéfice atteint son maximum.

Corrigé

On suppose d'étudier les effets du volume de la récolte mondiale d'un produit agricole sur les prix atteints par ce produit. Par la suite, x désigne la quantité récoltée en millions de tonnes. La recette totale en milliers de francs CFA est donnée par la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $R(x) = -0,4x^2 + 8x$.

- 1) Etudions la fonction R et la représenter graphiquement

Calculons la dérivée de la fonction R .

$$R'(x) = -0,8x + 8$$

$$\text{Posons } R'(x) = 0$$

$$-0,8x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{0,8} = 10 \Rightarrow x = 10$$

$$R(0) = -0,4(0)^2 + 8(0) = 0 ; R(10) = -0,4(10)^2 + 8(10) = 40$$

x	0	10	$+\infty$
$R'(x)$		0	-
$R(x)$	0	40	$-\infty$

- 2) L'ensemble des charges totales (entraînées par la récolte) est donné par la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 25 + x$.

- a) Déterminons les points d'intersection de cette droite avec le parabole précédente représentant la recette totale.

$$g(x) = R(x) \Leftrightarrow -0,4x^2 + 8x = 25 + x \Rightarrow -0,4x^2 + 8x - x - 25 = 0$$

$$-0,4x^2 + 7x - 25 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4(-0,4 * -25) = 49 - 40 = 9 \Rightarrow \Delta = 9$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{9}}{2(-0,4)} = \frac{-7 - 3}{-0,8} = \frac{10}{0,8} = 12,5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + 3}{-0,8} = \frac{4}{0,8} = 5$$

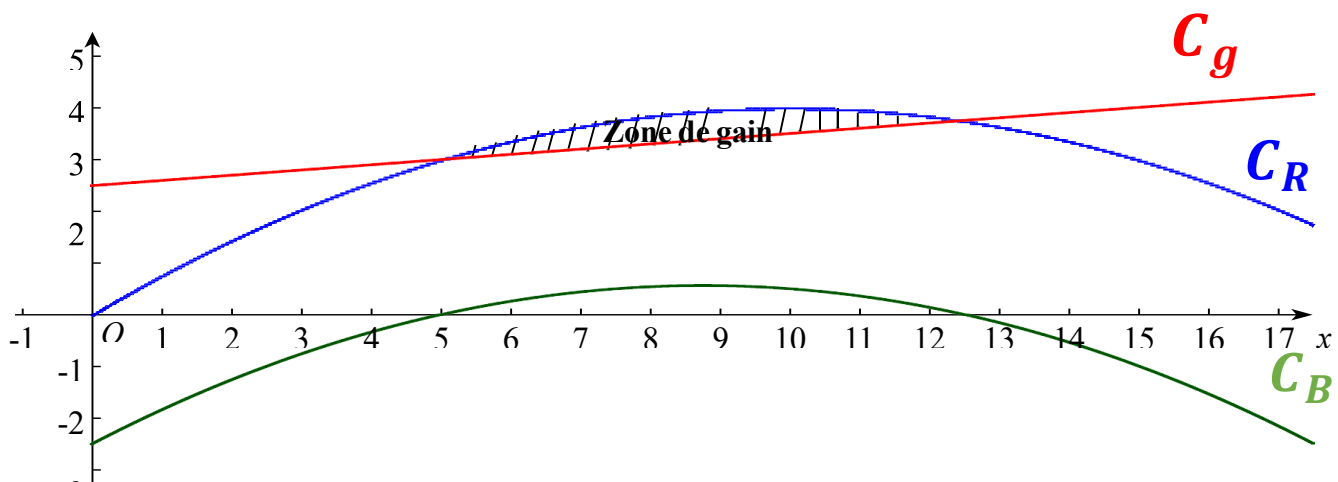
$$g(12,5) = 25 + 12,5 = 37,5$$

$$g(5) = 25 + 5 = 30$$

Les points d'intersections sont : (12,5 ; 37,5) et (5 ; 30)

- b) Déterminons graphiquement la zone correspondante à un gain.

Le gain correspond à la zone où la parabole est au-dessus de la droite d'équation $y = 25 + x$ (**partie hachurée**).



3) Déterminons la fonction bénéfice B et la représentons.

$$B(x) = R(x) - g(x) = -0,4x^2 + 8x - 25 - x = -0,4x^2 + 7x - 25 \Leftrightarrow$$

$$B(x) = -0,4x^2 + 7x - 25$$

Calculons $B'(x)$

$$B'(x) = -0,8x + 7 \text{ Posons } B'(x) = 0. \text{ Donc } -0,8x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{0,8} = 8,75$$

x	0	8,75	$+\infty$
$B'(x)$		+	-
$B(x)$	-25	5,625	$-\infty$

$$B(0) = -0,4(0)^2 + 7(0) - 25 = -25$$

$$B(8,75) = -0,4(8,75)^2 + 7(8,75) - 25 = 5,625$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -0,4x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -0,4(+\infty) = -\infty$$

Le bénéfice atteint son maximum pour $x = 8,75$ millions de tonnes

Problème [Bac 2023 STG 10 points]

Une entreprise fabrique et vend chaque jour, un certain nombre x d'objets.

Chaque objet est vendu à 100 F. Le coût total de fabrication en francs CFA de x objets est modélisé par la fonction suivante : $C_T(x) = x^2 - 10x + 900$ pour tout $x \in [0; 120]$.

1)

- La fabrication de 100 objets coûtera combien à cette entreprise ?
- Avec 6 500 F l'entreprise peut fabriquer combien d'objets ?
- Est-il rentable pour l'entreprise de fabriquer et de vendre des objets ?

2) Que signifie le coût moyen $C_M(x)$ et montre que le coût moyen de fabrication est :

$$C_M(x) = x - 10 + \frac{900}{x} \text{ pour } [0; 120].$$

3)

- Calcule $C'_M(x)$ et étudie son signe.
- Donne le sens de variation de C_M et dresse son tableau de variations.
- Détermine pour quelle production le coût moyen est minimal ?
Quelle est la valeur de ce coût moyen minimal ?

4)

- Démontre que le bénéfice réalisé par cette entreprise en fabriquant et en vendant x objets est :

$$B(x) = -x^2 + 110x - 900 \text{ pour } [0; 120].$$

- b) Dresse son tableau de variations et détermine la production qui maximisera son bénéfice et calcule ce bénéfice maximal.

Corrigé

Une entreprise fabrique et vend chaque jour, un certain nombre x d'objets.

Chaque objet est vendu à 100 F. Le coût total de fabrication en francs CFA de x objets est modélisé par la fonction suivante : $C_T(x) = x^2 - 10x + 900$ pour tout $x \in [0; 120]$.

1)

- a) La fabrication de 100 objets coûtera combien à cette entreprise ?

$$C_T(100) = (100)^2 - 10(100) + 900 = 10\,000 - 1\,000 + 900 = 9\,900$$

La fabrication de 100 objets coûtera à cette entreprise **9 900 francs CFA**.

- b) Avec 6 500 F l'entreprise peut fabriquer combien d'objets ?

$$C_T(x) = 6\,500 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 900 = 6\,500 \Rightarrow x^2 - 10x + 900 - 6\,500 = 0$$

$$x^2 - 10x - 5\,600 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(-5\,600)$$

$$\Rightarrow \Delta = 100 + 22\,400 = 22\,500 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{22\,500} = 150$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - 150}{2(1)} = \frac{10 - 150}{2} = -\frac{140}{2} = -70$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + 150}{2(1)} = \frac{10 + 150}{2} = \frac{160}{2} = 80$$

Avec 6 500 F, l'entreprise peut fabriquer **80 objets**.

- c) Est-il rentable pour l'entreprise de fabriquer et de vendre des objets ?

$$B(80) = 100(80) - 6\,500 = 1\,500 \text{ francs CFA.}$$

La fabrication et vente des objets est rentable pour l'entreprise puis que en fabricant et en vendant 80 objets elle réalise un bénéfice de 1 500 francs CFA.

- 2) Que signifie le coût moyen $C_M(x)$ et montre que le coût moyen de fabrication est :

$$C_M(x) = x - 10 + \frac{900}{x} \text{ pour } [0; 120].$$

3)

- a) Calcule $C'_M(x)$ et étudie son signe.

- b) Donne le sens de variation de C_M et dresse son tableau de variations.

- c) Détermine pour quelle production le coût moyen est minimal ?

Quelle est la valeur de ce coût moyen minimal ?

4)

- c) Démontre que le bénéfice réalisé par cette entreprise en fabriquant et en vendant x objets est :

$$B(x) = -x^2 + 110x - 900 \text{ pour } [0; 120].$$

- d) Dresse son tableau de variations et détermine la production qui maximisera son bénéfice et calcule ce bénéfice maximal.

Problème [Bac 2024 STG 8 points]

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; 80]$ par : $f(x) = -0,02x^3 + 2,1x^2 - 36x - 80$.

1)

- a) Calcule la fonction dérivée $f'(x)$ puis factorise $f'(x)$.

- b) Etudie le signe $f'(x)$ sur $[0; 80]$.

- c) Etudie le sens de variations de f puis dresse son tableau de variations sur $[0; 80]$.
 2) Recopie et complète le tableau des valeurs ci-dessous.

x	0	20	40	60	80
$f(x)$					

- 3) Représente graphiquement la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie B

Une petite entreprise de la place fabrique et vend un certain type de produits artisanaux. Elle peut en vendre jusqu'à 20 par jour. Lorsqu'elle en fabrique q exemplaires, le coût de production journalier est donné par la fonction $g(q) = 0,02q^3 - 2,1q^2 + 74q + 80$ exprimé en milliers de F CFA, $q \in [0; 80]$.

L'entreprise vend chaque unité de matériel à 38 (milliers de F CFA).

- 1) Si cette entreprise fabrique et vend 40 matériels, calcul le coût de production, la recette et le bénéfice correspondant.
 2)
 a) Détermine, en fonction de q , la recette journalière exprimée en milliers de F CFA, lorsque l'entreprise vend q matériels.
 b) Déduis-en que le bénéfice journalier pour la fabrication de q matériels est donné par $f(q)$ où f est la fonction de la **partie A**.
 3)
 a) En te servant des réponses de la **partie A**, calcule le nombre de matériels que doit fabriquer l'entreprise pour réaliser un bénéfice maximal.
 b) Calcule alors la valeur de ce bénéfice.

Corrigé

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; 80]$ par : $f(x) = -0,02x^3 + 2,1x^2 - 36x - 80$.

- 1)
 a) Calculons la fonction dérivée $f'(x)$
 $f'(x) = -0,06x^2 + 4,2x - 36$
 Factorisons $f'(x)$, posons $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,06x^2 + 4,2x - 36 = 0$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (4,2)^2 - 4 * (-0,06)(-36) = 17,64 - 8,64 = 9 \Rightarrow \Delta = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4,2 - 3}{2(-0,06)} = \frac{-7,2}{-0,12} = 60$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4,2 + 3}{2(-0,06)} = \frac{-1,2}{-0,12} = 10$
 $f'(x) = -0,06 \left(x^2 + \frac{4,2x}{-0,06} - \frac{36}{-0,06} \right) = -0,06(x^2 - 70x - 600)$
 $(x - 60)(x - 10) = x^2 - 10x - 60x + 600 = x^2 - 70x + 600$
 $\Rightarrow f'(x) = -0,06(x - 60)(x - 10)$
 b) Etudions le signe $f'(x)$ sur $[0; 80]$.
- | | | | | | | |
|---------|---|----|----|----|---|---|
| x | 0 | 10 | 60 | 80 | | |
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - |
- $\forall x \in [0; 10] \cup [60; 80] f'(x) \leq 0$
 $\forall x \in [10; 60] f'(x) \geq 0$
 c) Etudions le sens de variations de f puis dressons son tableau de variations sur $[0; 80]$.
 $\forall x \in [0; 10] \cup [60; 80] f'(x) \leq 0, f(x)$ est décroissante

$\forall x \in [10; 60] f'(x) \geq 0, f(x)$ est croissante.

x	0	10	60	80
$f'(x)$	-	+	-	
$f(x)$	-80	-250	1 000	240

$$f(0) = -0,02(0)^3 + 2,1(0)^2 - 36(0) - 80 = -80$$

$$f(10) = -0,02(10)^3 + 2,1(10)^2 - 36(10) - 80 = -20 + 210 - 360 - 80 = -250$$

$$f(60) = -0,02(60)^3 + 2,1(60)^2 - 36(60) - 80 = -4\,320 + 7\,560 - 2\,160 - 80 = 1\,000$$

$$f(80) = -0,02(80)^3 + 2,1(80)^2 - 36(80) - 80 = -10\,240 + 13\,440 - 2\,880 - 80 = 240$$

d) Recopions et complétons le tableau des valeurs ci-dessous.

x	0	20	40	60	80
$f(x)$	-80	-120	560	1000	240

$$f(0) = -80$$

$$f(20) = -0,02(20)^3 + 2,1(20)^2 - 36(20) - 80 = -160 + 840 - 720 - 80 = -120$$

$$f(40) = -0,02(40)^3 + 2,1(40)^2 - 36(40) - 80 = -1\,280 + 3\,360 - 1\,440 - 80 = 560$$

$$f(60) = 1\,000$$

$$f(80) = 240$$

e) Représente graphiquement la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie B

Une petite entreprise de la place fabrique et vend un certain type de produits artisanaux. Elle peut en vendre jusqu'à 20 par jour. Lorsqu'elle en fabrique q exemplaires, le coût de production journalier est donné par la fonction $g(q) = 0,02q^3 - 2,1q^2 + 74q + 80$ exprimé en milliers de F CFA, $q \in [0; 80]$.

L'entreprise vend chaque unité de matériel à 38 (milliers de F CFA).

1) Si cette entreprise fabrique et vend 40 matériels, calculons le coût de production, la recette et le bénéfice correspondant.

- **Coût de production de 40 matériels :**

$$g(40) = 0,02(40)^3 - 2,1(40)^2 + 74(40) + 80 = 1\,280 - 3\,360 + 2\,960 + 80 = 960$$

Le coût de production de 40 matériels est estimé à **960 milliers de F CFA**.

- **La recette de la vente de 40 matériels :**

$$R(q) = \text{Prix unitaire de vente} \times \text{quantité}(q) = 38 \times q = 38q$$

$$R(40) = 38 \times 40 = \mathbf{1\,520 \text{ milliers de F CFA.}}$$

- **Le bénéfice après la vente de 40 matériels**

$$B(40) = R(40) - g(40) = 1\,520 - 960 = \mathbf{560 \text{ milliers de F CFA.}}$$

2)

a) Déterminons, en fonction de q , la recette journalière exprimée en milliers de F CFA, lorsque l'entreprise vend q matériels.

$$R(q) = \text{Prix unitaire de vente} \times \text{quantité vendue}(q) = 38 \times q \Rightarrow \mathbf{R(q) = 38q}$$

b) Déduis-en que le bénéfice journalier pour la fabrication de q matériels est donné par $f(q)$ où f est la fonction de la **partie A**.

$$B(q) = R(q) - g(q) = 38q - (0,02q^3 - 2,1q^2 + 74q + 80)$$

$$\Rightarrow B(q) = 38q - 0,02q^3 + 2,1q^2 - 74q - 80 = -0,02q^3 + 2,1q^2 - 36q - 80$$

$$\text{Alors } B(q) = f(q)$$

3)

- c) En nous servant des réponses de la **partie A**, calculons le nombre de matériels que doit fabriquer l'entreprise pour réaliser un bénéfice maximal.

Le nombre de matériels que doit fabriquer l'entreprise pour réaliser un bénéfice maximal est 60.

- d) Calculons alors la valeur de ce bénéfice.

$$B(60) = -0,02(60)^3 + 2,1(60)^2 - 36(60) - 80 = -4\,320 + 7\,560 - 2\,160 - 80 = 1\,000$$

$$B(60) = \mathbf{1\,000 \text{ milliers de F CFA.}}$$