

Etude de fonctions

1) Parité d'une fonction

a- Fonction paire :

Une fonction f est dite paire si et seulement si $\forall x \in Df$ et $-x \in Df$, on a :
 $f(-x) = f(x)$

b- Fonction impaire :

Une fonction f est dite impaire si et seulement si $\forall x \in Df$ et $-x \in Df$, on a :
 $f(-x) = -f(x)$

2) Courbes symétriques :

a) Axe de symétrie :

La droite d'équation $x = a$ est dite **axe de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si :
 $f(2a - x) = f(x)$ ou $f(a + x)$ est paire ou $f(a + x) = f(a - x)$

b) Centre de symétrie :

Le point $I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est dit **centre de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si
 $f(2a - x) + f(x) = 2b$ ou $f(a + x) - b$ est paire ou $f(a + x) + f(a - x) = 2b$

N.B :

- Toute fonction paire admet l'axe $(y' \text{ o } y)$ comme axe de symétrie.
- Toute fonction impaire admet le point $O \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ (origine du repère) comme centre de symétrie.

c) Recherche de centre de symétrie et d'axe de symétrie :

Centre de symétrie :

Soit f une fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{\gamma x + \beta}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ où : $a; b; c; \gamma; \beta$ sont tous des réels avec : $a \neq 0$ et $\gamma x + \beta \neq 0$.

Si f peut se mettre sous la forme : $f(x) = a'x + b' + \frac{c'}{\gamma x + \beta}$

Alors le centre de symétrie à la courbe (C) de f à pour coordonnée : $I\left(\begin{smallmatrix} x_0 = \frac{-\beta}{\gamma} \\ y_0 = a'x_0 + b' \end{smallmatrix}\right)$

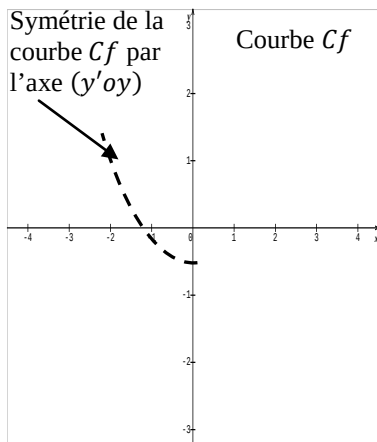
- Axe de symétrie :

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a \neq 0)$

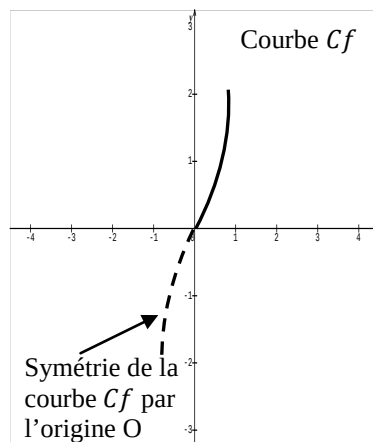
Si f peut se mettre sous la forme : $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

Alors l'axe de symétrie à la courbe (C) de f à pour équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Représentation



Ici l'axe $(y'oy)$ est axe de symétrie



Ici l'origine O du repère est centre de symétrie

3) Fonction réciproque

Bijection :

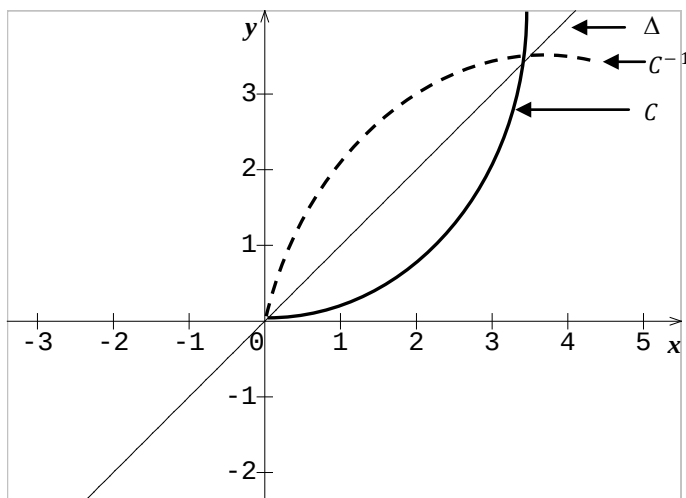
Une fonction f de E vers F est dite bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ E .

- **En Pratique :**

Une application f est bijective si et seulement si $\forall y \in F \exists ! x \in E$ on a : $f(x) = y$

- **Graphiquement**

Les courbes représentatives d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ) d'équation $y = x$.



Théorème :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f est une bijection de I sur $f(I)$. et admet une **bijection réciproque** f^{-1} de $f(I)$ sur I ayant même sens de variation que f

Les courbes Cf et Cf^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$

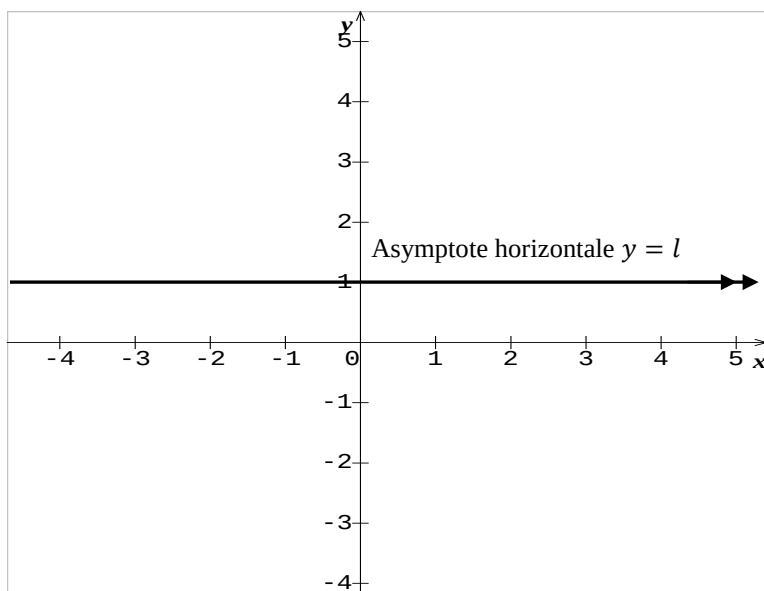
Si $M(x; y) \in Cf$ alors $M(y; x) \in Cf^{-1}$

Si $x = a$ est asymptote à C_f alors $y = a$ devient asymptote pour Cf^{-1}

4) Etude des branches infinies :**Notion d'asymptotes :**

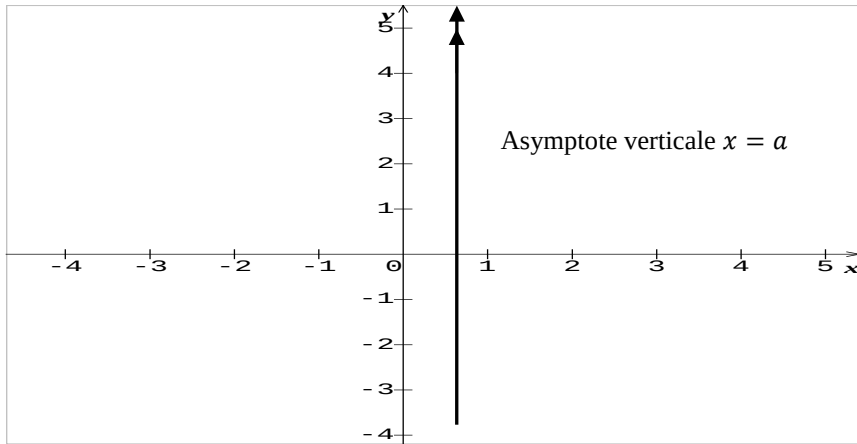
Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote **horizontale** à la courbe Cf .



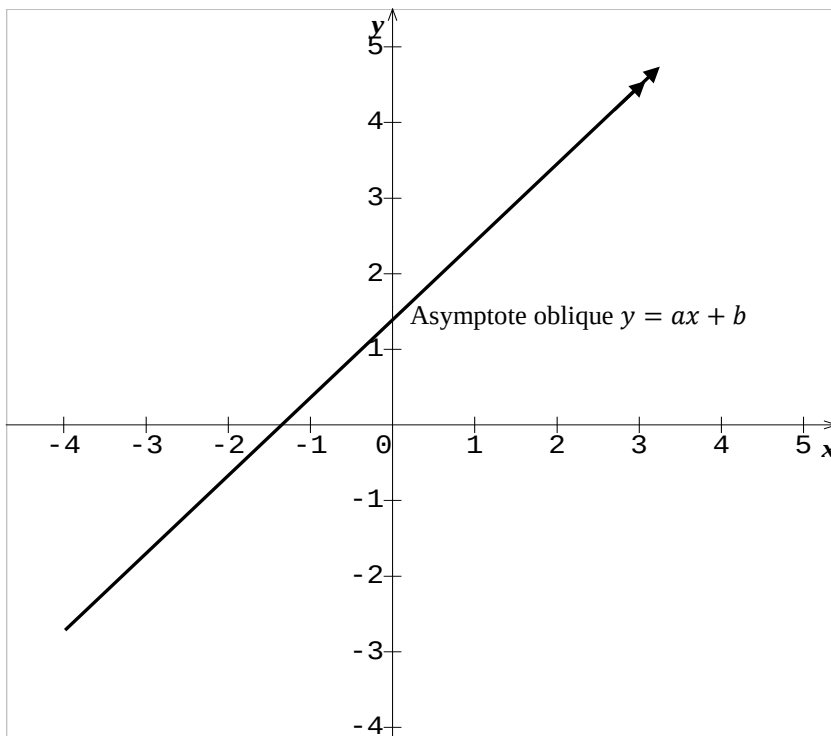
Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote **verticale** à la courbe Cf .



$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote **oblique** à la courbe C_f



Recherche d'asymptote oblique :

Il est évident de dire que si : $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$, alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

Ainsi pour chercher l'asymptote oblique, on procède comme suite :

$$\text{--Si } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - ax = b$$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est Asymptote oblique à la courbe (C) de f .

$$\text{--Si } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - ax = 0 \text{ ou } \infty$$

Alors la droite d'équation $y = ax$ est Asymptote oblique à la courbe (C) de f .

$$\text{--Si } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$$

Alors la courbe (C) de f admet l'axe ($y'oy$) comme branche parabolique.

$$\text{--Si } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Alors la courbe (C) de f admet l'axe ($x'ox$) comme branche parabolique.

N.B :

Si f est une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur d'une seule unité, alors on peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \text{quotient} + \frac{\text{Reste}}{\text{Diviseur}} = q(x) + \frac{R}{D(x)}$$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R}{D(x)} = 0$. Alors la droite d'équation $y = q(x)$ est appelée Asymptote oblique.

5) Position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique (Δ).

Pour Détermine la position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique (Δ), on étudie le signe de : $f(x) - y$. Ainsi :

- Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe (Cf) est en dessous de la droite (Δ).
- Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe (Cf) est au dessus de la droite (Δ).
- Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe (Cf) et la droite (Δ) sont confondues.

6) Intersection de la courbe avec les axes du repère :

a) Intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (ox)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$. Ainsi la courbe passe par les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'axe (ox).

b) Intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées (oy)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des ordonnées, on calcule l'ordonnée $y = f(o)$. Ainsi la courbe passe par $y = f(o)$ sur l'axe des (oy).

7) Plan d'étude d'une fonction :

Pour étudier une fonction f et représenter graphiquement sa courbe (Cf) dans le repère on adopte le plan suivant :

- Recherche du domaine de définition ou ensemble de définition Df .
- Etude ci-possible de la continuité.
- Etude ci-possible de la parité et de la périodicité afin de réduire le domaine d'étude puis de compléter la courbe de la fonction f par symétrie.
- Etude des limites aux bornes de l'ensemble de définition Df .
- Calcul de la dérivée $f'(x)$ puis étude du signe de $f'(x)$.

8) Fonctions économiques:

a- Coût total :

On appelle coût total, l'ensemble de dépenses effectuées par une entreprise. Il est noté par : $C_T(x)$.

b- Coût marginal :

On appelle coût marginal, la fonction dérivée du coût total. Il est noté par :

$$C_m(x) \text{ tel que : } C_m(x) = C'_T(x).$$

c- Coût moyen :

On appelle coût moyen, le rapport entre le coût total et la quantité de produit fabriqué. Il est

$$\text{noté par } C_{moy}(x) \text{ tel que : } C_{moy}(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{\text{coût total}}{\text{quantité de produit}}.$$

d- Le revenu ou recette :

On appelle revenu ou recette, le produit du prix unitaire par la quantité de produit fabriqué. Il est noté $R(x)$ tel que : $R(x) = PU \times x$ ou $R(x) = PU \times q$.

e- Le bénéfice ou profit :

On appelle bénéfice ou profit, la différence entre la recette et le coût total.

Il est noté par : $B(x) = R(x) - C_T(x)$.

NB : -Le bénéfice maximal est le maximum relatif de la fonction B .

- Le bénéfice minimal est le minimum relatif de la fonction B .

Exercices

Analyse et interprétation d'un tableau de variation.

- 1** Analyse puis interprète chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :
- les domaines de définition.
 - les limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes et possibilités d'asymptotes.
 - Donne l'allure de la courbe dans chaque cas.

1) f est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

De plus :

- La courbe (C_f) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- La courbe (C_f) admet l'axe ($y'Oy$) comme branche parabolique.

2) g est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	0	1	$-\infty$	

De plus : La courbe (C_g) admet l'axe ($y'Oy$) comme branche parabolique.

3) h est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$h'(x)$	+		+ 0 -		-
$h(x)$	-1	$+\infty$	$-\infty$	1	$+\infty$
					-1

4) p est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$p'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$
$p(x)$	2	0	$+\infty$	1	2

2 Dresse le tableau de variation de la fonction numérique donnée, partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

1) Pour f :

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f'(x) = 0$ admet les solutions $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$
- f n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée f' et les points $E_1\left(\frac{3}{2}; 4\right)$ et $E_2\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$ sont ses extremums
- Les droites $y = -2$ et $y = 3$ sont ses asymptotes respectives en $-\infty$ et $+\infty$

2) Pour g :

- g est définie sur $] -\infty ; 0] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty \right[$ et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et $\frac{5}{2}$
- g est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite $y = -x$ est à la fois asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0 ; -3)$ et $\left(\frac{5}{2} ; 1\right)$ sont sur la courbe de g .

3) Pour h :

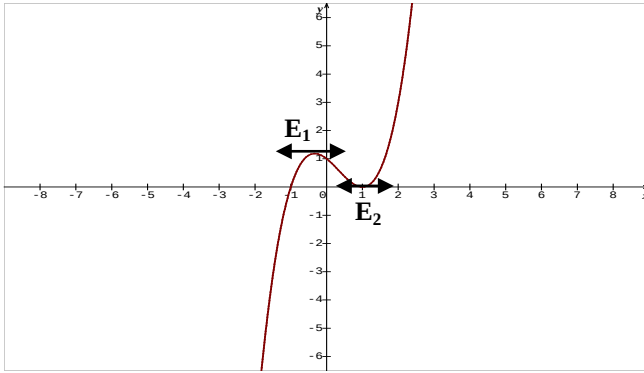
- h est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0 ; 2\}$ et continue sur $\mathbb{R}$.
- le point de coordonnées $(0,3 ; 0,4)$ est l'extremum maximum absolue de la courbe (Ch) et h est croissante sur $[0 ; 0,3] \cup [2 ; +\infty[$
- les droites d'équations $y = -1$ et $y = -2x + 1$ sont asymptotes de (Ch) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0 ; 0)$; $(1 ; 0)$; et $(2 ; -2)$ appartiennent à (Ch)

Analyse et interprétation d'un graphique.

3 a- Analyse chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

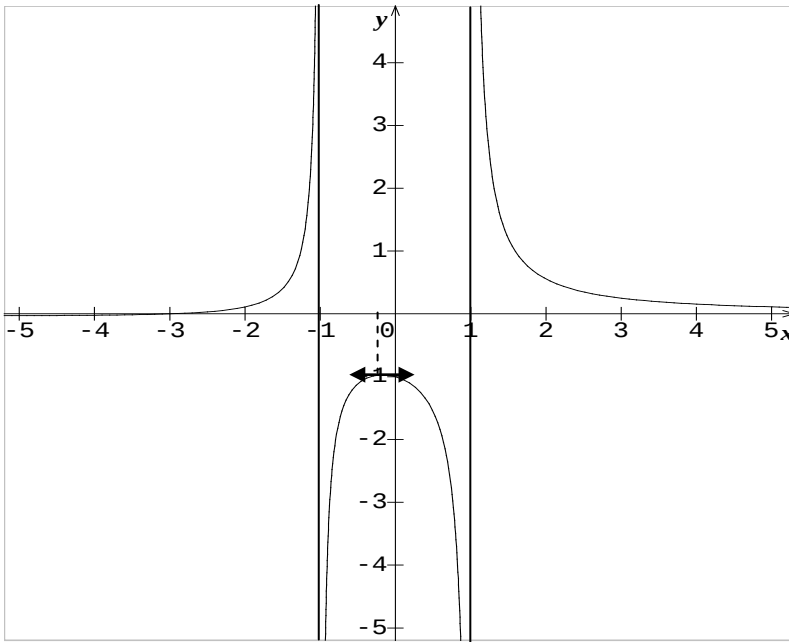
b- Détermine les réels a ; b ; c en utilisant le graphique.

1) f est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

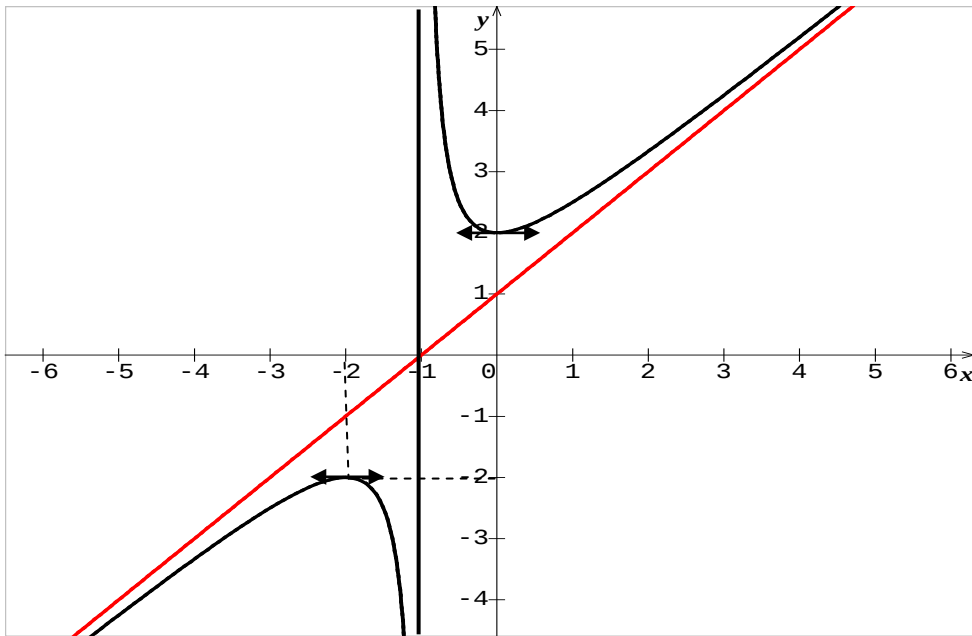


De plus : $E_1(-\frac{1}{3} ; \frac{32}{27})$ et $E_2(1 ; 0)$ sont les sommets de la courbe (Cf)

2) La fonction donnée est g telle que : $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$



3) La fonction donnée est h telle que : $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$



Fonctions d'initialisations.

4

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f .
- 2) Calcule les limites aux bornes de D_f .
- 3) Détermine les réels a ; b et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$
- 4) a- Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe C_f .
b- Détermine la position de la courbe C_f et de la droite (D) .
- 5) Montre que le point $I\left(-\frac{1}{0}\right)$ est centre de symétrie pour la courbe C_f .
- 6) Détermine une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -2
- 7) Calcule la dérivée f' de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f .
- 8) Construis la courbe C_f et la droite (D) dans le même repère.

5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine les réels a ; b ; c et d tel que :
 - a- La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.
 - b- La courbe C_f passe par le point $A\left(-\frac{1}{2}\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -5 .

2) Etudie la fonction f puis représenter sa courbe C_f dans le repère.

6

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Détermine les réels $a; b; c; m; n$ et p tel que :

- a- La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.
- b- La courbe C_f passe par les points $A\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ et $B\left(0, \frac{0}{3}\right)$ et admet au point $B\left(0, \frac{0}{3}\right)$ une tangente de coefficient directeur -3 .

7

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Etudie les variations de f .
- 2) Préciser les asymptotes à la courbe C_f .
- 3) Soit Δ l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, Détermine la position de C_f par rapport à Δ dans l'intervalle $]-1; 1[$.
- 4) Construis C_f .

8

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Etudie et construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 2) Montre que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (C_f)
- 3) Discute graphiquement suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$
- 4) Montre que la restriction h de f à l'intervalle $I = [2; +\infty[$ est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
- 5) Construis la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} de h dans le même repère que (C_f) .

Fonctions économiques.

9

Une entreprise fabrique et commercialise chaque mois x objets dont le coût total de production, exprimé en milliers de francs est donnée par $C(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 200$ avec $x \in [5; 60]$. On admet que toute la production est vendue chaque mois. On rappelle que le coût moyen unitaire de fabrication d'un objet est donné par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.

- 1) Calcule $C'_m(x)$ puis en déduis le tableau de variation de $C_m(x)$.
- 2) Pour quel nombre d'objets le coût moyen unitaire est il minimum ?

10 La production exprimée en tonne d'une entreprise sur les cinq dernières années est donnée par la fonction suivante $t \rightarrow f(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 36$ où t s'exprime en années.

- 1) Calcule la dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)$ puis en déduis le tableau de variation de f .
Donne une interprétation commerciale en utilisant le tableau.
- 2) Trace la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

11 Une entreprise fabrique des objets. On estime que le bénéfice, en centaine d'euros, réalisé par la production et la vente de x centaines d'objets est : $B(x) = 3x^3 + 33x - 54$ où $1 \leq x \leq 10$

- 1) Calcule $B'(x)$. En déduis le tableau de variations de B sur $[1; 10]$.
- 2) Quel est le nombre d'objets à produire, et à vendre, pour réaliser un bénéfice maximum ?
Précise la valeur de ce bénéfice.

12 On note $f(x)$ la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où x désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années.

On donne $f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$ où $x \in [0; +\infty[$.

- 1) Détermine les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x + 10}$ pour $x \in [0; +\infty[$.
- 2) a- Calcule la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.
b- Justifie que la population est croissante.
- 3) a- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 52$.
c- En déduis à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.
- 4) a- Quelle est la limite de f en $+\infty$?
b- En déduis une interprétation quant à la population de cette ville ;
- 5) Trace la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
Echelle : $1 \text{ cm} \rightarrow 10 \text{ ans}$ sur l'axe (ox) et $1 \text{ cm} \rightarrow 10.000 \text{ habitants}$ sur l'axe (oy) .

13 Une entreprise produit un certain nombre x de crayons de couleur par jour où :
(x est exprimé en millier).

Lorsque la quantité x est comprise entre 3 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euro est donné par : $C(x) = x^3 - 48x + 600$

L'entreprise vend chaque millier de crayons à 99 euros.

- 1) En supposant que toute la production du jour est vendue, Détermine la recette journalière en fonction de x que l'on notera $R(x)$.
- 2) Montre que la bénéfice $B(x)$, exprimé en euro, est donné par :
 $B(x) = -x^3 + 147x - 600$ avec $x \in [3; 10]$.
- 3) Calcule $B'(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B .
- 4) Etudie le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[3; 10]$. Dresse le tableau de variation de la fonction B .
- 5) En déduis le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ?

14

Le coût total de fabrication exprimé en FCFA de x objets est donné par la fonction :

$$C_T(x) = 200 + 100x - 0,01x^2.$$

- 1) a- Calcule le coût total pour 1000 objets puis 1001 objets.
b- En déduis l'augmentation du coût entraîné par la fabrication de cet objet supplémentaire au centième près.
- 2) a- Exprime en fonction de x la différence entre $C_T(x+1) - C_T(x)$ représentant l'augmentation du coût total de fabrication d'un objet supplémentaire, sachant que l'on a fabriqué x objets.

b- Calcule la dérivée $C'_T(x)$ de fabrication $C_T(x)$.
- 3) On pose $C_m(x) = C'_T(x)$
Calcule l'erreur commise $E(x)$ tel que $E(x) = C'_T(x) - C_m(x)$.
- 4) Le prix unitaire d'un objet est estimé à 200.
a- Exprime la recette $R(x)$ en fonction de x .
b- Etudie les variations du bénéfice $B(x)$.

Solutions

Analyse et interprétation d'un tableau de variation.

1

Analysons puis interpréter chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :

- 1) a- Domaine de définition.

$$Df = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$$

b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

La courbe (C_f) admet l'axe $(y'Oy)$ comme branche parabolique.

- 2) a- Domaine de définition.

$$Dg = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$$

b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (oy)

- 3) a- Domaine de définition.

$$Dh = \mathbb{R} - \{-2 ; 2\} =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$$

b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$$

Alors les droites d'équations $y = -1$ et $y = 3$ sont respectivement asymptotes horizontales en $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = +\infty.$$

Alors la droite d'équation $x = -2$ est asymptote Verticale

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty.$$

Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote Verticale

4) a- Domaine de définition.

$$Dp = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$$

b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 2$$

Alors la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} p(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} p(x) = +\infty. \quad \text{Alors la droite d'équation } x = 0 \text{ est asymptote Verticale}$$

2

Dressons le tableau de variation de la fonction numérique donnée, partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

1) Pour f :

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f'(x) = 0$ admet les solutions $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$
- f n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée f' et les points $E_1\left(\frac{3}{2}; 4\right)$ et $E_2\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$ sont ses extremums
- les droites $y = -2$ et $y = 3$ sont ses asymptotes respectives en $-\infty$ et $+\infty$

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	0	$-$
$f(x)$	-2	$-\frac{5}{2}$	4	3

2) Pour g :

- g est définie sur $] -\infty ; 0] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty \right[$ et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et $\frac{5}{2}$
- g est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite $y = -x$ est à la fois asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0 ; -3)$ et $\left(\frac{5}{2} ; 1\right)$ sont sur la courbe de g .

x	$-\infty$	-1		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0		+
$g(x)$	$-\infty$		-3		$+\infty$

3) Pour h :

- h est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0 ; 2\}$ et continue sur $\mathbb{R}$.
- le point de coordonnées $(0,3 ; 0,4)$ est l'extremum maximum absolue de la courbe (C_h) et h est croissante sur $[0 ; 0,3] \cup [2 ; +\infty[$
Les droites d'équations $y = -1$ et $y = -2x + 1$ sont asymptotes de (C_h) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$

x	$-\infty$	0		0,3		2		$+\infty$
$h'(x)$		-		+	0	-		+
$h(x)$	-1		$-\infty$		$0,4$		$-\infty$	$+\infty$

Analyse et interprétation d'un graphique.

3

- 1) f est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
a- Analysons chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.
 $Df = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{32}{27}$		0	$+\infty$

b- Déterminons les réels a ; b ; c et d en utilisant le graphique.

On sait que la formule explicite de f est le suivant : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

D'après le graphique, la courbe (C) passe par les points $E_1\left(\frac{-1}{3} ; \frac{32}{27}\right)$ et $E_2(1 ; 0) \Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{32}{27} \quad \text{et} \quad f(1) = 0$$

De même, la courbe (C) admet les points $E_1\left(\frac{-1}{3} ; \frac{32}{27}\right)$ et $E_2(1 ; 0)$ comme extremum $\Leftrightarrow$

$$f'\left(\frac{-1}{3}\right) = 0 \quad \text{et} \quad f'(1) = 0$$

La réunion de ces deux conditions donne le système suivant :

$$\begin{cases} f\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{32}{27} \\ f(1) = 0 \\ f'\left(\frac{-1}{3}\right) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b - 9c + 27d = 32 & (1) \\ a + b + c + d = 0 & (3) \\ a - 2b + 3c = 0 & (2) \\ 3a + 2b + c = 0 & (4) \end{cases}$$

L'équation (2) donne : $a + b + c + d = 0 \Rightarrow a = -b - c - d$

En remplaçant a par sa valeur dans les équations (1) ; (3) et (4), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} b - 2c + 7d = 8 \\ -3b + 2c - d = 0 \\ -b - 2c - 3d = 0 \end{cases}$$

En utilisant la méthode du Pivot de Gauss, la résolution de ce système donne :

$b = -1$; $c = -1$ et $d = 1$. Puis en remplaçant les valeurs de b ; c et d dans l'équation (2),
On obtient $a = 1$.

D'où $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

2) La fonction donnée est g telle que : $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$

a- Analysons chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

$$Dg = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty.$$

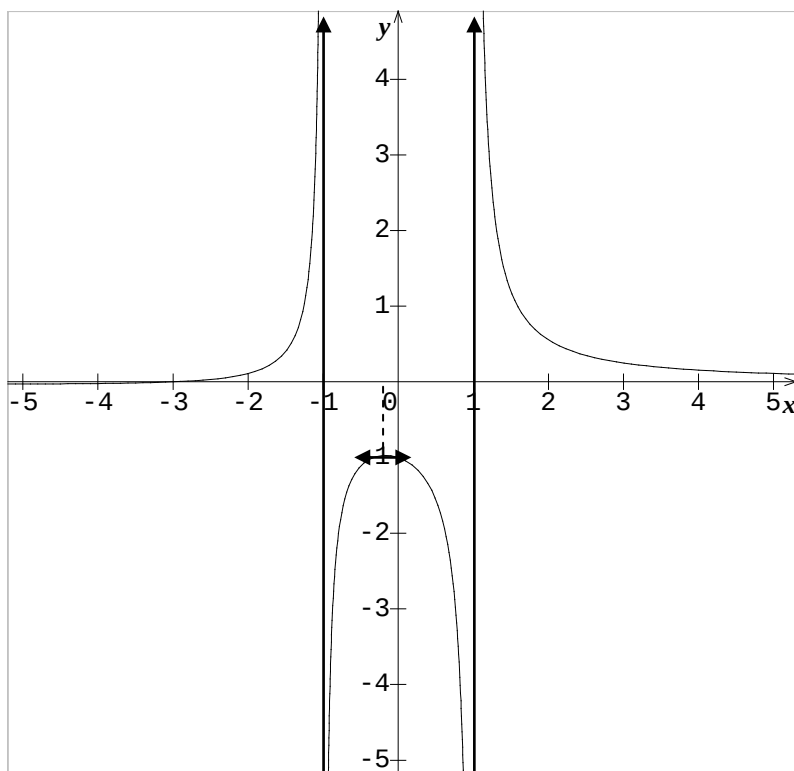
Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote Verticale

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty.$$

$$x \rightarrow 1^- \quad \quad \quad x \rightarrow 1^+$$

Alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote Verticale

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$g(x)$	0	$ $	$+$	-1	0



b- Déterminons les réels a ; b ; c et d en utilisant le graphique.

$$\text{Soit } g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$$

Puis que g admet les droites $x = -1$ et $x = 1$ comme asymptote verticale, alors on a :

$$cx^2 + d = (x - 1)(x + 1) \Leftrightarrow cx^2 + d = x^2 - 1 \quad \text{et par identification on a : } c = 1 \quad \text{et} \quad d = -1$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 1}$$

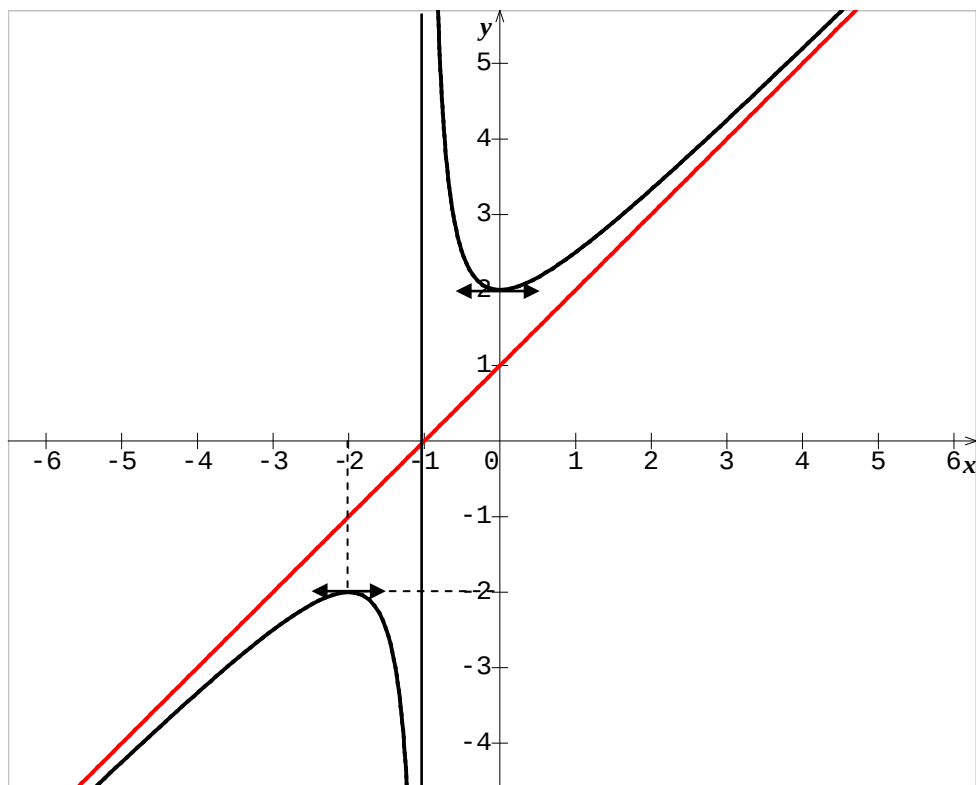
De même la courbe passe par le point $(0; -1) \Rightarrow g(0) = -1 \Leftrightarrow \frac{b}{-1} = -1 \Rightarrow b = 1$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{ax + 1}{x^2 - 1}$$

De même la courbe passe par le point $(-3; 0) \Rightarrow g(-3) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3a + 1}{8} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$$\text{D'où } g(x) = \frac{\frac{1}{3}x + 1}{x^2 - 1} \Leftrightarrow g(x) = \frac{x + 3}{3(x^2 - 1)}$$

3) La fonction donnée est h telle que : $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$



a- Analysons chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

$$Dh = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe (C) .

Cherchons ainsi les réels a et b . La droite passe par deux points $(-1 ; 0)$ et $(0 ; 1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{D'où } y = x + 1 \text{ est asymptote oblique à la courbe (C).}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = +\infty.$$

Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote Verticale

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
$h(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

b- Déterminons les réels a ; b ; c ; d et e en utilisant le graphique.

$$h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

Puis que h admet la droite $x = -1$ comme asymptote verticale, alors on a : $dx + e = x + 1$ et par identification on a : $d = 1$ et $e = 1 \Rightarrow h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$

La courbe (C) passe par les points $(-2 ; -2)$ et $(0 ; 2) \Rightarrow h(-2) = -2$ et

$$h(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{4a - 2b + c}{-1} = -2$$

$$\Leftrightarrow 4a - 2b + c = 2 \quad \text{et} \quad \frac{c}{1} = 2 \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow h(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x + 1}$$

De même $(-2 ; -2)$ est un extremum alors $h'(-2) = 0$ avec $h'(x) = \frac{ax^2 + 2ax + b - 2}{(x + 1)^2}$

$$h'(-2) = 0 \Leftrightarrow \frac{4a - 4a + b - 2}{(-2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow h(x) = \frac{ax^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (C). Alors $a = 1$

(Coefficient directeur de la droite $y = x + 1$). D'où $h(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Fonctions d'initialisations.

4 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Déterminons l'ensemble de définition D_f .

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

2) Calculons les limites aux bornes de D_f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

3) Déterminons les réels a ; b et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$

En effectuant la division Euclidienne $(x^2 + 2x + 2)$ par $(x + 1)$, on obtient :

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x + 1} \text{ et par identification avec } f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}, \text{ on a :}$$
$$a = 1; \quad b = 1 \quad \text{et} \quad c = 1$$

4) a- Montrons que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe C_f .

La droite (D) d'équation $y = ax + b = x + 1$ est asymptote à la courbe C_f si :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - y = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x + 1} \right) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

D'où la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe C_f .

b- Déterminons la position de la courbe C_f et de la droite (D).

Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = 0$. Le signe de

$f(x) - y$ Depend du signe de $x + 1$, car $1 > 0$. Posons $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$

D'après le tableau de signe de $f(x) - y$, on a :

$\forall x \in]-\infty ; -1[, f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in]-\infty ; -1[, (C)$ est en dessous de (D).

$\forall x \in]-1 ; +\infty[, f(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in]-1 ; +\infty[, (C)$ est au dessus de (D).

1) Montrons que le point $I\left(-1\right)$ est centre de symétrie pour la courbe C_f .

Le point $I\left(-1\right)$ est dit centre de symétrie si $f(2(-1) - x) + f(x) = 2(0)$

$$\Leftrightarrow f(-2 - x) + f(x) = 0$$

$$\text{Or } f(-x-2) = \frac{(-2-x)^2 + 2(-2-x) + 2}{(-2-x)+1} = \frac{4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 2}{-2-x+1} = \frac{x^2 + 2x}{-x-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(-x-2) + f(x) &= \frac{x^2 + 2x + 2}{-x-1} + \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1} = \frac{-x^2 - 2x - 2}{x+1} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} \\ &= \frac{-x^2 - 2x - 2 + x^2 + 2x + 2}{x+1} = \frac{0}{x+1} = 0. \end{aligned}$$

Puisque $f(-x-2) + f(x) = 0$ alors $I\left(-1\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C)

2) Déterminons une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -2

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$y = f'(-2)(x+2) + f(-2) \Rightarrow y = -2$$

3) Calculons la dérivée f' de la fonction f puis dressons le tableau de variation de f .

$$\text{Posons } u = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow u' = 2x + 2 \text{ et } v = x + 1 \Rightarrow v' = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u' \times v - v' \times u}{(v)^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (1)(x^2+2x+2)}{(x+1)^2} = f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

Or $\forall x \in Df, (x + 1)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du numérateur $x^2 + 2x$.

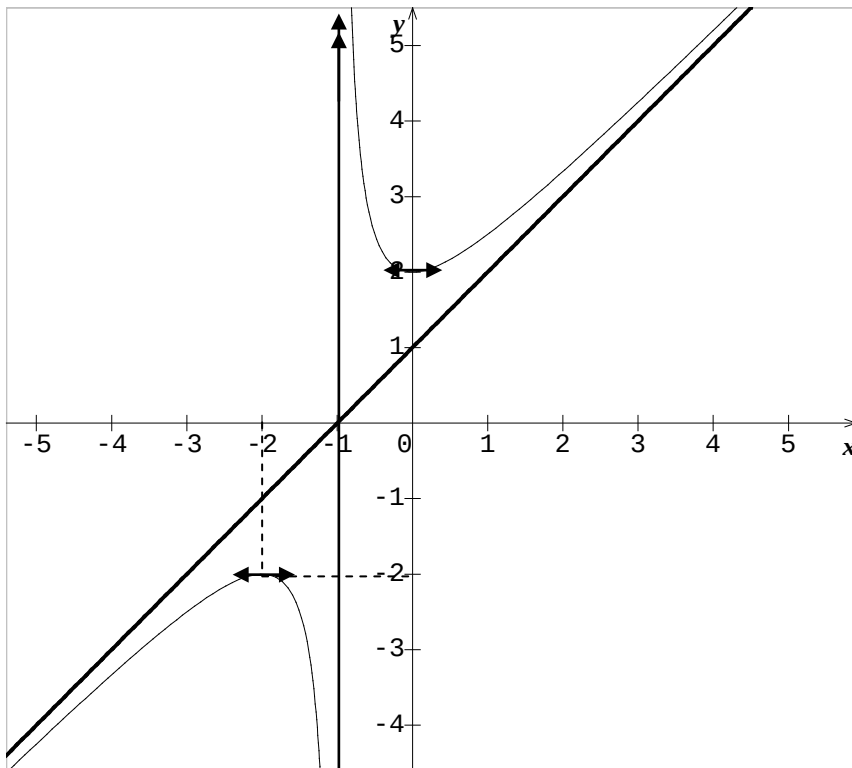
Posons $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -2$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

4) Construisons la courbe C_f et la droite (D) dans le même repère.

Ainsi on a la représentation suivante :



5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Déterminons les réels a ; b ; c et d tel que :

a- La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.

$$\text{Alors } x^2 + cx + d = (x - 2)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 + cx + d = x^2 - x - 2$$

$$\text{Par identification, on a : } c = -1 \quad \text{et} \quad d = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2}$$

b- La courbe C_f passe par le point $A\left(-\frac{1}{2}\right)$, Alors $f(1) = -2 \Leftrightarrow \frac{1 + a + b}{-2} = -2 \Leftrightarrow 1 + a + b = 4 \Rightarrow a + b = 3$ **(1)**

C_f admet au point $A\left(-\frac{1}{2}\right)$ une tangente de coefficient directeur $-5 \Rightarrow f'(1) = -5$ avec

$$f'(x) = \frac{x^2(-a-1) + x(-4-2b) + b-2a}{(x^2 - x - 2)^2} \quad \text{alors } f'(1) = -5 \Leftrightarrow \frac{-3a - b - 5}{4} = -5$$

$$\Leftrightarrow 3a + b = 15$$
 (2)

Formons ainsi le système avec les équations **(1)** et **(2)** $\Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b = -3 \\ 3a + b = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -a - b = -3 \\ 2a = 12 \Rightarrow a = 6 \end{matrix}$

$$\text{et } b = -3. \text{ D'où } f(x) = \frac{x^2 + 6x - 3}{x^2 - x - 2}$$

2) Etudions la fonction f puis représenter sa courbe C_f dans le repère.

$$Df = \mathbb{R} - \{-1; 2\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Alors les droites d'équations $y = 1$ est asymptotes horizontales en $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote Verticale

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote Verticale

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x - 3}{x^2 - x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-7x^2 + 2x - 15}{(x^2 - x - 2)^2}$$

Or $\forall x \in Df, (x^2 - x - 2)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du numérateur $-7x^2 + 2x - 15$.

$$\text{Posons } -7x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow \Delta = -416 \Rightarrow \Delta < 0$$

Alors $\forall x \in Df, f'(x)$ à même signe que $a = -7 < 0$. Donc $f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow$	$+\infty \searrow$	$+\infty \searrow$	1

6

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Déterminons les réels $a; b; c; m; n$ et p tel que :

a- La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.

Alors $mx^2 + nx + p = (x - 2)(x + 1) \Leftrightarrow mx^2 + nx + p = x^2 - x - 2$ par identifications,

$$\text{on a : } m = 1; n = -1 \text{ et } p = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 - x - 2}$$

b- La courbe C_f passe par les points $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, alors $f(0) = 3 \Leftrightarrow \frac{c}{-2} = 3 \Rightarrow c = -6$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx - 6}{x^2 - x - 2}$$

La courbe C_f admet au point $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, une tangente de coefficient -3 alors $f'(0) = -3$ avec

$$f'(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2(-a - b - 6) + x(-4a + 12b) - 2b - 6}{(x^2 - x - 2)^2}.$$

$$\text{Alors } f'(0) = -3 \Leftrightarrow \frac{-2b - 6}{4} = -3$$

$$\Leftrightarrow -2b - 6 = -12 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + 3x - 6}{x^2 - x - 2}$$

La courbe C_f admet au point $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ Alors $f'(1) = -1 \Leftrightarrow \frac{1 + a + 3 - 6}{1 - 1 - 2} = -1 \Leftrightarrow a - 2 = 2$

$$\Rightarrow a = 4. \text{ D'où } f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 3x - 6}{x^2 - x - 2}$$

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Etudions les variations de f puis précisons les asymptotes à la courbe C_f .

$$Df = \mathbb{R} - \{-1; 1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \text{ Alors on a une possibilité d'asymptote oblique.}$$

La recherche de l'asymptote oblique nous conduit à $y = \frac{1}{2}x$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty.$$

Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote Verticale

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty.$$

Alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote Verticale

$$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{[2(x^2 - 1)]^2}$$

Or $\forall x \in Df, [2(x^2 - 1)]^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du

numérateur $x^4 + 6x^2 + 9$. Alors effectuons un changement de variable en posant $X = x^2$.

Alors $x^4 + 6x^2 + 9$ dévient : $X^2 + 6X + 9 = (X + 3)^2 > 0$. D'où $\forall x \in Df, f'(x) > 0$

Conclusion : $\forall x \in Df$, la fonction f est strictement croissante.

2) Soit Δ l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, c'est-à-dire $y = \frac{1}{2}x$.

Déterminons la position de C_f par rapport à Δ dans l'intervalle $] -1; 1[$.

Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{x^2 - 1} = 0$.

Etudions le signe de $-4x$ et $x^2 - 1$. Posons $-4x = 0$ et $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x = -1$

ou $x = 1$ D'où le tableau de signe est le suivant :

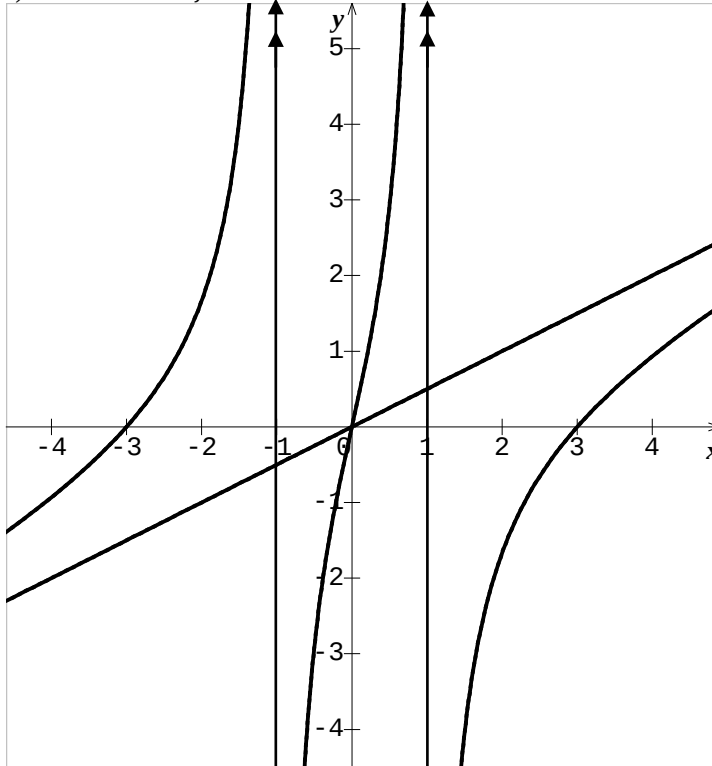
x	-1	0	1
$f(x) - y$	-	0	+

D'après le tableau de signe de $f(x) - y$, on a :

$\forall x \in]-1 ; 0[, f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in]-1 ; 0[$, (C) est en dessous de (D).

$\forall x \in]0 ; 1[, f(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in]0 ; 1[$, (C) est au dessus de (D).

3) Construisons Cf.



8

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Etudions et construisons la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Déterminons l'ensemble de définition Df.

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{(2x)^2}$$

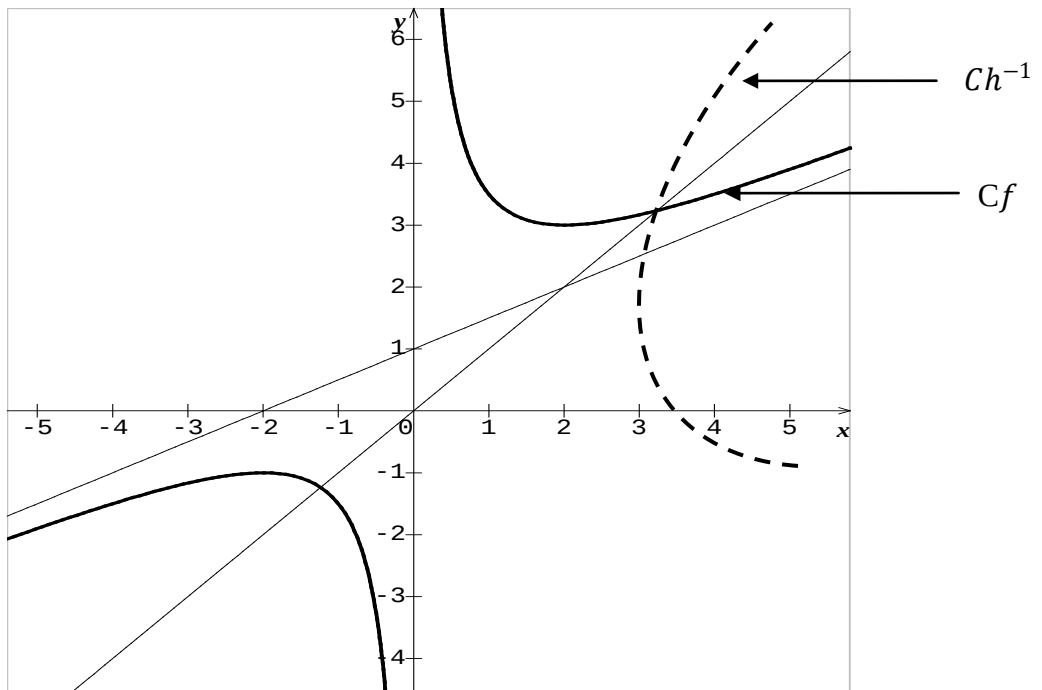
Or $\forall x \in Df, (2x)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du

Numérateur $2x^2 - 8$. Posons $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$	3	$+\infty$

Construisons la courbe (C).



2) Montrons que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (Cf)

Cherchons d'abord le point d'intersection des deux asymptotes. Pour cela formons le système

avec les deux asymptotes ($x = 0$ asymptote verticale) et ($y = \frac{1}{2}x + 1$ asymptote oblique)

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{.Ainsi le point } (0 ; 1) \text{ est centre de symétrie pour la}$$

courbe (C) de f si et seulement si : $f(2(0) - x) + f(x) = 2(1) \Leftrightarrow f(-x) + f(x) = 2$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 2(-x) + 4}{2(-x)} = \frac{x^2 - 2x + 4}{-2x} = \frac{-x^2 + 2x - 4}{2x}$$

$$\Rightarrow f(-x) + f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 4}{2x} + \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \frac{4x}{2x} = 2$$

Puisque $f(-x) + f(x) = 2$ alors le point $(0 ; 1)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C)

3) Discutons graphiquement suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$

Pour cela, exprimons m en fonction de x :

$$x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = f(x)$$

En menant la parallèle à l'axe des abscisses, on a :

- $\forall m \in]-\infty ; -1[$, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 négatives
- $\forall m \in]-1 ; 3[$, l'équation n'admet pas de solution et par conséquent $S = \emptyset$
- $\forall m \in]-1 ; 3[$, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 positives
- $\forall m \in \{-1 ; 3\}$ l'équation admet une solution double x_0 telle que $x_0 < 0$ si $k = -1$ et $x_0 > 0$ si $k = 3$

1) Montrons que la restriction h de f à l'intervalle $I = [2 ; +\infty[$ est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

En observant le tableau de variation de f , on remarque que $\forall x \in [2 ; +\infty[$, la restriction h de f est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $I = [2 ; +\infty[$ vers l'intervalle : $J = [3 ; +\infty[$.

Par conséquent h réalise une bijection de l'intervalle $I = [2 ; +\infty[$ vers l'intervalle $J = [3 ; +\infty[$

- 2) Construisons la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} de h dans le même repère que (C).

NB : N'oublier jamais que la courbe représentative d'une fonction et celle de sa bijection réciproque son symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$. Ainsi la construction de la courbe la fonction réciproque h^{-1} de h visualisée sur la figure.

Fonctions économiques.

9

Une entreprise fabrique et commercialise chaque mois x objets dont le coût total de production, exprimé en milliers de francs est donnée par $C(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 200$ avec $x \in [5 ; 60]$. On admet que toute la production est vendue chaque mois. On rappelle que le coût moyen unitaire de fabrication d'un objet est donné par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.

- 1) Calculons $C'_m(x)$ puis en déduisons le tableau de variation de $C_m(x)$.

$$C'_m(x) = \left(\frac{C(x)}{x} \right)' = \frac{C'(x) \times x - 1 \times C(x)}{(x)^2} \text{ avec } C(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 200 \text{ et } C'(x) = x + 5$$

$$\Rightarrow C'_m(x) = \frac{(x+5) \times x - 1 \times \left(\frac{x^2}{2} + 5x + 200 \right)}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{2x^2} = \frac{(x-20)(x+20)}{2x^2}$$

$\forall x \in [5 ; 60]$, $\frac{(x+20)}{2x^2} > 0$. Alors le signe de $C'_m(x)$ dépend du signe de $x - 20$.

Posons $x - 20 = 0 \Rightarrow x = 20$

D'où le tableau de variation de C_m est le suivant :

x	5	20	60
$C'_m(x)$	-	0	+
$C_m(x)$	47,5	25	38,3

- 2) Déterminons le nombre d'objets pour le quel le coût moyen unitaire est il minimum.

D'après le tableau, le coût moyen unitaire est minimum si $x = 20$ objets.

10 La production exprimée en tonne d'une entreprise sur les cinq dernières années est donnée par la fonction suivante $t \rightarrow f(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 36$ où t s'exprime en années.

- 1) Calculons la dérivée $f'(t)$ puis en déduisons le tableau de variation de la fonction f .

$$f(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 36 \Rightarrow f'(t) = -t + 2. \text{ Posons } f'(t) = 0 \Leftrightarrow -t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

t	0	2	5
$f'(t)$		+	-
$f(t)$	36	38	33,5

Donnons une interprétation commerciale en utilisant le tableau.

D'après le tableau de variation de f :

- $\forall t \in [0 ; 2[$; la production de cette entreprise est croissante.
- $\forall t \in]2 ; +\infty]$; la production de cette entreprise est décroissante.

11 Une entreprise fabrique des objets. On estime que le bénéfice, en centaine d'euros, réalisé par la production et la vente de x centaines d'objets est : $B(x) = 3x^3 + 33x - 54$ où $1 \leq x \leq 10$

1) Calculons $B'(x)$ puis en déduisons le tableau de variations de B sur $[1 ; 10]$.

$$B(x) = 3x^3 + 33x - 54 \Rightarrow B'(x) = 9x^2 + 33$$

$$B'(x) = 9x^2 + 33 \Rightarrow \forall x \in [1 ; 10], B'(x) > 0$$

$$B(1) = 36 \text{ et } B(10) = 3276$$

D'où le tableau de variation de B est le suivant :

x	1	10
$B'(x)$		+
$B(x)$	36	3276

2) Déterminons le nombre d'objets à produire, et à vendre, pour réaliser un bénéfice maximum.

D'après le tableau, le nombre d'objets à produire, et à vendre, pour réaliser un bénéfice maximum est $x = 10$ objets et la valeur de ce bénéfice est : $B(10) = 3276$ F

On note $f(x)$ la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où x désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années.

On donne $f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$ où $x \in [0 ; +\infty[$.

1) Déterminons les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x + 10}$ pour $x \in [0 ; +\infty[$.

$f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$. La divisions Euclidienne de $(60x + 40)$ par $(x + 10)$ donne pour quotient

$$q = 60 \text{ et pour reste } R = -560. \text{ Alors } f(x) = \text{quotient} + \frac{\text{Reste}}{\text{Diviseur}} \Rightarrow f(x) = 60 + \frac{-560}{x + 10}$$

et par comparaisons avec $f(x) = a + \frac{b}{x + 10}$, on a : $a = 60$ et $b = -560$

2) a- Calculons la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.

$$f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10} \Rightarrow f'(x) = \frac{560}{(x + 10)^2}.$$

b- Justifions que la population est croissante.

D'après la question : a) , $f'(x) > 0$. Alors $\forall x \in [0 ; +\infty[$, f est strictement croissante.

D'où la population est croissante.

3) a- Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 52$.

$$f(x) = 52 \Leftrightarrow \frac{60x + 40}{x + 10} = 52 \Leftrightarrow 60x + 40 = 52(x + 10) \Leftrightarrow 8x = 480 \Rightarrow x = 60 \text{ et } S = \{60\}$$

b- En déduisons l'année à partir de la quelle la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.

D'après la question : b), la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants au bout de 60000 années.

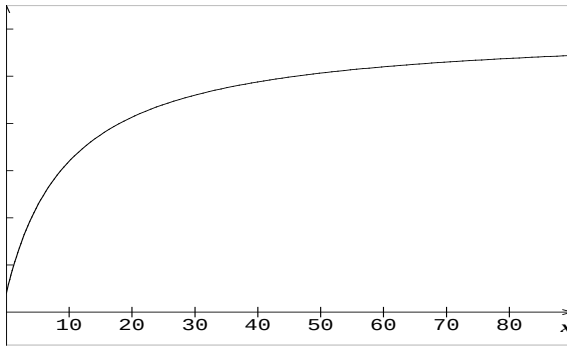
4) a- Déterminons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{60x + 40}{x + 10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{60x}{x} = 60$$

b- En déduisons une interprétation quant à la population de cette ville.

Ainsi on dira que la population seuil de cette ville est de 60 habitants.

5) Traçons la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).



13 Une entreprise produit d'un certain nombre x de crayons de couleur par jour où : (x exprimé en millier).

Lorsque la quantité x est comprise entre 3 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euro est donné par : $C(x) = x^3 - 48x + 600$

L'entreprise vend chaque millier de crayons à 99 euros.

1) En supposant que toute la production du jour est vendue, déterminons la recette journalière en fonction de x que l'on notera $R(x)$.

On sait que : $\text{Recette} = \text{Prix unitaire} \times x \Rightarrow R(x) = 99 \times x = 99x$. D'où $R(x) = 99x$

2) Montrons que la bénéfice $B(x)$, exprimé en euro, est donné par :

$$B(x) = -x^3 + 147x - 600 \text{ avec } \in [3 ; 10].$$

On sait que : $\text{Bénéfice} = \text{Recette} - \text{Coût Total} \Rightarrow B(x) = 99x - x^3 + 48x - 600 \Rightarrow$

$$B(x) = -x^3 + 147x - 600 \text{ avec } \in [3 ; 10].$$

3) Calculons $B'(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B .

$$B(x) = -x^3 + 147x - 600 \Rightarrow B'(x) = -3x^2 + 147$$

4) Etudions le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[3 ; 10]$ puis dressons le tableau de variation de la fonction B .

$$\text{Posons } B'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 147 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = -7 \notin [3 ; 10] \text{ ou } x = 7$$

D'où le tableau de variation de B est le suivant :

x	3	β	7	α	10
$B'(x)$		+	0	-	
$B(x)$	-186		86		-130

5) En déduisons le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal.

D'après le tableau, le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal est $x = 7$ et le bénéfice maximal est $B(7) = 86$.

14 Le coût total de fabrication exprimé en FCFA de x objets est donné par la fonction :

$$C_T(x) = 200 + 100x - 0,01x^2.$$

1) a- Calculons le coût total pour 1000 objets puis 1001 objets.

$$C_T(1000) = 90200 \text{ F} \quad \text{et} \quad C_T(1001) = 90279,99 \text{ F}$$

b- En déduisons l'augmentation du coût entraîné par la fabrication de cet objet supplémentaire au centième près.

$$C_T(1001) - C_T(1000) = 90279,99 - 90200 = 79,99 \approx 80 \text{ F}$$

2) a- Exprimons en fonction de x la différence entre $C_T(x+1) - C_T(x)$ représentant l'augmentation du coût total de fabrication d'un objet supplémentaire, sachant que l'on a fabriqué x' objets.

$$\begin{aligned} C_T(x+1) - C_T(x) &= [200 + 100(x+1) - 0,01(x+1)^2] - [200 + 100x - 0,01x^2] \\ &= -0,02x + 99,99 \\ \Rightarrow C_T(x+1) - C_T(x) &= -0,02x + 99,99 \end{aligned}$$

b- Calculons la dérivée $C'_T(x)$ de fabrication $C_T(x)$.

$$C_T(x) = 200 + 100x - 0,01x^2 \Rightarrow C'_T(x) = 100 - 0,02x$$

3) On pose $C_m(x) = C'_T(x)$

Calculons l'erreur commise $E(x)$ tel que $E(x) = C'_T(x) - C_m(x)$.

$$E(x) = C'_T(x) - C_m(x) = (100 - 0,02x) - (100 - 0,02x) = 0$$

4) Le prix unitaire d'un objet est estimé à 200.

a- Exprimé la recette $R(x)$ en fonction de x .

$$\text{Recette} = \text{Prix unitaire} \times x \Rightarrow R(x) = 200 \times x = 200x$$

b- Etudions les variations du bénéfice B .

$$\text{Bénéfice} = \text{Recette} - \text{coût de production} \Rightarrow B(x) = 200x - (200 + 100x - 0,01x^2)$$

$$\Rightarrow B(x) = 200x - 200 - 100x + 0,01x^2 = 0,01x^2 + 100x - 200$$

$$B \text{ est dérivable sur } [0; +\infty[\Rightarrow B'(x) = 0,02x + 100 \Rightarrow \forall x \in [0; +\infty[; B'(x) > 0$$

Ainsi le tableau de variation sur $[0; +\infty[$ est le suivant :

x	0	$+\infty$
$B'(x)$		+
$B(x)$	-200	$+\infty$