

BEMBUS-MALI

AU SERVICE DE LA NATION

« Le savoir est la plus grande des richesses : on le donne sans réussir à l'épuiser »

Bemba dit Bamba TRAORE

Enseignant Chercheur, économètre, gestionnaire de la politique économique

Tél : (00223) 69 - 50-23-20/ 76 - 43-95-33 mël : bbtraoremali@yahoo.fr

Ce document est vendu en ligne 5 000 FCFA

Points essentiels du cours de Mathématiques

Maths TLL

1	Calcul numérique
2	Calcul de limite
3	Dérivée de fonction
4	Suites numériques
5	Statistique / un caractère

Maths TSS

- 1 Calcul de limite
- 2 Dérivée de fonction
- 3 Calcul de primitive
- 4 Fonction de Log et e^x
- 5 Dénombrement et Probabilité
- 6 Statistique / 2 Caractères

Programme de mathématiques

11^e Lettres

1.- Calculs dans IN

-Opérations dans l'ensemble des entiers naturels (diviseurs d'un entier, multiples d'un entier)

‘Exercices pratiques utilisant le PGCD ou le PPCM d'entiers naturels

2.- Activités graphiques

- Fonction affine et droite non parallèle à l'axe des ordonnées

- Interprétation des coefficients : Pente et Ordonnée à l'origine

- fonctions affines par intervalles – Applications

-Représentation point par point des fonctions usuelles définies par : $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow \frac{1}{x}$;
 $x \rightarrow \sqrt{x}$

- Résolution graphique de $f(x) = 0$, $f(x) = y$ où f est une fonction usuelle

- Résolution du système $\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = b \end{cases}$

-Résolution des systèmes du type $\begin{cases} f(x) \geq a \\ g(x) \geq b \end{cases}$

Application à la résolution des problèmes pratiques de mise en équation

3.- Fonction polynôme du second degré

-Forme canonique

– Application à la représentation graphique d'une fonction trinôme quelconque.

– Forme factorisée : Équation du second degré

– Somme et Produit des racines.

– Signe du trinôme – Inéquation du second degré

– Problèmes du second degré. (Problèmes pratiques tirés dans la vie courante)

4.- Notion d'ensemble

-Intersection d'ensembles finis

-Union d'ensembles finis

-Ensembles complémentaires

-Cardinal d'un ensemble fini

Opérations sur les cardinaux : A et B étant deux sous ensembles d'un ensemble E :

$\text{Card}(A \cup B)$, $\text{Card } \bar{A}$ où $\bar{A}$ est le complémentaire de A

Maths TLL

1.- CALCUL NUMERIQUE : PGCD et de PPCM

Le nombre premier :

Un nombre premier est un entier naturel divisible par 1 et lui-même. Par exemple :

1	2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	49	53	59	61

La décomposition en produit de nombres premiers : exemples

• $6 = 3 * 2$	• $10 = 5 * 2$	• $20 = 2 * 2 * 5 = 2^2 * 5$
$64 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 2^6$		• $4862 = 11 * 13 * 17 * 2$

Les multiples d'un nombre :

- Les multiples de 2 sont : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; ...
- Les multiples de 10 sont : 10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50 ; ...
- Les multiples de 50 sont : 50 ; 100 ; 150 ; 200 ...

Exercice 1 : Décomposez en produit de nombres premiers :

a) 500	b) 3025	c) 52	d) 702	e) 12
--------	---------	-------	--------	-------

Le Plus Grand Commun Diviseur PGCD

Exemple 1 : calculer le PGCD des nombres 12 et 20

Réponse : Je décompose : $12 = 2 \times 2 \times 3$ et $20 = 2 \times 2 \times 5 \rightarrow PGCD(12; 20) = 2 * 2 = 4$

Exemple 2 : calculer le PGCD des nombres 25 et 15

Réponse : Je décompose : $25 = 5 \times 5$ et $15 = 3 \times 5 \rightarrow PGCD(25; 15) = 5$

Exemple 3 : calculer le PGCD des nombres 60 et 24

Réponse : Je décompose : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ et $24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$

$\rightarrow PGCD(60; 24) = 2 \times 2 \times 3 = 12$

Exemple 4 : calculer le PGCD des nombres 5 et 7

Réponse : le PGCD de deux nombres premiers égal à : 1

$\rightarrow PGCD(5; 7) = 1$

Exercice : Calculer

$PGCD(3; 2) = \dots\dots\dots$	$PGCD(109; 29) = \dots\dots\dots$
$PGCD(160; 200) = \dots\dots\dots$	$PGCD(205; 306) = \dots\dots\dots$

Le Plus Petit Commun Multiple PPCM

Exemple 1 : calculer le PPCM des nombres 12 et 20

Réponse :

1^{ère} méthode :

Les multiples de 12 sont : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ; 84 ; 96

Les multiples de 20 sont : 20 ; 40 ; 60 ; 80 ; 100

Le plus petit multiple est de 60 alors $\rightarrow PPCM(12; 20) = 60$

2^{ème} méthode :

Je décompose $12 : 12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$. Puis Je décompose $20 : 20 = 2^2 \times 5$

$PPCM(12; 20) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

Exemple 2 : Calculer le PPCM des nombres 2 et 3

Réponse : Retenons que le PPCM de deux nombres premiers égal à leur produit

Les multiples de 2 sont : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10

Les multiples de 3 sont : 3 ; 6 ; 9 ; 12 ..

Le plus petit multiple commun est : 6

Exercice 1 : Calcul numérique

1°/ a) Décomposez en produit de facteurs premiers les nombres 160 et 224

b) En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 160 et 224.

c) On suppose que le PGCD de 224 et 160 est 32. Donnez la forme irréductible égale de la fraction $\frac{160}{224}$

2°/ Un photographe doit réaliser une exposition en présentant ses œuvres sur des panneaux contenant chacun le même nombre de photos de paysage et de photos portrait. Il dispose de 160 photos de paysage et 224 portraits.

a) Combien peut-il réaliser au maximum de panneaux en utilisant toutes les photos?

b) Combien chaque panneaux contient-il de paysages et de portraits ?

Solution 1 :

1°/ a) Décomposons en produit de facteurs premiers les nombres 160 et 224 :

$$\begin{array}{r|l}
 160 & 2 \\
 80 & 2 \\
 40 & 2 \\
 20 & 2 \\
 10 & 2 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 & 160 = 2^5 \times 5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 224 & 2 \\
 112 & 2 \\
 56 & 2 \\
 28 & 2 \\
 14 & 2 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 & 224 = 2^5 \times 7
 \end{array}$$

b) Déduisons : $PGCD(160 ; 224) = 2^5 = 32$

$$PPCM(160; 224) = 2^5 \times 5 \times 7 = 1120$$

c) On suppose que $PGCD(160 ; 224) = 32$. Donnons la forme irréductible égale de la

$$\text{fraction } \frac{160}{224} : \quad \frac{160}{224} = \frac{32 \times 5}{32 \times 7} = \frac{5}{7}$$

2°/ 160 photos de paysage et 224 photos portraits

a) Le nombre de panneaux qu'il peut réaliser au maximum en utilisant toutes les photos est le plus grand diviseur commun de 160 et 224 soit 32 (**c'est-à dire :**

$$PGCD(160 ; 224) = 32 \text{ photos})$$

b) Le nombre de photos que contient chaque panneau est :

$$\text{-le nombre de paysages : } \frac{160}{32} = 5$$

$$\text{-le nombre de portrait : } \frac{224}{32} = 7$$

Exercice 2 : calcul numérique

1°/

a) Décomposez en produit de facteurs premiers les nombres 175 et 275

b) En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 175 et 275.

c) On suppose que le PGCD de 175 et 275 est 25. Donnez la forme irréductible égale de la fraction $\frac{175}{275}$

2°/ Un Directeur d'école doit constituer des salles de classes contenant chacune le même nombre de garçons et de filles. Il dispose un effectif de 175 garçons et 275 filles.

a) Combien peut-il réaliser au maximum de salles de classes en utilisant tous les effectifs?

b) Combien chaque salles de classe contient-il de garçons et de filles ?

Module 2 : Calcul de limites

Les fonctions étudiées en TL sont :

$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$	$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{kx+p}$
------------------------	----------------------------	---------------------------------

- Fonction polynôme :**

$f(x) = a_0 + a_1 * x^1 + a_2 * x^2 + \dots + a_n * x^n$ est définie sur $\mathbb{R} :]-\infty; +\infty[$

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ est définie sur $\mathbb{R} :]-\infty; +\infty[$

$f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 2x + 1$ est définie sur $\mathbb{R} :]-\infty; +\infty[$

- Fonction rationnelle :**

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ou $f(x) = \frac{ax^2+bx+k}{cx+d}$ est définie ssi $cx + d \neq 0 :]-\infty; -\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c}; +\infty[$

Application : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$A(x) = x^2 - 3x + 2$	$F(x) = \frac{7x+2}{x-1}$
$B(x) = \frac{x+3}{x}$	$G(x) = \frac{x-8}{x^2+1}$
$C(x) = \frac{x}{x+1}$	$H(x) = \frac{7x+2}{2-x}$
$D(x) = \frac{x+5}{x-3}$	$I(x) = \frac{x-2}{x+2}$

Solution

$A(x) = x^2 - 3x + 2$ est définie sur $\mathbb{R}$ $Df =]-\infty; +\infty[$

$B(x) = \frac{x+3}{x}$ est définie si $x \neq 0$ $Df =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

$C(x) = \frac{x}{x+1}$ est définie si $x \neq -1$ $Df =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$D(x) = \frac{x+5}{x-3}$ est définie si $x \neq 3$ $Df =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

$F(x) = \frac{7x+2}{x-1}$ est définie si $x \neq 1$ $Df =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

$G(x) = \frac{x-8}{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ $Df =]-\infty; +\infty[$ car $x^2 + 1$ n'est pas factorisable donc $\neq 0$

$H(x) = \frac{7x+2}{2-x}$ est définie si $x \neq 2$ $Df =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

$I(x) = \frac{x-2}{x+2}$ est définie si $x \neq -2$ $Df =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

1.- Le calcul des limites

Calcul de limite au point x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = f(x_0) = l$

Retenons bien ceci : Calculer la limite au point x_0 revient à calculer si possible $f(x_0)$.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 3 * 2 - 5 = 1$

Exemple de calcul de limites au point x_0

Enoncé	Solution
$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)$	$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 3 * 2 - 5 = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1)$	$\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = 0 - 1 = -1$
$\lim_{x \rightarrow -1} (-x + 3)$	$\lim_{x \rightarrow -1} (-x + 3) = -(-1) + 3 = 4$
$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{0-1}{0+1} = -1$
$\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 - x + 2)$	$\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 - x + 2) = 3(-2)^2 - (-2) + 2 = 16$
$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-x+2}{-x+2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-x+2}{-x+2} \right) = \frac{0-0+2}{-0+2} = 1$
Calculer la limite au point x_0 revient à calculer $f(x_0)$.	

Limite à l'infini $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x_0) = f(\pm\infty) = l$

Retenons bien ceci : Calculer la limite à l'infini $\pm\infty$ revient à remplacer x (du plus haut degré) par l'infini si possible.

Note : $(-\infty)^2 = +\infty$; $(+\infty)^2 = +\infty$; $(-\infty)^3 = -\infty$; $(+\infty)^3 = +\infty$

Retenons que :

• L'infini + un nombre = infini	$\pm\infty + 5 = \pm\infty$
• L'infini sur un nombre = infini	$\frac{\pm\infty}{5} = \pm\infty$
• un nombre sur infini = 0	$\frac{5}{\pm\infty} = 0$ le dénominateur croît plus vite que le numérateur

Exemple de calcul de limites à $\pm\infty$

La limite à l'infini d'une fonction = à la limite du monôme le plus degré.	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = (+\infty)^2 = +\infty$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x}{x}\right) = -1$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-5}{x^3-x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-5}{4x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{4x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{4}\right) = \frac{+\infty}{4} = +\infty$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-7}{x+3}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x}\right) = 3$	

Les formes indéterminées $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0)$

Le Calcul de $f(x_0)$ peut être compliqué ce qui conduit à des formes indéterminées.

Les 4 formes indéterminées (retenues au niveau secondaire)

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$-\infty + \infty$	$0 \times \infty$
---------------	-------------------------	--------------------	-------------------

Comment lever l'indétermination (niveau TLL)

- Factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier pour la limite en x_0
- Prendre le monôme le plus haut degré pour la limite en ∞ .

Exercices : Après avoir levé l'indétermination calculer la limite de chacune des fonctions.

Enoncés	Solutions
$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x^2-x}\right)$ Réponse : -1	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x^2-x}\right) = \frac{0}{0}$ F Ind Levons l'indétermination : on factorise le dénominateur puis on simplifie : $\frac{x}{x^2-x} = \frac{x}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x^2-x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x-1}\right) = -1$
$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3-x}{x^2-9}\right)$ Réponse : $\frac{1}{6}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3-x}{x^2-9}\right) = \frac{0}{0}$ F Ind . Levons l'indétermination : on factorise le dénominateur puis on simplifie : $\frac{3-x}{x^2-9} = \frac{3-x}{(x-3)(x+3)} = \frac{-1}{x+3}$ $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3-x}{x^2-9}\right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x+3}\right) = \frac{1}{6}$

Calcul de limite dont le résultat donne $\frac{\text{nombre}}{0} = \pm\infty$

Retenons que :

Un nombre sur 0 égal infini. Quel infini ?	$\frac{5}{0^+} = +\infty ; \frac{-5}{0^+} = -\infty ; \frac{5}{0^-} = -\infty ; \frac{-5}{0^-} = +\infty$
---	---

Réchauffement 1 :

Calcule la limite $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1-x}{x-5} \right) = \frac{1-5}{5-5} = \frac{-5}{0}$ (Un nombre sur 0 égal infini) on étudie la limite à droite $x \rightarrow 5^+$ et la limite à gauche $x \rightarrow 5^-$. Cela revient à étudier le signe du dénominateur $ax+b$.

Rappelons que : $ax + b$ est du signe de « a » à droite et le contraire à gauche.

→ $x - 5$ le signe à droite est + alors 0^+ et le signe à gauche est - alors 0^-

Calcule la limite $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1-x}{x-5} \right) = \frac{-5}{0}$ on calcule la limite à droite ($x \rightarrow 5^+$) et la limite à gauche ($x \rightarrow 5^-$).

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \left(\frac{1-x}{x-5} \right) = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \left(\frac{1-x}{x-5} \right) = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

Réchauffement 1 :

Calcule la limite $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+1}{6-2x} \right) = \frac{3+1}{6-6} = \frac{4}{0}$ (Un nombre sur 0 égal infini)

On étudie la limite à droite $x \rightarrow 3^+$ et la limite à gauche $x \rightarrow 3^-$.

Cela revient à étudier le signe du dénominateur « $ax+b$ ».

Rappelons que : $ax + b$ est du signe de « a » à droite et le contraire à gauche.

→ $6 - 2x$ le signe à droite est - alors 0^- et le signe à gauche est + alors 0^+

Calcule la limite $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+1}{6-2x} \right) = \frac{4}{0}$ on calcule la limite à droite ($x \rightarrow 3^+$) et la limite à gauche ($x \rightarrow 3^-$).

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x+1}{6-2x} \right) = \frac{+4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x+1}{6-2x} \right) = \frac{+4}{0^+} = +\infty$$

Retenons bien

Le binôme « $ax + b$ » est du signe de « a » à droite et le contraire à gauche.

Ex : $1 - 3x$ le signe est (-) à droite et le signe est (+) à gauche

Ex : $6 + 2x$ le signe est (+) à droite et le signe est (-) à gauche

Exemple à faire : Calcule la limite

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-x}{-x+2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{7-x}{4-2x} \right)$
$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+5}{x-1} \right)$	$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x+1}{5x+10} \right)$
$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x}{x-2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-3}{x} \right)$
$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2x-5}{1-x} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x+2}{x} \right)$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x-3}{x} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+3}{-x} \right)$

2.- Les 3 asymptotes à la courbe

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = b$. Alors $y = b$ est asymptote horizontale AH

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = \infty$. Alors $x = x_0$ est asymptote verticale AV

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$. Alors $y = ax + b$ est asymptote oblique AO.

Exercice 1 :

On considère la fonction numérique f définie par :

a.- $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ b.- $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ c.- $f(x) = \frac{x^2-x+3}{2-x}$

Déterminer (si possible) les asymptotes à la courbe de f .

Solution 1 :

a.- $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ est définie sur $\mathbb{R} :]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2) = 3(-\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = 3(+\infty)^2 = +\infty$$

Il n'existe pas d'asymptote à cette courbe.

b.- $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-3\} =]-\infty ; -3[\cup]-3 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} \right) = 2 \text{ alors } y = 2 \text{ A H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\frac{2x-1}{x+3} \right) = \frac{2(-3)-1}{-3+3} = \frac{-7}{0^-} = +\infty \text{ alors } x = -3 \text{ A V.}$$

Il existe deux asymptote : $y = 2$ et $x = -3$.

c.- $f(x) = \frac{x^2-x+3}{2-x}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x+3}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty \text{ il n'y a pas A H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2-x+3}{2-x} \right) = \frac{4-2+3}{2-2} = \frac{5}{0^+} = +\infty \text{ alors } x = 2 \text{ A V.}$$

Existence d'asymptote oblique car le degré du numérateur dépasse celui du dénominateur de 1.
On effectue la division euclidienne :

$x^2 - x + 3$	$2 - x$	$f(x) = -x - 1 + \frac{5}{2-x}$ $y = -x - 1 \text{ asymptote oblique.}$
$-x^2 + 2x$	$-x - 1$	
$x + 3$		
$-x + 2$		
5		

Il existe deux asymptote : $x = 2$ et $y = -x - 1$.

Sujets d'application sur le calcul de limite

Exercice 1 :

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de f .

2-/ Calculez la limite de f aux bornes du domaine de définition

3-/ En déduire si possible les asymptotes à la courbe de f .

Solution 1 :

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ est définie sur $\mathbb{R} :]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = (-\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = (+\infty)^2 = +\infty$$

Il n'existe pas d'asymptote à cette courbe.

Exercice 2 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de f .

2-/ Calculez la limite de f aux bornes du domaine de définition

3-/ En déduire si possible les asymptotes à la courbe de f .

Solution 2

$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{3\} =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 1 \quad \text{alors } y = 1 \text{ A H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x+1}{x-3} \right) = \frac{+3+1}{3-3} = \frac{4}{0^-} = -\infty \quad \text{alors } x = 3 \text{ A V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x+1}{x-3} \right) = \frac{+3+1}{3-3} = \frac{4}{0^+} = +\infty \quad \text{alors } x = 3 \text{ A V.}$$

Il existe deux asymptotes : $y = 1$ et $x = 3$.

Exercice 3 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{6x+1}{4-2x}$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de f .

2-/ Calculez la limite de f aux bornes du domaine de définition

3-/ En déduire si possible les asymptotes à la courbe de f .

Solution

$f(x) = \frac{6x+1}{4-2x}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x+1}{4-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x}{-2x} \right) = -3 \quad \text{alors } y = -3 \text{ A H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{6x+1}{4-2x} \right) = \frac{12+1}{4-4} = \frac{13}{0^+} = +\infty \quad \text{alors } x = 2 \text{ A V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{6x+1}{4-2x} \right) = \frac{12+1}{4-4} = \frac{13}{0^-} = -\infty \quad \text{alors } x = 2 \text{ A V.}$$

Il existe deux asymptotes : $y = -3$ et $x = 2$.

Exercice 4 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x-2}$

1-/ Détermine l'ensemble de définition de f .

2-/ Calcule la limite de f aux bornes du domaine de définition

3-/ On pose $(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$. Calculer les réels a , b et c .

En déduire si possible les asymptotes à la courbe de f .

Solution 4

$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x-2}$ est définie sur $\mathbf{R} - \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \text{ il n'y a pas A H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty \text{ il n'y a pas A H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2+2x-1}{x-2} \right) = \frac{4+4-1}{2-2} = \frac{7}{0^+} = +\infty \text{ alors } x = 2 \text{ A V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2+2x-1}{x-2} \right) = \frac{4+4-1}{2-2} = \frac{7}{0^-} = -\infty \text{ alors } x = 2 \text{ A V.}$$

Existence d'asymptote oblique car le degré du numérateur dépasse celui du dénominateur de 1.
On effectue la division euclidienne :

$x^2 + 2x - 1$	$x - 2$	$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2}$ $y = x + 1 \text{ asymptote oblique.}$
$-x^2 + 2x$	$x + 1$	
$4x - 1$		
$-x + 2$		
1		

Il existe deux asymptote : $x = 2$ et $y = x + 1$.

Exercice 5 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{5x^2-x+2}{1-x}$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de f .

2-/ Calculez la limite de f aux bornes du domaine de définition

3-/ On pose $(x) = ax + b + \frac{c}{1-x}$. Calculer les réels a , b et c .

En déduire si possible les asymptotes à la courbe de f .

Module 3 : Dérivée d'une fonction

1.- Dérivée simple

Dérivée d'une constante est nulle :

$$f(x) = 7 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 0$$

Dérivée de « kx » est égale à « k »

$$f(x) = 7x \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 7$$

$$f(x) = x \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 1$$

$$f(x) = -x \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = -1$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = 6x + 3 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 6$$

$$f(x) = -x + 1 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = -1$$

Dérivée de « kx^n » est égale à « $k.n.x^{n-1}$ »

$$f(x) = 5x^2 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 10x$$

$$f(x) = 4x^3 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 12x^2$$

$$f(x) = 2x^5 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 10x^4$$

$$f(x) = x^2 - x + 2 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 2x - 1$$

$$f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x + 1 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 12x^2 - 14x + 5$$

Dérivée de « $\frac{1}{x}$ » est égale à « $-\frac{1}{x^2}$ »

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x} \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{5}{x} \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = -\frac{5}{x^2}$$

$$f(x) = 3x^2 + 5x - \frac{1}{x} + 3 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 6x + 5 + \frac{1}{x^2}$$

Dérivée de « $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ » est égale à « $-nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$ »

$$f(x) = \frac{1}{x^5} \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = -\frac{5}{x^6}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{10}} \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = -\frac{10}{x^{11}}$$

Dérivée de « $\sqrt{x}$ » est égale à « $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ »

2.- Dérivée de fonction

$$f(x) = u^n \Rightarrow \text{dérivée } f'(x) = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

$$f(x) = (2x + 3)^2 \Rightarrow \text{c'est de la forme } [u^n]' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

$$\text{on pose } u = 2x + 3 \text{ et } u' = 2 \text{ et } n = 2$$

$$f'(x) = 2 * 2 * (2x + 3)^{2-1} \Rightarrow f'(x) = 4 (2x + 3)^1$$

$$f(x) = (7 - x)^5 \Rightarrow \text{c'est de la forme } [u^n]' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

$$\text{on pose } u = 7 - x \text{ et } u' = -1 \text{ et } n = 5$$

$$f'(x) = 5 * (-1) * (7 - x)^{5-1} \Rightarrow f'(x) = -5 (7 - x)^4$$

$$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow \text{dérivée } f'(x) = \frac{u' * v - v' u}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{2x+3}{5x+1} \Rightarrow \text{c'est de la forme } \left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' * v - v' u}{v^2}$$

$$\text{on pose } u = 2x + 3 \text{ et } u' = 2 \Rightarrow v = 5x + 1 \text{ et } v' = 5$$

$$f'(x) = \frac{2(5x+1) - 5(2x+3)}{(5x+1)^2} = \frac{10x+2-10x-15}{(5x+1)^2} = \frac{-13}{(5x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-13}{(5x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2+5x-1}{x+3} \Rightarrow \text{c'est de la forme } \left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' * v - v' u}{v^2}$$

$$\text{on pose } u = x^2 + 5x - 1 \text{ et } u' = 2x + 5 \Rightarrow v = x + 3 \text{ et } v' = 1$$

$$f'(x) = \frac{(2x+5)(x+3) - (1)(x^2+5x-1)}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x+5x+15-x^2-5x+1}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+16}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+6x+16}{(x+3)^2}$$

$$f(x) = u * v \Rightarrow \text{Dérivée } f'(x) = u' * v + v' u$$

$$f(x) = (2x - 1)(4 - 7x) \Rightarrow \text{c'est de la forme } [u * v]' = u' * v + v' u$$

$$\text{on pose } u = 2x - 1 \text{ et } u' = 2 \Rightarrow v = 4 - 7x \text{ et } v' = -7$$

$$f'(x) = (2)(4 - 7x) + (-7)(2x - 1) = 8 - 14x - 14x + 7 = 15 \Rightarrow f'(x) = 15$$

$$f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow \text{Dérivée } f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f(x) = \sqrt{2x+3} \Rightarrow \text{c'est de la forme } [\sqrt{u}]' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\text{on pose } u = 2x + 3 \text{ et } u' = 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}$$

Exemple	
$f(x) = \frac{3x+2}{7x-1}$	On pose $u = 3x+2 \Rightarrow u' = 3$; $v = 7x-1 \Rightarrow v' = 7$ de la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$ alors $f'(x) = \frac{3(7x-1)-7(3x+2)}{(7x-1)^2} = \frac{-17}{(7x-1)^2}$
$f(x) = \frac{x^2-x+3}{x^2-1}$	On pose $u = x^2-x+3 \Rightarrow u' = 2x-1$; $v = x^2-1 \Rightarrow v' = 2x$ de la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$ alors $f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2-1)-(2x)(x^2-x+3)}{(x^2-1)^2} = \frac{\dots\dots\dots}{(x^2-1)^2}$
$f(x) = 5x + 6 + \frac{2}{x-3}$	On pose $u = x-3 \Rightarrow u' = 1$ de la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$ $f'(x) = 5 - \frac{2}{(x-3)^2}$
$f(x) = (2x^2 - x + 3)^7$	On pose $u = 2x^2 - x + 3 \Rightarrow u' = 4x - 1$ de la formule $(u^n)' = n * u' * u^{n-1}$ $f'(x) = 7 * (4x - 1)(2x^2 - x + 3)^6$

Exercice 1 : Réchauffement

1.- $f(x) = (5x + 3)^2$ la dérivée $f'(x) = (2)(5)(5x + 3)^1 = 10(5x + 3)$

2.- $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^4$ la dérivée $f'(x) = (4)(2x - 2)(x^2 - 2x + 3)^3$

3.- $f(x) = \frac{1}{(3x^2-7x)} = (3x^2 - 7x)^{-1}$ la dérivée $f'(x) = (-1)(6x - 7)(3x^2 - 7x)^{-2}$
 $f'(x) = \frac{7-6x}{(3x^2-7x)^2}$

4.- $f(x) = \frac{4x-5}{1-x}$ Calculer $f'(x)$? C'est la forme $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$ on pose $u = 4x - 5$
alors $u' = 4$ et $v = 1 - x \Rightarrow v' = -1$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{4(1-x)-(-1)(4x-5)}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$

5.- $f(x) = \frac{x^2-5x}{3x-1}$ Calculer $f'(x)$? C'est la forme $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$ on pose $u = x^2 - 5x$
alors $u' = 2x - 5$ et $v = 3x - 1 \Rightarrow v' = 3$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(2x-5)(3x-1)-(3)(x^2-5x)}{(3x-1)^2} = \frac{-17x+20}{(3x-1)^2}$

3.- Equation de la tangente

$$T: y = f'(x_0) (x - x_0) + f(x_0)$$

Exercice 1 :

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de f .

2-/ Calculez la fonction dérivée de f .

3-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse $x_0 = 1$

Solution :

1.-/ La fonction $f(x) = x^2 - 2x + 3$ est définie sur $\mathbb{R}$ $Df =]-\infty; +\infty[$

2.-/ $f(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$

3.-/ Equation de la tangente $T: y = f'(x_0) (x - x_0) + f(x_0)$

$$f(1) = 1^2 - 2 * 1 + 3 = 2 \text{ et } f'(1) = 2 * 1 - 2 = 0$$

$$T: y = 0 * (x - 1) + 2 \Rightarrow T: y = 2$$

Exercice 2 :

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de f .

2-/ Calculez la fonction dérivée de f .

3-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse $x_0 = 0$

Solution :

1.-/ La fonction $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ est définie si $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$Df =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

2.-/ $f(x) = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

3.-/ Equation de la tangente $T: y = f'(x_0) (x - x_0) + f(x_0)$

$$f(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1 \text{ et } f'(0) = \frac{2}{(0+1)^2} = 2$$

$$T: y = (2) * (x - 0) + (-1) \Rightarrow T: y = 2x - 1$$

Exercice 3 :

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.

2-/ Calculez la fonction dérivée de chacune d'elles.

3-/

a-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse $x_0 = 1$

b-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de g au point B d'abscisse $x_1 = 0$

Solution 3 :

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

1°/ Déterminons l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions :

$$Df = IR =]-\infty; +\infty[; Dg = IR - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

2°/ Calculons la fonction dérivée de chacune d'elles

$$f'(x) = 2x - 2 ; g'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

3°/

a) Ecrivons une équation de la tangente à la courbe C de f au point A d'abscisse $x_0 = 1$

$$Y = f'(1)(x - 1) + f(1) ; \quad f'(1) = 0 ; f(1) = 2 \quad \text{donc} : Y = 2$$

b) Ecrivons une équation de la tangente à la courbe de g au point B d'abscisse $x_1 = 0$

$$Y = g'(0)(x-0) + g(0) ; g'(0) = 2 ; g(0) = -1 \quad \text{donc} : Y = 2x - 1$$

Exercice 4 :

On considère les fonctions numériques f ; g ; h et k définies par :

$$f(x) = -3x^2 + 7x - 3 \quad \quad \quad g(x) = \frac{x+2}{x}$$

$$h(x) = -x^2 - 3x + 5 \quad \quad \quad \text{et} \quad \quad \quad k(x) = \frac{x+3}{x-1}$$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.

2-/ Calculez la fonction dérivée de chacune d'elles.

3-/

a-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse $x_0 = 1$

b-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de g au point B d'abscisse $x_1 = -1$

c-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de h au point C d'abscisse $x_2 = 2$

d-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de k au point D d'abscisse $x_3 = 0$

4.- Etudes de fonction

1^{ère} étape : domaine de définition

2^{ème} étape : limites aux bornes

3^{ème} étape : dérivée de la fonction

4^{ème} étape : sens de variation de f et Tableau de variation

5^{ème} étape : – Les asymptotes à la courbe

Etudes de fonction polynôme

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{ou} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

1°/ L'ensemble de définition de $f \Rightarrow Df =]-\infty; +\infty[$

Les limites de $f(x)$ aux bornes de cet ensemble

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a x^n) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a x^n)$$

2°/ La dérivée $f'(x)$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

3° / L'étude du signe de la dérivée : $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1$ et x_2

Le signe du binôme : $ax + b \Rightarrow$ le signe de « a » à droite et le contraire à gauche

Le signe du trinôme : $ax^2 + bx + c \Rightarrow$ le signe de « a » à l'extérieur de x_1 et x_2 et le contraire entre x_1 et x_2 .

Si $f'(x) > 0$ alors $f(x)$ est croissante.

Si $f'(x) < 0$ alors $f(x)$ est décroissante.

4° / Le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$+\infty$

5°/L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = x_0$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

6° / Le tableau des valeurs

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$								

7° / Trace dans le même repère la courbe (C) et la tangente (T)

Etudes de fonction rationnelles $\rightarrow f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Soit la fonction numérique f définie par		
$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$	$f(x) = \frac{6x+1}{4-2x}$	$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

- 1.- Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2.- Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. En déduire si possible les asymptotes à la courbe de f .
4. Calcule la dérivée f' de f puis étudie son signe.
5. Dresse le tableau de variation de f .
6. Trace la courbe (Cf) dans un repère orthonormé $(O; i; j)$.

Solution $\rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

1.- L'ensemble de définition de $f \rightarrow Df =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

2.- Les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

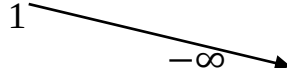
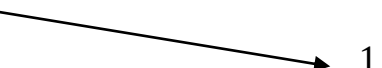
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right) = \frac{x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x+1}{x-3} \right) = \frac{4}{0^-} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x+1}{x-3} \right) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

3. Les asymptotes à la courbe de $f \rightarrow AV \ x = 3$ et AH $y = 1$

4. La dérivée f' de f puis étudie son signe

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3} \rightarrow f'(x) = \frac{-4}{(x-3)^2} \rightarrow f'(x) < 0$$

5. Le tableau de variation de f

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	1 	$+\infty$	 1

Solution $\rightarrow f(x) = \frac{6x+1}{4-2x}$

Solution $\rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Etudes de fonction rationnelles $\Rightarrow f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{kx+p}$

Soit la fonction numérique f définie par		
$f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}$	$f(x) = \frac{2(x^2-x+1)}{x-1}$	$f(x) = \frac{-x^2+3x-4}{x-2}$

- 1.- Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2.- Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montre qu'il existe trois réels a , b et c telle que $f(x) = q x + r + \frac{t}{kx+p}$
4. Montre que la droite (D) d'équation $y = q x + r$ est asymptote à (Cf) .
5. Calcule la dérivée f' de f puis étudie son signe.
6. Dresse le tableau de variation de f .
7. Trace la courbe (Cf) dans un repère orthonormé $(O; i; j)$.

Solution $\Rightarrow f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}$

1.- L'ensemble de définition de $f \Rightarrow Df =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

2.- Les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x-1}{x+1} \right) = \frac{x^2}{x} = x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-x-1}{x+1} \right) = \frac{x^2}{x} = x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2-x-1}{x+1} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x^2-x-1}{x+1} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

3. Montre qu'il existe trois réels a , b et c telle que $f(x) = a x + b + \frac{c}{x+1}$

$$f(x) = a x + b + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2+bx+ax+b+c}{x+1} = \frac{ax^2+x(a+b)+b+c}{x+1} = \frac{x^2-x-1}{x+1}$$

Par indentification $\Rightarrow a = 1$; $a + b = -1$ et $b + c = -1$

On trouve : $a = 1$; $b = -2$; $c = -3$

$$f(x) = x - 2 - \frac{3}{x+1}$$

4. Montre que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (Cf) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 - \frac{3}{x+1} - (x - 2) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x+1} \right) = 0 \text{ alors } y = x - 2 \text{ est AO}$$

Les asymptotes à la courbe de $f \Rightarrow$ AV $x = -1$ et AO $y = x - 2$

5. Calcule la dérivée f' de f puis étudie son signe.

$$f(x) = x - 2 - \frac{3}{x+1} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1+3}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 16 = -12 \Rightarrow$ le trinôme est du même signe que « a ».

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

Module 4 : suites numériques

Une suite numérique est un classement de nombre dans un ordre logique.

Par exemple :

- 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ;
- 12 ; 10 ; 8 ; 6 ; ...

La suite numérique peut être : arithmétique, géométrique ou quelconque

- **Arithmétique :**

Exemple :

5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 19, 21 → est arithmétique de raison 2

10 ; 7 ; 4 ; 1 ; -2 ; -5 → est arithmétique de raison -3

5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 → est arithmétique de raison 0

- **Géométrique :**

2 ; 6 ; 18 ; 54 → est géométrique de raison 3

50 ; 10 ; 2 ; 0,4 ; 0,08 → est géométrique de raison 1/5

- **Quelconque : ni arithmétique et ni géométrique.**

Ce qu'il faut retenir de la suite arithmétique ?

Soit une suite de n nombre : $X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_4 ; X_5 ; \dots ; X_n$

Elle est dite arithmétique ssi : $X_2 - X_1 = X_3 - X_2 = X_4 - X_3 = \dots = X_n - X_{n-1} = R$ (raison)

(la différence des deux termes consécutifs est constante qu'on appelle la raison R)

X_{n+1} en fonction de X_n	X_n en fonction de X_1	Retenons bien
$X_2 = X_1 + R$; $X_3 = X_2 + R$; $X_4 = X_3 + R$ $X_{n+1} = X_n + R$	$X_2 = X_1 + R$; $X_3 = X_2 + R = X_1 + 2 R$ $X_4 = X_3 + R = X_1 + 3 R$ $X_n = X_1 + (n - 1) R$	La raison $R = \frac{U_n - U_p}{n - p}$ L'expression générale $U_n = U_0 + n * r$ ou $U_n = U_1 + (n - 1) * r$
Somme des n premiers termes d'une SA de 1^{er} terme U_p : $S_n = \frac{(n-p+1)(U_n + U_p)}{2}$		

Ce qu'il faut retenir de la suite géométrique ?

Soit une suite de n nombre : $X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_4 ; X_5 ; \dots ; X_n$

Elle est dite géométrique ssi : $X_2 / X_1 = X_3 / X_2 = X_4 / X_3 = \dots = X_n / X_{n-1} = Q$ (raison)

(le rapport des deux termes consécutifs est constant qu'on appelle la raison Q)

X_{n+1} en fonction de X_n	X_n en fonction de X_1	Retenons bien
$X_2 = X_1 * Q$; $X_3 = X_2 * Q$; $X_{n+1} = X_n * Q$	$X_2 = X_1 * Q$; $X_3 = X_2 * Q = X_1 * Q^2$ $X_n = X_1 * Q^{(n-1)}$	La raison $\frac{U_n}{U_p} = q^{n-p}$ L'expression générale $U_n = U_o * q^n$ ou $U_n = U_1 * q^{n-1}$
Somme des n premiers termes d'une S G : $S_n = U_p \frac{q^{n-p+1} - 1}{q-1}$		
Le 1 ^{er} terme : $U_0 = \frac{U_n}{q^n}$ ou $U_1 = \frac{U_n}{q^{n-1}}$		

Suite Arithmétique SA et suite géométrique SG

	Progression arithmétique 1 ^{er} terme U_p dernier terme U_n raison R	Progression géométrique 1 ^{er} terme U_p dernier terme U_n raison Q ($Q > 0$)
Formule U_n	$U_{n+1} = U_n + R$	$U_{n+1} = Q * U_n$
L'expression générale U_n	$U_n = U_p + (n - p) * R$	$U_n = U_p * Q^{n-p}$
La raison	$R = \frac{U_n - U_p}{n - p}$	$Q^{n-p} = \frac{U_n}{U_p}$
La somme S_n	$S_n = \frac{(n - p + 1)(U_p + U_n)}{2}$	$S_n = U_p \frac{Q^{n-p+1} - 1}{Q - 1}$
A, B, C dans cet ordre	$A=A ; B= A+R ; C= A+2R$ $2B = A + C$	$A=A ; B= A*Q ; C= A*Q^2$ $B^2 = A*C$
Insertion de k moyens entre a et b	$R = \frac{b-a}{k+1}$	$Q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$

Applications des formules de la SA et la SG

Application 1 : On donne $\begin{cases} U_0 = 13 \\ U_n = \frac{7U_{n-1}+27}{4} \end{cases}$

1/ Calculer U_1 ; U_2 ; U_3

2/ On pose $V_n = U_n + 9$

a.-) Montrer que V_n est une Suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.

b.-) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

Solution

$$U_1 = \frac{7(13)+27}{4} = \frac{59}{2} ; U_2 = \frac{7\left(\frac{59}{2}\right)+27}{4} = \frac{467}{8} ; U_3 = \frac{7\left(\frac{467}{8}\right)+27}{4} = \frac{3485}{32}$$

2/ On pose $V_n = U_n + 9 \Rightarrow V_n$ est géométrique ssi $V_{n+1} = q V_n$.

$$V_{n+1} = U_{n+1} + 9 = \frac{7U_n+27}{4} + 9 = \frac{7U_n+63}{4} = \frac{7}{4}(U_n + 9) = \frac{7}{4} V_n$$

V_n est une SG de raison $q = 7/4$ et de 1^{er} terme $V_0 = 13+9 = 22$

$$V_n = V_0 * q^n = 22 * (7/4)^n.$$

Application 2 : On donne $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = U_n + 4 \end{cases}$

1/ Calculer U_1 ; U_2 ; U_3

2.-/ Quelle est la nature de la suite

Application 3 : On donne $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 2 U_n \end{cases}$

1/ Calculer U_1 ; U_2 ; U_3

2.-/ Quelle est la nature de la suite

Application 4 :

Un artisan fabrique des jouets pour les fêtes de fin d'année. Il décide de reprendre la fabrication des jouets dès le mois de janvier en fabriquant 200 jouets et en augmentant tous les mois la production de 40 jouets. On désigne par P_n le nombre de jouets fabriqués le $n^{\text{ème}}$ mois ($n \in \mathbb{N}^*$). On donne $P_1 = 200$ correspondant à la production du mois de janvier. Déterminez la relation entre P_{n+1} et P_n .

Solution :

Déterminons la relation entre P_{n+1} et P_n : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+1} = P_n + 40$

Application 5 :

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année $(2015 + n)$

a) Déterminez le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017.

b) Exprimez X_{n+1} en fonction de X_n .

c) On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 60\,000 - X_n$

Montrez que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1^{er} terme.

Exprimer U_n en fonction de n , en déduire X_n en fonction de n .

Solution :

a) Le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 est : 50 500

Le nombre d'arbres qu'il aura en 2017 est : 50 975

b) Exprimons X_{n+1} en fonction de X_n :

$$X_{n+1} = X_n - \frac{5}{100}X_n + 3\,000 = 0,95X_n + 3\,000$$

La suite (U_n) est définie par : $U_n = 60\,000 - X_n$

Montrons que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme : $U_0 = 60\,000 - X_0 = 10\,000$

Exprimons U_n en fonction de n déduisons en X_n en fonction de n :

$$X_n = 60\,000 - 10\,000(0,95)^n$$

Application 6 :

On place le 01/01/2015 une somme de 1 000 FCFA l'intérêt annuel est 4%.

Les intérêts acquis au cours d'une année sont capitalisés de plus, tous les 1^{er} janvier à partir de 2016, on rajoute 100FCFA au capital.

Soit U_n la somme disponible à l'an 2015+n avec $n \geq 0$.

1.-/ Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .

2.-/ En posant $V_n = U_n + 2500$. Montrer que V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Solution :

$$1.-/ \quad \boxed{U_{n+1} = 1,04 U_n + 100}$$

$$2.-/ V_n = U_n + 2500. \rightarrow V_n = 1,04^n * 3\,500$$

Exercice 7 :

On considère la suite numérique W_n définie par :

$$W_1 = 3 ; W_{n+1} = \frac{1}{3}W_n + \frac{4}{3} \text{ avec } n \geq 1 .$$

1/ Calculer W_1 ; W_2 ; W_3

Exercice 8 :

La suite U_n est définie par $U_0 = 7$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n + 6}{5}$, $n \geq 1$.

1.- Calculer U_1 ; U_2 et U_3 .

2.- On considère la suite V_n définie par $V_n = U_n - 2 \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n . En déduire la nature de la suite V_n dont on déterminera les éléments caractéristiques.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

Exercice 9 :

Soit la suite U_n définie par la donnée de son 1^{er} terme $U_0 = 14\,000$ et par la relation, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 1,04 \cdot U_n + 200$

1.- Calculer U_1 et U_2

2.- Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = U_n + 5\,000$

2.-

a) Calculer V_0

b) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n , en déduire que la suite V_n est une suite géométrique dont on précisera le 1^{er} terme et la raison.

c) Exprimer V_n en fonction de n

2.-/ Soit U_n la suite définie par : $U_n = W_n - 2$ pour tout entier naturel n non nul.

Montrer que la suite U_n est une suite géométrique.

Application 10 :

Un concurrent sur le marché des calculatrices estime que, chaque année, ses efforts lui permettent d'augmenter ses ventes de 5% par rapport à l'année précédente et que la concurrence lui fait perdre 10 000 ventes. En 2015, il en a vendu 600 000.

On note U_n le nombre de milliers de calculatrices vendues à l'année 2015 + n . on a donc $U_0 = 600$.

1.- Montre, que pour tout entier n , $U_{n+1} = 1,05 U_n - 10$

2.- On pose $V_n = U_n - 20$.

a.- Montre que la suite (V_n) est géométrique. Donne sa raison et son premier terme V_0 .

b.- Exprime V_n en fonction de n . En déduis l'expression de U_n en fonction de n .

c.- D'après ce modèle, combien de calculatrices cette entreprise vendra-t-elle en 2025 ?

Module 4 : Statistique à un seul caractère

Définitions

- La **statistique** est la science qui étudie les chiffres.
- La **population statistique** est un ensemble étudié concernant un phénomène donné par la statistique. Exemple: l'ensemble des élèves la 12^{ème} TLL.
- Un élément de l'ensemble étudié s'appelle **unité statistique** ou individu. Exemple: l'ensemble des maliens l'unité statistique un malien.
- Chaque unité statistique peut être étudiée suivant un ou plusieurs caractères (qualitatif ou quantitatif).
- **Caractère qualitatif**: les modalités du caractère ne sont pas mesurables. Exemple: sexe, ethnie, religion, nationalité, race, couleur des cheveux.
- **Caractère quantitatif ou variable statistique**: les modalités du caractère sont mesurable ou repérables exemple: le nombre d'enfant à charge, taille, âge, température ...
- **Variable statistique discrète**: elle est discrète lorsque les valeurs sont isolées (des nombres entiers) exemples: nombre d'enfants, nombre de parcelles.
- **Variable statistique continue**: elle est continue lorsque les valeurs sont comprises entre deux valeurs distinctes (des nombres décimaux) exemple: taille, poids ...

I.- L'analyse des résultats statistiques à un seul caractère

- **Fréquence** $f_i = \frac{\text{Effectif } n_i}{\text{Effectif Total } N} \times 100 \rightarrow \sum f_i = 100\%$

• Le mode ou le dominant (caractéristique de position) Mo

C'est la valeur du caractère qui correspond à la plus grande fréquence.

• La Médiane

La médiane est la valeur du caractère qui correspond à l'unité statistique placée au milieu de la population statistique.

Cas des variables statistiques continues

La médiane est la valeur du caractère pour laquelle la courbe cumulative prend la valeur (1/2) :

$$\text{La médiane : } M_e = x_i + \frac{(x_{i+1} - x_i) \left(\frac{1}{2} - f(x_i) \right)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

• Les Quantiles et déciles (caractéristique de position)

Les quantiles c'est la division d'une distribution statistique en quatre parties égales :

$Q_1, \left(\frac{1}{4} \right)$; $Q_2, \left(\frac{1}{2} \right)$; $Q_3, \left(\frac{3}{4} \right)$

$$1^{\text{er}} \text{ quartile : } Q_1 = x_i + \frac{(x_{i+1} - x_i) \left(\frac{1}{4} - f(x_i) \right)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

$$3^{\text{ème}} \text{ Quartile : } Q_3 = x_i + \frac{(x_{i+1} - x_i) \left(\frac{3}{4} - f(x_i) \right)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

• La moyenne arithmétique $\bar{X}$

Soient les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{N} = \frac{\sum x_i}{N}$

Retenons bien ceci : $\bar{x}_1 * f_1 + \bar{x}_2 * f_2 = \bar{X}$ et $f_1 + f_2 = 1$

Sujet d'examen 1

Les résultats de l'enquête sur la note des élèves d'une classe sont :

12	13	8	9	10	15	16	17	10	7
4	10	3	15	10	7	9	10	11	9

- 1.-/ Quel est l'effectif total de la classe ?
- 2.-/ quelle est la note dominante ?
- 3.-/ Quelle est la note médiane ?
- 4.-/ Quelle la moyenne de la classe ?

Solution :

L'effectif total est 20 (car il y a 20 notes).

La note dominante est 10 (car 10 est répétée 5 fois.)

La note médiane : on classe les notes dans l'ordre croissant :

3	4	7	7	8	9	9	9	10	10
10	10	10	11	12	13	15	15	16	17

L'effectif total étant 20 le milieu se trouve entre le 10^{ème} et le 11^{ème} rang, ce qui correspond à 10. Alors la médiane = 10.

La moyenne $\bar{X} = \frac{\text{Somme des notes}}{\text{effectif total}} = \frac{205}{20} = 10,25$

Sujet d'examen 2

Les notes obtenues par les candidats présélectionnés pour l'oral :

15	5	6	14	10	7	11	7	4	7	6
----	---	---	----	----	---	----	---	---	---	---

- 1.-/ Quel est l'effectif total des candidats ?
- 2.-/ quelle est la note dominante ?
- 3.-/ Quelle est la note médiane ?
- 4.-/ Quelle la moyenne ?

Solution :

L'effectif total est 11 (car il y a 11 notes).

La note dominante est 7 (car 7 est répétée 3 fois.)

La note médiane : on classe les notes dans l'ordre croissant :

4	5	6	6	7	7	7	10	11	14	15
---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----

L'effectif total étant 11 le milieu se trouve entre le 6^{ème} rang, ce qui correspond à 7.

Alors la médiane = 7. La moyenne $\bar{X} = \frac{\text{Somme des notes}}{\text{effectif total}} = \frac{92}{11} = 8,36$

Sujet d'examen 3

Dans une entreprise on compte :

- 300 employés hommes qui touchent ensemble un salaire de 40 800 000 F par mois
- 200 employés femmes qui touchent ensemble un salaire de 24 000 000 F par mois

- 1.-/ Quel est le salaire mensuel moyen des hommes ? $\bar{x}_H$
- 2.-/ Quel est le salaire mensuel moyen des femmes ? $\bar{x}_F$
- 3.-/ Quel est le salaire mensuel moyen des employés ? $\bar{X}$
- 4.-/ Calculer le % d'hommes et de femmes ? f_H et f_F

5.-/ Vérifier que $\bar{x}_H * f_H + \bar{x}_F * f_F = \bar{X}$ et $f_H + f_F = 1$

Solution :

$$\bar{x}_H \text{ Salaire mensuel moyen des H} = \frac{\text{salaires des H}}{\text{effectif des hommes}} = \frac{40\,800\,000}{300} = 136\,000 \text{ FCFA}$$

$$\text{Avec } \bar{x}_F \text{ Salaire mensuel moyen des F} = \frac{\text{Salaires des Femmes}}{\text{effectif des femmes}} = \frac{24\,000\,000}{200} = 120\,000 \text{ FCFA}$$

$$\text{Avec } \bar{x} \text{ Salaire moyen} = \frac{\text{salare des employés}}{\text{effectif des employés}} = \frac{40\,800\,000 + 24\,000\,000}{300 + 200} = 129\,600 \text{ FCFA}$$

$$f_H \text{ la fréquence des hommes : } \frac{\text{effectif des hommes}}{\text{effectif total}} = \frac{300}{500} = 60\%$$

$$f_F \text{ la fréquence des femmes : } \frac{\text{effectif des femmes}}{\text{effectif total}} = \frac{200}{500} = 40\%$$

$$\bar{x}_H * f_H + \bar{x}_F * f_F = \bar{X} \rightarrow 0,60 * 136\,000 + 0,40 * 120\,000 = 129\,600$$

Sujet d'examen 4

Dans une société de gardiennage, le salaire mensuel moyen est de 18.000 F. Les salaires mensuels moyens des employés d'hommes et des employés femmes étant respectivement 20.000 F et 12.000 F. Calculer le % d'hommes et de femmes de société.

Si cette société emploie 20 personnes, déterminer le nombre d'homme et de femmes.

Solution :

$$\begin{cases} f_H + f_F = 1 \\ \bar{x}_H * f_H + \bar{x}_F * f_F = \bar{X} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_H + f_F = 1 \\ 20\,000 * f_H + 12\,000 * f_F = 18\,000 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f_H + f_F = 1 \\ 20 * f_H + 12 * f_F = 18 \end{cases} \text{ on trouve } f_F = \frac{1}{4} \text{ et } f_H = \frac{3}{4}.$$

Avec $\bar{x}_H$ Salaire mensuel moyen des hommes

Avec $\bar{x}_F$ Salaire mensuel moyen des Femmes

Avec $\bar{x}$ Salaire mensuel moyen des employés

$$\text{Avec } f_H \text{ la fréquence des hommes : } \frac{\text{effectif des hommes}}{\text{effectif total}} = \frac{H}{20} = 0,75 \rightarrow \text{hommes} = 15$$

$$\text{Avec } f_F \text{ la fréquence des femmes : } \frac{\text{effectif des femmes}}{\text{effectif total}} = \frac{F}{20} = 0,25 \rightarrow \text{femmes} = 5$$

Sujet d'examen 5

On donne la répartition des élèves suivants, le nombre de frères

Nombre de frères	1	2	3	4	5	Total
Effectifs	10	5	15	7	8	45

TAF:

- 1) Quelle est la nature de la variable statistique?
- 2) Déterminer le mode et la médiane

Réponse

- 1) la variable statistique est discrète ;
- 2) le mode = 3 frères (qui correspond à l'effectif le plus élevé)

La médiane: variable discrète N impaire

$$N = 45 = 2 \times 22 + 1 \quad (2K+1) K = 22$$

A partir de l'effectif cumulé croissant (K = 22) correspond à 3 frères

Médiane = 3 frères

Sujet d'examen 6

Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 164,65 cm. La taille moyenne des garçons est de 163 cm et la taille moyenne des filles est de 167 cm.

Quel est l'effectif des garçons et des filles sachant que l'effectif total est de 80.

Solution

Rappelons que : $\bar{x}_1 * f_1 + \bar{x}_2 * f_2 = \bar{X}$ et $f_1 + f_2 = 1$

Avec $\bar{x}_1$ la taille moyenne des garçons

Avec $\bar{x}_2$ la taille moyenne des filles

Avec $\bar{x}$ la taille moyenne de la classe

Avec f_1 le % des garçons et f_2 le % des filles

$$163 * f_1 + 167 * f_2 = 164,65 \text{ et } f_1 + f_2 = 1$$

On trouve : $f_1 = 0,5875$ et $f_2 = 0,4125$

L'effectif de la classe est 80 :

$$f_1 = \frac{\text{effectif Garçons } G}{\text{effectif total } N} = \frac{G}{80} = 0,5875 \rightarrow G = 80 * 0,5875 = 47$$

$$f_2 = \frac{\text{effectif Filles } F}{\text{effectif total } N} = \frac{F}{80} = 0,4125 \rightarrow F = 80 * 0,4125 = 33$$

Sujet d'examen 7

Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm.

Quel est l'effectif de la classe sachant qu'il est compris entre 50 et 60.

Solution

Rappelons que : $\bar{x}_1 * f_1 + \bar{x}_2 * f_2 = \bar{X}$ et $f_1 + f_2 = 1$

Avec $\bar{x}_1$ la taille moyenne des garçons

Avec $\bar{x}_2$ la taille moyenne des filles

Avec $\bar{x}$ la taille moyenne de la classe

Avec f_1 le % des garçons et f_2 le % des filles

$$173,5 * f_1 + 160 * f_2 = 167 \text{ et } f_1 + f_2 = 1$$

On trouve : $f_1 = 14/27$ et $f_2 = 13/27$

L'effectif de la classe est compris entre 50 et 60 :

$$f_1 = \frac{\text{effectif Garçons } G}{\text{effectif total } N} = \frac{13}{27} \rightarrow G = N * \frac{14}{27}$$

$$f_2 = \frac{\text{effectif Filles } F}{\text{effectif total } N} = \frac{13}{27} \rightarrow F = N * \frac{13}{27}$$

On sait que : $50 \leq N \leq 60$

Pour $N = 50$ n'est pas solution car $G = 25,92 \notin N$

.....

Pour $N = 54$ n'est pas solution car $G = 28$ et $F = 26$

L'effectif de la classe est donc 54

Les sujets de TLL de 2014 à 2019**Enoncés des sujets d'examens au BAC – TLL – 2019****Exercice1..... (5 pts)**

1. Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions ci-dessous puis calcule les limites aux bornes du domaine dans chaque cas :

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$; b) $g(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{2 - x}$; c) $h(x) = \frac{x + 2}{2x - 6}$; d) $t(x) = \frac{1}{2}x - 4x^2$.

2. Détermine la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$a(x) = 6x^3 - 2x^2 + 4x + 1$; $b(x) = \frac{2x + 1}{1 - 3x}$; $c(x) = (2x + 1)(x^3 - 6x + 1)$.

Exercice2..... (5 pts)

Monsieur TRAORE est un tailleur, il décide de confectionner un nouveau modèle de vêtement. Le premier vêtement confectionné lui est revenu à 7500 F. Son expérience lui permet d'affirmer que le coût de confection unitaire augmente de 500 F par vêtements supplémentaires.

- Quel est le coût de confection du deuxième vêtement? Du troisième vêtement ?
- On désigne par C_n le coût de confection du $n^{ième}$ vêtement. Exprime C_n en fonction de n .
- Au combienième vêtement le coût de confection sera-t-il 10000 F?

Problème..... (10 pts)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = -x^3 + 3x - 2$.

- Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
- Calcule les limites aux bornes de D_f .
- Calcule la fonction dérivée de la fonction f .
 - Etudie les variations de f .
- Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f au point d'abscisse 3.
- Complète le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

6. Trace (C) et (T) dans un repère orthonormé.

Enoncés des sujets d'examens au BAC – TAL – 2019

Exercice 1..... (6 pts)

- 1) a) Décompose en produit de facteurs premiers les nombres 630 et 540.
b) Trouve le PGCD et le PPCM de 630 et 540.
- 2) Un nombre s'écrit $378x$.
Par quel chiffre faut-il remplacer x pour que ce nombre soit divisible à la fois par 2, 3 et 5.

Exercice 2..... (6 pts)

- M. SY, un commerçant, place en l'an 2000 une somme de 500 000 F à la caisse d'épargne. Chaque année le capital augmente de 8%, on désigne par C_n le capital en l'an $(2000 + n)$.
- a) Détermine C_0, C_1 et C_2 .
 - b) Pour tout entier naturel n , exprime C_{n+1} en fonction de C_n .
En déduis la nature de la suite C_n .
 - c) Pour tout entier n , exprime C_n en fonction de n .
 - d) En quelle année, le capital doublera-t-il ?

Problème..... (8 pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 3x + 1$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- 1) a) Détermine la fonction dérivée de f , puis en déduis les variations de f sur $[-2, 2]$.
b) Dresse le tableau de variation de f .
- 2) a) Complète le tableau ci-dessous

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

- b) Construis (C) sur l'intervalle $[-2, 2]$.

Enoncés des sujets d'examens au BAC – TLL – 2018**Exercice 1 : TLL 2018**

On considère les fonctions numériques f et g définies par:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

- 1.-) Détermine l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
- 2.-) Calcule la fonction dérivée de chacune de ces deux fonctions.
- 3.-)
 - a.-) Ecris une équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse 1.
 - b.-) Ecris une équation de la tangente à la courbe de g au point B d'abscisse 0.

Exercice 2 : TLL 2018

Un jardinier veut creuser un puits dans son jardin. Le puisatier lui propose 6000 F pour le 1^{er} mètre creusé et pour chaque mètre supplémentaire creusé le coût augmente de 10%.

On désigne par la suite (U_n) avec $n \in \mathbb{N}^*$, le coût pour creuser le nième mètre avec $U_1=6000$.

- 1.-) Calcule U_2 , U_3 , U_4 et U_5 .
- 2.-) Quelle est la nature de la suite (U_n) ?
- 3.-) Montre que $U_n = (1,1)^{n-1} \times 6000$ puis trouve le coût pour creuser 10 mètres.

Problème TLL 2018

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

- 1.-) Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
- 2.-) Calcule les limites de f aux bornes de D_f puis la dérivée f' de f .
- 3.-) Dresse le tableau de variation de f sur D_f .
- 4.-) Construis la courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; i; j)$.

Corrigés des sujets d'examens au BAC – TLL – 2018**Exercice 1 TLL 2018 Corrigé :**

$$1.-) f(x) = x^3 + 2x^2 + 5 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

f est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme $D_f =]-\infty; +\infty[$

g est une fonction rationnelle, est définie lorsque le dénominateur $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
 $\Rightarrow$ sur $\mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow D_g =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

2.-) La fonction dérivée de chacune de ces deux fonctions

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

3.-) Formule de l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$a.-) f'(x_0) = f'(1) = 3 + 4 = 7 \quad f(x_0) = f(1) = 1 + 2 + 5 = 8$$

$$T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow y = 7x + 1$$

$$b.-) g'(x_0) = g'(0) = -2 \quad g(x_0) = g(0) = -1$$

$$T': y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0) \Rightarrow y = -2x - 1$$

Exercice 2 / corrigé BAC TLL – 2018

La suite (U_n) avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_1=6000$.

1.-) U_2, U_3, U_4 et U_5 .

1^{er} mètre creusé $\rightarrow U_1=6000$

2^{ème} mètre creusé $\rightarrow U_2 = U_1 + 10\% U_1 = 1,10 U_1 = 1,10 \times 6\,000 = 6\,600$

3^{ème} mètre creusé $\rightarrow U_3 = U_2 + 10\% U_2 = 1,10 U_2 = 1,10 \times 6\,600 = 7\,260$

4^{ème} mètre creusé $\rightarrow U_4 = U_3 + 10\% U_3 = 1,10 U_3 = 1,10 \times 7\,260 = 7\,986$

5^{ème} mètre creusé $\rightarrow U_5 = U_4 + 10\% U_4 = 1,10 U_4 = 1,10 \times 7\,986 = 8\,784,6$

2.-) La nature de la suite (U_n)

Rappel :

La suite U_n est dite arithmétique de raison « R » lorsque : $U_{n+1} - U_n = R$

$U_1 ; U_2 ; U_3$ suite arithmétique de raison R ssi : $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = R$

La suite U_n est dite géométrique de raison « Q » lorsque : $U_{n+1} / U_n = Q$

$U_1 ; U_2 ; U_3$ suite géométrique de raison Q ssi : $U_2 / U_1 = U_3 / U_2 = Q$

On sait que : $U_1=6000 ; U_2=6\,600 ; U_3 = 7\,260 ; U_4 = 7\,986 ; U_5 = 8\,784,6$

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \frac{U_5}{U_4} = 1,10$ alors U_n est géométrique de raison $Q = 1,10$.

3.-) $U_n = (1,1)^{n-1} \times 6000$?

U_n est géométrique de raison $Q = 1,10$ et de 1^{er} terme $U_1 = 6\,000 \rightarrow$ son expression générale $U_n = U_1 \times Q^{n-1} \rightarrow U_n = (1,1)^{n-1} \times 6000$

Le coût pour creuser 10 mètres $\rightarrow n = 10$

$U_{10} = (1,1)^{10-1} \times 6000 = 14\,147,686146$.

Problème Corrigé TLL – 2018

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

1.-) f est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme $D_f =]-\infty; +\infty[$

2.-) Les limites de f aux bornes de D_f

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = (-\infty)^3 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = (+\infty)^3 = +\infty$

La dérivée f' de $f \rightarrow f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

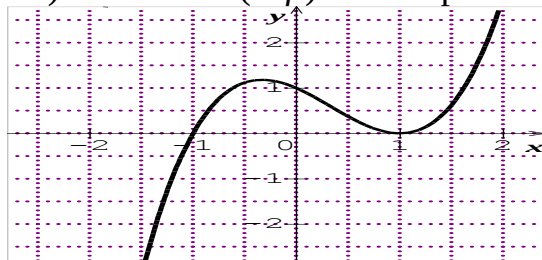
3.-) Le tableau de variation de f sur D_f .

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow$ on trouve $x = 1$ ou $x = -1/3$

X	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 32/27$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

4.-) La courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; i; j)$.



Enoncés des sujets d'examens au BAC – TLL – 2017**Exercice 1 : TLL 2017**

La bonne réponse à chaque question. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. On considère la fonction f

définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{2x^2-3}{(x+1)^2}$

1.-/

a.-) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	b.-) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$	c.-) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
--	--	--

2.-/

a.-) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$	b.-) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$	c.-) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$
---	---	---

3°/ La courbe (C f) admet :

- a) Une asymptote verticale ; b) Trois asymptotes horizontales ;
c) Une asymptote oblique.

4°/ a) f est paire ; b) f est impaire ; c) f n'est ni paire ni impaire.

Exercice 2 – TLL – 2018

Les ouvriers d'une entreprise sont répartis suivant une indemnité (exprimée en milliers de francs CFA). On obtient le tableau suivant :

Indemnités	[0 : 2[	[2 : 4[	[4 : 6[	[6 : 8[	[8 : 10[	[10 : 12[
Effectifs	19	21	25	15	8	2

1°/ Construis l'histogramme des effectifs.

2°/ Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.

3°/ Détermine la classe modale puis calcule le mode et la médiane.

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 78x.$$

1°/ Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°/ Etudie les variations de f .

3°/ Dresse le tableau de variation de f . Donne l'allure de la courbe C de f

Corrigés des sujets d'examens au BAC – TLL – 2017

Exercice 1 : TLL 2017

$$f(x) = \frac{2x^2-3}{(x+1)^2} = \frac{2x^2-3}{x^2+2x+1}$$

Rappelons que la limite à l'infini est le rapport des monômes du plus degré

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Rappelons que la limite au point x_0 de $D_f = \text{à l'infini}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{2-3}{(-1+1)^2} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

1.-/ a.-) Faux

b.-) Vrai

c.-) faux

2.-/ b.-) Faux

b.-) faux

c.-) vrai

3°/ La courbe (C f) admet :

Rappelons que :

Cf admet une asymptote verticale ($x = x_0$) ssi : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

Cf admet une asymptote horizontale ($y = b$) ssi : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

Cf admet une asymptote oblique ($y = ax + b$) ssi : $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Note : si le degré du numérateur – degré du dénominateur = 1 il y a AO.

a) Vrai (AV $x = -1$) b) Faux (il y a une AH et non trois)

c) Faux (car la limite à l'infini $\neq$ l'infini)

4°/ Rappelons :

f est paire ssi $f(-x) = f(x)$ **f est impaire** ssi $f(-x) = -f(x)$

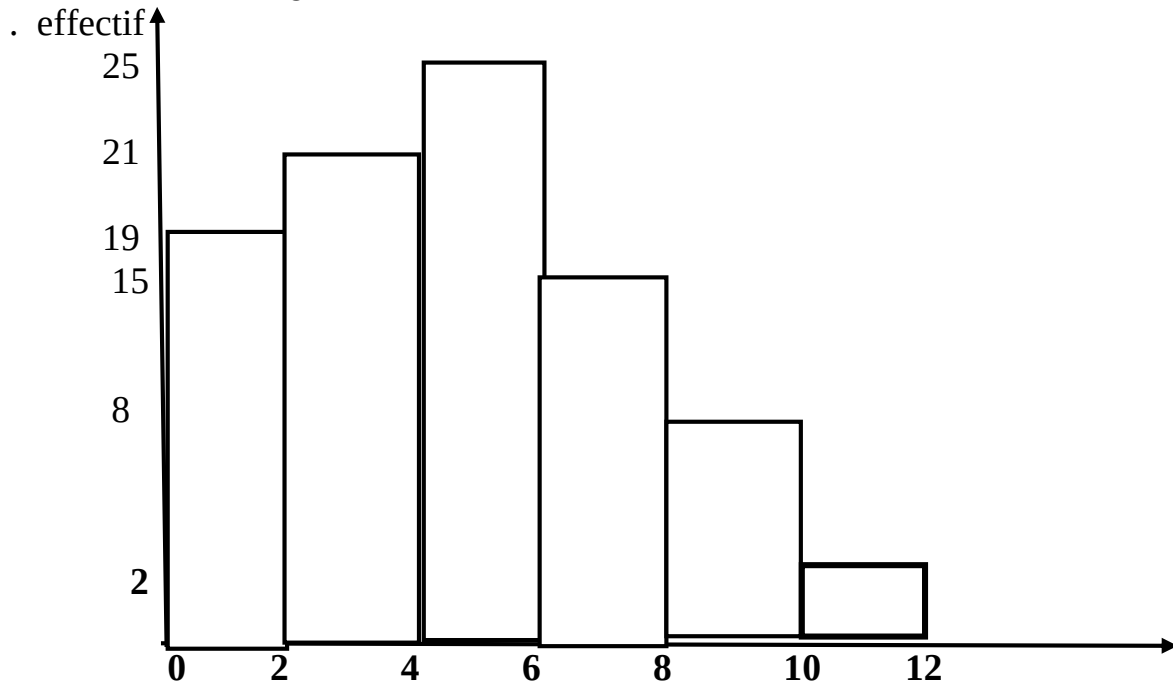
$$f(x) = \frac{2x^2-3}{(x+1)^2} \rightarrow f(-x) = \frac{2(-x)^2-3}{(-x+1)^2} = \frac{2x^2-3}{(1-x)^2} \neq f(x) \text{ alors } f \text{ est ni paire ni impaire}$$

a) Faux ; b) Faux ; c) Vrai.

Exercice 2 – TLL – 2018 / Corrigé

Indemnités	[0 : 2[	[2 : 4[	[4 : 6[	[6 : 8[	[8 : 10[	[10 : 12[
Effectifs	19	21	25	15	8	2

1°/ Construis l'histogramme des effectifs



2°/ Le tableau des effectifs cumulés croissants.

Indemnités	[0 : 2[	[2 : 4[	[4 : 6[	[6 : 8[	[8 : 10[	[10 : 12[
Effectifs	19	21	25	15	8	2
ECC	19	40	65	80	88	90

3°/ La classe modale → [4 ; 6[

Le mode → $Mo = (4 + 6) / 2 = 5$ milliers de FCFA

La médiane →

Effectif total = 90 → la moitié = $90 / 2 = 45$

Suivant l'ECC 45 est compris entre 40 et 65 ce qui correspond à la classe [4 : 6[

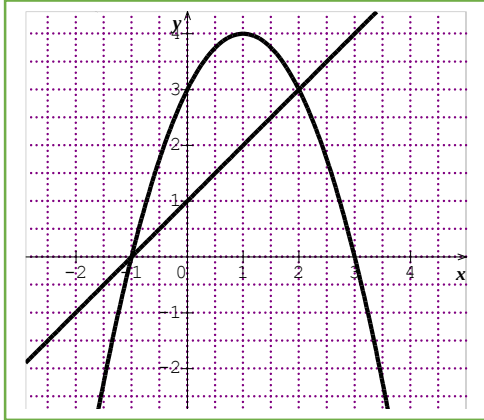
$40 < 45 < 65$ et $4 < \text{Médiane} < 6$ → $\frac{Mé - 4}{45 - 40} = \frac{6 - 4}{65 - 40}$ →

$Mé = (4) + \frac{(45 - 40)(6 - 4)}{65 - 40} = 4,4$ milliers de FCFA

Enoncés des sujets d'examens au BAC – TLL – 2016

Exercice 1 : TLL – 2016

La figure ci-dessous donne la représentation graphique (C) d'une fonction f et de la droite (D) d'équation $y = x + 1$.



On se place sur $[-1 ; 3]$ pour répondre aux questions suivantes:

1.-) Par lecture graphique déterminez les coordonnées des points communs à (C) et (D) ?

2.-) Résoudre graphiquement :

a.-) $f(x) > y$

b.-) $f(x) < y$

c.-) $f(x) = 0$

Exercice 2 : TLL – 2016

Aly place une somme de 50 000F dans une banque en épargne le 1^{er} janvier 2016. A la fin de chaque mois son argent lui rapporte un intérêt de 1 000 F. (c'est-à-dire à la fin de chaque mois son argent en banque augmente de 1 000 F) .

- 1.- Calcule le montant que Aly aura dans son compte le 1^{er} février 2016.
- 2.- Calcule l'intérêt que lui rapporte son argent au bout de 9 mois de placement. En déduis le montant que Aly aura alors dans son compte.
3. Détermine, en fonction du nombre n de mois de placement, le montant que Aly aura dans son compte.
4. Au bout de combien de mois de placement le capital de Aly sera de 75 000 F ?

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ de courbe représentative (C) et (D) la droite d'équation $y = x + 1$

Calculez $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

- a. Déterminez le point A d'abscisse -1 et le point B d'ordonnée 1 de la droite (D)
- b. Le point A ($1 ; 1$) appartient-il à (D) ?
- a. Calculez la fonction dérivée de f puis dressez son tableau de variation.
- b. Tracez (C) et (D) dans le même plan muni d'un repère orthonormé.
- c. Trouvez graphiquement les coordonnées des points communs à (C) et à (D) .

Corrigés des sujets d'examens au BAC – TLL – 2016

Exercice 1 : TLL - 2016

1.-) Les coordonnées des points communs à (C) et (D) :

$$C) \cap (D) = \{(-1; 0); (3; 3)\}$$

2.-)

Résoudre graphiquement : a.-) $f(x) > y \rightarrow S =]-1; 2[$

Résoudre graphiquement : b.-) $f(x) < y \rightarrow S =]2; 3[$

Résoudre graphiquement : c.-) $f(x) = 0 \Rightarrow y \rightarrow S = \{-1; 3\}$

Exercice 2: TLL – 2016

Soit $C_0 = 50\,000$ Fla somme placée par Aly le 1^{er} janvier 2016.

1. Calculons le montant qu'aura Aly dans son compte le 1^{er} février

Soit C_1 ce montant on a :

$$C_1 = C_0 + 1\,000 = 50\,000 + 1\,000 = 51\,000 \text{ d'où } C_1 = 51\,000 \text{ F}$$

2. Calculons l'intérêt qu'apporte son argent au bout de 9 mois de placement.

Soit I cet intérêt on a : $I = I$

$$1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 + I_9 = 9 \times 1\,000 = 9\,000 \text{ d'où } I = 9\,000 \text{ F}$$

Déduisons-en le montant qu'aura Aly alors dans son compte

$$C_9 = C_0 + I = 50\,000 + 9\,000 = 59\,000 \text{ d'où } C_9 = 59\,000 \text{ F}$$

3.-) Déterminons en fonction du nombre n de mois de placement, montant qu'aura Aly. Soit C_n le montant qu'aura Aly au bout de n mois.

(C_n) est une suite arithmétique de 1^{er} terme $C_0 = 50\,000$ et de raison $r = 1\,000$

$$C_n = C_0 + nr = 50\,000 + 1\,000 \times n \text{ d'où } C_n = 50\,000 + 1\,000 \times n$$

4.-) Déterminons le nombre de mois de placement pour que le capital de Aly soit de 75000f.

$$C_n = 75\,000 \Leftrightarrow 50\,000 + 1\,000 \times n = 75\,000 \Leftrightarrow 50 + n = 75 \Leftrightarrow n = 75 - 50 \Leftrightarrow n = 25$$

Il faut 25 mois pour que Aly ait 75000f dans son compte.

Autre méthode :

L'intérêt total produit est $75\,000 - 50\,000 = 25\,000$

Sachant que chaque mois on a 1 000 F d'intérêt ; le nombre n de mois est

$n = 25\,000 / 1\,000 = 25$. Il faut donc 25 mois de placement pour que le capital de Aly soit de 75000f..

Exercice 3 : TLL – 2016

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \text{ et } (D) : y = x + 1$$

1. Calculons

$$f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = 0, f(2) = 3.$$

a.-) Déterminons le point A d'abscisse -1 et le point B d'ordonnée 1 de la droite (D)

$$\text{Pour A: } x = -1 \Rightarrow y = -1 + 1 = 0 \text{ donc } A(-1; 0)$$

$$\text{Pour B: } y = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ donc } B(0; 1).$$

b.-) Le point A (1 ; 1) appartient-il à (D)

$$\text{Pour } x = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2 \neq 1 \text{ alors } A(1; 1) \notin (D)$$

3. a. Calculons la dérivée f' de f

Ensemble de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

Enoncés des sujets d'examens au BAC – TLL – 2015

Exercice 1 : TLL 2015

Un chat veut attraper une souris dont le trou se situe entre les deux animaux (le chat et la souris). Le chat est à 45 mètres du trou tandis que la souris est à 30 mètres. Ils démarrent tous ensemble en se dirigeant vers le trou. Le chat fait 3 m/s et la souris 2 m/s. Pour que le chat attrape la souris, il faut qu'il arrive au trou avant la souris, si la souris arrive avant ou en même temps que le chat au trou alors elle est sauvée.

1°/ Après 5 secondes de course, le chat et la souris seront chacun à combien de mètres du trou ?

2°/ la souris sera-t-elle sauvée ou attrapée par le chat ? Justifiez ta réponse.

Exercice 2 / TLL – 2015

Soient (U_n) et (V_n) deux suites numériques définies par :

$U_1 = 2$ et $U_{n+1} = 2U_n$ pour tout entier naturel non nul.

(V_n) est une suite arithmétique de raison $r = -5$ et $V_5 = -20$

1°/ a) Calculez U_2 , U_3 et U_4

b) Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Précisez sa raison

2°/ a) Déterminez le premier terme V_1 de la suite (V_n)

b) Donnez l'expression de V_n en fonction de n

c) Calculez V_{10}

Exercice 3 / TLL – 2015

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{x - 1}$

1°/ Déterminez l'ensemble de définition de f puis calculez les limites de $f(x)$ aux bornes de cet ensemble.

2°/ Montrez que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme : $f(x) = 2x + \frac{2}{x-1}$

3°/ Vérifiez que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$) de f

4°/ Calculez $f'(x)$, dressez le tableau de variation de f .

5°/ Tracez ($\mathcal{C}$) et son asymptote dans le même repère.

Corrigés des sujets d'examens au BAC – TLL – 2015

Exercice 1 :

1°/ Après 5s de course :

- le chat est à : $45m - 5 \times 3m = 30m$

- la souris est à : $30m - 5 \times 2m = 20m$

Après 5 secondes de course, le chat sera à 30m du trou et la souris à 20m du trou.

2°/ -Le temps qu'il faut au chat pour arriver au trou est :

$$\frac{45}{3} = 15s$$

- Le temps qu'il faut à la souris pour arriver au trou est :

$$\frac{30}{2} = 15s$$

Conclusion : les deux animaux arrivent au trou en même temps donc la souris est sauvée.

Exercice 2 :

$U_1 = 2$ et $U_{n+1} = 2U_n$ $n \in \mathbb{N}^*$ (V_n) est une SA de raison $r = -5$ et $V_5 = -20$

1°/ a) Calculons : U_2 , U_3 et U_4

$$U_2 = 2U_1 \Rightarrow U_2 = 4 \quad U_3 = 2U_2 \Rightarrow U_3 = 8 \quad U_4 = 2U_3 \Rightarrow U_4 = 16$$

b) Nature de la suite (U_n) et précisons sa raison :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2U_n}{U_n} = 2 \in \mathbb{R}$$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2$ alors la suite (U_n) est géométrique de raison $q = 2$

2°/ a) Déterminons le premier terme V_1 de la suite (V_n)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_5 = V_1 + (5-1)r \Leftrightarrow -20 = V_1 + 4(-5) \Leftrightarrow V_1 = -20 + 20 = 0 \rightarrow V_1 = 0$$

b) L'expression de V_n en fonction de n est :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad V_n &= V_5 + (n-5)r \Leftrightarrow V_n = -20 + (n-5)(-5) \Leftrightarrow V_n = -20 - 5n + 25 \\ &\Leftrightarrow V_n = -5n + 5 \end{aligned}$$

$$\text{Ou encore : } \forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = V_1 + (n-1)r \Leftrightarrow V_n = 0 + (n-1)(-5) = -5n + 5$$

$$\text{c) Calculons } V_{10} = -45 \rightarrow V_{10} = -5(10) + 5 \Leftrightarrow V_{10} = -45$$

Exercice 3 :

$$f(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{x - 1}$$

1°/ L'ensemble de définition de f est :

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}, x - 1 \neq 0\}$$

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$Df = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

-les limites aux bornes de f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

2°/ Montrons que : $\forall x \in D_f \quad f(x) = 2x + \frac{2}{x-1}$

$$f(x) = 2x + \frac{2}{x-1} = \frac{2x(x-1)+2}{x-1} = \frac{2x^2-2x+2}{x-1} = \frac{2(x^2-x+1)}{x-1}$$

3°/ Vérifions que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à (Cf)

$$f(x) - y = \frac{2}{x-1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x-1} = 0$$

D'où $y = 2x$ est une asymptote oblique à (Cf)

4°/ Calcul de $f'(x)$:

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = 2 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Dressons le tableau de variation :

$$\text{Posons } f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

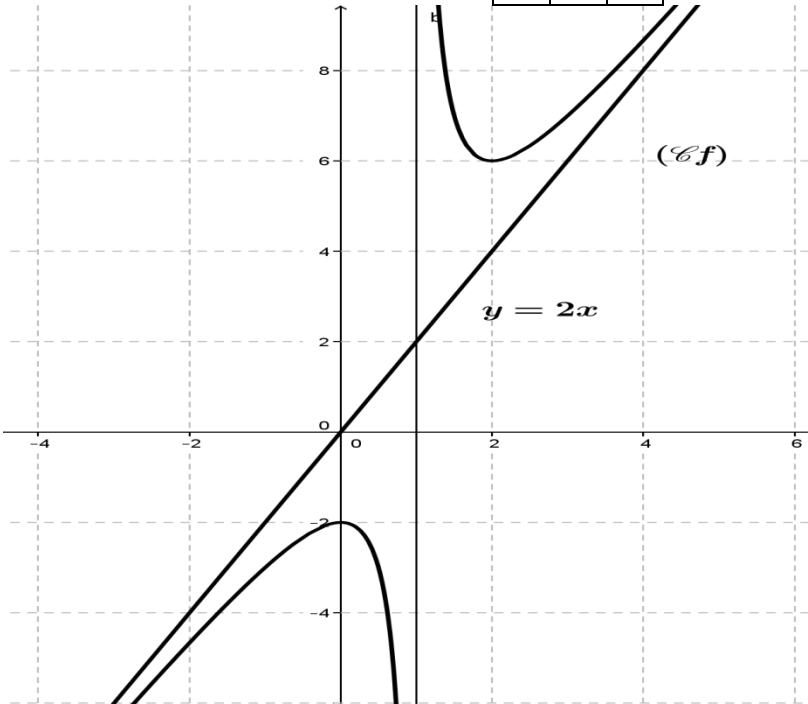
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 2$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow 8$	$+\infty$

5°/ Construction de la courbe :

- Asymptotes
- Repère

$y = 2x$

-Courbe de f



Enoncés des sujets d'examens au BAC – TLL – 2014**Exercice 1 : TLL 2014**

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

- 1-/ Déterminez l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
- 2-/ Calculez la fonction dérivée de chacune d'elles.
- 3-/ a-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse $x_0 = 1$
b-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de g au point B d'abscisse $x_1 = 0$

Exercice 2 : TLL – TAL 2014

Un jardinier veut creuser un puits dans son jardin. Il s'adresse à deux groupes d'ouvriers qui lui proposent le marché suivant :

Groupe A : Le 1^{er} mètre est creusé à 5 000 F, pour chaque mètre supplémentaire le coût de creusement augmente de 600 F. (*Exemple : le coût du 2^{ème} mètre est 5 600 F*)

Groupe B : Le 1^{er} mètre est creusé à 5 000 F, pour chaque mètre supplémentaire le coût de creusement augmente de 10% par rapport au coût du mètre précédent. (*Exemple : le coût du 2^{ème} mètre est $5\,000\,F + 5\,000\,F \times 10\% = 5\,500\,F$*)

- 1-/ Calculez le coût de creusement des 3^{ème}, 4^{ème} et 5^{ème} mètres par chacun des groupes. (Les résultats seront arrondis au franc près)
- 2-/ Si le jardinier a un puits de 3 m de profondeur, quel groupe choisira-t-il pour faire le travail ? Justifiez votre réponse.
- 3-/ À partir de quelle profondeur le coût de creusement du mètre par le groupe A sera moins cher que pour le groupe B ?
- 4-/ Quel est le coût total de creusement d'un puits de 5 m par chacun des groupes ?

Exercice 3 : TLL –TAL 2014

A//

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x^2 - 6x + 9$, (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé. (D) la droite d'équation $y = x + 3$.

- 1-/ Reproduire et compléter le tableau ci-dessous : (2pts)

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							
y							

- 2-/ De la lecture du tableau on déduit l'existence de deux points A et B d'abscisses respectives x_A et x_B avec $x_A < x_B$. Déterminer les coordonnées de A et B.

- 3-/ Calculer la dérivée $f'(x)$ puis dressez le tableau de variation de f .

- 4-/ Tracer dans le même repère la courbe (C) de f et la droite (D).

B//

Un artisan produit des articles, le coût de production de x articles est donné en milliers de francs CFA par $g(x) = x + 3$:

Exemple : Le coût de production d'un article est $g(1) = 4$ (en milliers de francs) soit 4 000 FCFA

La recette (produit de la vente) est représentée par $f(x) = x^2 - 6x + 9$ avec $x \in [1 ; 15]$.

Exemple : La vente d'un article rapporte $f(1) = 4$ (en milliers de francs) soit 4 000 FCFA

On admet que tout ce qui est produit est vendu.

Le gain (perte ou bénéfice) de l'artisan est calculé à l'aide de : $f(x) - g(x)$.

a-/ Déterminer le coût de production de : 2, 5, et 9 articles ainsi que la recette de leur vente.

b-/ Par lecture graphique (voir partie A//), donner l'intervalle sur lequel l'artisan produit avec perte

c-/ À partir de la production de combien d'articles l'artisan réalise-t-il un bénéfice ?

d-/ Quel est le bénéfice sur la production de 10 articles ?

Exercice 4 : Statistique 2014

Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm.

Quelle est l'effectif de la classe sachant qu'il est compris entre 50 et 60.

Solution 1

On considère les fonctions numériques f et g définies par : $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

1°/ Déterminons l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions :

$$Df = IR =]-\infty; +\infty[; Dg = IR - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

2°/ Calculons la fonction dérivée de chacune d'elles

$$f'(x) = 2x - 2 ; g'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

3°/ a) Ecrivons une équation de la tangente à la courbe C de f au point A d'abscisse $x_0 = 1$

$$Y = f'(1)(x - 1) + f(1) ; f'(1) = 0 ; f(1) = 2 \text{ donc : } Y = 2 \quad (1)$$

b) Ecrivons une équation de la tangente à la courbe de g au point B d'abscisse $x_1 = 0$

$$Y = g'(0)(x-0) + g(0) ; g'(0) = 2 ; g(0) = -1 \text{ donc : } Y = 2x - 1$$

Solution 2

GROUPE A : 1^{er} mètre creusé à 5000f ; pour chaque mètre supplémentaire le coût de creusement augmente de 600f

GROUPE B : 1^{er} mètre creusé à 5000f ; pour chaque mètre supplémentaire le coût de creusement augmente de 10% par rapport au coût du mètre précédent

1°/ Calculons le coût de creusement des 3^{ème}, 4^{ème} et 5^{ème} mètres par chacun des groupes

GROUPE A :

$$3^{\text{ème}} \text{ mètre : } 5600f + 600f = 6200f$$

$$4^{\text{ème}} \text{ mètre : } 6200f + 600f = 6800f$$

$$5^{\text{ème}} \text{ mètre : } 6800f + 600f = 7400f$$

GROUPE B :

$$3^{\text{ème}} \text{ mètre : } 5500f + 0,1 \times 5500f = 6050 f$$

$$4^{\text{ème}} \text{ mètre : } 6050f + 0,1 \times 6050f = 6655 f$$

$$5^{\text{ème}} \text{ mètre : } 6655f + 0,1 \times 6655f = 7320,5 = 7321 f$$

2°/ Le jardinier choisira le groupe B car son coût est moins élevé

3°/ Déterminons la profondeur à partir duquel le coût de creusement du mètre par le groupe A sera moins cher que pour le groupe B

On remarque qu'à partir du 6^{ème} mètre, le coût de creusement du groupe A sera moins cher que pour le groupe B car pour le groupe A le 6^{ème} mètre coûte 8000 f et pour le groupe B 8053 f

4°/ Le coût total de creusement de 5mètre par chacun des groupes est

$$\text{GROUPE A : } 5000f + 5600f + 6200f + 6800f + 7400f = 31000 f$$

$$\text{GROUPE B : } 5000f + 5500f + 6050f + 6655f + 7321f = 30726 f$$

Exercices de révision BAC – 2019

Exercice 1

1°/ On donne deux entiers naturels A et B tels que $A=1224$ et $B=936$

a) Déterminer le PGCD (A ;B) par l'algorithme d'Euclide.

b) En déduire le PPCM (A ;B)

2°/ L'effectif d'une école est compris entre 500 et 700 élèves. En comptant les élèves soit par 9, soit par 10, soit par 12, il reste toujours 5 élèves ? Quel est l'effectif de cette école?

Exercice 2 :

Dans une classe, on a demandé l'âge des élèves et les résultats obtenus ont été mis dans un tableau.

1°/ Reproduire et compléter le tableau en expliquant les calculs

	pourcentage	Elèves	Filles	Garçons
14ans	10%			1
15ans				12
16ans	20%		3	
Totaux	100%	30		

2°/ Au début d'une soirée dansante il y trois fois plus de garçons que de filles. Après le départ de 8 couples, il reste sur scène cinq fois plus de garçons que de filles. Combien il y en avait de garçons et de filles au début de la soirée ?

Exercice 4 :

Les notes obtenues par des candidats à un concours sont données dans le tableau ci – dessous :

Notes	[0 ; 2 [	[2 ; 3 [	[3 ; 4 [	[4 ; 6 [	[6 ; 8 [	[8 ; 10 [	[10 ; 14 [	[14 ; 16 [
Effectifs	120	100	140	180	160	130	90	80

1°/ Construire l'histogramme représentant la série statistique. On pourra choisir 20 cm comme unité sur l'axe des ordonnées. (2pts)

2°/ Complétez le tableau en précisant les effectifs cumulés croissants et décroissants. (2pts)

3°/ Préciser la classe modale de la série. Quel est son mode ? (1pt)

4°/ Quel est le pourcentage des candidats ayant obtenu une note inférieure à 8 ? (1pt)

5°/ Combien d'élèves ont obtenu une note supérieure ou égale à 10 ? (1pt)

6°/ Calculer la moyenne de la série. (1,5pt)

7°/ Calculer la médiane de la série. (1,5pt)

Exercice 6 :

Les résultats suivants d'une enquête sur la durée en minutes des communications passées dans une cabine téléphonique pendant un jour sont donnés dans le tableau ci- dessous

Classe	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[
effectif	30	54	51	45	63	57

1°/ Construire un histogramme représentant cette série. En déduire le polygone des effectifs. (1,5pt)

2°/ Calculer la médiane de cette série. (1pt)

3°/ Déterminer le nombre de communications dont la durée:

- a) est supérieure ou égale à 3min (1pt)
- b) est inférieure à 7min (1,5pt)
- c) est comprise entre 3 et 7min (1pt)

Exercice 7:

Aly place une somme de 50 000F dans une banque en épargne le 1^{er} janvier 2016. A la fin de chaque moi

son argent lui rapporte un intérêt de 1 000 F. (c'est-à-dire à la fin de chaque mois son argent en banque augmente de 1 000 F).

1. Calcule le montant que Aly aura dans son compte le 1^{er} février 2016.

2. Calcule l'intérêt que lui rapporte son argent au bout de 9 mois de placement. En déduis le montant que Aly aura alors dans son compte.

3. Détermine, en fonction du nombre n de mois de placement, le montant que Aly aura dans son compte.

4. Au bout de combien de mois de placement le capital de Aly sera de 75 000 F ?

Exercice 7

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = 5U_n - 2$

1°/ Calculer U_1 et U_2

2°/ On pose pour tout entier naturel n , $V_n = U_n - \frac{1}{2}$

a) Calculez V_0 , V_1 et V_2

b) Démontrez que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Reconstitution d'une fonction numérique $f(x)$

$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$	$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{kx+p}$
Rappels $(x_0; y_0) \in f \rightarrow f(x_0) = y_0$ $(x_0; y_0)$ min ou max de $f \rightarrow f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = 0$ $x = x_0$ Asymptote verticale alors x_0 est une racine du dénominateur $y = b$ Asymptote horizontale $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$		

Exercice 1 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$

Détermine les réels a , b et c sachant que :

- La courbe (C f) représentative passe par le point : (0 ; 1)
- La courbe (C f) représentative admet un minimum au point : (1 ; 0)

Solution 1 :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$(0; 1) \in f \rightarrow f(0) = a * 0^2 + b * 0 + c = 1 \rightarrow c = 1$$

$$(1; 0) \text{ min } f \rightarrow f'(1) = 0 \text{ et } f(1) = 0$$

$$f'(1) = 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = 0$$

$$f(1) = a + b + c = 0 \rightarrow a + b + c = 0$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \text{ on trouve } a = 1; b = -2; c = 1 \rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 1$$

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Détermine les réels a , b , c et d sachant que :

- La courbe (C f) représentative admet un maximum point : (0 ; 1)
- La courbe (C f) représentative admet un minimum au point : (2 ; -3)

$$\text{Solution 2 : } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$(0; 1) \text{ max } f \rightarrow f'(0) = 0 \text{ et } f(0) = 1$$

$$\rightarrow f'(0) = c = 0$$

$$\rightarrow f(0) = d = 1$$

$$(2; -3) \text{ min } f \rightarrow f'(2) = 0 \text{ et } f(2) = -3$$

$$\rightarrow f'(2) = 12a + 4b + c = 0 \rightarrow 12a + 4b = 0$$

$$\rightarrow f(2) = 8a + 4b + 2c + d = -3 \rightarrow 8a + 4b = -4$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \\ 12a + 4b = 0 \\ 8a + 4b = -4 \end{cases} \text{ on trouve } f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Détermine les réels a, b, c et d sachant que le tableau de variation

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	6	$+\infty$

Et La courbe (C_f) représentative passe au point : $(0 ; 5)$

Solution 3 : on trouve $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{et} \quad f'(x) = 2ax + b$$

Le tableau de variation nous indique que :

$$(2 ; 6) \min f \rightarrow f'(2) = 0 \quad \text{et} \quad f(2) = 6$$

$$\rightarrow f'(2) = 4a + b = 0 \quad \rightarrow f(2) = 4a + 2b + c = 6$$

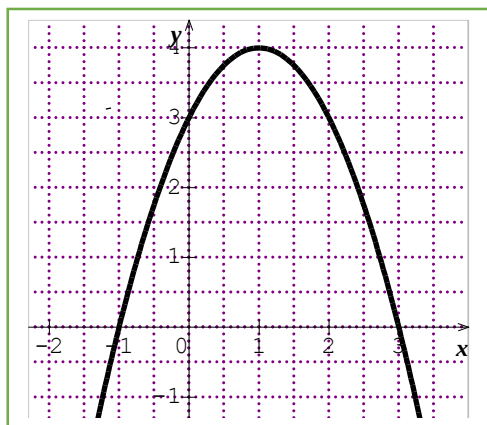
$$(0 ; 5) \in f \rightarrow f(0) = c = 5 \rightarrow c = 5$$

$$\begin{cases} c = 5 \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \quad \text{o trouve } a = -1 ; b = 4 ; c = 5 \rightarrow f(x) = -x^2 + 4x + 5$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$

Détermine les réels a, b et c sachant que la figure ci-dessous donne la représentation graphique (C) d'une fonction f :



Par lecture graphique détermine les coefficients a, b et c
 $f(x) = ax^2 + bx + c$

Solution 4 : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Passes par les points : $(-1 ; 0)$; $(3 ; 0)$; $(0 ; 3)$ et $f'(1) = 0$

$$(-1 ; 0) \rightarrow a - b + c = 0$$

$$(3 ; 0) \rightarrow 9a + 9b + c = 0$$

$$(0 ; 3) \rightarrow 0 + 0 + c = 3$$

On trouve $a = 1$; $b = 2$ et $c = 3 \rightarrow f(x) = -x^2 + 2x + 3$

Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Détermine les réels a , b et c sachant que :

- La courbe (C f) représentative admet une asymptote verticale : $x = 1$
- La courbe (C f) représentative admet une asymptote horizontale : $y = 2$
- La courbe (C f) représentative passe par le point : $(0 ; -1)$ et $(-1/2 ; 0)$

Solution 5 : on trouve $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

- Asymptote verticale : $x = 1 \rightarrow cx + d = 0 \rightarrow c + d = 0$
- Asymptote horizontale : $y = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) = \frac{a}{c} = 2 \rightarrow a = 2c$
- (C f) passe par le point : $(0 ; -1) \rightarrow f(0) = -1$
 $\rightarrow f(0) = \frac{b}{d} = -1 \rightarrow b = -d$
- (C f) passe par le point : $(-1/2 ; 0) \rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
 $\rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}a + b}{-\frac{1}{2}c + d} = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}a + b = 0 \rightarrow a = 2b$

$$\begin{cases} c + d = 0 \\ a = 2c \\ b = -d \\ a = 2b \end{cases} \quad \text{on trouve } f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

Exercice 6 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Détermine les réels a , b , c et d sachant que :

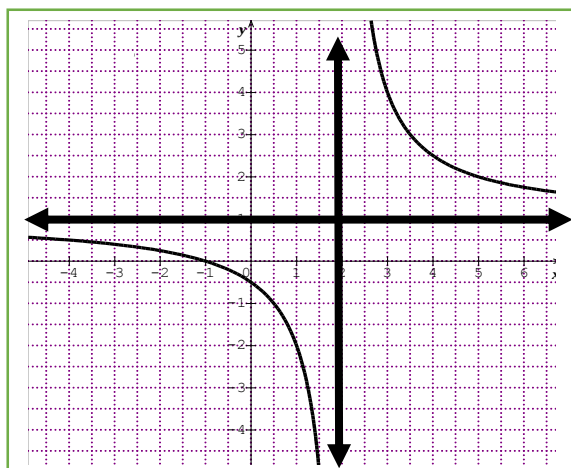
- La courbe (C f) représentative admet une asymptote verticale : $x = -1$
- La courbe (C f) représentative admet une asymptote horizontale : $y = 3$
- La courbe (C f) représentative passe par le point : $(0 ; 2)$ et $(-2 ; 4)$

Solution 6 : on trouve $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

Exercice 7 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Détermine les réels a , b , c et d sachant que la figure ci-dessous donne la représentation graphique (C) d'une fonction f :



Solution 7 : Par lecture graphique on a :

- $x = 2$ asymptote verticale $\rightarrow 2c + d = 0$
- $y = 1$ asymptote horizontale $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) = \frac{a}{c} = 1 \rightarrow a = c$
- f passe par les points $(-1 ; 0)$ et $(0 ; 0,5)$
 - $(-1 ; 0) \rightarrow f(-1) = \frac{-a+b}{-c+d} = 0 \rightarrow a = b$
 - $(0 ; 0,5) \rightarrow f(0) = \frac{0+b}{0+d} = 0,5 \rightarrow b = 0,5d$

Résolution du système :

$$\begin{cases} 2c + d = 0 \\ a = c \\ a = b \\ b = 0,5d \end{cases} \quad \text{on trouve } a = 1 ; b = 1 ; c = 1 \text{ et } d = -2 \rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

Exercice 8 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Détermine les réels a, b, c et d sachant que le tableau de variation de f :

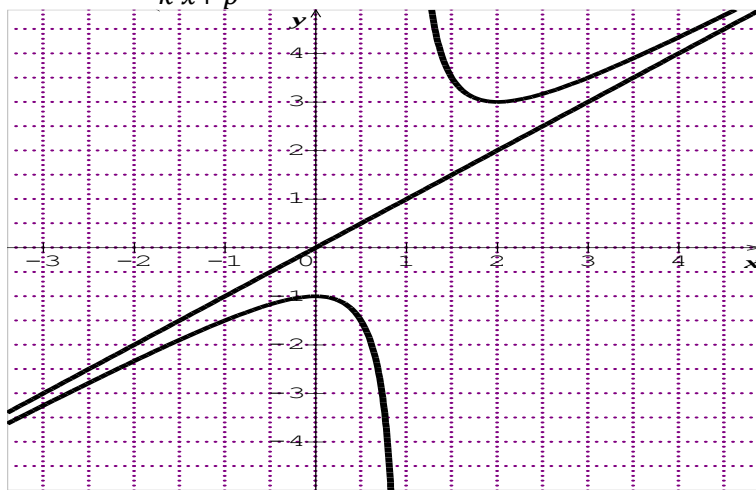
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Solution 8 : on trouve $f(x) = \frac{-x+1}{x-2}$

Exercice 9 :

La figure ci-dessous donne la représentation graphique (C) d'une fonction f :

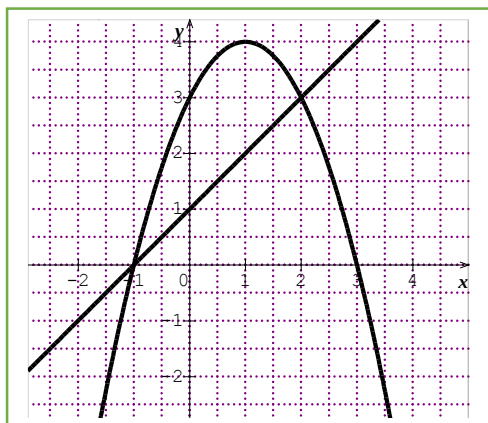
$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{kx+p}$ et l'asymptote oblique $y = ax$



Par lecture graphique détermine les coefficients $a, b, c ; k$ et p

Exercice 10 : TLL – 2016

La figure ci-dessous donne la représentation graphique (C) d'une fonction f et de la droite (D) d'équation $y = x + 1$.



On se place sur $[-1 ; 3]$ pour répondre aux questions suivantes:

1.-) Par lecture graphique détermine les coordonnées des points communs à (C) et (D) ?

2.-) Résoudre graphiquement :

a.-) $f(x) > y$

b.-) $f(x) < y$

c.-) $f(x) = 0$

Solution exercice :

1.-) Les coordonnées des points communs à (C) et (D) : $S = \{(-1 ; 0) ; (3 ; 3)\}$

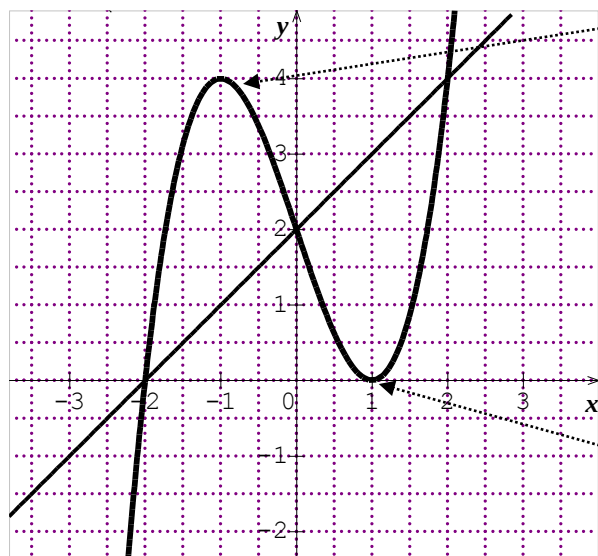
2.-)

Résoudre graphiquement : a.-) $f(x) > y \rightarrow S =]-1; 2[$

Résoudre graphiquement : b.-) $f(x) < y \rightarrow S =]2; 3[$

Résoudre graphiquement : c.-) $f(x) = 0 \rightarrow S = \{-1; 3\}$

Exemple : soit la courbe Cf et la droite D : $y = x + 2$



$$f'(-1) = 0 \quad \text{et} \quad f(-1) = 4$$

On se place sur $[-3 ; 3]$ pour répondre aux questions suivantes:

1.-) Par lecture graphique résoudre graphiquement :

- a.-) $f(x) > 0$ $f(x) < 0$ $f(x) = 0$
 b.-) $f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$ $f'(x) = 0$
 c.-) $f(x) > y$ $f(x) < y$ $f(x) = y$
 2.-) Donne le tableau de variation de $f(x)$

$$f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 0$$

Réponse :

a.-) $f(x) > 0 \rightarrow$ sur $[-3 ; 3]$ on regarde si Cf est en haut l'axe des abscisses $\rightarrow S = [-2 ; 3]$

a.-) $f(x) < 0 \rightarrow$ sur $[-3 ; 3]$ on regarde si Cf est en bas l'axe des abscisses $\rightarrow S = [-3 ; -2]$

a.-) $f(x) = 0 \rightarrow$ sur $[-3 ; 3]$ on regarde si Cf coupe l'axe des abscisses $\rightarrow S = \{-2 ; 1\}$

Retenons : signe de la fonction $f(x)$

$F(x)$ est positive lorsqu'elle se trouve au-dessus de l'axe des abscisse.

$F(x)$ est négative lorsqu'elle se trouve au-dessous de l'axe des abscisse.

b.-) $f'(x) > 0 \rightarrow$ sur $[-3 ; 3]$ on regarde si Cf monte (croît) $\rightarrow S = [-3 ; -1] \cup [1 ; 3]$

b.-) $f'(x) < 0 \rightarrow$ sur $[-3 ; 3]$ on regarde si Cf baisse (décroît) $\rightarrow S = [-1 ; 1]$

b.-) $f'(x) = 0 \rightarrow$ sur $[-3 ; 3]$ on regarde si Cf atteint le sommet $\rightarrow S = \{-1 ; 1\}$

Retenons : la variation de la fonction $f(x)$

$F'(x)$ est positive lorsque Cf croît

$F'(x)$ est négative lorsque Cf décroît.

$F'(x) = 0$ est nulle lorsque Cf atteint le sommet (maximum ou minimum) décroît.

c.-) $f(x) > y \rightarrow$ sur $[-3 ; 3]$ on regarde si Cf est au dessus de D $\rightarrow S = [-2 ; 0] \cup [2 ; 3]$

c.-) $f(x) < y \rightarrow$ sur $[-3 ; 3]$ on regarde si Cf est au dessous de D $\rightarrow S = [0 ; 2]$

c.-) $f(x) = y \rightarrow$ sur $[-3 ; 3]$ on regarde si Cf coupe D $\rightarrow S = \{-2 ; 0 ; 2\}$

Retenons : la positif de $f(x)$ par rapport à la droite D $y = ax + b$

$F(x) > y$: la courbe Cf est en haut de D

$F(x) < y$: la courbe Cf est en bas de D

$F(x) = y$: la courbe Cf coupe D

2.-) Donne le tableau de variation de $f(x)$

x	$-\infty$	-1	+1	$-\infty$	
F'(x)	+	0	-	0	+
F(x)	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Mathématiques T S S

Module 1 : Calcul de limites

Les fonctions étudiées en TLL sont :

$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$	$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{kx+p}$
------------------------	----------------------------	---------------------------------

- **Fonction polynôme :**

$f(x) = a_0 + a_1 * x^1 + a_2 * x^2 + \dots .. a_n * x^n$ est définie sur $\mathbf{R} :]-\infty; +\infty[$

- **Fonction rationnelle :**

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ou $f(x) = \frac{ax^2+bx+k}{cx+d}$ est définie ssi $cx + d \neq 0 :]-\infty; -\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c}; +\infty[$

1.- Le calcul des limites

Calcul de limite au point x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = f(x_0) = l$

Retenons bien ceci : Calculer la limite au point x_0 revient à calculer si possible $f(x_0)$.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 3 * 2 - 5 = 1$

Exemple de calcul de limites au point x_0

Enoncé	Solution
$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)$	$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 3 * 2 - 5 = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1)$	$\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = 0 - 1 = -1$
$\lim_{x \rightarrow -1} (-x + 3)$	$\lim_{x \rightarrow -1} (-x + 3) = -(-1) + 3 = 4$
$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{0-1}{0+1} = -1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-x+2}{-x+2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-x+2}{-x+2} \right) = \frac{0-0+2}{-0+2} = 1$
Calculer la limite au point x_0 revient à calculer $f(x_0)$.	

Limite à l'infini $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x_0) = f(\pm\infty) = l$

Retenons bien ceci : Calculer la limite à l'infini $\pm\infty$ revient à remplacer x (du plus haut degré) par l'infini si possible.

Note : $(-\infty)^2 = +\infty$; $(+\infty)^2 = +\infty$; $(-\infty)^3 = -\infty$; $(+\infty)^3 = +\infty$

Retenons que :

• L'infini + un nombre = infini	$\pm\infty + 5 = \pm\infty$
• L'infini sur un nombre = infini	$\frac{\pm\infty}{5} = \pm\infty$
• un nombre sur infini = 0	$\frac{5}{\pm\infty} = 0$ le dénominateur croît plus vite que le numérateur

Exemple de calcul de limites à $\pm\infty$

La limite à l'infini d'une fonction = à la limite du monôme le plus degré.	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 7x + 2)$	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = (+\infty)^2 = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x}{x+1}\right)$	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x}{x}\right) = -1$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-5}{x^3-x^2}\right)$	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-5}{4x-1}\right)$	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{4x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{4}\right) = \frac{+\infty}{4} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-7}{x+3}\right)$	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x}\right) = 3$

Les formes indéterminées $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0)$

Le Calcul de $f(x_0)$ peut être compliqué ce qui conduit à des formes indéterminées.

Les 4 formes indéterminées (retenues au niveau secondaire)

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$-\infty + \infty$	$0 \times \infty$
---------------	-------------------------	--------------------	-------------------

Comment lever l'indétermination (niveau TSS)

- Factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier pour la limite en x_0
- Prendre le monôme le plus haut degré pour la limite en ∞ .

Exercices : Après avoir levé l'indétermination calculer la limite de chacune des fonctions.

Enoncés	Solutions
$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x^2-x}\right)$ Réponse : -1	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x^2-x}\right) = \frac{0}{0}$ F Ind Levons l'indétermination : on factorise le dénominateur puis on simplifie : $\frac{x}{x^2-x} = \frac{x}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x^2-x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x-1}\right) = -1$
$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3-x}{x^2-9}\right)$ Réponse : $\frac{1}{6}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3-x}{x^2-9}\right) = \frac{0}{0}$ F Ind . Levons l'indétermination : on factorise le dénominateur puis on simplifie : $\frac{3-x}{x^2-9} = \frac{3-x}{(x-3)(x+3)} = \frac{-1}{x+3}$ $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3-x}{x^2-9}\right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x+3}\right) = \frac{1}{6}$

Calcul de limite dont le résultat donne $\frac{\text{nombre}}{0} = \pm\infty$

Retenons que :

Un nombre sur 0 égal infini. Quel infini ?	$\frac{5}{0^+} = +\infty ; \frac{-5}{0^+} = -\infty ; \frac{5}{0^-} = -\infty ; \frac{-5}{0^-} = +\infty$
---	---

Réchauffement 1 :

Calcule la limite $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1-x}{x-5} \right) = \frac{1-5}{5-5} = \frac{-5}{0}$ (Un nombre sur 0 égal infini) on étudie la limite à droite $x \rightarrow 5^+$ et la limite à gauche $x \rightarrow 5^-$. Cela revient à étudier le signe du dénominateur $ax+b$.

Rappelons que : $ax + b$ est du signe de « a » à droite et le contraire à gauche.

→ $x - 5$ le signe à droite est + alors 0^+ et le signe à gauche est - alors 0^-

Calcule la limite $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1-x}{x-5} \right) = \frac{-5}{0}$ on calcule la limite à droite ($x \rightarrow 5^+$) et la limite à gauche ($x \rightarrow 5^-$).

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \left(\frac{1-x}{x-5} \right) = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \left(\frac{1-x}{x-5} \right) = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

Réchauffement 1 :

Calcule la limite $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+1}{6-2x} \right) = \frac{3+1}{6-6} = \frac{4}{0}$ (Un nombre sur 0 égal infini)

On étudie la limite à droite $x \rightarrow 3^+$ et la limite à gauche $x \rightarrow 3^-$.

Cela revient à étudier le signe du dénominateur « $ax+b$ ».

Rappelons que : $ax + b$ est du signe de « a » à droite et le contraire à gauche.

→ $6 - 2x$ le signe à droite est - alors 0^- et le signe à gauche est + alors 0^+

Calcule la limite $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+1}{6-2x} \right) = \frac{4}{0}$ on calcule la limite à droite ($x \rightarrow 3^+$) et la limite à gauche ($x \rightarrow 3^-$).

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x+1}{6-2x} \right) = \frac{+4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x+1}{6-2x} \right) = \frac{+4}{0^+} = +\infty$$

Retenons bien

Le binôme « $ax + b$ » est du signe de « a » à droite et le contraire à gauche.

Ex : $1 - 3x$ le signe est (-) à droite et le signe est (+) à gauche

Ex : $6 + 2x$ le signe est (+) à droite et le signe est (-) à gauche

Exemple à faire : Calcule la limite

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-x}{-x+2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{7-x}{4-2x} \right)$
$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+5}{x-1} \right)$	$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x+1}{5x+10} \right)$
$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x}{x-2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-3}{x} \right)$
$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2x-5}{1-x} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x+2}{x} \right)$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x-3}{x} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+3}{-x} \right)$

2.- Les 3 asymptotes à la courbe

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = b$. Alors $y = b$ est asymptote horizontale AH

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = \infty$. Alors $x = x_0$ est asymptote verticale AV

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$. Alors $y = ax + b$ est asymptote oblique AO.

Exercice 1 :

On considère la fonction numérique f définie par :

a.- $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ b.- $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ c.- $f(x) = \frac{x^2-x+3}{2-x}$

Déterminer (si possible) les asymptotes à la courbe de f .

Solution 1 :

a.- $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ est définie sur $\mathbb{R} :]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2) = 3(-\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = 3(+\infty)^2 = +\infty$$

Il n'existe pas d'asymptote à cette courbe.

b.- $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-3\} =]-\infty ; -3[\cup]-3 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} \right) = 2 \text{ alors } y = 2 \text{ A H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\frac{2x-1}{x+3} \right) = \frac{2(-3)-1}{-3+3} = \frac{-7}{0^-} = +\infty \text{ alors } x = -3 \text{ A V.}$$

Il existe deux asymptote : $y = 2$ et $x = -3$.

c.- $f(x) = \frac{x^2-x+3}{2-x}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x+3}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty \text{ il n'y a pas A H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2-x+3}{2-x} \right) = \frac{4-2+3}{2-2} = \frac{5}{0^+} = +\infty \text{ alors } x = 2 \text{ A V.}$$

Existence d'asymptote oblique car le degré du numérateur dépasse celui du dénominateur de 1.
On effectue la division euclidienne :

$x^2 - x + 3$	$2 - x$	$f(x) = -x - 1 + \frac{5}{2-x}$ $y = -x - 1 \text{ asymptote oblique.}$
$-x^2 + 2x$	$-x - 1$	
$x + 3$		
$-x + 2$		
5		

Il existe deux asymptote : $x = 2$ et $y = -x - 1$.

Sujets d'application sur le calcul de limite

Exercice 1 :

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de f .

2-/ Calculez la limite de f aux bornes du domaine de définition

3-/ En déduire si possible les asymptotes à la courbe de f .

Solution 1 :

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ est définie sur $\mathbb{R} :]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = (-\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = (+\infty)^2 = +\infty$$

Il n'existe pas d'asymptote à cette courbe.

Exercice 2 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de f .

2-/ Calculez la limite de f aux bornes du domaine de définition

3-/ En déduire si possible les asymptotes à la courbe de f .

Solution 2

$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{3\} =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 1 \quad \text{alors } y = 1 \text{ A H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x+1}{x-3} \right) = \frac{+3+1}{3-3} = \frac{4}{0^-} = -\infty \quad \text{alors } x = 3 \text{ A V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x+1}{x-3} \right) = \frac{+3+1}{3-3} = \frac{4}{0^+} = +\infty \quad \text{alors } x = 3 \text{ A V.}$$

Il existe deux asymptotes : $y = 1$ et $x = 3$.

Exercice 3 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{6x+1}{4-2x}$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de f .

2-/ Calculez la limite de f aux bornes du domaine de définition

3-/ En déduire si possible les asymptotes à la courbe de f .

Solution

$f(x) = \frac{6x+1}{4-2x}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x+1}{4-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x}{-2x} \right) = -3 \quad \text{alors } y = -3 \text{ A H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{6x+1}{4-2x} \right) = \frac{12+1}{4-4} = \frac{13}{0^+} = +\infty \quad \text{alors } x = 2 \text{ A V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{6x+1}{4-2x} \right) = \frac{12+1}{4-4} = \frac{13}{0^-} = -\infty \quad \text{alors } x = 2 \text{ A V.}$$

Il existe deux asymptotes : $y = -3$ et $x = 2$.

Module 2 : Dérivée d'une fonction

La dérivée d'une fonction f décrit la variation de la fonction f' .

Dérivée d'une constante est nulle :

$$f(x) = 7 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 0$$

Dérivée de « kx » est égale à « k »

$$f(x) = 7x \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 7$$

$$f(x) = x \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 1$$

$$f(x) = -x \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = -1$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = 6x + 3 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 6$$

$$f(x) = -x + 1 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = -1$$

Dérivée de « kx^n » est égale à « $k.n.x^{n-1}$ »

$$f(x) = 5x^2 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 10x$$

$$f(x) = 4x^3 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 12x^2$$

$$f(x) = x^2 - x + 2 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 2x - 1$$

$$f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x + 1 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 12x^2 - 14x + 5$$

Dérivée de « $\frac{1}{x}$ » est égale à « $-\frac{1}{x^2}$ »

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x} \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = 3x^2 + 5x - \frac{1}{x} + 3 \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = 6x + 5 + \frac{1}{x^2}$$

Dérivée de « $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ » est égale à « $-nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$ »

$$f(x) = \frac{1}{x^5} \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = -\frac{5}{x^6}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{10}} \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = -\frac{10}{x^{11}}$$

Dérivée de « $\sqrt{x}$ » est égale à « $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ »

Exercice : Réchauffement sur la dérivée première :

1.- $f(x) = 4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + x + 3$ la dérivée $f'(x) = 20x^4 + 16x^3 - 15x^2 + 1$
2.- $f(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + 5x + 20$ la dérivée $f'(x) = -5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5$

Dérivée de fonction

$$f(x) = u^n \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

$$f(x) = (2x + 3)^2 \rightarrow \text{c'est de la forme } [u^n]' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

$$\text{on pose } u = 2x + 3 \text{ et } u' = 2 \text{ et } n = 2$$

$$f'(x) = 2 * 2 * (2x + 3)^{2-1} \rightarrow f'(x) = 4 (2x + 3)^1$$

$$f(x) = \frac{u}{v} \rightarrow \text{dérivée } f'(x) = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{2x+3}{5x+1} \rightarrow \text{c'est de la forme } \left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

$$\text{on pose } u = 2x + 3 \text{ et } u' = 2 \rightarrow v = 5x + 1 \text{ et } v' = 5$$

$$f'(x) = \frac{2(5x+1) - 5(2x+3)}{(5x+1)^2} = \frac{10x+2-10x-15}{(5x+1)^2} = \frac{-13}{(5x+1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-13}{(5x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2+5x-1}{x+3} \rightarrow \text{c'est de la forme } \left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

$$\text{on pose } u = x^2 + 5x - 1 \text{ et } u' = 2x + 5 \rightarrow v = x + 3 \text{ et } v' = 1$$

$$f'(x) = \frac{(2x+5)(x+3) - (1)(x^2+5x-1)}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x+5x+15-x^2-5x+1}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+16}{(x+3)^2}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{x^2+6x+16}{(x+3)^2}$$

$$f(x) = u * v \rightarrow \text{Dérivée } f'(x) = u' * v + v' * u$$

$$f(x) = (2x - 1)(4 - 7x) \rightarrow \text{c'est de la forme } [u * v]' = u' * v + v' * u$$

$$\text{on pose } u = 2x - 1 \text{ et } u' = 2 \rightarrow v = 4 - 7x \text{ et } v' = -7$$

$$f'(x) = (2)(4 - 7x) + (-7)(2x - 1) = 8 - 14x - 14x + 7 = 15 \rightarrow f'(x) = 15$$

$$f(x) = \sqrt{u} \rightarrow \text{Dérivée } f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f(x) = \sqrt{2x+3} \rightarrow \text{c'est de la forme } [\sqrt{u}]' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\text{on pose } u = 2x + 3 \text{ et } u' = 2 \rightarrow f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}$$

Exercice 1 : Soient les fonctions numériques :

$$f(x) = (5x + 3)^2 \quad f(x) = (x^2 - 2x + 3)^4$$

$$f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 7x)}$$

Equation de la tangente $T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ **Exercice 1 :**

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de f .

2-/ Calculez la fonction dérivée de f .

3-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse $x_0 = 1$

Solution :

1.-/ La fonction $f(x) = x^2 - 2x + 3$ est définie sur $\mathbb{R}$ $Df =]-\infty; +\infty[$

2.-/ $f(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$

3.-/ Equation de la tangente $T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$f(1) = 1^2 - 2 * 1 + 3 = 2 \text{ et } f'(1) = 2 * 1 - 2 = 0$$

$$T: y = 0 * (x - 1) + 2 \Rightarrow T: y = 2$$

Exercice 2 :

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

1-/ Déterminez l'ensemble de définition de f .

2-/ Calculez la fonction dérivée de f .

3-/ Écrire une équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse $x_0 = 0$

Solution :

1.-/ La fonction $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ est définie si $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$Df =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

2.-/ $f(x) = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

3.-/ Equation de la tangente $T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$f(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1 \text{ et } f'(0) = \frac{2}{(0+1)^2} = 2$$

$$T: y = (2) * (x - 0) + (-1) \Rightarrow T: y = 2x - 1$$

Les étapes de l'étude d'une fonction

1^{ère} étape : domaine de définition

Exemple : déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \rightarrow \text{C'est une fonction polynôme } Df = R =]-\infty; +\infty[$$

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \rightarrow \text{C'est une fonction rationnelle on doit poser le dénominateur différent de zéro}$$

$$Dg = R =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$h(x) = \frac{x^2-3x+7}{2x+6} \rightarrow \text{C'est une fonction rationnelle on doit poser le dénominateur différent de zéro } Dh =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$$

2^{ème} étape : limites aux bornes

Exemple : déterminer la limite aux bornes du domaine de définition de chacune des fonctions :

$$1.- f(x) = x^2 - 3x + 2 \rightarrow \text{C'est une fonction polynôme } Df = R =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$2.- g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \rightarrow Dg = R =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

3^{ème} étape : dérivée de la fonction

Exemple : déterminer la dérivée de chacune des fonctions :

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \rightarrow f'(x) = 2x - 4$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

4^{ème} étape : le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de $f(x)$

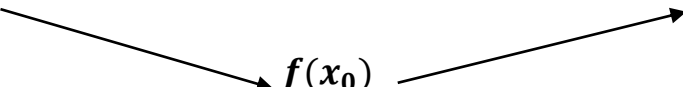
- **Signe de $f(x)$**

$f'(x) = 0 \rightarrow$ on trouve x_0 puis on calcule $f(x_0) \rightarrow$ le sommet $S = (x_0; f(x_0))$

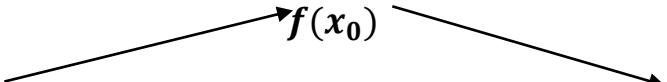
Si $f'(x_0) < 0$ la fonction est décroissante

Si $f'(x_0) > 0$ la fonction est croissante

- **Tableau de variation**

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x) = ax + b \ (a > 0)$	—		+
$f(x)$			

- **Tableau de variation**

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x) = ax + b \ (a < 0)$	+		-
$f(x)$			

5^{ème} étape : – Les asymptotes à la courbe

- Détermination des asymptotes à la courbe (fonction de type $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$)

L'asymptote verticale AV est l'équation du domaine de définition

$Df = R - \{a\} \Rightarrow$ l'asymptote verticale $x = a$

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow$ f est définie ssi $x \neq 1$ alors AV: $x = 1$

L'asymptote horizontale AH

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b$ est l'AH

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$ alors AH: $y = 2$

L'asymptote oblique A.O : conditions d'existence de l'AO : $y = ax + b$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$\Rightarrow$ Lorsque la différence des degrés du numérateur et du dénominateur égal à 1

$\Rightarrow f(x) = ax + b - \frac{c}{dx+e}$ alors A.O : $y = ax + b$

Exemple 1 : Présenter le tableau de variation de la fonction : $f(x) = x^2 - 4x + 2$

Réponse

$f(x) = x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ et $f(2) = -2$

$\Rightarrow$ Le sommet $S = (2; -2)$

- **Tableau de variation**

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x) = 2x - 4$	-		+
$f(x)$	$+\infty$	-2	$+\infty$

Module 3 : Calcul de primitive

Une primitive $F(x)$ est la fonction initiale tirée de sa dérivée première $f'(x)$.

$$F'(x) = f(x)$$

Par exemple :

- si $f(x) = x$ est la dérivée alors une primitive est $F(x) = \frac{1}{2} x^2$.
- si $f(x) = \frac{1}{3} x^2$ est la dérivée alors une primitive est $F(x) = x^3$.
- si $f(x) = x$ est la dérivée alors une primitive est $F(x) = \frac{1}{2} x^2$.

Primitive usuelle

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + k$
$f(x) = a x^n$	$F(x) = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + k$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{-1}{x} + k$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1) x^{n-1}} + k$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + k$
$f(x) = e^{ax}$	$F(x) = \frac{e^{ax}}{a} + k$

Cas des fonctions irrationnelles : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{x^p} = x^{\frac{p}{n}}$

Primitive composée

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$f(x) = u' u^n$	$F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k$
$f(x) = \frac{u'}{u^2}$	$F(x) = \frac{-1}{u} + k$
$f(x) = \frac{u'}{u^n}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1) u^{n-1}} + k$
$f(x) = \frac{u'}{u}$	$F(x) = \ln u + k$
$f(x) = u' e^u$	$F(x) = e^u + k$

Exercices de réchauffement et corrigés

Enoncés	Corrigés		Enoncés	Corrigés
$f(x) = 5$	$F(x) = 5x + k$		$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + k$
$f(x) = 7x$	$F(x) = \frac{7}{2} x^2 + k$		$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	$F(x) = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + k$
$f(x) = x^8$	$F(x) = \frac{1}{9} x^9 + k$		$f(x) = \sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$	$F(x) = \frac{7}{8} x^{\frac{8}{7}} + k$
$f(x) = (2x + 1)$	$F(x) = x^2 + x + k$		$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$F(x) = \frac{1}{-1} x^{-1} + k$
$f(x) = 5$	$F(x) = 5x + k$		$f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$	$F(x) = \frac{1}{-4} x^{-4} + k$
$f(x) = \frac{5}{x}$	$F(x) = \ln x + k$		$f(x) = e^{-3x}$	$F(x) = \frac{e^{-3x}}{-3} + k$

Application de la formule : $I = \int u' u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k$

- Calculer l'ensemble des primitives de $f(x) = (2x - 7)(x^2 - 7x + 2)^5$

C'est la forme $\int u' u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ on pose $u = x^2 - 7x + 2 \rightarrow u' = 2x - 7$

$$I = \int (2x - 7)(x^2 - 7x + 2)^5 dx = \frac{(x^2 - 7x + 2)^6}{6}$$

- Calculer l'ensemble des primitives de $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 5)^7$

C'est la forme $\int u' u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ on pose $u = x^2 - 3x + 5 \rightarrow u' = 2x - 3$

$$I = \int (2x - 3)(x^2 - 3x + 5)^7 dx = \frac{(x^2 - 3x + 5)^8}{8} + k$$

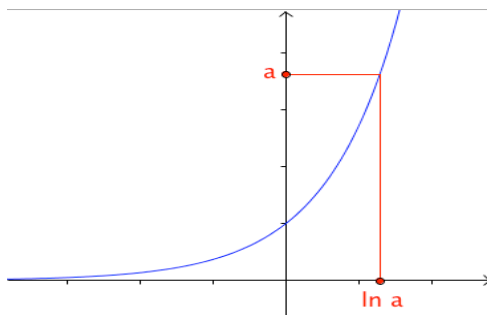
- Calculer l'ensemble des primitives de :

$$f(x) = (2x - 5)^9 \quad f(x) = (x - 1)(7x^2 - 14x + 2)^3$$

Module 5 : fonction Log x et e^x

I. Définitions

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0; +\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de $]0; +\infty[$ l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.



Définition : On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif a , l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln a$.

La fonction logarithme népérien, notée **ln**, est la fonction :

$$\begin{aligned} \ln :]0; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

Remarques :

- Les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
- Les courbes représentatives des fonctions $\exp$ et $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimal,

Notée $\log$ est définie par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Conséquences :

a.-) $y = \ln x$ avec $x > 0 \Leftrightarrow x = e^y$

b.-) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = -1$

c.-) Pour tout x , $\ln e^x = x$

d.-) Pour tout x strictement positif, $e^{\ln x} = x$.

Exemples : résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $\ln x = 5$; $\ln(x + 2) = 8$
- $\ln(3x - 1) = 4$;

$\ln x = 5 \Rightarrow x = e^5$	$\ln(x + 2) = 8 \Rightarrow x + 2 = e^8 \Rightarrow x = e^8 - 2$
$\ln(3x - 1) = 4 \Rightarrow 3x - 1 = e^4 \Rightarrow x = \frac{e^4 + 1}{3}$	

II. Cas de fonction logarithme népérien

1.-) Relation fonctionnelle : pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

• $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ • $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ • $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$ • $\ln x^n = n \ln x$	$y = \ln x$ avec $x > 0 \Leftrightarrow x = e^y$ $\ln 1 = 0 ; \ln e = 1 ; \ln\frac{1}{e} = -1$ Pour tout x , $\ln e^x = x$ Pour tout x strictement positif, $e^{\ln x} = x$
--	--

2.-) Opération de fonction $\ln x$

$$\ln x + \ln y \neq \ln(x + y)$$

$$a \ln x + b \ln x = (a + b) \ln x$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^2 = 2$$

$$\ln e^x = x$$

La fonction réciproque de $\ln x$ est $e^x \rightarrow \ln e^x = x$ et $e^{\ln x} = x$

Exemple : $\ln e^8 = 8$ $e^{\ln 8} = 8$

Exemple 1 : simplifie

$$A = \ln 8 - 5 \ln 32 - 3 \ln 64$$

$$B = 2 \ln 27 + \ln 9 - 5 \ln 81$$

$$C = \ln 5 + \ln 125 - 2 \ln 625$$

Réponse :

$$\rightarrow A = \ln 2^3 - 5 \ln 2^5 - 3 \ln 2^6 = 3 \ln 2 - 25 \ln 2 - 18 \ln 2 = -40 \ln 2$$

$$\rightarrow B = 2 \ln 3^3 + \ln 3^2 - 5 \ln 3^4 = 6 \ln 3 + 2 \ln 3 - 20 \ln 3 = -12 \ln 3$$

$$\rightarrow C = \ln 5 + \ln 5^3 - 2 \ln 5^4 = \ln 5 + 3 \ln 5 - 8 \ln 5 = -4 \ln 5$$

Exemple : simplifier les expressions

$$A = 5 \ln a + 6 \ln a - 3 \ln a$$

$$\rightarrow A = 8 \ln a$$

$$B = 2 \ln a - 5 \ln a$$

$$\rightarrow B = -3 \ln a$$

$$C = \ln 3 + 4 \ln 3 - 7 \ln 3$$

$$\rightarrow C = -2 \ln a$$

Exemple : simplifier les écritures

$$A = e^{\ln 4} + \ln e^3 + \ln e^{-5} - e^{\ln 2}$$

$$B = \ln 2^5 - \ln 8 + \ln 32 - \ln 64. \quad (1\text{pt})$$

Solution :

$$A = e^{\ln 4} + \ln e^3 + \ln e^{-5} - e^{\ln 2} = 4 + 3 - 5 - 2 = 0$$

$$B = \ln 2^5 - \ln 8 + \ln 32 - \ln 64 = 5 \ln 2 - 3 \ln 2 + 5 \ln 2 - 6 \ln 2 = \ln 2$$

3.-) Domaine de définitions d'une fonction $\ln x$

$\ln(f(x))$ est défini ssi $f(x) > 0$. Ce qui veut dire le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'existe pas.

$f(x) = \ln(g(x))$ est définie ssi $g(x) \in]0; +\infty[$

Déterminer le domaine de définition

$f(x) = \ln(4 - x^2)$	$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$	$f(x) = \ln 4 - x^2 $	$f(x) = \frac{1}{\ln x}$
$f(x) = \ln(2x^2 - x)$	$f(x) = \ln(x^2 + 4)$	$f(x) = \ln 2 + x $	$f(x) = \ln\frac{1}{x}$

Solution 1 : $f(x) = \ln(4 - x^2)$ est définie ssi $4 - x^2 > 0 \Rightarrow$ c'est le signe du trinôme : le signe de « a » (-) à l'extérieur des deux racines -2 et 2 et le signe contraire (+) entre les deux racines $\Rightarrow Df =]-2; 2[$.

Solution 2 : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$ est définie ssi $\frac{1-x}{x+2} > 0$ et $x+2 \neq 0$

X	$-\infty$	-2	+1	$+\infty$	Explication
$1 - x$		+	+	-	Le signe - à droite de 1 et + à gauche
$x + 2$		-	+	+	Le signe + à droite de -2 et - à gauche
$\frac{1-x}{x+2}$		-	+	-	
	Non	oui	Non		

$$Df =]-2; 1[$$

Solution 3 : $f(x) = \ln|4 - x^2|$ est définie ssi $4 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2$
 $Df =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$.

Solution 4 : $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ est définie ssi $\ln x \neq 0$ et $x > 0$
 $\Rightarrow \ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq e^0 = 1 \Rightarrow Df =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

Solution 5 : $f(x) = \ln(2x^2 - x)$ est définie ssi $2x^2 - x > 0$

X	$-\infty$	0	+1/2	$+\infty$
$2x^2 - x$		+	-	+
	Oui	Non	Oui	

$$Df =]-\infty; 0[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty[$$

4.-) Limites des fonctions logarithmes**Calcul de limites (Log)**

* utilisation des limites usuelles :

$$\lim_{u \rightarrow 0} u \ln^{\alpha} u = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} u \ln u = 0$$

Exemple :

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0 \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x) = -\infty$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{x+1}{x^2-3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 0) = -\infty$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{x^2+1}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x) = +\infty ; \quad \text{e. } \lim_{x \rightarrow \infty} (x \ln^2 x) = 0$$

5.-) Dérivée : cas des fonctions $\ln x$

$$f(u) = \ln(u) \rightarrow f'(u) = \frac{u'}{u}$$

$$f(u) = \ln |u| \rightarrow f'(u) = \frac{u'}{u}$$

Exemple :

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3) \rightarrow f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+3}$$

$$\rightarrow f(x) = \ln(3x+2) \quad f'(x) = \frac{3}{3x+2}$$

$$\rightarrow f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}$$

6.-) Primitive

$$\text{La fonction } f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow F(x) = \ln |x| + k \rightarrow I = \int \frac{1}{x} dx = \ln |ax| + k$$

$$\text{La fonction } f(x) = e^{ax} \rightarrow F(x) = \frac{e^{ax}}{a} + k \rightarrow I = \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + k$$

$$\text{La fonction } f(u) = \frac{u'}{u} \rightarrow \text{Primitive est } F(x) = \ln |u| + k \quad (\text{k constante réelle})$$

$$\text{La fonction } f(u) = u' e^u \rightarrow \text{Primitive est } F(x) = e^u + k \quad (\text{k constante réelle})$$

III.-/ Cas des fonctions exponentielles e^x

- **Domaine de définition**

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple :

- $f(x) = e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$
- $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$
- $f(x) = e^{\frac{2x}{x-1}}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Calcul de limites ($e^{f(x)}$)**

* utilisation des limites usuelles :

$$\lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

Exemple :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (numérateur croît plus vite que le dénominateur)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (dénominateur croît plus vite que le numérateur)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x+1}{3x-1}} = e^{\frac{2}{3}}$

Calcul de dérivée : cas des fonctions e^x

$$f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = u' \cdot e^u$$

Exemple :

- $f(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^x$
- $f(x) = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}$
- $f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2x e^{x^2}$
- $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$
- $f(x) = e^{(3x^2-5x)} \Rightarrow f'(x) = (6x-5) e^{(3x^2-5x)}$
- $f(x) = x \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$

Exercice : Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1.-) $f(x) = e^{3x-7}$

2.-) $g(x) = \ln(e^x + 7)$

3.-) $h(x) = \frac{e^x+2}{e^x-9}$

4.-) $k(x) = 8\ln x - x^2 - 7x + 5$

Résolution d'équation avec ln

*** les équations de type : $A^x = B \Rightarrow x = \frac{\ln B}{\ln A}$**

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$: $5^x = 20$; $6^x = 1$; $2^{x-1} = 9$; $7^{2x-3} = 5$

Réponse :

$$5^x = 20 \Rightarrow x = \frac{\ln 20}{\ln 5} = \frac{2,9957}{1,6094} = 1,86 \Rightarrow S = \left\{ \frac{\ln 20}{\ln 5} \right\}$$

*** les équations de type : $\ln u = A \Rightarrow u = e^A$**

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln x = 2$; $\ln(x-1) = 1$; $\ln(x^2 + 1) = 1$

Réponse :

$$\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \Rightarrow S = \{e^2\}$$

$$\ln(x-1) = 1 \Rightarrow x-1 = e^1 \Rightarrow S = \{e^1 + 1\}$$

$$\ln(x^2 + 1) = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = e^1 \Rightarrow S = \{e^1 - 1\}$$

*** les équations de type : $a(\ln x)^2 + b(\ln x) + c = 0$**

On pose $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ et l'équation devient : $aX^2 + bX + c = 0$

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (\ln x)^2 - (\ln x) - 6 &= 0 & 6(\ln x)^2 - 19(\ln x) + 10 &= 0 \\ 4(\ln(x+1))^2 - 19\ln(x+1) - 5 & & (\ln(x-2))^2 + 4\ln(x-2) - 5 &= 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Réponse :

$$(\ln x)^2 - (\ln x) - 6 = 0 \text{ On pose } X = \ln x \text{ avec } X \in \mathbb{R} \text{ alors : } X^2 - X - 6 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25 = 5^2 \Rightarrow x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 ; x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$\text{Pour } x = -2 \text{ on } \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$$

$$\text{Pour } x = 3 \text{ on } \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3 \text{ l'ensemble solution } S = \{e^{-2}; e^3\}$$

$$6(\ln x)^2 - 19(\ln x) + 10 = 0 \text{ On pose } X = \ln x \text{ avec } X \in \mathbb{R} \text{ alors}$$

$$6X^2 - 19X + 10 = 0$$

$$\Delta = (-19)^2 - 4(6)(10) = 121 = 11^2 \Rightarrow x_1 = \frac{19-11}{12} = \frac{2}{3} ; x_2 = \frac{19+11}{12} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Pour } x = \frac{2}{3} \text{ on } \ln x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = e^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Pour } x = \frac{5}{2} \text{ on } \ln x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{5}{2}} \text{ l'ensemble solution } S = \left\{ e^{\frac{2}{3}}; e^{\frac{5}{2}} \right\}$$

$$4(\ln(x+1))^2 - 19\ln(x+1) - 5 = 0$$

$$\text{On pose } X = \ln(x+1) \text{ alors : } 4X^2 - 19X - 5 = 0 \text{ on trouve } x = -\frac{1}{4} \text{ ou } x = 5$$

$$\text{Pour } x = -\frac{1}{4} \text{ on } \ln(x+1) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{4}} - 1$$

$$\text{Pour } x = 5 \text{ on } \ln x = 5 \Rightarrow x = e^5 \text{ l'ensemble solution } S = \left\{ e^{-\frac{1}{4}} - 1; e^5 \right\}$$

$$(\ln(x-2))^2 + 4\ln(x-2) - 5 = 0$$

$$\text{On pose } X = \ln(x-2) \text{ alors : } X^2 + 4X - 5 = 0 \text{ on trouve } x = -5 \text{ ou } x = 1$$

$$\text{Pour } x = -5 \text{ on } \ln(x-2) = -5 \Rightarrow x = e^{-5} + 2$$

$$\text{Pour } x = 1 \text{ on } \ln(x-2) = 1 \Rightarrow x = e^1 + 2 \Rightarrow S = \{e^{-5} + 2; e^1 + 2\}$$

Module 5 : Dénombrement et Probabilité

Dénombrement

Le dénombrement consiste à calculer le nombre exact d'un ensemble fini. Cela nous ramène à calculer le cardinal.

Pour un **ensemble fini**, le **cardinal** est son **nombre d'éléments**.

Dénombrement		
La formule d' Henri Poincaré (1854-1912) Card ($A \cup B$) = card (A) + card (B) – card ($A \cap B$)		
Permutations	Sans répétition Tirage : successif de n parmi n sans remise	$p_n = n !$
	Avec répétition Tirage : successif de n parmi n avec remise	$p_{n,n_1,n_2,n_3} = \frac{n !}{n_1 ! n_2 ! n_3}$
Arrangements	Sans répétition Tirage : successif de p parmi n sans remise	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ avec $n \geq p$
	Avec répétition Tirage : successif de p parmi n avec remise	n^p
Combinaisons	Sans répétition Tirage : simultanée (au hasard) de p parmi n sans remise	$C_n^p = \frac{n!}{p! (n-p)!}$ Avec $n \geq p$
	Avec répétition Tirage : simultanée (au hasard) de p parmi n avec remise	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$ on peut avoir $p > n$.

Exemple : soient les ensembles

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ le cardinal de A : $Card(A) = 6$

$B = \{2, 7, 8, 9\}$ le cardinal de B : $Card(B) = 4$

Exemple :

A « l'ensemble des jours de la semaine » **Card (A) = 7**

B « l'ensemble des mois de l'année » **Card (B) = 12**

C « l'ensemble de tous les quartiers de la commune 1 » **Card (C) = ...**

D « l'ensemble des cartes d'un jeu de belotte » **Card (D) = 32**

E « l'ensemble des institutions du Mali » **Card (E) = ...**

Calcule le Card (A ∪ B) ; card (A ∩ B) et card (A̅)

Intersection $\cap$: « les éléments communs entre A et B »

A ∩ B : le nombre de réalisation de A et B à la fois.

Union $\cup$: « la somme des éléments de A et B sans répétitions »

A ∪ B : le nombre de réalisation totale de A ou B.

Négation : « les éléments de E qui ne sont pas dans A »

A̅ : le nombre de réalisation contraire de A.

Exemple : soient l'ensemble E : $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et deux sous-ensembles $A = \{a, b, c, d, e\}$ $B = \{d, e, f, g\}$.

Calcule le cardinal de : $A \cup B$; $A \cap B$; A ; B ; $\bar{A}$

- $A \cup B = E \rightarrow \text{card}(E) = 7$
- $A \cap B = \{d, e\} \rightarrow \text{card}(A \cap B) = 2$
- $\text{Card}(A) = 5$ $\text{card}(B) = 4$
- $\bar{A} = \{d, e, f, g\}$ **card (A̅) = 4**

1.-) Formule de Poincaré

La formule suivante porte le nom d'**Henri Poincaré** (1854-1912) même si elle est en fait due à **Abraham de Moivre** (1667-1754). On désigne également ce résultat sous l'appellation **principe d'inclusion-exclusion**.

Soient A, B, C des ensembles finis
$Card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$
$Card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C)$ $- card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C)$ $+ card(A \cap B \cap C)$

Exemple 1 : Formule de Poincaré

Dans une classe de 36 étudiants : ($Card(A \cup B \cup C) = 36$)

- 22 maîtrisent les Comptabilité (A) $\rightarrow card(A) = 22$
- 22 maîtrisent la Géographie (B) $\rightarrow card(B) = 22$
- 18 maîtrisent les Maths (C) $\rightarrow card(C) = 18$
- 10 maîtrisent à la fois la Compta et la Géo $\rightarrow card(A \cap B) = 10$
- 9 maîtrisent à la fois la Géo et les maths $\rightarrow card(B \cap C) = 9$
- 11 maîtrisent à la fois la Compta et les maths $\rightarrow card(A \cap C) = 11$

Combien d'étudiants maîtrisent les trois matières ? $\rightarrow card(A \cap B \cap C)$

Solution

Soit A l'ensemble des étudiants qui maîtrisent la Compta

Soit B l'ensemble de ceux qui maîtrisent la Géographie

Soit C l'ensemble de ceux qui maîtrisent les Maths.

On cherche à calculer $Card(A \cap B \cap C)$.

Or les hypothèses signifient que :

$Card(A \cup B \cup C) = 36$	$Card(A \cap B) = 10$	
$Card(A) = 22$	$Card(A \cap C) = 11$	
$Card(B) = 22$	$Card(B \cap C) = 9$	
$Card(C) = 18$	$Card(A \cap B \cap C) = ?$	

On utilise alors la formule de Poincaré avec trois ensembles

$$Card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$$

On en déduit facilement que $card(A \cap B \cap C) = 4$. **Réponse : 4 étudiants**

2.-) Principe multiplicatif

Supposons qu'une expérience puisse se décomposer en p sous-expériences ayant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_p$ résultats possibles.

Le nombre total de résultats possibles de l'expérience globale est alors

$$N = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$$

Exemple :

Combien de menus peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 5 plats et 4 desserts ?

Réponse :

On a ici 3 sous-expériences : le choix de l'entrée, puis le choix du plat et enfin le choix du dessert.

D'après le principe multiplicatif on aura donc $3 \times 5 \times 4$ menus possibles, c'est-à-dire 60.

3.-) Le nombre factoriel $n!$ ou le nombre de Permutation

(tirage successif de p parmi n : sans répétition $n!$)

La factorielle d'un entier naturel non nul n est notée $n!$ et est définie par

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$$

Par convention, on pose également $0! = 1$

Exemple : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

Dénombrement : le nombre factoriel sert à calculer le nombre de permutation possible n éléments dans n cases.

Exo 1 : combien de façons peut-on arranger 5 livres dans 5 casiers.

Solution : il s'agit de permuter 5 éléments dans $5 : 5!$; $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Exo 2 : combien de façons peut-on former de mots avec le mot: CASE.

Solution : il s'agit de permuter 4 éléments dans $4 : 4!$; $= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Exo 3 : combien de façons peut-on former un comité de 10 membres parmi les 6 hommes et 4 femmes.

Solution : il s'agit de permuter 10 éléments dans $10 : 10!$; $= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$
...

Exo 4 : Dans une classe de terminale TSS il y a 24 élèves. Ils doivent tous s'inscrire à un concours de journalisme. Pour cela, il faut établir une liste d'inscription. Combien il y a-t-il de manières de constituer cette liste?

Rép : Le nombre de façon pour construire cette liste correspond au nombre de permutation des 24 élèves, soit : $24! = 24 \times 23 \times \dots \times 2 \times 1$

Le nombre de Permutation

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Une **permutation** de E est une **suite ordonnée** de tous les éléments de E.

- Les permutations **sans répétitions** $n !$
- Les permutations **avec répétitions** $\frac{n !}{n_1 ! n_2 ! n_3 ! \dots n_k !}$

Exemple : Permutations sans répétitions

De combien de façons peut-on placer un groupe de 5 personnes sur un banc?

Réponse : $5 ! = 120$

Exemple : Permutations avec répétitions

Quel est le nombre d'anagrammes du mot "PAPA" ?

Réponse : Les permutations **avec répétitions** $\frac{n !}{n_1 ! n_2 ! n_3 ! \dots n_k !}$

$$\frac{n !}{n_1 ! n_2 !} = \frac{4 !}{2 ! 2 !} = 6$$

Le mot "PAPA" $\rightarrow n = \text{card}(E) = 4$

$\rightarrow$ P est répété 2 fois

$\rightarrow$ A est répété 2 fois

Exemple : Permutations avec répétitions

Quel est le nombre d'anagrammes du mot "BEMBA" ?

Réponse : Les permutations **avec répétitions** $\frac{n !}{n_1 ! n_2 ! n_3 ! \dots n_k !}$

$$\frac{n !}{n_1 !} = \frac{4 !}{2 ! 1 !} = 12$$

Le mot "BEMBA" $\rightarrow n = \text{card}(E) = 5$

$\rightarrow$ B est répété 2 fois

Exemple : Permutations avec répétitions

Quel est le nombre d'anagrammes du mot "RATTRAPAGE" ?

Réponse : Les permutations **avec répétitions** $\frac{n !}{n_1 ! n_2 ! n_3 ! \dots n_k !}$

$$\frac{n !}{n_1 ! n_2 ! n_3 ! \dots n_k !} = \frac{10 !}{3 ! 2 ! 2 !} = 151\,200$$

Le mot "RATTRAPAGE" $\rightarrow n = \text{card}(E) = 10$

$\rightarrow$ R est répété 2 fois

$\rightarrow$ A est répété 3 fois

$\rightarrow$ T est répété 2 fois

4.-) Arrangements (*tirage successif de p parmi n*)

(sans répétition A_n^p) ou (avec répétition n^p)

Un **arrangement** de p éléments de E est une **suite ordonnée** de p éléments de E.

- Les arrangements **avec répétitions** n^p
- Les arrangements **sans répétitions** A_n^p

Arrangements avec répétitions

Un **arrangement avec répétitions** de p éléments de E est un **arrangement** de p éléments de E **non nécessairement distincts**.

Exemple 1 : Arrangements avec répétitions

Combien de numéros de téléphone à 8 chiffres peut-on former ?

Réponse :

Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements avec répétitions puisque l'ordre des chiffres importe et qu'un numéro de téléphone peut comporter plusieurs fois le même chiffre. ➔ $E = \{0, 1, \dots, 9\}$, et on a $n = \text{card}(E) = 10$.

On s'intéresse aux arrangements avec répétitions de $p = 8$ éléments de E.

D'après le résultat ci-dessus, il y en a 10^8 .

Arrangements sans répétitions

Un **arrangement sans répétitions** de p éléments de E est un **arrangement** de p éléments de E **tous distincts**.

$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ est le nombre de façon de tirer successivement sans remise p éléments

parmi n. **Retenons bien :** $A_n^n = n! ; A_n^1 = n ; A_n^0 = 1$

Exemple 1 : A l'occasion d'une compétition sportive regroupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent et une de bronze. Combien il y a t-il de distributions possibles (avant la compétition).

Réponse : Le nombre de distributions possibles correspond au nombre d'arrangement de 3 éléments parmi 18, soit :

$$A_{18}^3 = \frac{18!}{(18-3)!} = 4\,896 \text{ distributions possibles.}$$

Exemple : Arrangements sans répétitions

Quel est le nombre de mots comportant 5 lettres distinctes ? (sans se préoccuper du sens des mots).

Réponse : $A_{26}^5 = \frac{26!}{(26-5)!} = 7\,893\,600$

5.-) Combinaisons (tirage simultané ou au hasard)

(sans répétition C_n^p) ou (avec répétition $K_n^p = C_{n+p-1}^p$)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Une **combinaison** de p éléments de E est un **sous-ensemble** de p éléments de E.

Il est fondamental de bien comprendre que **dans la notion de combinaison l'ordre des éléments n'importe pas.**

Le nombre de combinaisons de p éléments de E se note $\binom{n}{p}$ (ou parfois C_n^p et est égal à $\frac{n!}{p!(n-p)!}$)

Exemple : Combinaisons

Au poker combien de mains existe-t-il ?

(une main étant un tirage de 5 cartes et 52 cartes)

Réponse : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \rightarrow C_{52}^5 = \frac{52!}{5!(52-5)!}$

Sujets d'examen au BAC sur le dénombrement

a.-) De combien de manières différentes peut-on placer 5 personnes l'une à côté de l'autre ?

Réponse : c'est le nombre de permutation sans répétition $5! = 120$

b.-) Combien de nombre peut-on former en utilisant exactement une fois chacun des chiffres de 1 à 6 ?

Réponse : $6!$

c.-) Combien de mots différents peut-on écrire en permutant les lettres des mots DOUDOU ?

Réponse : 2 lettres de D 2 lettres de O et 2 lettres de U

$$P_{2! 2! 2!} = \frac{6!}{2! 2! 2!} = \frac{720}{8} = 90$$

d.-) Combien de mots différents peut-on écrire en permutant les lettres des mots KARIM ?

Réponse : 1 lettre de K ; 1 lettre de A et 1 lettre de R

$$P_{1! 1! 1! 1! 1!} = \frac{5!}{1! 1! 1!} = \frac{120}{1} = 90$$

e-) combien de façons peut-on arranger 5 livres dans 5 casiers.

Solution : il s'agit de permuter 5 éléments dans 5 : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

f-) combien de façons peut-on former de mots avec le mot: CASE.

Solution : il s'agit de permuter 4 éléments dans 4 : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

g-) De combien de façons peut-on classer (sans ex aequo) les 40 étudiants d'un groupe de TD?

Solution : C'est le nombre de permutations de 40 éléments donc $40!$

h-) De combien de façons peut-on classer (sans ex aequo) les 18 chevaux au départ d'un grand prix?

Solution : C'est le nombre de permutations de 18 éléments donc $18!$

h-) De combien de façons peut-on classer (sans ex aequo) les 3 chevaux de tête d'un grand prix?

Solution : C'est le nombre de permutations de 3 éléments donc $3!$

1.-) Combien il y a-t-il de listes ordonnées de 4 personnes prises parmi 20, si on considère qu'il n'y a pas d'exæquo ?

Réponse : $A_{20}^4 = \frac{20!}{16!} = 20 \times 19 \times 18 \times 17 = 116\,280$

2.-)

Dans une entreprise 6 postes de travail présentant des caractéristiques identiques sont à pourvoir et font l'objet d'une offre d'emploi pour 10 candidats dont 6 femmes et 4 hommes.

Combien de sélection pourra opérer le chef de personnel pour ces 6 postes s'il veut embaucher :

a.-) exactement deux hommes.

b.-) au plus deux hommes.

c.-) au moins deux hommes.

Réponses :

Cas des sélections non ordonnées le tirage est au hasard C_n^p

a.-) exactement deux hommes

On sélection 2 hommes parmi les 4 hommes $\rightarrow C_4^2$ et

On sélection 4 femmes parmi les 6 femmes $\rightarrow C_6^4$

$C_4^2 \times C_6^4 = \dots\dots\dots$

b.-) au plus deux hommes $\rightarrow$ veut dire 2 H ou 1 H ou 0 homme

2 H parmi 4 H et 4 F parmi 6 F $\rightarrow C_4^2 \times C_6^4 = \dots$ ou

1 H parmi 4 H et 5 F parmi 6 F $\rightarrow C_4^1 \times C_6^5 = 24$ ou

0 H parmi 4 H et 6 F parmi 6 F $\rightarrow C_4^0 \times C_6^6 = 1$ ou

Solution = $C_4^2 \times C_6^4 + C_4^1 \times C_6^5 + C_4^0 \times C_6^6 = \dots\dots\dots$

c.-) au moins deux hommes $\rightarrow$ 2 H ou 3 H ou 4 H

2 H parmi 4 H et 4 F parmi 6 F $\rightarrow C_4^2 \times C_6^4 = \dots$ ou

3 H parmi 4 H et 3 F parmi 6 F $\rightarrow C_4^3 * C_6^3 = \dots$ ou

4 H parmi 4 H et 2 F parmi 6 F $\rightarrow C_4^4 * C_6^2 = \dots$

$$C_4^2 * C_6^4 + C_4^3 * C_6^3 + C_4^4 * C_6^2 =$$

Probabilité

Probabilité d'un événement A est P (A) est l'ensemble des cas favorables sur l'ensemble des cas possibles.

$$P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}r} = \frac{\text{l'ensemble des cas favorables}}{\text{l'ensemble des cas possibles}}$$

Si A se réalise, on a $P(A)$; Si A ne se réalise pas, on a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Si A et B se réalisent ensemble $P(A \cap B)$
Si A ou B se réalise ensemble $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Si A se réalise et non B $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
Si A et B ne se réalisent pas $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

Formules

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$	
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Exercice de réchauffement 1 : Probabilité

Soit un ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ des sous-ensembles :

$A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{d, e, f, g\}$

Calculer : la probabilité des évènements:

• A se réalise	• Seulement A se réalise
• B se réalise	• Seulement B se réalise
• A et B se réalisent	• A ou B se réalise
•	• A et B ne se réalisent pas

Réponse :

$$A \text{ se réalise : } Prob(A) = \frac{\text{Cas favorable de A (cardinal de A)}}{\text{Cas possible (cardinal de E)}} = \frac{5}{7}$$

$$B \text{ se réalise : } Prob(B) = \frac{\text{Cas favorable de B (cardinal de B)}}{\text{Cas possible (cardinal de E)}} = \frac{4}{7}$$

$$A \text{ et B se réalisent, } A \cap B = \{e, f\} : P(A \cap B) = \frac{2}{7}$$

$$A \text{ ou B se réalise, } A \cup B = E : P(A \cup B) = \frac{7}{7} = 1$$

$$A \text{ et B ne se réalisent pas, } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 1 = 0$$

$$\text{Seulement A se réalise, } P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\text{Seulement B se réalise, } P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$$

* Si A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

* Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) : $P(A \cap B) = 0$

Exercice 1 :

On prélève cinq œufs dans un lot de dix œufs dont quatre proviennent d'une poule et d'un coq de race F et six d'une poule et d'un coq de race G. Les œufs d'une race sont indiscernables des œufs de l'autre race.

1-/ Trouver le nombre de façons possibles de prélever cinq œufs parmi les dix (2pts)

2-/ Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « Il y a un seul œuf de race F parmi les cinq œufs prélevés »

B : « Le prélèvement contient exactement trois œufs de race F »

Réponse 1

{ 4 œufs provenant de la race F
 { 6 œufs provenant de la race G Au total 10 œufs

On en prélève 5

1-/ Le nombre de façons possibles de prélever cinq œufs parmi les dix est :

$$C_{10}^5 = 252.$$

2-/ Calcul de probabilités :

$$\text{card}(A) = C_4^1 \times C_6^4 \text{ c'est-à-dire } \text{card}(A) = 60.$$

$$P(A) = \frac{60}{252} = 0.23$$

$$\text{card}(B) = C_4^3 \times C_6^2 \text{ c'est-à-dire } \text{card}(B) = 60.$$

$$P(B) = \frac{60}{252} = 0.23$$

Exercice 2 :

Une urne contient 30 boules numérotées de 1 à 30

1-/ Les numéros qui sont multiples de 3 et de 5 sont : {15 ; 30}

2-/ Calculons :

a-/ la probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 et de 5 est : $P_1 = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

b-/ la probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 ou de 5 est :
 les numéros qui sont multiples de 3 ou de 5 sont :

{3; 5; 6; 9; 10; 12; 15; 18; 20; 21; 24; 25; 27; 30} $P_2 = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

3-/ Calculons la probabilité d'obtenir au moins une fois un numéro multiple de 3 et de 5 :

$$P_3 = \frac{3(2^1 \times 28^2 + 2^2 \times 28^1) + 2^3 \times 28^0}{30^3} = \frac{5\,048}{27\,000} = \frac{631}{3\,375}$$

Problème et solution 1 : Comprendre le dénombrement / probabilité

Une boîte contient 12 gâteaux emballés séparément dans 12 paquets identiques. 5 de ces gâteaux sont parfumés à la vanille ; 4 autres au chocolat et les 3 derniers à la banane.

Partie A :

Un enfant choisit simultanément 3 gâteaux :

1.-/ Combien y a-t-il de choix possible ?

Réponse : $C_{12}^3 = \frac{12!}{3!9!} = 220$

2.-/ Quelle est la probabilité qu'il ait choisi : **Prob** = $\frac{\text{Cas Favorable}}{\text{cas possible}}$

a.-/ Un gâteau de chaque sorte ?

Rép : cas favorable = $C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 5 * 4 * 3 = 60 \Rightarrow \text{Prob} = \frac{60}{220}$

b.-/ 3 gâteaux identiques ?

Rép : Cas favorable = $C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 10 + 4 + 1 = 15 \Rightarrow \text{Prob} = \frac{15}{220}$

c.-/ Exactement deux variétés de gâteaux ?

Rép : 2 V et 1 C ou 2V et 1B ou 2C et 1B ou 1C et 1 V ou 2B et 1V ou 2B et 1C

Cas fav = $C_5^2 \times C_4^1 + C_5^2 \times C_3^1 + C_4^2 \times C_3^1 + C_5^1 \times C_4^2 + C_5^1 \times C_3^2 + C_4^1 \times C_3^2 = \dots$

Prob = $\frac{\dots}{220}$

Partie B :

S'il mangeait un gâteau le matin, 1 à midi et 1 le soir :

1.-/ Combien aurait-il eut de choix possible ?

Rép : Cas possible: $A_{12}^3 = 1\ 320$

2.-/ Quelle aurait été la probabilité de prendre :

a.-/ Un gâteau à la vanille le matin un gâteau au chocolat à midi, un gâteau à la banane le soir ? 61 68 41 39

Rép : Cas favorable = $A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1 = 60 \Rightarrow \text{Prob} = \frac{60}{220}$

b.-/ Un gâteau de chaque sorte ?

Rép : Cas favorable = $A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1 = 60 \Rightarrow \text{Prob} = \frac{60}{220}$

c.-/ Deux gâteaux à la banane et un au chocolat ?

Rép : Cas favorable = $A_5^0 \times A_4^2 \times A_3^1 = 18 \Rightarrow \text{Prob} = \frac{18}{220}$

Module 7 : Statistique

Définitions

- La **statistique** est la science qui étudie les chiffres.
- La **population statistique** est un ensemble étudié concernant un phénomène donné par la statistique. Exemple: l'ensemble des élèves la 12^{ème} TLL.
- Un élément de l'ensemble étudié s'appelle **unité statistique** ou individu. Exemple: l'ensemble des maliens l'unité statistique un malien.
- Chaque unité statistique peut être étudiée suivant un ou plusieurs caractères (qualitatif ou quantitatif).
- **Caractère qualitatif**: les modalités du caractère ne sont pas mesurables. Exemple: sexe, ethnie, religion, nationalité, race, couleur des cheveux.
- **Caractère quantitatif ou variable statistique**: les modalités du caractère sont mesurable ou repérables exemple: le nombre d'enfant à charge, taille, âge, température ...
- **Variable statistique discrète**: elle est discrète lorsque les valeurs sont isolées (des nombres entiers) exemples: nombre d'enfants, nombre de parcelles.
- **Variable statistique continue**: elle est continue lorsque les valeurs sont comprises entre deux valeurs distinctes (des nombres décimaux) exemple: taille, poids ...

I.- L'analyse des résultats statistiques à un seul caractère

- **Fréquence** $f_i = \frac{\text{Effectif } n_i}{\text{Effectif Total } N} \times 100 \rightarrow \sum f_i = 100\%$

• Le mode ou le dominant (caractéristique de position) Mo

C'est la valeur du caractère qui correspond à la plus grande fréquence.

• La Médiane

La médiane est la valeur du caractère qui correspond à l'unité statistique placée au milieu de la population statistique.

Cas des variables statistiques continues

La médiane est la valeur du caractère pour laquelle la courbe cumulative prend la valeur (1/2) :

$$\text{La médiane : } M_e = x_i + \frac{(x_{i+1} - x_i) \left(\frac{1}{2} - f(x_i) \right)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

• Les Quantiles et déciles (caractéristique de position)

Les quantiles c'est la division d'une distribution statistique en quatre parties égales :

$Q_1, \left(\frac{1}{4} \right) ; Q_2, \left(\frac{1}{2} \right) ; Q_3, \left(\frac{3}{4} \right)$

$$1^{\text{er}} \text{ quartile : } Q_1 = x_i + \frac{(x_{i+1} - x_i) \left(\frac{1}{4} - f(x_i) \right)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

$$3^{\text{ème}} \text{ Quartile : } Q_3 = x_i + \frac{(x_{i+1} - x_i) \left(\frac{3}{4} - f(x_i) \right)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

• La moyenne arithmétique $\bar{X}$

Soient les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{N} = \frac{\sum x_i}{N}$

Retenons bien ceci : $\bar{x}_1 * f_1 + \bar{x}_2 * f_2 = \bar{X}$ et $f_1 + f_2 = 1$

Application 1

Les résultats de l'enquête sur la note des élèves d'une classe sont :

12	13	8	9	10	15	16	17	10	7
4	10	3	15	10	7	9	10	11	9

- 1.-/ Quel est l'effectif total de la classe ?
- 2.-/ quelle est la note dominante ?
- 3.-/ Quelle est la note médiane ?
- 4.-/ Quelle la moyenne de la classe ?

Application 2

Les notes obtenues par les candidats présélectionnés pour l'oral :

15	5	6	14	10	7	11	7	4	7	6
----	---	---	----	----	---	----	---	---	---	---

- 1.-/ Quel est l'effectif total des candidats ?
- 2.-/ quelle est la note dominante ?
- 3.-/ Quelle est la note médiane ?
- 4.-/ Quelle la moyenne ?

Application 3

Dans une entreprise on compte :

- 300 employés hommes qui touchent ensemble un salaire de 40 800 000 F par mois
- 200 employés femmes qui touchent ensemble un salaire de 24 000 000 F par mois

- 1.-/ Quel est le salaire mensuel moyen des hommes ? $\bar{x}_H$
- 2.-/ Quel est le salaire mensuel moyen des femmes ? $\bar{x}_F$
- 3.-/ Quel est le salaire mensuel moyen des employés ? $\bar{X}$
- 4.-/ Calculer le % d'hommes et de femmes ? f_H et f_F
- 5.-/ Vérifier que $\bar{x}_H * f_H + \bar{x}_F * f_F = \bar{X}$ et $f_H + f_F = 1$

Application 4

Dans une société de gardiennage, le salaire mensuel moyen est de 18.000 F. Les salaires mensuels moyens des employés d'hommes et des employés femmes étant respectivement 20.000 F et 12.000 F. Calculer le % d'hommes et de femmes de société.

Si cette société emploie 20 personnes, déterminer le nombre d'homme et de femmes.

Application 5

On donne la répartition des élèves suivants, le nombre de frères

Nombre de frères	1	2	3	4	5	Total
Effectifs	10	5	15	7	8	45

TAF:

- 3) Quelle est la nature de la variable statistique?
- 4) Déterminer le mode et la médiane

I.- L'analyse des résultats statistiques à deux caractères

Soit la série

Période	1	2	3	4	5	6	...	n
X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		X_n
Y	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6		Y_n

1.-) Calcule la moyenne $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ en déduire le point moyen G

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} \quad \text{et} \quad \bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} \quad \text{le point moyen G} \rightarrow G(\bar{X}; \bar{Y})$$

2.-) Calcule la variance $V(X)$

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - (\bar{x})^2$$

3.-) Calcule la covariance $\text{Cov}(X, Y)$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{\sum X*Y}{N} - (\bar{X}) * (\bar{Y})$$

4.-) Détermine la droite d'ajustement $Y = aX + b$ par la méthode de MCO.

$$Y = aX + b \quad \text{avec} \quad a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} \quad \text{ou} \quad a = \frac{\sum XY - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum X^2 - n \bar{X}^2} \quad \text{et} \quad b = \bar{Y} - a \bar{X}$$

5.-) Détermine la droite d'ajustement $Y = aX + b$ par la méthode de MAYER

Divisons la série en deux parties égales (si impaire la 1^{ère} augmente de 1)

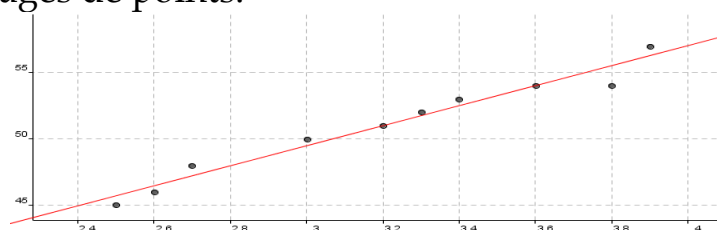
1 ^{ère} série					2 ^{ème} série				
X					X				
Y					Y				
$\bar{X}_1$ et $\bar{Y}_1 \rightarrow G_1(\bar{X}_1; \bar{Y}_1)$					$\bar{X}_2$ et $\bar{Y}_2 \rightarrow G_2(\bar{X}_2; \bar{Y}_2)$				
$Y = aX + b \rightarrow a \bar{X}_1 + b = \bar{Y}_1$					$Y = aX + b \rightarrow a \bar{X}_2 + b = \bar{Y}_2$				
Déterminons a et b $\rightarrow \begin{cases} a \bar{X}_1 + b = \bar{Y}_1 \\ \bar{X}_2 + b = \bar{Y}_2 \end{cases}$									
L'équation de la droite d'ajustement par MAYER : $Y = a X + b$									

Nuage des points (exemple)

Dans une maternité on a relevé le poids et la taille de 10 nouveaux nés et les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Enfant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Poids en kg	2,5	2,6	2,7	3	3,2	3,3	3,4	3,6	3,8	3,9
Taille en cm	45	46	48	50	51	52	53	54	54	57

Représente les nuages de points.



Exemple 1 : soit la série

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	5	8	9	12	14	16	18	20

- 1.-) Calcule la moyenne $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ en déduire le point moyen $G(\bar{X}; \bar{Y})$
- 2.-) Calcule la variance $V(X)$
- 3.-) Calcule la covariance $\text{Cov}(X, Y)$
- 4.-) Détermine la droite d'ajustement $Y = aX + b$ par la méthode de MCO.
En déduire que le point moyen $G \rightarrow G(\bar{X}; \bar{Y})$ vérifie la droite
- 5.-) Détermine la droite d'ajustement $Y = aX + b$ par la méthode de MAYER.
En déduire que le point moyen $G \rightarrow G(\bar{X}; \bar{Y})$ vérifie la droite

Solution : Calcule des sommes $\sum X$; $\sum Y$; $\sum X Y$

X	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum X = 36$
Y	5	8	9	12	14	16	18	20	$\sum Y = 102$
X²	1	4	9	16	25	36	49	64	$\sum X^2 = 204$
X*Y	5	16	27	48	70	96	126	160	$\sum X * Y = 548$

- 1.-) Calcule la moyenne $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ en déduire le point moyen G**

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} \rightarrow \bar{x} = \frac{\sum X}{N} = \frac{36}{8} = 4,5$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} \rightarrow \bar{y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{102}{8} = 12,75$$

en déduire le point moyen $G \rightarrow G(\bar{X}; \bar{Y}) \rightarrow G(4,5 ; 12,75)$

- 2.-) Calcule la variance $V(X)$**

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - (\bar{x})^2 \rightarrow V(X) = \frac{204}{8} - (4,5)^2 = 5,25$$

- 3.-) Calcule la covariance $\text{Cov}(X, Y)$**

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{\sum X*Y}{N} - (\bar{X}) * (\bar{Y})$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{548}{8} - (4,5) * (12,75) = \frac{548}{8} - 57,375 = 11,125$$

- 4.-) Détermine la droite d'ajustement $Y = aX + b$ par la méthode de MCO.**

$$Y = aX + b \text{ avec } a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ ou } a = \frac{\sum XY - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum X^2 - n \bar{X}^2} \text{ et } b = \bar{Y} - a \bar{X}$$

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{11,125}{5,25} = 2,12 \text{ et } b = \bar{Y} - a \bar{X} = 12,75 - (2,12) * (4,5) = 3,21.$$

L'équation de la droite d'ajustement par la MCO : $Y = 2,12 X + 3,21$

Le point moyen $G \rightarrow G(\bar{X}; \bar{Y}) \rightarrow G(4,5 ; 12,75)$ vérifie-t-il la droite ?

$$Y = 2,12 X + 3,21 = 2,12 * 4,5 + 3,21 = 12,75$$

5.-) Détermine la droite d'ajustement $Y = aX + b$ par la méthode de MAYERDivisons la série en deux parties égales (si impaire la 1^{ère} augmente de 1)

1 ^{ère} série					2 ^{ème} série				
X	1	2	3	4	X	5	6	7	8
Y	5	8	9	12	Y	14	16	18	20
$\bar{X}_1 = \frac{10}{4} = 2,5 \quad \bar{Y}_1 = \frac{34}{4} = 8,5$					$\bar{X}_2 = \frac{26}{4} = 6,5 \quad \bar{Y}_2 = \frac{68}{4} = 17$				
$G_1 (\bar{X}_1; \bar{Y}_1) \rightarrow G (2,5 ; 8,5)$					$G_2 (\bar{X}_2; \bar{Y}_2) \rightarrow G (6,5 ; 17)$				
$y = aX + b \rightarrow 2,5 a + b = 8,5$					$y = aX + b \rightarrow 6,5 a + b = 17$				
Déterminons a et b $\rightarrow \begin{cases} 2,5 a + b = 8,5 \\ 6,5 a + b = 17 \end{cases}$					o trouve a =2,125 et b = 3,1875				
L'équation de la droite d'ajustement par MAYER : $Y = 2,125 X + 3,1875$									

Le point moyen G $\rightarrow G (\bar{X}; \bar{Y}) \rightarrow G (4,5 ; 12,75)$ vérifie-t-il la droite ?

$$Y = 2,125 X + 3,1875 = 2,125 * 4,5 + 3,1875 = 12,75$$

Exemple 2 :

Le tableau suivant donne les dépenses en millions de FCFA des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 1990 à 1999.

Années	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Rang xi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dépenses yi	398	451	423	501	673	956	1077	1285	1427	1490

Déterminer un ajustement affine de la série par la méthode de MAYER.

Déterminer un ajustement affine de la série par la méthode de MCO.

Exemple 3 :

Sur un échantillonnage et sur une courte durée, les relevés ont donné les résultats suivants :

Âge t_i (en nombre de semaines)	1	2	3	4	5	6	7	8
Taille y_i (exprimée en millimètre)	10	18	25	33	40	41	50	53

1-/ Soit G le point moyen du nuage de points associé à ce tableau. On considère la droite D passant par G et de coefficient directeur 6,14. Déterminer une équation de la droite D.

2-/ On considère que la fonction affine représentée par la droite D traduit l'évolution de la taille en fonction de l'âge des crevettes avec les unités considérées. Déterminer selon ce modèle la taille d'une crevette de 12 semaines.

3-/ On estime que l'espérance de vie d'une crevette *Trachypenaesus* en haute mer est de 3 années. Calculer, avec le modèle retenu, la taille atteinte au bout de 3 ans. .

Exercice 1..... (5 pts)

1) Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2 + \ln x)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + x \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x-2}$.

2) Détermine une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x + 1$ b) $g(x) = (x + 2)^2$ c) $h(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Exercice 2..... (5 pts)

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$.

1) a) Calcule $P(1)$

b) Vérifie que $P(x) = (2x^2 + x - 3)(x - 5)$.

c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 - 8\ln x + 15 = 0$.

b) $2e^{3x} - 9e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$.

Problème..... (10 pts)

La production exprimée en tonnes d'une entreprise sur les cinq premières années est

donnée par la fonction suivante $f(t) = \frac{-t^2}{2} + 2t + 36$ où t s'exprime en années avec $t \in [0; 5]$.

1. Calcule $f'(t)$ et étudie son signe

2. Dresse le tableau de variation de f .

3. Trace la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. Trouve l'année où la production est maximale.

Enoncés des sujets d'examens au BAC – TSS – 2018**Exercice 1 :**

On considère le polynôme $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

1.-) a.-) Calcule $P(-2)$

b.-) Compare $P(x)$ et $(x+3)(x-2)(x+2)$.

c.-) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

2.-) utilise la première question pour résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes:

a.-) $(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 4 \ln x - 12 = 0$ ($\ln$ désigne le logarithme népérien).

b.-) $e^{3x} + 3e^{2x} - 4e^x - 12 = 0$.

Exercice 2

1.-) Calcule la dérivée des fonctions suivantes:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$$

$$g(x) = x - \frac{1}{x}$$

$$h(x) = 3 + x \ln x$$

$$k(x) = e^{3x} - 5x + 3$$

2.-) Dans chacun des cas suivants, trouve une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

a.- $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

b.- $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

c.- $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x$

d.- $f(x) = e^x + x^2 + 3$

Problème

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$

1. Détermine l'ensemble de définition de f .

2. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Montre qu'il existe trois réels a , b et c telle que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

4. Montre que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (Cf) .

5. Calcule la dérivée f' de f puis étudie son signe.

6. Dresse le tableau de variation de f .

7. Trace la courbe (Cf) dans un repère orthonormé $(O; i; j)$.

Corrigés des sujets d'examens au BAC – TSS – 2018

Exercice 1 TSS 2018 Corrigé : $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

1.-) a.-) $P(-2) = -8 + 12 + 8 - 12 = 0$

b.-) Compare $P(x)$ et $(x+3)(x-2)(x+2)$.

Je développe $(x+3)(x-2)(x+2) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

$P(x) = (x+3)(x-2)(x+2)$.

c.-) $P(x) = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 2$ ou $x = -2$

$S = \{-3; -2; 2\}$

2.-) résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes:

a.-) $(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 4 \ln x - 12 = 0$

On pose $X = \ln x$ définie $x > 0$ et $X \in \mathbb{R} \Rightarrow X^3 + 3X^2 - 4X - 12 = 0$

$\ln x = -3 \Rightarrow x = e^{-3}$

$\ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$

$\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$

Rappels : $\ln X = A \Rightarrow X = e^A$ ou $e^X = A \Rightarrow X = \ln A$

$$S = \{e^{-3}; e^{-2}; e^2\}$$

b.-) $e^{3x} + 3e^{2x} - 4e^x - 12 = 0 \Rightarrow$ On pose $X = e^x$ définie $x \in \mathbb{R}$ et $X > 0$

$\Rightarrow X^3 + 3X^2 - 4X - 12 = 0 \Rightarrow$ on trouve $X = e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \Rightarrow S = \{\ln 2\}$

Exercice 2 TSS 2018 Corrigé

1.-) la dérivée des fonctions suivantes:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$$

$$g(x) = x - \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$h(x) = 3 + x \ln x \Rightarrow h'(x) = 1 \ln x + \frac{1}{x} * x = \ln x + 1$$

$$k(x) = e^{3x} - 5x + 3 \Rightarrow k'(x) = 3e^{3x} - 5$$

Rappels :

Fonctions	Dérivée	Fonctions	Dérivée
a	0	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
ax	A	e^{ax}	$a e^{ax}$
$a x^n$	$a \cdot x^{n-1}$	u.v	$u' v + v' u$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$		

2.-) Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

a.- $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{x} + K$

b.- $f(x) = 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow F(x) = x^3 + x^2 - x + k$

c.-) $f(x) = \frac{1}{5} x^3 - \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{4} x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{20} x^4 - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{8} x^2 + k$

d.-) $f(x) = e^x + x^2 + 3 \Rightarrow F(x) = e^x + \frac{1}{3} x^3 + 3x + k$

Rappels :

Fonctions	Primitive	Fonctions	Primitive
A	ax	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$a x^n$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x$

Problème TSS 2018 Corrigé $\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x+1}$

1.-) l'ensemble de définition de f $\Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$Df =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

2. les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{x^2}{x} = x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{x^2}{x} = x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{+1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

3.-) $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1} = \frac{ax^2 + x(a+b) + b+c}{x+1}$

$$f(x) = \frac{ax^2 + x(a+b) + b+c}{x+1} = \frac{x^2 - x - 1}{x+1} \text{ par indentification}$$

→ $a = 1$; $a + b = -1$ et $b + c = -1$ → on trouve $a = 1$; $b = -2$ et $c = 1$

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x+1}$$

4.-) $y = x - 2$ est asymptote à (Cf) ?

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ → alors $y = ax + b$ est asymptote à (Cf)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x+1} \right] = \frac{1}{\infty} = 0$$

5. La dérivée f' de f puis étudie son signe

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x+1} \rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$$

Le signe de $x^2 + 2x$ → le signe du trinôme → $\quad + \quad -2 \quad - \quad 0 \quad +$

Si $x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ $f'(x) > 0$

Si $x \in]-2; 0[$ $f'(x) < 0$

6. Dresse le tableau de variation de f .

X	$-\infty$	-2	-1	0	$-\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)	$-\infty$	$\nearrow -5$	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow -1$	$\nearrow +\infty$	

7. Trace la courbe (Cf) dans un repère orthonormé $(O; i; j)$.

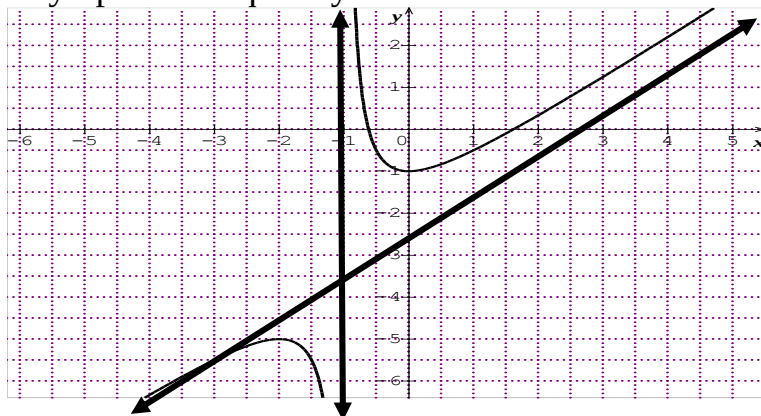
$$\rightarrow f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x+1}$$

Intersection avec l'axe des abscisses : $f(x) = 0$ on trouve $x = 1,72$ ou $x = -0,72$

Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0)$ on trouve $y = 1$

Asymptote verticale : $x = -1$

Asymptote oblique : $y = x - 2$



Enoncés des sujets d'examens au BAC – TSS – 2017

Exercice 1

Soit P la fonction polynôme définie par $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$.

1°/ Calcule $P(-2)$

2°/ Détermine les réels a , b et c tels que $P(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$.

3°/ Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

4°/ En déduis la résolution dans $\mathbb{R}$ de des équations suivantes :

a) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 13(\ln x) - 6 = 0$

b) $2e^{3x} - e^{2x} - 13e^x - 6 = 0$

Exercice

1°/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Calcule $f(1)$; $f(e)$; $f(e^2)$; $f\left(\frac{1}{e}\right)$ et $f(e^3)$

2°/ Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = e^{-2x^2+1}$

a.-) Calcule $g'(x)$.

b) Ecris l'équation de la tangente (T) à la courbe de g au point d'abscisse $x_0 = 0$

Problème

On note $f(x)$ la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où x désigne la durée écoulée depuis 1960, exprimée en année. $f(x) = \frac{60x+40}{x+10}$

x pour $x \in [0 ; +\infty[$.

1°/ Détermine les nombres réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+10}$

pour $x \in [0 ; +\infty[$.

2°/ Calcule f' , fonction dérivée de f puis justifie que la population croît.

3°/ a) Résous l'équation $f(x) = 52$.

b) En déduis à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52 000 habitants.

4°/ Calcule la limite de f en $+\infty$. Donne une interprétation quant à la population de cette ville.

5° / Trace la courbe (C) de f dans un repère (O, i, j), unité graphique 1cm pour 10 ans sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 000 habitants sur l'axe des ordonnées.

Corrigés des sujets d'examens au BAC – TSS – 2017**Exercice 1 TSS 2017 Corrigé** : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

1°/ $P(-2) = 2 * 8 - 4 - 13*2 - 6 = 0 \rightarrow P(-2) = 0$

2°/ $P(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$ je développe

$P(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c) = (ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c)$

$P(x) = ax^3 + x^2(b+2a) + x(c+2b) + 2c = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

Par identification : $a = 2$; $b+2a = -1 \rightarrow b = -5$, $c+2b = -13 \rightarrow c = -3$

$P(x) = (x + 2)(2x^2 - 5x - 3)$

3°/ Résous dans IR l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = (x + 2)(2x^2 - 5x - 3) = 0 \rightarrow$ on trouve $x = -2$ ou $x = -1/2$ ou $x = 3$

$S = \left\{-2; -\frac{1}{2}; 3\right\}$

4°/ En déduis la résolution dans IR de des équations suivantes :

a) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 13(\ln x) - 6 = 0 \rightarrow$ on pose $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ et $x > 0$

$2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \rightarrow$ solution $X = -2$ ou $X = -1/2$ ou $X = 3$

$\ln x = -2 \rightarrow x = e^{-2}$; $\ln x = -1/2 \rightarrow x = e^{-1/2}$; $\ln x = 3 \rightarrow x = e^3$

$S = \left\{e^{-2}; e^{-\frac{1}{2}}; e^3\right\}$

b) $2e^{3x} - e^{2x} - 13e^x - 6 = 0$

$\rightarrow$ on pose $X = e^x$ avec $X > 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \rightarrow$ solution $X = 3 \rightarrow e^x = 3$; $x = \ln 3$

$S = \{\ln 3\}$

Exercice 2 / TSS 2017 Corrigé

1°/ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$f(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0$; $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$; $f(e^2) = \frac{\ln e^2}{e} = \frac{2}{e}$; $f(e^3) = \frac{\ln e^3}{e} = \frac{3}{e}$

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln \frac{1}{e}}{e} = \frac{-1}{e}$

Rappels :

$\ln(a * b) = \ln a + \ln b$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$
$\ln e^n = n$	$\ln e^1 = 1$; $\ln e^2 = 2$; $\ln e^3 = 3$		
$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$			

2°/ $g(x) = e^{-2x^2+1}$

a.-) $g'(x) = (-4x + 1)e^{-2x^2+1}$

Rappels

Fonctions	Dérivées
e^u	$u' e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$

b) Equation de la tangente $\rightarrow y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$

$g(0) = e^1$ $g'(0) = e^1$

$y = e(x - 0) + e$ $T: y = ex + e$

Problème

$f(x) = \frac{60x+40}{x+10}$ où x désigne la durée écoulée depuis 1960, x pour $x \in [0 ; +\infty[$.

$$1.-/ f(x) = a + \frac{b}{x+10} = \frac{ax+10a+b}{x+10} = \frac{60x+40}{x+10}$$

$$\Rightarrow a = 60 \text{ et } 10a + b = 40 \Rightarrow a = 60 \text{ et } b = -560 \Rightarrow f(x) = 60 - \frac{560}{x+10}$$

2°/ Calcule f' , fonction dérivée de f puis justifie que la population croît.

$$f'(x) = \frac{560}{(x+10)^2} > 0 \quad f \text{ est croissante}$$

$$3°/ \text{ a) } f(x) = 52 \Rightarrow \frac{60x+40}{x+10} = 52 \Rightarrow \text{on trouve } x = 60$$

b.-) $x = 60$ c'est à partir de 2020 ($1960 + 60 = 2020$) que la population de cette ville sera supérieur à 52 000 habitants.

$$4.- / \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{60x}{x} = 60$$

La population de cette ville ne dépassera pas 60 000 habitants quelque soit le nombre d'année.

5.-/ Trace la courbe (C) de f dans un repère (O, i, j)

Enoncés des sujets d'examens au BAC – TSS – 2016**Exercice 1 :**

1. Simplifiez les expressions suivantes :

$$A = \ln(2^3) - \ln(24) + \ln\left(\frac{16}{9}\right) \quad B = \ln\left(\frac{125}{81}\right) + \ln\left(\frac{9^2}{25}\right) - \ln(5)$$

2. Résoudre dans IR les équations suivantes :

$$2(\ln x)^2 - 3\ln x + 1 = 0 \quad e^{3x} - e^{2x} = 0$$

3. Calcule la dérivée des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3 \quad g(x) = \frac{2x-3}{x-2}$$

Exercice 2 :

Pour célébrer leur succès au bac six élèves d'une classe de TSS se donnent Rendez-vous dans un restaurant de la ville. Il y a six restaurants au total dans la ville et chaque élève choisit au hasard un restaurant.

1. Quelle est la probabilité pour que chacun des six élèves ait choisit un restaurant différent ?

2. Calcule la probabilité pour que les six élèves choisissent le même restaurant.

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{2(x^2-x+1)}{x-1}$

1. Détermine l'ensemble de définition de .

2. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Montre que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = 2x + \frac{2}{x-1}$

4. Vérifier que la droite équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe (C) de f

5. Calcule $f'(x)$, dresse le tableau de variation de f puis trace (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Corrigés des sujets d'examens au BAC – TSS – 2016**Exercice 1 TSS 2016 Corrigé**

1. Simplifiez les expressions

$$A = \ln(2^3) - \ln(24) + \ln\left(\frac{16}{9}\right) \rightarrow \text{note : } 24 = 2^3 \times 3 ; 16 = 2^4 ; 9 = 3^2$$

$$A = 3\ln 2 - \ln 3 - 3\ln 2 + 4\ln 2 - 2\ln 3 = 4\ln 2 - 3\ln 3$$

$$\rightarrow A = 4\ln 2 - 3\ln 3$$

$$B = \ln\left(\frac{125}{81}\right) + \ln\left(\frac{9^2}{25}\right) - \ln(5) \rightarrow \text{note : } 5^3 = 125 ; 3^4 = 81 ; 9^2 = 3^4 ; 5^2 = 25$$

$$B = \ln\left(\frac{5^3}{3^4}\right) + \ln\left(\frac{3^4}{5^2}\right) - \ln(5) = 3\ln 5 - 4\ln 3 + 4\ln 3 - 2\ln 5 - \ln 5$$

$$B = 0$$

Rappels de cours sur les ln et e

$\ln(a * b) = \ln a + \ln b$	$\ln(a^x * b^y) = x \ln a + y \ln b$
$\ln e^n = n$	$\ln e^1 = 1 ; \quad \ln e^2 = 2 ; \quad \ln e^3 = 3$
$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$	$\ln\left(\frac{1}{a^y}\right) = -y \ln a$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	$\ln\left(\frac{a^x}{b^y}\right) = x \ln a - y \ln b$

2. Résoudre dans IR les équations suivantes :

$$2 (\ln x)^2 - 3 \ln x + 1 = 0 \rightarrow \text{on pose } X = \ln x \text{ avec } X \in \mathbb{R} \text{ et } x > 0. \quad 2 X^2 - 3 X + 1 = 0$$

$\rightarrow$ on sait que $a + b + c = 0$ la racine évidente $x' = 1$ et $x'' = \frac{c}{a} = 1/2$

Pour $x = 1 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e^1$ (rappelons $x = a$ alors $x = e^a$)

Pour $x = \frac{1}{2} \rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$ (rappelons $x = a$ alors $x = e^a$)

La solution $S = \{e^1; e^{\frac{1}{2}}\}$

$$e^{3x} - e^{2x} = 0 \rightarrow e^{3x} = e^{2x} \rightarrow 3x = 2x \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{La solution } S = \{0\}$$

Rappels de résolution d'équation avec ln

$\ln x = a$	$\ln x = a \rightarrow x = e^a$ avec $x > 0$
$a \ln x = b$	$\ln x = \frac{b}{a} \rightarrow x = e^{\frac{b}{a}}$ avec $x > 0$
$a (\ln x)^2 + b (\ln x) + c (\ln x) = 0$	$X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ et $x > 0$ $a X^2 + b X + c = 0$
$a (\ln x)^3 + b (\ln x)^2 + c (\ln x) + d = 0$	$X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ et $x > 0$ $a X^3 + b X^2 + c X + d = 0$

Rappels de résolution d'équation avec e^x

$e^x = a$	$e^x = a \rightarrow x = \ln a$ avec $x \in \mathbb{R}$
$a e^x = b$	$e^x = \frac{b}{a} \rightarrow x = \ln \frac{b}{a}$ avec $x \in \mathbb{R}$
$a (e^x)^2 + b (e^x) + c (e^x) = 0$	$X = e^x$ avec $X > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ $a X^2 + b X + c = 0$
$a (e^x)^3 + b (e^x)^2 + c (e^x) + d = 0$	$X = e^x$ avec $X > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ $a X^3 + b X^2 + c X + d = 0$

3. Calcule la dérivée des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3 \rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x + 5$$

$$g(x) = \frac{2x-3}{x-2} \rightarrow g'(x) = \frac{2(x-2)-(2x-3)}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

Solution exercice 2 :

Le nombre de cas possible

C'est le nombre de permutation possible $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

1. La probabilité pour que chacun des six élèves ait choisit un restaurant différent?

La probabilité $P = 1 / 720$

2. La probabilité pour que les six élèves choisissent le même restaurant.

La probabilité $P = 1 / 720$

Solution exercice 3 : soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{2(x^2-x+1)}{x-1}$

1. f est définie ssi $x - 1 \neq 0 \rightarrow D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

2. les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{-\infty} \frac{2(x^2-x+1)}{x-1} = \lim_{-\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{-\infty} (2x) = -\infty$$

$$\lim_{+\infty} \frac{2(x^2-x+1)}{x-1} = \lim_{+\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{+\infty} (2x) = +\infty$$

$$\lim_{1^-} \frac{2(x^2-x+1)}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{1^+} \frac{2(x^2-x+1)}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

3. Division euclidienne

$2x^2 - 2x + 2$	$x - 1$
$2x^2 + 2x$	$2x$
2	

$$f(x) = \frac{2(x^2-x+1)}{x-1} = 2x + \frac{2}{x-1}$$

4. $y = 2x$ est une asymptote à la courbe (C) de f ssi : $\lim_{\infty} (f(x) - 2x) = 0$

$$\lim_{\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{\infty} \left(2x + \frac{2}{x-1} - 2x \right) = \lim_{\infty} \left(\frac{2}{x-1} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Alors la droite équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe (C) de f .

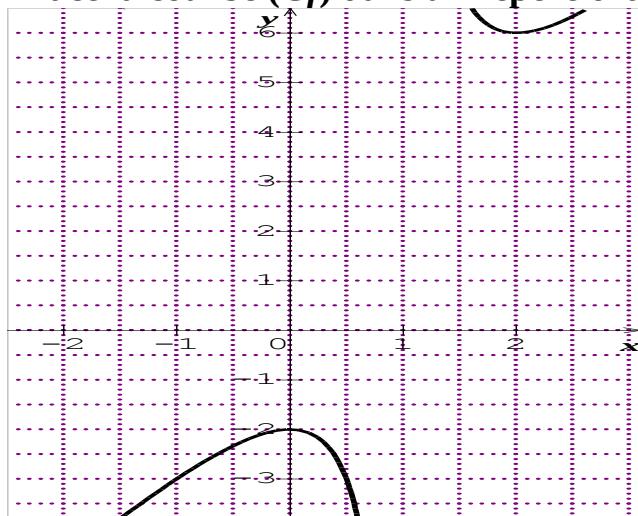
$$5.-/ f(x) = 2x + \frac{2}{x-1} \rightarrow f'(x) = 2 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)^2-2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Dresse le tableau de variation de f

X	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	6	$+\infty$

Trace la courbe (Cf) dans un repère orthonormé (O; i; j).



Exercice 1 : TSS – 2015

Dans une classe de 65 élèves :

- 35 pratiquent du football,
- 40 pratiquent du basketball et,
- 5 ne pratiquent aucun de ces deux sports.

1°/ Déterminez le nombre d'élèves qui pratiquent à la fois le football et le basketball.

2°/ Déterminez le nombre d'élèves qui jouent :

a) uniquement au football.

b) uniquement au basketball

3°/ Dans cette classe on choisit au hasard 3 élèves pour représenter la classe à une compétition interclasse.

a) Quelle est la probabilité pour que les trois élèves pratiquent à la fois le football et le basketball ?

b) Quelle est la probabilité pour que parmi les trois élèves: 1 pratique uniquement le football, 1 pratique uniquement le basketball et 1 pratique à la fois le football et le basketball ?

Dans cet exercice tous les résultats seront donnés sous forme de fractions.

Exercice 2 : TSS - 2015

Une société de production d'eau potable traite les $x\%$ de l'eau qu'elle tire du fleuve. Le coût de traitement de la quantité x d'eau est, en milliers de francs, donné par

$$C(x) = \frac{230x}{100-x}$$

(Exemple le coût de traitement de 1% de l'eau est $\frac{230}{100-1} = 2,323 \times 1000 = 2323F$)

1°/ Quel est le coût de traitement arrondi au franc près de 10%, de 20% de l'eau qu'elle tire du fleuve ?

2°/ Quel pourcentage d'eau peut-on traiter avec 1 000 000 F ?

3°/ Cette société peut-elle traiter toute l'eau tirée du fleuve ? Justifiez votre réponse ?

Exercice 3 : TSS - 2015

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et (C) la courbe représentant ses variations dans le plan muni d'un repère orthonormé

1°/ Quel est l'ensemble de définition de f ? Calculez les limites de $f(x)$ aux bornes de cet ensemble.

2°/ Calculez la dérivée $f'(x)$, étudiez son signe et dressez le tableau de variations de f .

3°/ Donnez l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = -2$.

4° / Recopiez et complétez le tableau ci-dessous.

X	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

5° / Tracez dans le même repère la courbe (C) et la tangente (T)

Corrigés des sujets d'examens au BAC – TSS – 2016

Corrigé de l'exercice 1 TSS 2015 Corrigé

	Pratique le Football = 35	Ne pratique pas le football = 30
	Pratique le Basketball = 40	Ne pratique pas le Basketball = 25
65 élèves		
	Ni foot ni basket = 5	Pratique à la fois le foot et basket = 60

Uniquement le Football = $60 - 40 = 20$

Uniquement au basketball = $60 - 35 = 25$

1°/ Le nombre d'élèves qui pratiquent à la fois le football et le basketball = 60

Rép : $65 - 5 = 60$

2°/ Déterminez le nombre d'élèves qui jouent :

a.-) uniquement au football = $60 - 40 = 20$ → **Rép : $65 - 40 - 5 = 20$**

b.-) uniquement au basketball = $60 - 35 = 25$ → **Rép : $65 - 35 - 5 = 25$**

3°/

a) La probabilité pour que les trois élèves pratiquent à la fois le football et le basketball

Proba = $3 / 60 = 0,05$

b) La probabilité pour que parmi les trois élèves: 1 pratique uniquement le football, 1 pratique uniquement le basketball et 1 pratique à la fois le football et le basketball

Proba = $1 / 20 * 1 / 25 * 1 / 60 = 1 / 30\,000$

Corrigé de l'exercice 2 TSS 2015

Le coût de traitement de la quantité x d'eau est : $C(x) = \frac{230x}{100-x}$

1°/ Le coût de traitement arrondi au franc près de 10% → $C(10) = \frac{230*10}{100-10} = 25\,555$

Le coût de traitement arrondi au franc près de 20% → $C(20) = \frac{230*20}{100-20} = 57\,500$

2°/ Le pourcentage d'eau peut-on traiter avec 1 000 000 F ?

$C(x) = \frac{230x}{100-x} = 1\,000$ → $100\,000 - 1\,000x = 230x$ → $81,3\%$

3°/ Cette société traite toute l'eau tirée du fleuve signifie que $x = 100\%$.

$C(x) = \frac{230x}{100-x}$ → $x = 100\%$ → $\lim_{x \rightarrow 100} \left(\frac{230x}{100-x} \right) = \frac{23\,000}{0} = +\infty$

Il sera très difficile pour cette société de traiter toute l'eau tirée du fleuve.

Exercice 3 : TSS - 2015

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

1°/ L'ensemble de définition de $f \Rightarrow Df =]-\infty; +\infty[$

Les limites de $f(x)$ aux bornes de cet ensemble

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

2°/

La dérivée $f'(x) \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

L'étude du signe de la dérivée : $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

$3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1 \Rightarrow$ le signe du trinôme

Si $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ alors $f'(x) > 0$ et $f(x)$ est croissante

Si $x \in]-1; 1[$ alors $f'(x) < 0$ et $f(x)$ est décroissante.

Le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$

3°/L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = x_0 \Rightarrow x = -2$.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(-2) = 3 * 4 - 3 = 9$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f(-2) = -8 + 6 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow T: y = 9x + 18$$

4° / Le tableau des valeurs $\Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2$

X	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	4	2	0	4

5° / Trace dans le même repère la courbe (C) et la tangente (T)



Exercice 1 / TSS 2014 :

1-/ Calculez la fonction dérivée des fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+3} \quad g(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 7x - 9$$

2-/ A l'occasion d'une compétition sportive regroupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent et une de bronze. Combien il y a-t-il de distributions possibles (avant la compétition).

3-/ Simplifiez les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 4} + \ln e^3 + \ln e^{-5} - e^{\ln 2} \quad ; \quad B = \ln 2^5 - \ln 8 + \ln 32 - \ln 64.$$

4-/ Dans une classe de terminale TSS il y a 24 élèves. Ils doivent tous s'inscrire à un concours de journalisme. Pour cela, il faut établir une liste d'inscription. Combien il y a-t-il de manières de constituer cette liste?

Exercice 2 / TSS 2014

Dans une maternité on a relevé le poids et la taille de 10 nouveaux nés et les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Enfant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Poids en kg	2,5	2,6	2,7	3	3,2	3,3	3,4	3,6	3,8	3,9
Taille en cm	45	46	48	50	51	52	53	54	54	57

On veut savoir si connaissant le poids d'un nouveau-né on peut avoir une idée sur sa taille.

1-/ Faire un ajustement affine de la taille en fonction du poids par la méthode de Mayer.

2-/ Vérifier que le poids moyen est sur la droite d'ajustement après l'avoir déterminé.

3-/ Si un bébé pèse 4,2 kg, quelle sera sa taille probable ?

Exercice 3 / TSS 2014

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie pour tout x par

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 1$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1-/ Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe

2-/ Dresser le tableau de variation de f

3-/ Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

4-/ Construire (C) et (T) dans le même repère.

Corrigés des sujets d'examens au BAC – TSS – 2014**Exercice 1 / TSS 2014 / Corrigé**

1°) Calculons la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+3} \rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+3)-1(x^2-1)}{(x+3)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}$$

$$g(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 7x - 9 \rightarrow g'(x) = 3x^2 - \frac{4}{3}x + 7$$

2°) Le nombre de distributions possibles correspond au nombre d'arrangement de 3 éléments parmi 18, soit : $A_{18}^3 = \frac{18!}{(18-3)!} = 4\,896$ distributions possibles

3°) Simplification :

$$A = e^{\ln 4} + \ln e^3 + \ln e^{-5} - e^{\ln 2} = 4 + 3 - 5 - 2 = 0 \rightarrow A = 0$$

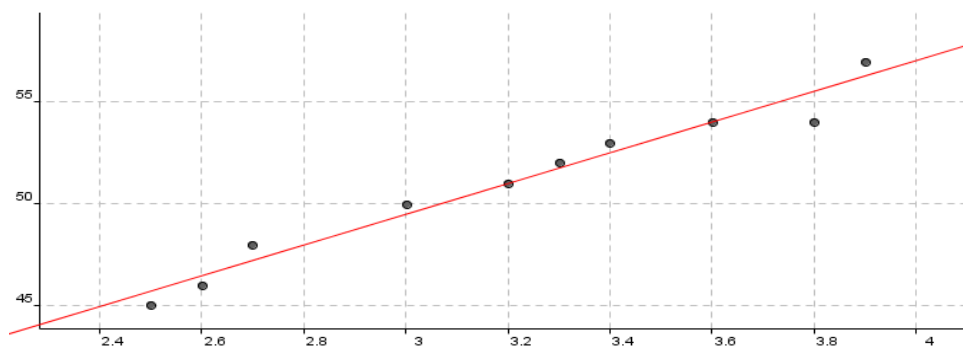
$$B = \ln 2^5 - \ln 8 + \ln 32 - \ln 64 = \ln 2^5 - \ln 2^3 + \ln 2^5 - \ln 2^6 =$$

$$B = 5 \ln 2 - 3 \ln 2 + 5 \ln 2 - 6 \ln 2 = \ln 2 \rightarrow B = \ln 2$$

4°) Le nombre de façon pour construire cette liste correspond au nombre de permutation des 24 élèves, soit : $24! = 24 \times 23 \times \dots \times 2 \times 1$

Exercice 2 / TSS 2014 :

1°)



Soit $G_1(\bar{x}_1; \bar{y}_1)$ le point moyen du sous-nuage N_1 des cinq premiers points :

$$\bar{x}_1 = \frac{2,5+2,6+2,7+3+3,2}{5} = 2,8 \quad \bar{y}_1 = \frac{45+46+48+50+51}{5} = 48 \rightarrow G_1(2,8; 48)$$

Soit $G_2(\bar{x}_2; \bar{y}_2)$ le point moyen du sous-nuage N_2 des cinq derniers points

$$\bar{x}_1 = \frac{3,3+3,3+3,6+3,8+3,9}{5} = 3,6; \quad \bar{y}_1 = \frac{52+53+54+54+57}{5} = 54 \rightarrow G_2(3,6; 54)$$

Soit $(G_1; G_2)$ la droite d'ajustement affine de Mayer d'équation $y = ax + b$

$$G_1(2,8; 48) \in y = ax + b \rightarrow 2,8a + b = 48$$

$$G_2(3,6; 54) \in y = ax + b \rightarrow 3,6a + b = 54$$

$$\begin{cases} 2,8a + b = 48 \\ 3,6a + b = 54 \end{cases} \text{ on trouve } a = 7,5 \text{ et } b = 27$$

$$(G_1, G_2) \rightarrow y = 7,5x + 27$$

2°) Vérifions que le point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$ est sur la droite d'ajustement

$$\bar{x} = \frac{2,5+2,6+2,7+3+3,2+3,3+3,4+3,6+3,8+3,9}{10} = 3,2$$

$$\bar{y} = \frac{45+46+48+50+51+52+53+54+57}{10} = 51 \quad G(3,2; 51) \quad (G_1 G_2): y = 7,5x + 27$$

Pour $x = 3,2$: $y = 7,5(3,2) + 27 = 51 = \bar{y}$ d'où $G(3,2; 51) \in (G_1 G_2)$

3°) $y = 7,5x + 27$

Si $x = 4,2$ alors $y = 7,5(4,2) + 27 = 58,5$. La taille du bébé serait donc 58,5 cm

Exercice3 : Soit $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 1$

1°) Calculons $f'(x)$ et étudions son signe

$$f'(x) = 2x^2 + 2x - 4 \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \quad (a=2; b=2; c=-4)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(2)(-4) = 36 = 6^2$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 6}{4} = -2 \text{ ou } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 6}{4} = 1.$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\forall x \in]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[\quad f'(x) \geq 0; \quad \forall x \in [-2; 1] \quad f'(x) \leq 0.$$

2°) Dressons le tableau de variation de f

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}x^3 \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}x^3 \right) = +\infty$$

$$f(-2) = \frac{2}{3}(-2)^3 + (-2)^2 - 4(-2) + 1 = \frac{23}{3} = 7,66; \quad f(1) = \frac{2}{3}(1)^3 + (1)^2 - 4(1) + 1 = -\frac{4}{3} = 1,33$$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			$\frac{23}{3}$		$-\frac{4}{3}$	
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow +\infty$

3°) Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$f'(1) = 2 + 2 - 4 = 0; \quad f(1) = -\frac{4}{3} \text{ Donc } (T): y = -\frac{4}{3}.$$

4°) Construisons (C) et (T) dans un repère orthonormé :

Tableau de valeur de $f(x)$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-9,6	4	7,6	5,3	1	-1,3	2,3

