



BKalan

Recueil de sujets de concours



Concours d'Excellence — Bourses d'excellence (DESRS)

Matière : Mathématiques

Niveau : Séries scientifiques (SE, TSE, STI)

N°	Année	Sujet	Page
1	2023	Concours d'excellence EUTG, session de septembre 2023	2
2	2021	Bourses d'excellence, session de mars 2021	4
3	2008	Bourses d'excellence, session d'août 2008, sujet A	6
4	2008	Bourses d'excellence, session d'août 2008, sujet B	8
5	2008	Bourses d'excellence, session d'août 2008, sujet C	10
6	2007	Bourses d'excellence, session d'août 2007, sujet A	12
7	2007	Bourses d'excellence, session d'août 2007, sujet B	15
8	2007	Bourses d'excellence, session d'août 2007, sujet C	17

Nombre de sujets : 8 | Version : V1 | Générée le 21 octobre 2026

Retrouvez d'autres documents sur :

<https://bkalan.ml/api/files/WhatsApp/CONCOURS/ACADEMIQUES/docs.html>

Vous avez des sujets ou des corrigés ? Envoyez-les-nous :

Partager mes documents 📁

$$g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$$

- 2) a) Etudie les variations de g et montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2.
- b) Quel est le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles : $]0; \alpha[$ et $]\alpha; +\infty[$?
- 3) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et en déduis de l'inégalité $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ un encadrement de $f(\alpha)$
- 4) Achève l'étude de la fonction f et trace sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Partie B :

- 1) Montre que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
- 2) a) Calcule $h'(x)$ et vérifie que $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, on a : $-\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) < -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$
- En déduis qu'il existe un réel $k \in [0; 1]$ tel que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], |h'(x)| \leq k$
- b) Prouve que pour tout couple de réels $(x; y)$ choisi dans $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$, on a :
- $$|h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$$
- 3) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h(U_n)$
- a) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$
- b) En appliquant à $(U_n; \alpha)$ l'inégalité établie dans 2) b), prouve que :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$$
- c) En déduis par raisonnement par récurrence l'inégalité :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq k^n|U_0 - \alpha|$$
- Puis montre que la suite (U_n) est convergente. Quelle est sa limite ?
- 4) Montre en utilisant les variations de h que $U_{n+1} - \alpha$ et $U_n - \alpha$ sont de signe contraires. En déduis que α est compris entre U_n et U_{n+1} .
- Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

EXAMEN :	<i>Bourses d'Excellence</i>	B. EXC 2021
SÉRIES :	<i>TSE – STI</i>	SESSION : <i>Mars 2021</i>
ÉPREUVE DE :	<i>MATHÉMATIQUES</i>	DURÉE : <i>3heures</i> COEF: _____

Exercice1

5 points

On se propose de déterminer toutes les fonctions définies et dérivables sur

$]0; +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle (E) : $xf'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2$

1°/ a) Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur

$]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle

(E') : $y' = 2y + 8$. (1pt)

b) Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par

$f(x) = xh(x)$ est solution de (E) (1,5pt)

2°/ Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E). (1,5pt)

3°/ Existe-t-il une fonction f solution de (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(\ln 2; 0)$? Si oui, la préciser. (1pt)

Exercice2

6 points

On se propose de résoudre dans $\mathbf{Z}$ le système(S) :

$$\begin{cases} x = 10 \text{ [23]} \\ x = 4 \text{ [7]} \end{cases}$$

1°/ Déterminez un couple $(\alpha; \beta)$ d'entiers relatifs solution de l'équation $23\alpha + 7\beta = 1$ (1pt)

2°/ En déduire un couple $(u_0; v_0)$ solution de l'équation (E): $23u - 7v = -6$. Résoudre complètement l'équation (E) (1,5pt)

3°/ Montrez que x est solution de l'équation (S) si et seulement si il existe un

couple $(u; v)$ d'entiers relatifs vérifiant :
$$\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases} \quad . \text{ (1,5pt)}$$

En déduire l'ensemble des solutions de (S). (0,5pt)

4°/ Déterminez la plus petite solution (entier naturel) de (S) divisible par 16. (1,5pt)

Exercice3

9 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(A; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique

1cm. On considère les points B, D et C définis par : $\vec{AB} = 2\vec{u}$, $\vec{AD} = 2\vec{v}$ tel que ABCD soit un carré.

1°/ Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice. (1pt)

2°/ Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\vec{DB}$. Déterminer l'affixe Z_E de E . Construis E . (1pt)

3°/ Détermine les nombres réels a et b tels que le point F d'affixe $Z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points A , B et C affectés respectivement des coefficients a , b et 1 . (1,5pt)

4°/ On considère la similitude directe s qui transforme A en E et B en F .

a) Exprime Z' en fonction de Z où Z' est l'affixe du point M' image de M par s . (1,5pt)

b) Détermine le centre Ω , l'angle θ et le rapport k de la similitude s . (1,5pt)

c) Détermine les images de C et D par s . (1pt)

d) Calcule l'aire de l'image par s du carré $ABCD$. (1,5pt)

CONCOURS : *BOURSE D'EXCELLENCE*

SPÉCIALITÉ : SET

SESSION : Août 2008

ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

SUJET

Exercice 1 _____ (5 points)

n est un entier naturel premier.

1°/-a/ Démontrer que pour tout entier naturel k strictement compris entre 0 et n , C_n^k est multiple de n . (1,5pt)

b/ En déduire que pour tout couple d'entiers relatifs a et b , on a

$$(a + b)^n \equiv (a^n + b^n)[n] \quad (1pt)$$

2°/-a/ Démontrer que $\forall a \in \mathbb{N}, a^n \equiv a[n]$ (1,5pt)

b/ En déduire que pour tout entier naturel a premier avec n , on a, $a^{n-1} \equiv 1 [n]$ (1pt)

Exercice 2 _____ (6 points)

1°/ Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct de centre O tel que $AB = a$ où a est un réel strictement positif.

a) Déterminer OC^2 en fonction de a . En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{OC} \cdot \vec{OM} = \frac{1}{3}a^2$. (2pt)

b) Déterminer, en fonction de a , le réel k afin que l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $\vec{OC} \cdot \vec{OM} = k$ passe par le milieu I du segment $[BC]$ (1pt)

2°/ On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos x}{e^x} dx$

TSVP 

a) En intégrant par parties, montrer que $U_n = \left(\frac{e^\pi + 1}{2}\right) \times \left(\frac{\cos n\pi}{e^{n\pi}}\right)$ (1,5pt)

b) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1,5pt)

Exercice 3 _____ (9 points)

A// Question préliminaire

Soit la fonction $h :]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto h(x) = \tan x$

Etablir que h est bijective, que sa bijection réciproque h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est telle que $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ (2pts)

B//

1°/ Soit la fonction f de $]0 ; 2[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(x - 1)\right)$.

Etudier f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. (2pts)

2°/ Justifier que f est bijective. Soit g sa bijection réciproque. Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction définie par $g'(x) = \frac{2}{\pi(x^2 + 1)}$

(2,5pts)

3°/ On considère la fonction u , définie par $u(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Étudier la dérivabilité de u sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée. En déduire la formule explicite de u sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty [$. (2,5pts)

Direction de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

CONCOURS :

BOURSE D'EXCELLENCE

SPÉCIALITÉ : SET

SESSION : Août 2008

ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

SUJET

Exercice 1 (4 points)

1°/ Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n + 2$ divise $2n - 1$
(1,5pt)

2°/ Démontrer que pour tout entier relatif n , les nombres $n + 2$ et $2n^2 + 3n - 1$
sont premiers entre eux (1pt)

3°/ En déduire les entiers relatifs n pour lesquels la fraction $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$
est un entier relatif (1,5pt)

Exercice 2 (6 points)

Soit ABCD un losange et f l'application affine de $\mathbb{P}$ définie par : $f(A) = A$,
 $f(B) = D$ et $f(C) = D$

1°/ a) déterminer les images par f du point D, de la droite (AD) et du plan $\mathbb{P}$
(1,5pt)

b) Démontrer que $f \circ f$ est une application constante. (1pt)

2°/ Soit la symétrie orthogonale d'axe (AC).

a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application $g \circ f$. (2pts)

- b) En déduire la construction de l'image par f d'un point quelconque M de P
(1,5pt)

TSVP ➡ 

Exercice 3 (10 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm)

1°/ On considère la fonction numérique f de courbe représentative (C_f) définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$

- a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition (0,5pt)
- b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. (1,5pt)
- c) Préciser l'équation de la tangente à l'origine puis tracer avec soin la courbe (C_f) et sa tangente. (1,5pts)

2°/ On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x|e^{1-|x|}$

- a) Ecrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue. (1pt)
- b) En déduire une méthode pour obtenir la courbe représentative (C_g) de g sur $]-\infty ; 1]$ à partir de (C_f) (1pt)
- c) Etudier sur l'intervalle $[1 ; \infty[$ les variations de la fonction h définie par $h(x) = xe^{x-1}$ (1pt)
- d) Etudier la dérivabilité de la fonction g en 0 et en 1. (1,5pt)
- e) Déduire des questions précédentes le tableau de variation de g . (0,5pt)
- f) Tracer (C_g) ainsi que les demi tangentes à (C_g) aux points d'abscisses 0 et 1 (1,5pt)

CONCOURS :

BOURSE D'EXCELLENCE

SPÉCIALITÉ : SET

SESSION : *Août 2008*

ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : *3 heures*

SUJET

Exercice----- (5 points)

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) , $M(p, q)$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls.

1°/ Dans chacun des cas suivants déterminer le nombre de points du segment $[OM]$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

a/ $p = 5, q = 4$ (1,5pt)

b/ $p = 8, q = 6$ (1,5pt)

2°/ Déterminer en fonction de p et q le nombre de points du segment $[OM]$ dont les coordonnées sont des entiers naturels. (2pts)

Problème----- (15 points)

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

À tout point $M(x, y)$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$.

I-//

Soit T_α l'application affine de P dans P qui à tout point $M(x, y)$ associe le point

$$M'(x', y') \text{ tels que : } \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \text{Où } \alpha \text{ est un paramètre réel.}$$

1°/ Montrer que, quel que soit α , T_α est bijective et admet un unique point invariant que l'on précisera. (1,5pt)

2°/ Montrer qu'il existe une valeur unique de α pour laquelle T_α est une homothétie H . En donner le centre et le rapport (1,5pt)

TSVP ➡ 

3°/ Montrer qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles T_α est une isométrie. Vérifier que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre ; on les notera R et R^{-1} (2pts)

4°/ Montrer que les affixes des points M et M' sont liées, pour tout α , par une relation de la forme $z' = az$ où a est un nombre complexe que l'on explicitera en fonction de α . (1,5pt)

5°/ Déterminer la valeur de a pour que $T_\alpha = H$, $T_\alpha = R$, $T_\alpha = R^{-1}$ (1,5pt)

6°/ Montrer que R et R^{-1} laissent globalement invariant tout triangle du plan ayant O comme isobarycentre (1,5pt)

II-//

1°/ a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^3 = 1$. (1,5pt)

b) On désigne par A , B et C les points images des trois solutions dans le plan P , (B et C d'abscisses négatives et B d'ordonnée positive) et par A_1 , B_1 et C_1 leurs transformés respectifs par T_α . Calculer dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les coordonnées des points A_1 , B_1 , C_1 en fonction de α . (1,5pt)

c) En déduire que pour tout réel α , le point A_1 appartient à la droite (BC) , B_1 à la droite (AC) et C_1 à la droite (AB) . (1,5pt)

2°/ Montrer que lorsque α décrit l'ensemble des nombres réels le milieu du segment $[B_1, C_1]$ décrit une droite que l'on précisera. (1pt)

Ministère de l'Éducation

Nationale

Direction de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche
Scientifique

République du Mali

Un Peuple – Un But – Une Foi

CONCOURS :

BOURSES D'EXCELLENCE

SPÉCIALITÉ : SET

SESSION : Août 2007

ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

SUJET

Exercice (6 pts)

1°/ Résoudre l'équation $z \in \mathbb{C}$; $z^2 - [(1 + 2i)u + 1]z + (-1 + i)u^2 + i.u = 0$ où u est un paramètre complexe. On appellera z' la solution qui est un polynôme du premier degré en u et dont le coefficient de u est $(1 + i)$; z'' l'autre solution

2°/ Dans le plan complexe on appelle P le point d'affixe u , M' celui d'affixe z' , M'' celui d'affixe z'' .

a.) Par quelle transformation T_1 du plan passe-t-on de P à M' ? Expliciter ses éléments caractéristiques.

b.) Par quelle transformation T_2 du plan passe-t-on de P à M'' ? Expliciter ses éléments caractéristiques.

3°/ Par quelle transformation T du plan passe-t-on de M' à M'' ? Donner les éléments caractéristiques de T.

Problème (14 pts)

A-// On se propose de déterminer l'ensemble F des fonctions numériques f d'une variable réelle x définies et dérivables sur $] -1 ; +\infty [$ et vérifiant:

$$\forall x \in] -1 ; +\infty [\quad (1+x)f'(x) + f(x) = 1 + \ln(1+x)$$

1°/ Soit $f \in F$ et soit g la fonction définie par : $\forall x \in] -1 ; +\infty [$, $g(x) = (1+x)f(x)$.

Démontrer que g est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$ et que g est une primitive de la fonction h définie par : $\forall x \in] -1 ; +\infty[\quad h(x) = 1 + \ln(1+x)$.

Réciproquement, soit g_1 une primitive de h . Démontrer que la fonction f_1 définie par : $\forall x \in] -1 ; +\infty[\quad f_1(x) = \frac{g_1(x)}{1+x}$ est élément de $\mathbf{F}$.

TSVP 

2°/a.) Déterminer les réels a et b tels que $\forall x \in] -1 ; +\infty[\quad \frac{x}{1+x} = a + \frac{b}{1+x}$.

b.) Déterminer l'ensemble des primitives de h .

3°/ En déduire l'ensemble $\mathbf{F}$.

B-// On considère l'ensemble des fonctions f_k de $] -1 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in] -1 ; +\infty[\quad f_k(x) = \ln(1+x) + \frac{k}{1+x} ; k \in \mathbb{R}$$

1°/ Discuter suivant les valeurs de k , le sens de variation de f_k .

2°/ Tracer dans le même repère les courbes des fonctions f_1 , f_0 et f_{-1} .

C-// 1°/ Soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - \dots - x^{2n-1}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in] -1 ; +\infty[$

$$P_n(x) = f_0'(x) - \frac{x^{2n}}{1+x}. \text{ En déduire que } f_0'(x) = P_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}.$$

2°/ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0 ; 1], \frac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}$. En déduire, pour tout entier

$$n \geq 1 \text{ la double inégalité : } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx \leq \frac{1}{2n+1}$$

3°/ On considère la suite (W_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$W_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}.$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_0(1) = W_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$. En déduire que la suite (W_n) admet, lorsque n tend vers $+\infty$, une limite que l'on précisera.

4°/ Trouver un entier n_0 tel que $\ln 2 - W_{n_0} < 10^{-1}$.

CONCOURS : *BOURSES D'EXCELLENCE*

SPÉCIALITÉ : SET

SESSION : *Août 2007*

ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES DURÉE : *3 heures*

SUJET

Exercice 1(7 pts)

I- a, b, c et d étant des réels, mettre l'expression $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ sous forme de la somme de deux carrés. (On pourra remarquer que cette expression est le carré du module du nombre complexe $(a + ib)(c + id)$ que l'on calculera d'une autre manière.

Application : Mettre le produit 17×61 sous la forme de la somme de deux carrés.

II- Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx$

1°/ Montrer que pour tout entier naturel n , $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$.

2°/ A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1 + n^2}$.

3°/ Montrer que, pour tout entier naturel n : $I_n \leq \frac{e^{\pi} + 1}{1 + n^2}$; en déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$$

Exercice 2(7 pts)

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

TSVP 

1°/ Déterminer le domaine de définition de f puis étudier la dérivabilité de f en 0^+

2°/ Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

3°/ Dédurre de l'étude des variations de f qu'elle admet une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera le domaine de définition.

4°/ Construire les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

5°/ On considère la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{e^{2n}}} \end{cases}$$

Montrer que $U_n = \frac{f(n)}{f(1)}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 3 (6 pts)

Dans un plan P on considère un triangle équilatéral ABC de côté a ($a > 0$)

1°/ Construire le barycentre D des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -2)$ et $(C, -1)$

2°/ Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que le triangle BCD est rectangle en B .

3°/ Calculer les distances CD , BD et AD en fonction de a .

4°/ Déterminer l'ensemble F des points M du plan tels que

$2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = 0$. Vérifier que C appartient à F .

Ministère de l'Éducation

Nationale

Direction de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche
Scientifique

République du Mali

Un Peuple – Un But – Une Foi

CONCOURS :

BOURSES D'EXCELLENCE

SPÉCIALITÉ : SET

SESSION : Août 2007

ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

SUJET

Exercice(5 pts)

1°/ Montrer que si deux entiers naturels x et y sont premiers entre eux, alors il en est de même pour les entiers $2x + y$ et $5x + 2y$.

2°/ Déterminer les couples d'entiers naturels non nuls (a, b) vérifiant :

$$\begin{cases} (2a+b)(5a+2b)=1620 \\ ab=3\text{PPCM}(a,b) \end{cases}$$

Problème(15 pts)

I/-1°/ On considère dans le plan orienté rapporté au repère orthonormal direct

$(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $xy - 2x - 3y - 1 = 0$ et la transformation f , qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1-i}{2}z - 2 + 2i$.

a.) Montrer que f admet un unique point invariant que l'on déterminera. Reconnaitre la nature de la transformation f et donner ses éléments caractéristiques.

b.) Exprimer les coordonnées (x, y) du point M en fonction des coordonnées (x', y') du point M' .

c.) Montrer que l'image de (C) par la transformation f est la courbe (C') d'équation $x'^2 - y'^2 - x' + 3y' - 9 = 0$. (1).

d.) Montrer que la courbe (C') est une hyperbole dont on donnera dans le repère $(O \vec{i} ; \vec{j})$ les coordonnées du centre, des sommets et les équations des asymptotes.

TSVP 

2°/ On considère dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé

$(O \vec{i} ; \vec{j})$ la droite (D) d'équation $3x + 4y - 1 = 0$.

a.) Déterminer l'ensemble H des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

b.) Quel est l'ensemble H' des points de H dont le carré de la distance à O est un multiple de 13

II/- Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie

sur $]0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$ et $I_n = \int_1^2 f_n(x) dx$.

1°/ On pose $F(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$. Calculer $F'(x)$, en déduire I_1

2°/ En utilisant une intégration par parties montre que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

3°/ En utilisant la question 2°, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!})$

4°/ En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1 ; e]$, montrer que, pour tout entier n strictement positif, on a $0 \leq I_n \leq 1$.

5°/ En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!})$

6°/ a.) Étudier les variations de f_0 , f_1 et f_2 .

b.) Le plan étant muni d'un repère orthonormé, unité graphique 1cm, tracer les courbes C_0 , C_1 et C_2 courbes représentatives respectives de f_0 , f_1 et f_2 . dans le même repère.

c.) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe C_1 l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$