

CLUB UNESCO-ENI-ABT
CONCOURS D'EXCELLENCE INTER-LYCEES 2022

Série : TSE-STI

Epreuve : de Mathématiques

Durée : 03 h

Exercice 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm). On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

1) Résous l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2) On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$ définie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

a) Vérifie que z_1 est une solution de (E).

b) Ecris z_2 et z_3 sous forme algébrique.

c) Place les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe et trace les segments $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ et $[M_3M_4]$.

3) Montre que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{2} i \right)$.

4) a) Calcule les longueurs M_1M_2 et M_2M_3 .

b) Montre que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5) On note $K_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n+1}$.

a) Montre que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $K_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.

b) Détermine le plus petit entier naturel n tel que : $K_n \geq 1000$.

Exercice 2 : (les parties A) et B) sont indépendantes)

A) On considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx, \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad \text{et} \quad A_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos x \, dx.$$

1) Calcule $I_n + J_n$.

2) A l'aide d'une double intégration par parties montre que : $A_n = \frac{n(e^{-n\pi} + 1)}{1 + n^2}$. En déduis $I_n - J_n$.

3) a) En déduis les expressions de I_n et J_n en fonction de n .

b) Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

c) Calcule I_0, I_1, J_0 et J_1 .

B) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S(n)$ la somme de tous les diviseurs positifs de n . Par exemple $D_{10} \cap \mathbb{N} = \{1; 2; 5; 10\}$ donc $S(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$.

1) Calcule $S(n)$ pour les valeurs suivantes de : 4 ; 5 ; 17 et 21.

2) a) Pour p entier naturel premier prouve que $S(p) = p + 1$.

b) Démontre par récurrence sur α que si p est un entier naturel premier alors :

$S(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$; $\alpha \in \mathbb{N}^*$. On remarquera que : $S(p^{\alpha+1}) = S(p^\alpha) + p^{\alpha+1}$.

3) En déduis : $S(2^5)$; $S(2187)$ et $S(343)$.

Exercice 3 : (les parties A) et B) sont indépendantes)

A) On considère la fonction numérique f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm)

1) Détermine l'ensemble de définition de f puis calcule les limites aux bornes de cet ensemble.

2) Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

3) Pour tout réel x on pose $\varphi(x) = f(x) - (x + 1)$.

En remarquant que $\varphi(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} - 1$. Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Qu'en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$.

4) Trace sur le même graphique la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(D): y = x + 1$.

B) On considère la fonction numérique g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$

1) a) Dresse le tableau de variation de g .

b) Montre que la courbe de la fonction g admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

2) a) Montre que g est une bijection de $] -1; 1[$ vers un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit g^{-1} la bijection réciproque de g . Détermine $g^{-1}(x)$.

3) Soit h la fonction définie sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ par : $h(x) = g(\cos x)$. Soit l'intégrale $B = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$.

a) Montre que h est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ sur $]0; \frac{\pi}{2}]$.

b) En déduis la valeur exacte de B .