

CLUB UNESCO-ENI-ABT
CONCOURS D'EXCELLENCE INTER-LYCEES 2023

Série : TSE-STI

Epreuve : de Mathématiques

Durée : 03 h

Exercice 1 : (5 points)

- 1) a) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $21x + 4y = 29$.
- b) Un entier naturel N s'écrit $\overline{abca}^5$ et $\overline{c6b}^7$. Détermine les entiers naturels a , b et c puis l'écriture de N dans le système décimal.
- c) Ecris N dans le système binaire.
- d) 191 est-il un nombre premier ? Justifie votre réponse.
- 2) a) Décompose 4584 en produit de facteurs premiers puis détermine le nombre de diviseurs positifs de 4584.
- b) Détermine l'ensemble des diviseurs positifs de 4584.
- c) Détermine les entiers naturels n et p tels que : $n^2 - p^2 = 4584$.
- 3) On désigne respectivement par x et y (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle. Sachant que $y = 54$ et le plus petit multiple commun à x et y est 216, quelles sont les valeurs possibles de x ?
- 4) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)! \geq \sum_{p=1}^n p!$.

Exercice 2 : (5 points)

A) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A et B par les points d'affixes respectives 1 et -1 . Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{1-z}{\bar{z}-1}$

- 1) Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.
- a) Calcule l'affixe $z_{C'}$ du point C' image de C par la transformation f et Place les points C et C' dans le repère.
- b) Montre que le point C' appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.
- c) Montre que les points A , C et C' sont alignés.
- 2) Détermine et représente l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f .
- 3) Montre que, pour tout point M distinct de A , le point M' appartient au cercle $(\mathcal{C})$.
- 4) Montre que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel. Que peut-on en déduire pour les points A , M et M' ?

B) Soit $ABCD$ un tétraèdre. P , Q , R et S sont les points tels que : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

Démontre que les droites (PS) , (QR) et (IJ) sont concourantes.

Problème : (10 points)

A) On considère la fonction f_n définie $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^{n+1} \left(e^{-x} - \frac{1}{2} \right)$ avec $n \in \mathbb{N}$. On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm).

- 1) a) Etudie la limite de f_n en $+\infty$.

b) Etudie, suivant la parité de n , la limite de f_n en $-\infty$.

2) Calcule la dérivée f'_n de f_n et montre que $f'_n(x) = x^n h_n(x)$ avec $h_n(x) = e^{-x}(-x + n + 1) - \frac{n+1}{2}$.

3) a) Dresse le tableau de variation de h_n .

b) Montre que l'équation $h_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha_n > 0$.

c) Détermine le signe de h_n sur $\mathbb{R}$, en déduis celui de f'_n sur $\mathbb{R}$ (on distinguera le cas n pair et n impair)

d) Dresse, suivant la parité de n , le tableau de variation de f_n .

B) Dans cette partie, on prend $n = 0$ donc $f_0(x) = xe^{-x} - \frac{x}{2}$ et $h_0(x) = (1 - x)e^{-x} - \frac{1}{2}$.

1) a) Démontre que : $0 < \alpha_0 < \frac{1}{2}$.

b) En utilisant h_0 , montre que : $e^{-\alpha_0} = \frac{1}{2(1-\alpha_0)}$. En déduis l'expression de $f_0(\alpha_0)$ ne contenant pas $e^{-\alpha_0}$.

c) Déduis de la partie A) 3) d) le tableau de variation de f_0 .

d) Démontre que la courbe (C_0) admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera une équation.

2) a) Etudie le signe de f_0 sur $\mathbb{R}$.

b) On donne $\alpha_0 = 0,315$. Construis (C_0) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3) a) Détermine les nombres réels a et b tels que, la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto xe^{-x}$.

b) Calcule l'aire en cm^2 du domaine plan limité par la courbe (C_0) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. (on donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-1} près). (on donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-1} près).

C) On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{1}{n} [\sum_{k=1}^n \ln(n+k)] - \ln n$

1) Démontre que : $U_n = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right]$.

2) Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$

a) Démontre que : $\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k+1}{n} \right)$.

b) En déduis que : $U_n - \frac{1}{n} \ln 2 \leq \int_1^2 \ln x \, dx \leq U_n$. Calcule $J = \int_1^2 \ln x \, dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

c) Déduis de ce qui précède un encadrement de U_n et la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.