

Exercice 1 : (4 points)

- 1) a) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $7x - 5y = 3$.
b) On donne $a = 5k + 4$ et $b = 7k + 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
b1) Quelles sont les valeurs possibles du $PGCD(a; b)$?
b2) Détermine k pour que $PGCD(a; b) = 3$.
b3) Pour quelles valeurs de k les entiers a et b sont premiers entre eux.
c) Dr Moussa Thiam propose à un étudiant, je te donne 7 000 f à chaque fois que tu résous correctement un problème de mathématiques et dans le cas contraire je te retire 5 000 f. Après résolution de N problèmes posés ($20 < N < 35$) l'étudiant se retrouve avec 3 000 f.
c1) Détermine le nombre de problèmes que l'étudiant a correctement résolus sachant que ce nombre est pair.
c2) Détermine le nombre de problèmes posés à l'étudiant.
2) a) 337 est-il un nombre premier ? Justifie votre réponse.
b) Décompose 1685 en produit de facteurs premiers puis détermine l'ensemble des diviseurs positifs de 1685.
c) Détermine les entiers naturels n et p tels que : $n^3 - p^3 = 1685$.
3) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n + 1)! \geq 2^n$.

Exercice 2 : (6 points)

A) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application S qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{3+4i}{5} \bar{z} + \frac{1-2i}{5}$.

- 1) On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Démontre que :
$$\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$$
- 2) a) Détermine l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z' = z$.
b) Soit A d'affixe $2 + i$. Détermine l'affixe du point A' image de A par S .
c) Détermine l'ensemble (D) des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
3) On cherche à déterminer les points de (D) dont les coordonnées sont entières.
a) Donne une solution particulière $(x_0; y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $4x - 3y = 2$.
b) Détermine l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $4x - 3y = 2$.
4) On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tels $z = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = S(M)$ a pour affixe z' . Détermine les entiers y tels que $Re(z')$ et $Im(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences).
B) Montre que tout point M d'affixe z vérifiant : $z = 4i + 5e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, appartient à un cercle (C) dont on précise le centre et le rayon.
C) Soit $ABCD$ un parallélogramme. P est le point tel que : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$. Q est le symétrique du milieu de $[AD]$ par rapport à A .
Démontre que les points P , Q et C sont alignés. (on fera une figure d'abord).

Problème : (10 points)

Partie A :

I) a) Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$.

b) Détermine la solution particulière f de (E) dont la courbe (C_f) admet au point $A\left(\frac{\pi}{2}; e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$ une tangente de coefficient directeur $-e^{-\frac{\pi}{2}}$.

II) On considère la fonction numérique f , de la variable réelle x , définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \sin x$.

On appelle (C_f) la courbe d'équation $y = f(x)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra 2 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées et 6 cm pour π unités sur l'axe des abscisses.

1) Montre que, pour tout réel x , $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$. En déduis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et l'existence d'une asymptote pour la courbe (C_f) .

2) Montre que la fonction dérivée de f vérifie : $f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, pour x élément de $\mathbb{R}$.

3) On étudie la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Recopie et complète le tableau suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$	π
$x + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	
Signe de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$		

En déduis le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

4) Représente la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ainsi que les courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives $y = -e^{-x}$ et $y = e^{-x}$.

5) Détermine algébriquement sur $\mathbb{R}$, puis sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, les coordonnées des points communs à :

a) (C_f) et l'axe des abscisses.

b) (C_f) et (C_1) .

c) (C_f) et (C_2) .

6) Détermine un réel α tel que, pour $x \geq \alpha$, on ait $|f(x)| \leq 10^{-2}$.

Partie B :

Le but de cette partie est de déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1) En calculant les dérivées successives de la fonction f jusqu'à l'ordre 4 (on rappelle que $f(x) = e^{-x} \sin x$).

Trouve une relation entre la fonction f et sa dérivée d'ordre 4 notée $f^{(4)}$.

2) En déduis qu'on peut choisir $F(x) = -\frac{1}{4}f^{(3)}(x)$.

3) On pose $I = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$. Montre que $I = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}$.

Partie C :

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x) \, dx$.

1) Vérifie que $I_0 = I$ et interprète I_0 comme l'aire d'un domaine plan. Hachure ce domaine.

2) Montre que, pour tout entier naturel n , $I_n = \frac{e^{-2n\pi}}{2}(e^{-\pi} + 1)$.

3) Prouve que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera sa raison.

4) Prouve que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et précise sa limite.