

CLUB UNESCO-ENI-ABT
CONCOURS D'EXCELLENCE INTER-LYCEES 2024

Série : TSEXP

Epreuve : de Mathématiques

Durée : 03 h

Exercice 1 : (4 points)

1) a) Développe $(z + 2i)(z^2 - 2iz - 4)$

b) En déduis la résolution de l'équation : $z \in \mathbb{C}; z^3 = 8i$.

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(o; \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} + i$, $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = -2i$.

a) Ecris sous forme exponentielle les nombres complexes : $z_A - z_C$, $z_B - z_C$ et $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$.

b) En déduis la nature du triangle ABC .

3) Détermine et construis les ensembles des points M dont l'affixe z vérifie :

a) $|z + 2i| = |\bar{z} - \sqrt{3} + i|$

b) $|(1 - i\sqrt{3})z - 4i| = 2|z_B|$

Exercice 2 : (6 points)

I) En vue de sélectionner des joueurs pour les éliminatoires de la coupe du monde de football, la fédération malienne de football met à la disposition de l'entraîneur un certain nombre de joueurs évoluant au pays et hors du pays. Parmi eux, il y a des joueurs professionnels et des joueurs non professionnels.

Ces joueurs se répartissent comme suit : 75% des joueurs évoluent au Mali, 60% des joueurs évoluant au Mali sont professionnels et 20% des joueurs évoluant hors du Mali ne sont pas professionnels.

On choisit au hasard un joueur pour subir un test antidopage. On désigne par :

A l'évènement « *le joueur choisi évolue au Mali* » ;

B l'évènement « *le joueur choisi est professionnel* » ;

C l'évènement « *le joueur choisi évolue au Mali et est professionnel* ».

1) a) Traduis l'énoncé par un arbre de probabilité.

b) Donne $P_A(B)$, la probabilité de B sachant A.

c) Démontre que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,45.

2) a) Calcule la probabilité de l'évènement B.

b) Le joueur choisi est professionnel. Quelle est la probabilité qu'il évolue au Mali ?

II) Après la désillusion du match à la CAN 2023 contre la côte d'ivoire l'entraîneur de l'équipe de football du Mali doit sélectionner des joueurs parmi ceux mis à sa disposition. Pour ce faire, il soumet d'abord chaque joueur à un test qui consiste à faire trois (3) tirs au but successifs à partir du point de penalty. Est retenu à l'issue de ce premier test, tout joueur qui réussit au moins deux de ses trois tirs. On suppose que les tirs sont indépendants les uns des autres et que la probabilité qu'un joueur donné réussisse un tir est égale à $\frac{3}{4}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs réussis par un joueur donné à l'issue de l'épreuve de trois tirs au but successifs.

a) Détermine les valeurs prises par X .

b) Détermine la loi de probabilité de X .

c) Calcule l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

d) Démontre que la probabilité qu'un joueur donné soit retenu est égale à $\frac{27}{32}$

Problème : (10 points)

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie. L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps. **Les parties A et B sont indépendantes.**

Partie A : Etude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.

On modélise la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient, exprimé en mg, par la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par : $g(t) = 3te^{-0,5t+1}$ où t définit le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise de comprimé.

1) a) Justifie que g est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$. On note g' sa fonction dérivée. Montre que, pour tout réel t de $[0; 10]$, on a : $g'(t) = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$.

b) En déduis le tableau de variation de g sur l'intervalle $[0; 10]$.

c) Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient sera-t-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité maximale ?

2) a) Montre que l'équation $g(t) = 5$ admet une solution unique sur l'intervalle $[0; 2]$ notée α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

On admet que l'équation $g(t) = 5$ a une solution unique sur l'intervalle $[2; 10]$ notée β et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

b) On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient est supérieure ou égale à 5 mg. Détermine, à la minute près, la durée d médicament dans le cas de ce protocole.

3) a) Détermine les réels c et d pour que la fonction $G : t \mapsto (ct + d)e^{-0,5t+1}$ définie sur $[0; 10]$ soit une primitive de g sur $[0; 10]$.

b) Détermine la quantité moyenne de médicament présente dans le sang d'un patient sur l'intervalle $[2; 4]$.

Partie B : Etude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter, initialement a patient, piqure intraveineuse, une dose de 2 mg de ce médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est progressivement éliminé. On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament présente dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (U_n) où pour tout entier naturel n , U_n désigne la quantité de médicament, exprimé en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la $n^{\text{ième}}$ heure. On a donc $U_0 = 2$.

1) Calcule, selon cette modélisation, la quantité U_1 de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de première heure.

2) Justifie que, pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} = 0,7U_n + 1,8$.

3) a) Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $U_n \leq U_{n+1} < 6$.

b) En déduis que la suite (U_n) est convergente. On note L sa limite.

c) Détermine la valeur de L . Interprète cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4) On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n , par : $V_n = 6 - U_n$.

a) Montre que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

b) Détermine l'expression de V_n en fonction de n , puis U_n en fonction de n .

c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.

Détermine, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole