

CLUB UNESCO-ENI-ABT
CONCOURS D'EXCELLENCE INTER-LYCEES 2025

Série : TSE-STI

Epreuve : de Mathématiques

Durée : 03 h

Exercice 1 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$: unité graphique 6 cm.

I) Soit l'équation $(E): z^2 - (2 - \sqrt{3} + i)mz + 2(i - \sqrt{3})m^2 = 0$. $m \in \mathbb{C}^*, z \in \mathbb{C}$.

1) Montre que le discriminant de (E) est $\Delta = (2 + \sqrt{3} - i)^2 m^2$.

2) Résous (E) dans $\mathbb{C}$.

II) On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

définie par : $z' = ze^{\frac{5i\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 a pour affixe

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout nombre entier n , $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n .

1) a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f .

b) Détermine l'image du cercle de centre $A(1 + i)$ et de rayon 2 par f .

c) Place M_0, M_1, M_2 .

2) Montre que pour tout entier naturel n , on a l'égalité : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$. (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3) a) Soient deux entiers naturels n et p tels que $n \geq p$. Montre que les deux points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n - p)$ est multiple de 12.

b) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $12x - 5y = 3$.

c) Détermine les entiers naturels n tels que les points M_n appartiennent à l'axe réel.

Exercice 2 : (4 points)

A) Soit trois points A, B et C non alignés du plan tels que : $AB = 3a$; $AC = 4a$; $BC = 5a$ ($a > 0$), on désigne par I le milieu de $[BC]$.

1) Montre que le triangle ABC est rectangle en A .

2) Soit $m \in [0; \frac{1}{2}]$ et G_m le barycentre des points pondérés $(A, 1 - 2m)$, (B, m) et (C, m) . Détermine l'ensemble des points G_m quand m décrit $[0; \frac{1}{2}]$.

3) Montre que : $(1 - 2m)G_m A^2 + mG_m B^2 + mG_m C^2 = 25a^2 m(1 - m)$.

4) Détermine, selon les valeurs des réels m et k ($k > 0$), l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan tels que : $(1 - 2m)MA^2 + mMB^2 + mMC^2 = 25a^2 k^2$. Peut-on déterminer m et k pour que les trois points A, B et C appartiennent à $(\mathcal{C})$?

B) Montre que tout point M d'affixe z vérifiant : $z = 4i(1 + e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, appartient à un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

Problème : (10 points)

On considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f_n(x) = e^{-\frac{n+1}{x}} \ln(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
 avec $n \in \mathbb{N}$ et On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction h_n définie sur $]0; +\infty[$ par : $h_n(x) = x + (n+1) \ln(x)$ avec $n \in \mathbb{N}$

- 1) a) Calcule les limites de h_n en 0 et en $+\infty$.
- b) Calcule la dérivée h'_n de h_n . Dresse le tableau de variation de h_n .
- 2) a) Montre que l'équation $h_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n sur $]0; +\infty[$.
- b) Justifie que : $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < \alpha_n < 1$.
- c) Etudie suivant les valeurs de x le signe de h_n sur $]0; +\infty[$.
- 3) a) Montre que : $\forall n \in \mathbb{N}; h_{n+1}(\alpha_{n+1}) - h_{n+1}(\alpha_n) = -\ln(\alpha_n)$.
- b) Dédus-en le sens de variation de la suite (α_n) .
- c) Justifie que la suite (α_n) converge vers un réel l .
- d) Montre les égalités suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}; \ln(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n+1}$ puis $\ln(l) = 0$; Précise la valeur de l .

Partie B : Etude de la fonction f_n

- 1) a) En posant : $t = \frac{n+1}{x}$; montre que $f_n(x) = f_n\left(\frac{n+1}{t}\right) = \frac{\ln(n+1)}{e^t} - \frac{\ln(t)}{t} \times \frac{1}{e^t}$.
- b) Dédus-en f_n est continue en 0.
- 2) a) Sachant que $\frac{f_n(x)}{x} = \frac{1}{n+1} \left[\frac{\ln(n+1)}{\frac{e^t}{t}} - \frac{\ln(t)}{t} \times \frac{1}{\frac{e^t}{t^2}} \right]$ avec $t = \frac{n+1}{x}$. Etudie la dérivabilité de la fonction f_n en 0.
- b) Interprète graphiquement le résultat.
- 3) a) Calcule la limite de f_n en $+\infty$.
- b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Interprète graphiquement le résultat.
- 4) a) Montre que : $\forall x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}; f'_n(x) = \frac{e^{-\frac{n+1}{x}}}{x^2} \times [h_n(x)]$ où h_n est la fonction définie dans la partie A.
- b) Dresse le tableau de variation de f_n .
- 5) a) Montre que : $\forall x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}; f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^{-\frac{n+1}{x}} \ln(x) \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1 \right)$.
- b) Montre que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.
- c) Etudie les positions relatives des courbes (C_{n+1}) et (C_n) .
- 6) Trace (C_0) et (C_1) dans le même repère.

Partie C : Etude d'une suite intégrale

Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_1^2 f_n(x) dx$.

- 1) A l'aide d'une intégration par parties, calcule l'intégrale $K = \int_1^2 \ln(x) dx$.
- 2) Montre que : $\forall x \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}; e^{-n-1} \ln(x) \leq f_n(x) \leq e^{-\frac{n+1}{2}} \ln(x)$.
- 3) Dédus-en : $\forall n \in \mathbb{N}; e^{-n-1} K \leq I_n \leq e^{-\frac{n+1}{2}} K$.
- 4) Justifie que la suite (I_n) converge vers un nombre réel que l'on déterminera.