

Durée : 03 h

Problème : (10 points) (les parties I) et II) sont indépendantes)

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^{1-x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Quelle conséquence graphique pour (C) peut-on en tirer ?
- Justifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Détermine sa fonction dérivée f' .
- Dresse le tableau de variation de f et trace la courbe (C) .

2) Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

- Etablis une relation entre I_{n+1} et I_n .
- Calcule I_1 et I_2 .
- Donne une interprétation graphique du nombre I_2 . On la fera apparaître sur le graphique de la question 1)
- a) Démontre que, pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n$.
- b) En déduis un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

II) Partie A : Etude d'une fonction

Le plan est muni d'un repère orthonormal. On prendra pour unités graphiques 0,5cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées. On graduera l'axe des abscisses à partir de 0 et l'axe des ordonnées à partir de 30.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 24]$ par : $g(t) = 35 + 3 \ln(2t + 1)$ et (C) sa courbe représentative.

- Vérifie que $g'(t) = \frac{6}{2t+1}$ (le détail du calcul devra figurer sur la copie).
- Déduis-en le sens de variation de g .
- Reproduis et complète le tableau suivant (les valeurs seront arrondies au dixième)

t	0	6	9	12	18	24
$g(t)$						

- Trace soigneusement la courbe (C) .

Partie B : Application

La courbe d'évolution du périmètre crânien permet de surveiller la bonne croissance physique des nourrissons et des jeunes enfants.

Dans toute cette partie 2, on considère un enfant dont le périmètre crânien à la naissance est 35 centimètres. Pendant les 24 premiers mois, on estime que le périmètre crânien (exprimé en cm) est donné en fonction de l'âge t (exprimé en mois) par : $g(t) = 35 + 3 \ln(2t + 1)$

- Calcule le périmètre crânien d'un enfant de 6 mois (au dixième le plus proche)
- Calcule l'âge correspondant à un périmètre de 45 cm
- Détermine la tranche d'âge correspondant à un périmètre crânien compris entre 37 et 43 cm.