

ALGÈBRE ET ARITHMÉTIQUE

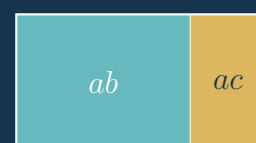
FACTORISER POUR RÉSOUDRE

Identités remarquables,
astuces et problèmes.

COLLÈGE AVANCÉ / DÉBUT LYCÉE

Préparation aux olympiades de mathématiques

Comprendre le geste.
Reconnaître la forme.
Justifier le résultat.



$$ab + ac = a(b + c)$$

9 problèmes guidés

8 exercices supplémentaires avec corrigés

Explications courtes · Démonstrations · Fiches méthodes

LE PARCOURS

Sommaire et mode d'emploi

L'objectif

Apprendre à transformer une expression en produit, puis utiliser ce produit pour calculer, prouver une divisibilité ou reconnaître un nombre composé.

Partie	Pages
Les réflexes de base	3
Sophie Germain : identité et nombres composés	4–5
Quatre entiers consécutifs ; une autre identité	6–7
Neuf problèmes guidés	8–16
Reconnaître un nombre premier	17
Choisir sa méthode de factorisation	18
Huit exercices supplémentaires	19
Corrigés des exercices	20–21
Fiche de synthèse	22

Une méthode de travail simple

- 1. Chercher.** Lire l'énoncé et essayer une transformation avant de regarder la solution.
- 2. Comprendre.** Repérer le facteur commun ou le carré que l'on veut faire apparaître.
- 3. Refaire.** Reprendre le calcul sans le corrigé, puis expliquer l'idée en une phrase.

Niveau et notations

Le livret suppose le calcul littéral, les puissances et les identités remarquables. $d \mid N$ signifie que N est un multiple entier de d . Un nombre composé est un entier supérieur à 1 qui n'est pas premier.

Note d'édition. Le contenu mathématique du fichier fourni est reformulé en français. Les calculs ont été vérifiés. Le problème 9, dont l'écriture est ambiguë dans la transcription, est explicitement présenté comme une reconstitution. Les huit exercices de la page 19 sont ajoutés pour s'entraîner.

COURS · 1

Les réflexes de base

Idée clé. Factoriser, c'est écrire une somme ou une différence sous la forme d'un produit.

1. Commencer par le facteur commun

$$ab + ac = a(b + c).$$

Par exemple,

$$6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x - 3).$$

Le facteur peut aussi être une expression :

$$(x + 1)(x + 4) + 2(x + 1) = (x + 1)(x + 6).$$

2. Reconnaître les identités usuelles

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= (A - B)(A + B), \\ A^2 + 2AB + B^2 &= (A + B)^2, \\ A^2 - 2AB + B^2 &= (A - B)^2. \end{aligned}$$

3. Factoriser rapidement un trinôme unitaire

Pour $x^2 + sx + p$, chercher deux nombres u, v tels que $u + v = s$ et $uv = p$. Alors

$$x^2 + sx + p = (x + u)(x + v).$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3), \quad x^2 - 10x + 9 = (x - 1)(x - 9).$$

4. Garder une identité utile sur les cubes

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B).$$

Cette écriture permet de voir immédiatement ce qui reste quand $A^3 + B^3$ s'annule avec d'autres termes.

Piège à éviter. Une factorisation proposée se contrôle en la développant. La somme des deux nombres ne suffit pas pour un trinôme : il faut aussi vérifier leur produit.

COURS · 2

L'identité de Sophie Germain

La formule

Pour tous réels x, y ,

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2).$$

1. Repérer deux carrés

On a $x^4 = (x^2)^2$ et $4y^4 = (2y^2)^2$. Pour construire le carré $(x^2 + 2y^2)^2$, il manque le terme $4x^2y^2$.

2. Ajouter puis retirer le même terme

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2. \end{aligned}$$

La dernière ligne est une différence de deux carrés. On applique donc $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

3. Voir le mécanisme

Somme de deux carrés : $(x^2)^2 + (2y^2)^2$



Ajouter et retirer $4x^2y^2$



Différence de deux carrés : $(x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$

Idée clé. Le terme que l'on retire est lui-même un carré. C'est ce qui rend la factorisation possible par cette méthode.

COURS · 3

Prouver qu'un nombre est composé

Deux applications immédiates

En prenant $y = 1$, puis $y = 2$, dans l'identité de Sophie Germain :

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2),$$

$$x^4 + 64 = (x^2 - 4x + 8)(x^2 + 4x + 8).$$

Un exemple numérique

Sans faire de divisions successives,

$$\begin{aligned} 3^4 + 4 \cdot 2^4 &= (9 - 12 + 8)(9 + 12 + 8) \\ &= 5 \times 29 = 145. \end{aligned}$$

La propriété arithmétique

Si a, b sont des entiers strictement positifs, alors $a^4 + 4b^4$ est composé, sauf pour $(a, b) = (1, 1)$, qui donne le nombre premier 5.

Pourquoi faut-il une exception ?

La factorisation donne deux entiers :

$$U = a^2 - 2ab + 2b^2 = (a - b)^2 + b^2,$$

$$V = a^2 + 2ab + 2b^2 = (a + b)^2 + b^2.$$

On a toujours $V \geq 5$. Pour que $U = 1$, il faut $b = 1$ et $a - b = 0$, donc $a = b = 1$. Dans tous les autres cas, $U \geq 2$ et $V \geq 5$: le produit est composé.

Résultat

Pour $a, b \geq 1$, le seul cas premier est $1^4 + 4 \cdot 1^4 = 5$.

Piège à éviter. Écrire un nombre sous la forme d'un produit ne suffit pas : il faut montrer que les deux facteurs sont strictement supérieurs à 1.

COURS · 4

Quatre entiers consécutifs

Une identité qui fabrique un carré

Pour tout réel x ,

$$1 + x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2 + 3x + 1)^2.$$

1. Regrouper les extrêmes

On multiplie le premier facteur par le dernier, puis les deux facteurs du milieu :

$$x(x+3) = x^2 + 3x, \quad (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2.$$

Les deux résultats ne diffèrent que de 2.

2. Introduire leur valeur centrale

Posons $t = x^2 + 3x + 1$. Les deux facteurs deviennent $t - 1$ et $t + 1$. Ainsi

$$1 + x(x+1)(x+2)(x+3) = 1 + (t-1)(t+1) = t^2.$$

3. Appliquer aux entiers

Si n est entier, $n^2 + 3n + 1$ est entier. Le produit de quatre entiers consécutifs augmenté de 1 est donc un carré parfait.

Expression	Carré obtenu
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1$	$5^2 = 25$
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1$	$11^2 = 121$
$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1$	$19^2 = 361$
$13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 + 1$	$209^2 = 43681$

Idée clé. Quand quatre facteurs se suivent, essayer de regrouper les extrêmes. Le même terme quadratique apparaît souvent deux fois.

COURS · 5

Une somme qui cache un produit

Une identité à reconnaître

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

1. Compléter le carré

Pour transformer $x^4 + x^2 + 1$ en $(x^2 + 1)^2$, il manque un terme x^2 . On l'ajoute et on le retire :

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x). \end{aligned}$$

2. La même identité avec deux variables

Exactement de la même façon,

$$u^4 + u^2v^2 + v^4 = (u^2 - uv + v^2)(u^2 + uv + v^2).$$

On ajoute et retire u^2v^2 , puis on utilise une différence de carrés.

3. Une application rapide

$$5^4 + 5^2 + 1 = (25 - 5 + 1)(25 + 5 + 1) = 21 \times 31 = 651.$$

La grande somme est devenue un produit simple.

Comparer les deux formes importantes

Expression	Carré que l'on construit
$x^4 + 4y^4$	$(x^2 + 2y^2)^2$
$x^4 + x^2 + 1$	$(x^2 + 1)^2$

Idée clé. Ne pas mémoriser seulement la formule : savoir quel terme ajouter et retirer permet de la retrouver.

PROBLÈME GUIDÉ · 1

Calculer sans développer

Énoncé

Calculer exactement, sans calculatrice,

$$\sqrt{2025 \times 2021 + 4}.$$

Idée clé. Les nombres 2025 et 2021 sont symétriques autour de 2023.

Méthode 1 : utiliser le milieu

On écrit $2025 = 2023 + 2$ et $2021 = 2023 - 2$. Alors

$$\begin{aligned} 2025 \times 2021 + 4 &= (2023 + 2)(2023 - 2) + 4 \\ &= 2023^2 - 2^2 + 4 \\ &= 2023^2. \end{aligned}$$

Comme 2023 est positif, la racine carrée vaut 2023.

Résultat

$$\sqrt{2025 \times 2021 + 4} = 2023.$$

Méthode 2 : partir du plus petit nombre

En posant $n = 2021$, l'expression sous la racine devient

$$n(n + 4) + 4 = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2.$$

On retrouve $n + 2 = 2023$.

La forme générale

Pour des réels m, h ,

$$\sqrt{(m - h)(m + h) + h^2} = \sqrt{m^2} = |m|.$$

Piège à éviter. $\sqrt{m^2}$ vaut $|m|$. On peut écrire m seulement si l'on sait que $m \geq 0$.

PROBLÈME GUIDÉ · 2

Le plus grand facteur premier

Énoncé

Déterminer le plus grand facteur premier de 160401.

Idée clé. Décomposer le nombre sous la forme $x^4 + x^2 + 1$.

1. Reconnaître la structure

$$160401 = 160000 + 400 + 1 = 20^4 + 20^2 + 1.$$

L'identité de la page 7 donne

$$\begin{aligned} 160401 &= (20^2 - 20 + 1)(20^2 + 20 + 1) \\ &= 381 \times 421 = 3 \times 127 \times 421. \end{aligned}$$

2. Vérifier que 421 est premier

Puisque $20^2 < 421 < 21^2$, il suffit de tester les nombres premiers inférieurs ou égaux à 20.

Premier p	2	3	5	7	11	13	17	19
Reste de 421	1	1	1	1	3	5	13	3

Aucun reste n'est nul ; 421 est donc premier. Tous les facteurs premiers de 381 sont inférieurs à 421, puisque $381 < 421$.

Résultat

Le plus grand facteur premier de 160401 est 421.

Pourquoi s'arrêter à la racine carrée ?

Si un entier composé N s'écrit uv avec $1 < u \leq v$, alors $u^2 \leq N$, donc $u \leq \sqrt{N}$. La preuve complète et d'autres exemples se trouvent page 17.

Piège à éviter. Une factorisation en deux nombres ne prouve pas qu'ils sont premiers. Il faut encore vérifier la primalité du facteur que l'on annonce comme réponse.

PROBLÈME GUIDÉ · 3

Une divisibilité avec des puissances

Énoncé

Montrer que

$$N = 81^6 - 9 \cdot 27^7 - 9^{11}$$

est divisible par 45.

Idée clé. Écrire toutes les puissances avec la même base, puis sortir le plus petit exposant.

1. Tout écrire en base 3

Comme $81 = 3^4$, $27 = 3^3$ et $9 = 3^2$, on obtient

$$N = 3^{24} - 3^2 \cdot 3^{21} - 3^{22} = 3^{24} - 3^{23} - 3^{22}.$$

2. Mettre le facteur commun en évidence

$$N = 3^{22}(3^2 - 3 - 1) = 5 \cdot 3^{22}.$$

Or $45 = 5 \cdot 3^2$, donc

$$N = 45 \cdot 3^{20} = 45 \cdot 9^{10}.$$

Le second facteur est un entier : c'est précisément la définition de la divisibilité par 45.

Résultat

$$81^6 - 9 \cdot 27^7 - 9^{11} = 45 \cdot 9^{10}.$$

Retrouver la présentation en base 9

On peut aussi écrire

$$81^6 = 9^{12}, \quad 9 \cdot 27^7 = 3 \cdot 9^{11}.$$

Alors $N = 9^{11}(9 - 3 - 1) = 5 \cdot 9^{11}$, ce qui donne la même conclusion.

Piège à éviter. Pour une puissance de puissance, $(a^u)^v = a^{uv}$. Pour un produit de puissances de même base, $a^u a^v = a^{u+v}$.

PROBLÈME GUIDÉ · 4

Des cubes qui se simplifient

Énoncé

Factoriser, pour des réels a, b, x, y ,

$$E = (ay + bx)^3 + (ax + by)^3 - (a^3 + b^3)(x^3 + y^3).$$

Idée clé. Utiliser $(U + V)^3 = U^3 + V^3 + 3UV(U + V)$ et repérer les termes qui s'annulent.

1. Repérer les quatre cubes purs

Les deux premiers termes produisent

$$a^3y^3 + b^3x^3 + a^3x^3 + b^3y^3.$$

Or cette somme est exactement le développement de $(a^3 + b^3)(x^3 + y^3)$. Elle disparaît donc entièrement.

2. Écrire seulement ce qui reste

$$\begin{aligned} E &= 3(ay)(bx)(ay + bx) + 3(ax)(by)(ax + by) \\ &= 3abxy[(ay + bx) + (ax + by)]. \end{aligned}$$

3. Regrouper la dernière somme

$$ay + bx + ax + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y).$$

Ainsi la factorisation complète est

Résultat

$$E = 3abxy(a + b)(x + y).$$

Un contrôle numérique

Avec $a = 1$, $b = 2$, $x = 3$ et $y = 4$, le premier membre vaut

$$10^3 + 11^3 - 9 \cdot 91 = 1512.$$

Le produit obtenu vaut aussi $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 = 1512$.

Piège à éviter. Un contrôle numérique peut détecter une erreur, mais il ne remplace pas la démonstration algébrique valable pour toutes les valeurs.

PROBLÈME GUIDÉ · 5

Un produit télescopique

Énoncé

Calculer

$$R = \frac{(1 \cdot 4 + 2)(3 \cdot 6 + 2) \cdots (49 \cdot 52 + 2)}{(1 \cdot 6 + 6)(3 \cdot 8 + 6) \cdots (47 \cdot 52 + 6)}.$$

Les premiers nombres des facteurs parcourent les entiers impairs indiqués, de 2 en 2.

Idée clé. Factoriser chaque parenthèse avant de multiplier.

1. La forme générale du numérateur

Pour $n = 1, 3, 5, \dots, 49$,

$$n(n+3) + 2 = n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2).$$

Le numérateur devient

$$(2 \cdot 3)(4 \cdot 5)(6 \cdot 7) \cdots (50 \cdot 51) = 2 \cdot 3 \cdots 51.$$

2. La forme générale du dénominateur

Pour $n = 1, 3, 5, \dots, 47$,

$$n(n+5) + 6 = n^2 + 5n + 6 = (n+2)(n+3).$$

Le dénominateur devient

$$(3 \cdot 4)(5 \cdot 6)(7 \cdot 8) \cdots (49 \cdot 50) = 3 \cdot 4 \cdots 50.$$

3. Simplifier les facteurs communs

Tous les facteurs de 3 à 50 se simplifient. Il reste

$$R = \frac{2 \cdot \overbrace{(3 \cdot 4 \cdots 50)}^{\text{facteurs communs}} \cdot 51}{3 \cdot 4 \cdots 50} = 2 \cdot 51.$$

Résultat

$$R = 102.$$

Piège à éviter. Le numérateur possède 25 parenthèses et le dénominateur 24. Bien vérifier les derniers facteurs évite de supprimer par erreur le 51.

PROBLÈME GUIDÉ · 6

Factorisation et parité

Énoncé

Soient a, b, c trois entiers strictement positifs distincts. Montrer qu'au moins un des nombres

$$a^5b - ab^5, \quad b^5c - bc^5, \quad c^5a - ca^5$$

est divisible par 8.

Idée clé. Parmi trois entiers, deux ont nécessairement la même parité.

1. Factoriser une expression représentative

$$\begin{aligned} a^5b - ab^5 &= ab(a^4 - b^4) \\ &= ab(a - b)(a + b)(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

2. Supposer que a et b ont la même parité

S'ils sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs, les trois nombres suivants sont pairs :

$$a - b, \quad a + b, \quad a^2 + b^2.$$

Leur produit contient donc au moins trois facteurs 2. Il est divisible par $2^3 = 8$. Le facteur supplémentaire ab ne change pas cette conclusion.

3. Pourquoi une telle paire existe-t-elle ?

Il n'existe que deux catégories : pair et impair. En répartissant trois nombres entre ces deux catégories, l'une d'elles contient au moins deux nombres.

On applique alors le raisonnement à la paire correspondante : (a, b) , (b, c) ou (c, a) .

Résultat

Au moins une des trois expressions est divisible par 8.

Deux outils réunis. La factorisation révèle les facteurs pairs ; le principe des tiroirs garantit une paire de même parité. Le signe de l'expression n'a pas d'importance pour la divisibilité.

PROBLÈME GUIDÉ · 7

Retrouver deux coefficients

Énoncé

Le polynôme $y^2 + 3y + 6$ est un facteur de

$$P(y) = y^4 - 6y^3 + my^2 + ny + 36.$$

Déterminer les constantes m et n .

Idée clé. Écrire le facteur manquant, puis comparer seulement les coefficients nécessaires.

1. Trouver la forme du second facteur

Le degré de P est 4 ; le facteur donné a le degré 2. Le quotient est donc un polynôme de degré 2. Son coefficient dominant vaut 1, car celui de P vaut 1.

Son terme constant vaut 6, puisque $6 \times 6 = 36$. On peut donc écrire

$$P(y) = (y^2 + 3y + 6)(y^2 + ty + 6).$$

2. Utiliser le coefficient de y^3

Ce coefficient vaut $t + 3$. D'où

$$t + 3 = -6, \quad t = -9.$$

Le second facteur est $y^2 - 9y + 6$.

3. Lire les deux coefficients demandés

Terme	Contributions	Coefficient
y^2	$6 + 6 + 3(-9)$	$m = -15$
y	$3 \cdot 6 + 6(-9)$	$n = -36$

Résultat

$m = -15$ et $n = -36$.

Vérification

$$(y^2 + 3y + 6)(y^2 - 9y + 6) = y^4 - 6y^3 - 15y^2 - 36y + 36.$$

Idée clé. Le coefficient dominant et le terme constant donnent souvent une grande partie du facteur manquant.

PROBLÈME GUIDÉ · 8

Un polynôme du quatrième degré

Énoncé

Factoriser complètement, pour des réels a, b, x ,

$$E = x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2.$$

Idée clé. Construire le carré $[x^2 - (a^2 + b^2)]^2$.

1. Ajouter et retirer le terme manquant

$$\begin{aligned} E &= [x^2 - (a^2 + b^2)]^2 \\ &\quad + (a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2. \end{aligned}$$

Les deux derniers carrés donnent

$$(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2 = -4a^2b^2.$$

Ainsi $E = [x^2 - (a^2 + b^2)]^2 - (2ab)^2$.

2. Faire apparaître deux nouveaux carrés

$$\begin{aligned} E &= (x^2 - a^2 - b^2 + 2ab)(x^2 - a^2 - b^2 - 2ab) \\ &= [x^2 - (a - b)^2][x^2 - (a + b)^2]. \end{aligned}$$

3. Factoriser encore chaque différence de carrés**Résultat**

$$E = (x - a + b)(x + a - b)(x - a - b)(x + a + b).$$

Un exemple pour voir la structure

Avec $a = 2$ et $b = 1$,

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3).$$

Piège à éviter. La première factorisation n'est pas toujours la dernière. Après chaque étape, regarder si les facteurs obtenus sont eux-mêmes factorisables.

PROBLÈME GUIDÉ · 9

Regrouper pour créer un facteur

Énoncé reconstitué

Factoriser l'expression

$$E = (ab + 1)(ab + a + b + 1) + ab.$$

La transcription du dernier exemple est ambiguë. Cette écriture reconstitue le regroupement décrit et conduit à une identité vérifiée.

Idée clé. Isoler un terme dans la grande parenthèse pour faire apparaître deux fois le même facteur.

1. Séparer le terme a

$$ab + a + b + 1 = (ab + b + 1) + a.$$

On obtient

$$E = (ab + 1)(ab + b + 1) + a(ab + 1) + ab.$$

2. Regrouper les deux derniers termes

$$a(ab + 1) + ab = a[(ab + 1) + b] = a(ab + b + 1).$$

Le facteur $ab + b + 1$ apparaît maintenant deux fois.

3. Sortir le facteur commun

$$\begin{aligned} E &= (ab + 1)(ab + b + 1) + a(ab + b + 1) \\ &= (ab + b + 1)(ab + a + 1). \end{aligned}$$

Résultat

$$E = (ab + a + 1)(ab + b + 1).$$

Une identité plus générale

Le même raisonnement établit

$$t(t + a + b) + ab = (t + a)(t + b).$$

Il suffit ensuite de prendre $t = ab + 1$. Cette forme générale explique pourquoi le regroupement fonctionne.

Idée clé. Avant de tout développer, essayer de faire apparaître une parenthèse commune.

OUTIL ARITHMÉTIQUE

Reconnaître un nombre premier

Le critère pratique

Un entier $N \geq 2$ est premier si aucun nombre premier $p \leq \sqrt{N}$ ne le divise. La borne est inclusive : il faut tester $p = \sqrt{N}$ lorsque c'est un entier premier.

La preuve en trois lignes

Si N est composé, alors $N = uv$ avec $1 < u \leq v$. On a $u^2 \leq uv = N$, donc $u \leq \sqrt{N}$. Le nombre u possède un diviseur premier $p \leq u$, qui divise aussi N .

Des facteurs qui vont par paires

$$42 = 1 \cdot 42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7.$$

Dans chaque paire, au moins un facteur est inférieur ou égal à $\sqrt{42}$. Pour un carré parfait, les deux facteurs peuvent être égaux : $64 = 8 \cdot 8$ et $144 = 12 \cdot 12$.

Trois exemples

N	Premiers à tester	Conclusion
57	2, 3, 5, 7	$57 = 3 \cdot 19$: composé. On s'arrête dès le diviseur 3.
59	2, 3, 5, 7	Aucun ne divise 59 : premier.
67	2, 3, 5, 7	Aucun ne divise 67 : premier.

Ne pas confondre les deux questions

Carré parfait : peut-on écrire $N = k^2$ avec k entier ?

Nombre premier : les seuls diviseurs positifs de N sont-ils 1 et N ?

Le nombre 57 n'est ni premier ni un carré. Le nombre 59 est premier, mais n'est pas un carré.

Piège à éviter. Le nombre 1 n'est pas premier. Ne pas confondre « aucun petit diviseur premier » avec « aucun diviseur » : tout entier positif se divise lui-même.

FICHE MÉTHODE

Comment choisir la transformation ?

1. Observer avant de calculer

Chercher un facteur commun, des nombres proches, des carrés ou une expression répétée. Cette observation évite souvent un long développement.

Ce que l'on voit	Ce que l'on essaie
Une même puissance dans tous les termes	Sortir la plus petite puissance commune.
Deux nombres autour d'un même milieu	Utiliser $(m - h)(m + h) = m^2 - h^2$.
$x^4 + 4y^4$	Compléter $(x^2 + 2y^2)^2$.
$x^4 + x^2 + 1$	Compléter $(x^2 + 1)^2$.
Un produit de nombreuses parenthèses	Factoriser un terme général, puis observer les annulations.
Une somme de cubes	Isoler les cubes purs et les termes $3AB(A + B)$.
Une relation de divisibilité	Factoriser, puis étudier les facteurs : parité, multiples, bornes.
Un facteur polynomial déjà connu	Écrire le quotient avec des coefficients inconnus.

2. Vérifier ce que l'on a réellement prouvé

Pour une identité, conserver l'égalité à chaque ligne. Pour un nombre composé, montrer que les facteurs sont entiers et supérieurs à 1. Pour une liste de diviseurs à tester, justifier la borne.

Un bon entraînement. Après une solution, cacher les calculs et retrouver uniquement l'idée de départ. Puis refaire le problème avec d'autres nombres.

ENTRAÎNEMENT SUPPLÉMENTAIRE

Huit exercices pour pratiquer

Exercices ajoutés au cours. Les corrigés sont séparés, pages 20 et 21.

1 • Les bases

Factoriser $12x^3 - 18x^2$ et $x^2 - 7x + 12$.

2 • Calcul mental

Calculer $\sqrt{9997 \times 10003 + 9}$ sans développer le grand produit.

3 • Sophie Germain

Factoriser $x^4 + 324$, puis en déduire une décomposition de $5^4 + 324$ en facteurs premiers.

4 • Quatre entiers consécutifs

Calculer $\sqrt{20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 + 1}$ sans calculatrice.

5 • Un produit à simplifier

Calculer

$$Q = \frac{(1 \cdot 4 + 2)(3 \cdot 6 + 2) \cdots (19 \cdot 22 + 2)}{(1 \cdot 6 + 6)(3 \cdot 8 + 6) \cdots (17 \cdot 22 + 6)}.$$

Les premiers nombres parcourent les entiers impairs indiqués, de 2 en 2.

6 • Un facteur connu

On sait que $x^2 - x + 3$ divise $x^4 + 2x^3 + mx^2 + nx + 9$. Déterminer m et n .

7 • Du produit aux solutions

Factoriser $x^4 - 26x^2 + 25$, puis résoudre $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ dans les réels.

8 • Quand le nombre est-il premier ?

Déterminer tous les entiers $n \geq 1$ pour lesquels $n^4 + n^2 + 1$ est un nombre premier.

Progression. Les exercices 1 à 4 entraînent les identités ; les exercices 5 à 8 demandent de les utiliser dans un raisonnement.

CORRIGÉS · 1/2

Exercices 1 à 4

1 · Mettre en évidence et reconnaître

Le facteur commun est $6x^2$:

$$12x^3 - 18x^2 = 6x^2(2x - 3).$$

Pour le trinôme, les nombres -3 et -4 ont pour somme -7 et pour produit 12 :

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

2 · Utiliser la valeur centrale

$$\begin{aligned} 9997 \times 10003 + 9 &= (10000 - 3)(10000 + 3) + 9 \\ &= 10000^2 - 9 + 9 = 10000^2. \end{aligned}$$

La racine carrée demandée vaut donc $\boxed{10000}$.

3 · Reconnaître $324 = 4 \cdot 3^4$

L'identité de Sophie Germain donne

$$x^4 + 324 = (x^2 - 6x + 18)(x^2 + 6x + 18).$$

Pour $x = 5$,

$$5^4 + 324 = (25 - 30 + 18)(25 + 30 + 18) = \boxed{13 \cdot 73}.$$

Les nombres 13 et 73 sont premiers : pour 73, seuls les premiers 2, 3, 5 et 7 sont à tester, et aucun ne le divise.

4 · Reconnaître les quatre entiers consécutifs

En utilisant l'identité de la page 6 avec $n = 20$,

$$20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 + 1 = (20^2 + 3 \cdot 20 + 1)^2 = 461^2.$$

La racine carrée demandée vaut donc $\boxed{461}$.

Idée clé. Dans ces quatre exercices, l'essentiel consiste à reconnaître la forme avant de faire les opérations.

CORRIGÉS · 2/2

Exercices 5 à 8

5 · Simplifier les facteurs intérieurs

On utilise $n(n+3)+2=(n+1)(n+2)$ et $n(n+5)+6=(n+2)(n+3)$. Ainsi

$$Q = \frac{2 \cdot 3 \cdots 20 \cdot 21}{3 \cdot 4 \cdots 20} = \boxed{42}.$$

6 · Identifier le quotient

Le coefficient dominant et le terme constant imposent

$$x^4 + 2x^3 + mx^2 + nx + 9 = (x^2 - x + 3)(x^2 + tx + 3).$$

Le coefficient de x^3 donne $t-1=2$, donc $t=3$. Alors

$$m = 3 + 3 - 3 = \boxed{3}, \quad n = -3 + 9 = \boxed{6}.$$

7 · Factoriser en deux étapes

En posant $X = x^2$, on reconnaît $X^2 - 26X + 25 = (X-1)(X-25)$. Donc

$$x^4 - 26x^2 + 25 = (x-1)(x+1)(x-5)(x+5).$$

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul. Les solutions sont $\boxed{\{-5, -1, 1, 5\}}$.

8 · Examiner la taille des facteurs

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1).$$

Pour $n=1$, on obtient 3, qui est premier. Pour $n \geq 2$,

$$n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1 \geq 3, \quad n^2 + n + 1 \geq 7.$$

Les deux facteurs sont donc supérieurs à 1 : le nombre est composé. Le seul entier recherché est $\boxed{n=1}$.

Piège à éviter. Après une factorisation, adapter la conclusion à la question : simplifier un quotient, résoudre une équation ou vérifier que les facteurs sont supérieurs à 1.

À GARDER SOUS LES YEUX

La fiche de synthèse

Quatre identités essentielles

$$\begin{aligned}A^2 - B^2 &= (A - B)(A + B), \\x^4 + 4y^4 &= (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2), \\x^4 + x^2 + 1 &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1), \\1 + n(n + 1)(n + 2)(n + 3) &= (n^2 + 3n + 1)^2.\end{aligned}$$

Les neuf problèmes guidés : résultats

- 1 2023.
- 2 Plus grand facteur premier : 421.
- 3 $N = 45 \cdot 9^{10}$.
- 4 $E = 3abxy(a + b)(x + y)$.
- 5 $R = 102$.
- 6 Au moins une expression est divisible par 8.
- 7 $m = -15$ et $n = -36$.
- 8 $(x - a + b)(x + a - b)(x - a - b)(x + a + b)$.
- 9 $(ab + a + 1)(ab + b + 1)$, pour l'énoncé reconstitué.

Le réflexe central

Une expression difficile devient souvent plus simple quand on fait apparaître un **facteur commun**, un **carré** ou une **parenthèse répétée**.

Avant de conclure : vérifier les signes, les exposants, les facteurs égaux à 1 et les conditions de l'énoncé. Une solution courte doit rester une solution justifiée.

Maths Olympiad · Factorisation : méthodes et applications.

Adaptation pédagogique du fichier fourni. Aucun prérequis de trigonométrie n'est nécessaire.

Une idée claire. Un raisonnement complet.