

# MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

## Nombres entiers et raisonnement

Comprendre les règles.

Apprendre à chercher et à démontrer.

**Toutes les notions mathématiques  
et tous les problèmes du cours.**

### UN PARCOURS EXPLIQUÉ PAS À PAS

Les propriétés, leur sens et leurs illustrations géométriques

12 problèmes principaux avec résolutions complètes

Les questions de démonstration et le devoir final résolus

Des encadrés « Méthode », « Astuce » et « Piège »

Les repères vidéo et les formules de la transcription vérifiées

$$xy = x + y \iff (x - 1)(y - 1) = 1$$

$$2^x + 1 = y^2 \quad x^n = y^{n-1} + z^{n+1}$$

**Auteur : Maths Olympiad**

## LIRE ET TRAVAILLER

# Un cours à comprendre, pas à réciter

Le contenu mathématique du transcript, réorganisé et explicité.

Ce livret reprend les notions, les exemples structurants et les douze problèmes du fichier. Les répétitions orales, les encouragements et les anecdotes sont condensés. Les démonstrations sont rédigées en français avec toutes les conditions nécessaires. Ce n'est pas une traduction mot à mot des interventions.

**CONVENTION ESSENTIELLE**

Dans ce livret,  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$  et  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ . Dans la vidéo, « natural numbers » désigne les entiers strictement positifs. Les problèmes concernés seront donc écrits dans  $\mathbb{N}^*$ .

## Un parcours progressif

| Partie                                                | Page |
|-------------------------------------------------------|------|
| Compter, introduire zéro et les entiers négatifs      | 4    |
| Raisonner par l'absurde                               | 6    |
| Comprendre les propriétés des opérations              | 7    |
| Distributivité, signes et transformations d'équations | 9    |
| Examiner la justification trigonométrique proposée    | 12   |
| Préparer les outils de recherche dans les entiers     | 13   |
| Les douze problèmes du cours                          | 14   |
| Le devoir final : toutes les combinaisons possibles   | 33   |
| Tous les énoncés pour s'entraîner à nouveau           | 35   |
| Réponses, méthodes et bilan                           | 37   |
| Source et corrections de transcription                | 39   |

## Comment utiliser une résolution

1. Lire l'énoncé, préciser le domaine et chercher quelques minutes.
2. Lire seulement l'idée de départ ; essayer de poursuivre seul.
3. Étudier les étapes en expliquant chaque égalité ou inégalité.
4. Cacher la solution et reconstruire la preuve, y compris la vérification finale.

**LES COMPLÉMENTS SONT SIGNALÉS**

Une seconde méthode, une généralisation ou une précision absente de l'oral est annoncée comme complément pédagogique. Les questions laissées ouvertes par l'enseignant reçoivent ici une réponse développée.

## SE REPÉRER

## Les douze problèmes et leur idée clé

Les repères renvoient au début de l'énoncé ou de sa discussion dans la vidéo.

- |                                                                               |              |
|-------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| <b>1. <math>xy = x + y</math></b>                                             | <b>p. 14</b> |
| 00:51:43 / Factoriser ; produit égal à 1.                                     |              |
| <b>2. <math>xy - x + y = 3</math></b>                                         | <b>p. 15</b> |
| 00:58:45 / Compléter un produit ; diviseurs.                                  |              |
| <b>3. <math>xy + 2x - 2y = 2031</math></b>                                    | <b>p. 17</b> |
| 01:04:34 / Reconstituer ; exploiter un premier.                               |              |
| <b>4. <math>x^2 + y^2 + xy(x + y + 2) = 6</math></b>                          | <b>p. 19</b> |
| 01:11:14 / Reconnaître une somme et un carré.                                 |              |
| <b>5. <math>xy - x - y + 1 = 0</math></b>                                     | <b>p. 21</b> |
| 01:19:30 / Produit nul ; infinité de solutions.                               |              |
| <b>6. <math>5xy + 3z = 14</math></b>                                          | <b>p. 22</b> |
| 01:24:07 / Borner ; examiner des cas finis.                                   |              |
| <b>7. <math>2xy + 4z = zx^2 + 4zy^2</math></b>                                | <b>p. 23</b> |
| 01:28:52 / Borner grâce à un carré.                                           |              |
| <b>8. <math>2^x + 1 = y^2</math></b>                                          | <b>p. 25</b> |
| 01:41:28 / Puissances de 2 ; parité ; signes.                                 |              |
| <b>9. <math>x^3 = y^2 + z^4</math></b>                                        | <b>p. 28</b> |
| 01:58:53 / Construire un exemple.                                             |              |
| <b>10. <math>x^n = y^{n-1} + z^{n+1}</math></b>                               | <b>p. 29</b> |
| 02:02:57 / Construire une famille explicite.                                  |              |
| <b>11. Deux quotients de dénominateur <math>a + b + c</math></b>              | <b>p. 31</b> |
| 02:06:05 / Identité remarquable ; entier.                                     |              |
| <b>12. Les quotients <math>(3a + 4b)/5</math> et <math>(4a - 3b)/5</math></b> | <b>p. 32</b> |
| 02:11:02 / Combinaison entière.                                               |              |

## NE PAS OUBLIER LES QUESTIONS DU COURS

Le raisonnement par l'absurde est expliqué p. 6. L'associativité de la multiplication est illustrée par un pavé droit p. 8. La question sur la « preuve » trigonométrique est traitée p. 12. Le devoir donné à 02:14:20 est résolu p. 33.

Le problème 3 est reconstitué à partir du calcul détaillé de l'enseignant. La transcription hésite sur le coefficient de  $y$  ; la factorisation donnée permet de fixer sans ambiguïté l'énoncé utilisé ici.

## 01 / LES NOMBRES

# Des quantités aux entiers relatifs

Repères vidéo : 00:02:50 à 00:19:33.

## 1. Compter des objets

Pour compter une collection non vide, on utilise 1,2,3,... Trois objets correspondent au nombre 3, indépendamment de leur forme. Le nombre décrit la quantité ; le chiffre est un signe utilisé pour écrire ce nombre. Ainsi, 2031 est un nombre écrit avec quatre chiffres. Le récit introductif du cours sert à faire sentir un besoin : compter ce que l'on possède, ce que l'on utilise et ce qui reste. Il est repris ici comme une situation pédagogique, sans prétendre reconstituer l'histoire de l'humanité ou celle des découvertes mathématiques.

### LES TROIS ENSEMBLES DU LIVRET

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \\ \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

$\mathbb{N}^*$  contient les entiers strictement positifs.  $\mathbb{N}$  contient aussi zéro.  $\mathbb{Z}$  contient les entiers positifs, négatifs et zéro.

## 2. Pourquoi introduire zéro ?

Si l'on dispose de cinq objets et qu'on les retire tous, il n'en reste aucun :  $5 - 5 = 0$ . Le nombre zéro décrit cette quantité nulle. Il n'est ni strictement positif ni strictement négatif.

## 3. Pourquoi introduire les nombres négatifs ?

Les entiers positifs ne suffisent pas pour rendre possible toute soustraction. Par exemple,  $10 - 12 = -2$ . Une dette de 2 unités se représente par  $-2$  ; un avoir de 2 unités par  $+2$ .

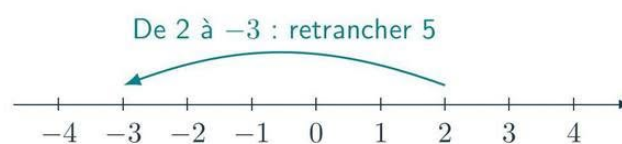
### LES EXEMPLES DU COURS

$5+3=8$  : on réunit deux quantités.

$7-2=5$  : on retire une quantité disponible.

$10-12=-2$  et  $7-10=-3$  : le résultat traduit un manque.

$5-10=-5$  : la soustraction est possible dans  $\mathbb{Z}$ , même si elle ne donne pas un entier naturel.



### PIÈGE

Dans les problèmes de la vidéo, « naturel » signifie strictement positif. Autoriser zéro sans le remarquer peut changer complètement l'ensemble des solutions.

## 01 / LES NOMBRES

## Lire les ensembles et les conditions

Repères vidéo : 00:18:05 à 00:19:33 ; précisions de notation.

## 1. Appartenance et non-appartenance

Le symbole  $\in$  se lit « appartient à ». Le symbole  $\notin$  se lit « n'appartient pas à ». Écrire  $x \in \mathbb{Z}$  signifie que  $x$  est un entier relatif ; ce n'est pas une équation supplémentaire, mais une contrainte essentielle.

| Écriture                                     | Lecture                                       | Raison                      |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------|
| $2 \in \mathbb{N}^*$                         | 2 est strictement positif                     | $2 = 1 + 1$                 |
| $-3 \notin \mathbb{N}^*$                     | -3 n'est pas positif                          | $-3 < 0$                    |
| $-3 \in \mathbb{Z}$                          | -3 est un entier relatif                      | pas de partie fractionnaire |
| $-\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$             | $-\frac{1}{3}$ n'est pas entier               | il est entre -1 et 0        |
| $0 \in \mathbb{N}$ , $0 \notin \mathbb{N}^*$ | zéro est autorisé seulement dans $\mathbb{N}$ | convention du livret        |

## 2. Un couple n'est pas une valeur isolée

Une solution de  $xy = x + y$  est un couple ordonné  $(x, y)$ . Il faut que les deux valeurs satisfassent la même équation en même temps. Si trois inconnues interviennent, la solution est un triplet  $(x, y, z)$ .

## VÉRIFIER UN COUPLE

Pour  $(x, y) = (2, 2)$ , le membre gauche vaut  $xy = 4$  et le membre droit vaut  $x + y = 4$ . Le couple convient.

Pour  $(x, y) = (1, 2)$ , les membres valent respectivement 2 et 3. Ce couple ne convient pas, même si ses deux coordonnées sont des entiers.

## 3. Le domaine fait partie du problème

Dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $xy = 1$  admet une infinité de couples : pour chaque  $x \neq 0$ , on peut prendre  $y = 1/x$ . Dans  $\mathbb{Z}$ , seuls  $(1, 1)$  et  $(-1, -1)$  conviennent. Dans  $\mathbb{N}^*$ , seul  $(1, 1)$  reste autorisé.

## LES CONTRAINTES QUE L'ON UTILISERA

Si  $x \in \mathbb{N}^*$ , alors  $x \geq 1$ . Si  $x \in \mathbb{Z}$ , alors  $x^2 \in \mathbb{N}$ .

Il n'existe aucun entier strictement compris entre deux entiers consécutifs.

Un quotient  $A/B$  ne peut être utilisé que lorsque  $B \neq 0$ .

## ASTUCE

En tête de chaque résolution, recopier le domaine :  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  ou  $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ . Cette ligne explique ensuite pourquoi certaines valeurs sont éliminées.

## 01 / LES NOMBRES

# Pourquoi il n'existe pas de plus grand entier

Repères vidéo : 00:07:39 à 00:11:44.

### La question du cours

Peut-on trouver un entier naturel plus grand que tous les autres ? Proposer un nombre très long ne résout pas le problème : on peut toujours lui ajouter 1.

#### PROPRIÉTÉ

L'ensemble  $\mathbb{N}^*$  n'a pas de plus grand élément.

### Une démonstration par l'absurde

1. Supposons le contraire. Il existe un plus grand entier strictement positif, que l'on note  $M$ .
2. Construisons un autre entier. Puisque  $M$  est entier,  $M + 1$  est entier ; puisque  $M \geq 1$ , on a aussi  $M + 1 \geq 1$ .
3. Comparons. On a  $M + 1 > M$ .
4. Repérons la contradiction.  $M + 1$  appartient au même ensemble que  $M$  tout en étant plus grand, ce qui contredit le choix de  $M$  comme plus grand élément.
5. Concluons. L'hypothèse est fausse : il n'existe pas de plus grand entier strictement positif.

### Le mécanisme général

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, on peut supposer qu'elle est vraie puis en déduire une impossibilité. Pour prouver une proposition  $P$  par l'absurde, on suppose sa négation, on raisonne correctement, puis on obtient une contradiction.

#### CE QUI EST CONTRADICTOIRE ICI

«  $M$  est supérieur ou égal à tout entier de  $\mathbb{N}^*$  » et «  $M + 1$  est un entier de  $\mathbb{N}^*$  strictement supérieur à  $M$  » ne peuvent pas être vraies simultanément.

### Un exemple n'est pas une preuve générale

Constater que  $100 + 1 > 100$  illustre l'idée, mais ne suffit pas à traiter tous les entiers. Le symbole  $M$  permet d'argumenter pour n'importe quel candidat.

#### PIÈGE

L'infini n'est pas un entier naturel que l'on pourrait choisir comme « dernier nombre ». L'absence de dernier entier signifie que le processus « ajouter 1 » ne s'arrête jamais.

### Question de contrôle

Existe-t-il un plus petit entier relatif ? Non. Si  $m \in \mathbb{Z}$  était le plus petit,  $m - 1 \in \mathbb{Z}$  serait encore plus petit. Ce raisonnement, ajouté pour s'entraîner, reproduit exactement le mécanisme précédent.

## 02 / LES OPÉRATIONS

## Addition : ordre, regroupement et zéro

Repères vidéo : 00:19:35 à 00:27:46.

## TROIS PROPRIÉTÉS À DISTINGUER

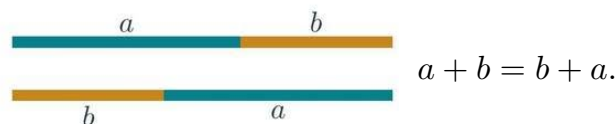
Pour tous entiers  $a, b, c$  :

$$a+b=b+a, \quad (a+b)+c=a+(b+c), \quad a+0=0+a=a.$$

Ce sont respectivement la commutativité, l'associativité et l'existence de l'élément neutre 0 pour l'addition.

## 1. Changer l'ordre : la commutativité

Deux objets auxquels on ajoute un objet donnent la même quantité qu'un objet auquel on en ajoute deux :  $2 + 1 = 1 + 2 = 3$ . Géométriquement, juxtaposer deux segments de longueurs positives  $a$  et  $b$  donne une longueur totale indépendante de leur ordre.



## 2. Changer le regroupement : l'associativité

L'exemple du cours est  $(2 + 1) + 1 = 2 + (1 + 1) = 4$ . On ne change pas l'ordre des trois termes ; on change la somme calculée en premier. Trois segments successifs de longueurs  $a, b, c$  occupent la même longueur totale, quel que soit le regroupement.

## 3. Ajouter zéro

Ajouter zéro ne modifie pas la quantité :  $3 + 0 = 3$ . Dire que 0 est un élément neutre précise cette propriété. Ce rôle est différent de celui de 0 dans une multiplication, où il annule le produit.

## APPLICATION : CALCULER EN REGROUPANT

$$27 + 18 + 73 + 2 = (27 + 73) + (18 + 2) = 100 + 20 = 120.$$

On utilise la commutativité pour rapprocher les termes intéressants, puis l'associativité pour les regrouper.

## PIÈGE

La soustraction n'est ni commutative ni associative :  $5 - 3 = 2$  alors que  $3 - 5 = -2$  ;  $(8 - 3) - 2 = 3$  alors que  $8 - (3 - 2) = 7$ .

Les dessins et les petits exemples font comprendre les propriétés. Dans ce cours, les lois usuelles des entiers sont admises comme bases ; un exemple numérique isolé ne constitue pas une démonstration pour tous les entiers.

## 02 / LES OPÉRATIONS

## Multiplier, regrouper et interpréter un volume

Repères vidéo : 00:34:59 à 00:43:13.

## 1. La multiplication comme addition répétée

Pour un entier  $m \geq 1$ ,  $m \times a$  représente une somme de  $m$  termes égaux à  $a$ . Ainsi  $3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$ , tandis que  $2 \times 3 = 3 + 3 = 6$ . Cette interprétation vaut pour un nombre entier positif de répétitions.

LES LOIS DE LA MULTIPLICATION DANS  $\mathbb{Z}$ 

$$ab = ba, \quad (ab)c = a(bc), \quad a \times 1 = 1 \times a = a, \\ a \times 0 = 0 \times a = 0.$$

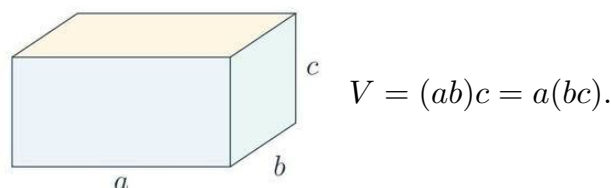
Le nombre 1 est neutre pour la multiplication. Le nombre 0 est absorbant.

## 2. Pourquoi un rectangle aide à comprendre

Un rectangle de côtés positifs  $a$  et  $b$  a pour aire  $ab$ . Le faire pivoter échange les côtés sans changer son aire : on visualise  $ab = ba$ . Un quadrillage de trois rangées de deux points se lit aussi comme deux colonnes de trois points.

## 3. La question laissée au lecteur : trois facteurs

L'enseignant propose d'interpréter  $(ab)c = a(bc)$  par le volume d'un pavé droit. Voici la réponse développée.



Une face de côtés  $a, b$  a pour aire  $ab$  ; multiplier par la hauteur  $c$  donne  $(ab)c$ . Choisir comme base une face de côtés  $b, c$  donne une aire  $bc$  et une hauteur  $a$ , donc  $a(bc)$ . Les deux calculs mesurent le même pavé.

## LA PORTÉE DU DESSIN

Le dessin représente des longueurs positives. Il illustre la propriété dans ce cadre ; il ne représente pas un pavé de longueur négative. L'extension aux entiers relatifs repose sur les règles algébriques.

Contrôle rapide :  $(2 \times 3) \times 4 = 6 \times 4 = 24$  et  $2 \times (3 \times 4) = 2 \times 12 = 24$ .

## 02 / LES OPÉRATIONS

## Distributivité : le pont entre somme et produit

Repères vidéo : 00:27:50 à 00:34:12.

## LA PROPRIÉTÉ

Pour tous entiers  $a, b, c$ ,

$$a(b + c) = ab + ac.$$

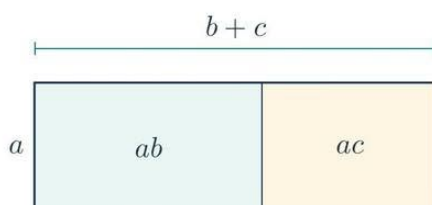
On peut aussi écrire  $(b + c)a = ba + ca$ . La multiplication se distribue sur l'addition.

## 1. L'exemple numérique du cours

$$2(3 + 4) = 2 \times 7 = 14, \quad 2 \times 3 + 2 \times 4 = 6 + 8 = 14.$$

Les parenthèses sont indispensables :  $2 \times 3 + 4 = 10$  est un autre calcul.

## 2. La preuve géométrique pour des longueurs positives

L'aire du grand rectangle vaut  $a(b + c)$ . La somme des aires des deux petits rectangles vaut  $ab + ac$ . Les deux petits rectangles recouvrent exactement le grand sans se chevaucher : les deux expressions sont égales.

## 3. Développer et factoriser sont deux sens de lecture

## LES DEUX GESTES

Développer :  $5(x + 2) = 5x + 10$ .Factoriser :  $xy + 2x = x(y + 2)$ .Dans le second cas, on repère le facteur  $x$  commun aux deux termes. C'est ce geste qui rendra possibles plusieurs problèmes du cours.

## 4. Lorsque l'un des termes est négatif

La soustraction s'écrit comme l'addition d'un opposé. Ainsi

$$a(b - c) = a(b + (-c)) = ab - ac.$$

Le signe moins porte sur tout le terme soustrait. Par exemple,  $-2(y + 2) = -2y - 4$ .

## PIEGE

Dans  $a(b + c)$ , le facteur  $a$  doit multiplier les deux termes. Écrire  $ab + c$  perd une multiplication. Au moment de factoriser, vérifier en redéveloppant.

## 02 / LES OPÉRATIONS

## Démontrer la règle des signes

Repères vidéo : 00:43:16 à 00:48:36.

## 1. Un positif multiplié par un négatif

L'exemple du cours est  $3 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$ . On additionne trois fois une dette de quatre unités : la dette totale vaut douze unités. Pour  $a, b > 0$ , on obtient ainsi  $a(-b) = -ab$ . Par commutativité,  $(-a)b = -ab$  également.

## 2. Un négatif multiplié par un négatif

## DEMONSTRATION PAR DISTRIBUTIVITE

On sait que  $b + (-b) = 0$ . Multiplions par  $-a$  :

$$(-a)(b + (-b)) = (-a) \times 0 = 0.$$

La distributivité donne

$$(-a)b + (-a)(-b) = 0.$$

Le premier produit vaut  $-ab$ . Donc

$$-ab + (-a)(-b) = 0.$$

Ajoutons  $ab$  aux deux membres :

$$\boxed{(-a)(-b) = ab}.$$

Le résultat n'est pas une règle inventée arbitrairement : il permet de conserver la distributivité et le rôle de zéro lorsque l'on étend la multiplication aux nombres négatifs.

## 3. Le tableau complet

| Premier facteur | Second facteur | Signe du produit |
|-----------------|----------------|------------------|
| positif         | positif        | positif          |
| positif         | négatif        | négatif          |
| négatif         | positif        | négatif          |
| négatif         | négatif        | positif          |

Si un facteur est nul, le produit est nul : ce cas s'ajoute aux quatre lignes.

## PIÈGE

$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$ , tandis que  $-3^2 = -(3^2) = -9$ . Les parenthèses décident si le signe moins fait partie de la base élevée au carré.

Question résolue : pourquoi  $a \times 0 = 0$  est-il compatible avec la distributivité ? Écrire  $a(0 + 0) = a0 + a0$  donne  $a0 = a0 + a0$ . En retranchant  $a0$  aux deux membres, on obtient  $0 = a0$ .

## 02 / LES OPÉRATIONS

## Transformer une égalité sans perdre de solutions

Repères vidéo : 00:47:29 à 00:48:30 ; outil utilisé dans tous les problèmes.

### 1. Le véritable sens de « passer de l'autre côté »

L'expression « un terme change de signe lorsqu'il passe de l'autre côté » est un raccourci. En réalité, on effectue la même opération aux deux membres.

#### EXEMPLE DÉTAILLÉ

Partons de  $u - 7 = 12$ . Ajouter 7 aux deux membres donne

$$u - 7 + 7 = 12 + 7, \quad \text{donc } u = 19.$$

De même,  $xy = x + y$  devient  $xy - x - y = 0$  en soustrayant  $x + y$  aux deux membres.

### 2. Les transformations réversibles

Ajouter ou retrancher un même nombre conserve exactement les solutions. Multiplier ou diviser par un même nombre non nul aussi. Une transformation réversible s'écrit avec  $\iff$ .

$$A = B \iff A + C = B + C, \quad A = B \iff kA = kB \quad (k \neq 0).$$

### 3. Pourquoi une division peut être dangereuse

De  $xy = x + y$ , diviser par  $xy$  impose que  $x$  et  $y$  soient non nuls. Cette division ferait disparaître le couple  $(0,0)$  si ce cas n'était pas étudié avant. La factorisation, au contraire, permet de traiter les valeurs nulles sans les perdre.

#### ANNULER UN FACTEUR

Dans  $x(x - 1) = 0$ , diviser par  $x$  fait perdre  $x = 0$ . La bonne conclusion est :  $x = 0$  ou  $x - 1 = 0$ , donc  $x \in \{0, 1\}$ .

### 4. Pour les inégalités, le signe compte

Si  $A \leq B$  et  $k > 0$ , alors  $kA \leq kB$ . Si  $k < 0$ , le sens s'inverse :  $kA \geq kB$ . Avant de multiplier une inégalité par un dénominateur, on doit donc connaître son signe.

#### LA STRUCTURE D'UNE SOLUTION COMPLETE

Nécessité : toute solution du problème doit appartenir à la liste de candidats obtenue.

Vérification : chaque candidat conservé doit satisfaire l'énoncé initial et le domaine.

Les deux étapes garantissent que la réponse est complète et correcte.

Réflexe : ne jamais confondre « voici une solution » et « voici toutes les solutions ». Les problèmes d'existence et les problèmes de résolution complète n'ont pas le même objectif.

## 02 / LES OPÉRATIONS

### La question sur la « preuve » trigonométrique

Repères vidéo : 00:48:40 à 00:50:49. Discussion proposée par l'enseignant.

#### 1. Le calcul proposé dans le cours

Un élève propose d'utiliser  $\cos \pi = -1$  et la formule

$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B).$$

En prenant  $A = B = \pi$ , il écrit

$$(-1)(-1) = \cos \pi \cos \pi = \frac{\cos(2\pi) + \cos 0}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1.$$

La transcription automatique déforme la phrase sur les cosinus. Les valeurs correctes sont bien  $\cos(2\pi) = 1$  et  $\cos 0 = 1$ .

#### 2. Ce calcul est-il correct ?

Oui, si l'on dispose déjà des identités trigonométriques usuelles et de l'arithmétique réelle. Chaque égalité affichée est alors correcte. Le calcul confirme le cas particulier  $(-1)(-1) = 1$ .

#### 3. Est-ce une justification élémentaire indépendante ?

Ce n'est pas la démonstration à choisir pour construire la règle des signes au niveau des entiers. Les identités trigonométriques sont habituellement établies dans un cadre où les règles de calcul avec les signes sont déjà connues. De plus, vérifier le seul produit  $(-1)(-1)$  ne remplace pas à lui seul l'explication générale de  $(-a)(-b) = ab$ . Pour une justification fondatrice, le raisonnement par distributivité de la page 10 est direct et adapté.

#### REPONSE A LA QUESTION LAISSEE OUVERTE

Le résultat et le calcul sont justes dans le cadre habituel. Mais il faut examiner les résultats utilisés pour les justifier. Si leur démonstration emploie déjà la règle que l'on cherche à établir, on ne dispose pas d'une preuve indépendante de cette règle.

#### 4. La leçon de méthode

Dans une démonstration, il ne suffit pas que les lignes « tombent juste ». Il faut savoir quelles propriétés sont admises, quelles propriétés ont déjà été établies et quelle affirmation est précisément à démontrer.

#### ASTUCE

Un exemple éclaire une idée. Une vérification contrôle un cas. Une démonstration générale explique pourquoi une affirmation vaut pour tous les objets annoncés.

Pour lire cette page : aucun apprentissage complet de la trigonométrie n'est requis pour la suite. Ce passage restitue une question du cours sur la logique des preuves ; les problèmes suivants portent sur les entiers.

## 03 / PRÉPARER LA RECHERCHE

## Les petits faits qui résolvent de grands problèmes

Outils explicités au fil des exemples du fichier.

## 1. La stabilité des entiers

La somme, la différence et le produit de deux entiers sont des entiers. Ainsi, si  $x, y \in \mathbb{Z}$ , alors  $x - 1$ ,  $y + 2$  et  $(x - 1)(y + 2)$  sont entiers. En revanche, un quotient d'entiers n'est pas toujours entier :  $3/2 \notin \mathbb{Z}$ .

PRODUITS PARTICULIERS DANS  $\mathbb{Z}$ 

$uv = 1$  donne  $(u, v) = (1, 1)$  ou  $(-1, -1)$ .

$uv = 2$  donne  $(u, v) = (1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)$ .

$uv = 0$  donne  $u = 0$  ou  $v = 0$  ; l'autre facteur est libre.

## 2. Diviseurs et nombres premiers

Un entier  $d$  non nul divise un entier  $K$  si  $K = dm$  pour un entier  $m$ . Si  $K \neq 0$ , résoudre  $uv = K$  revient à choisir un diviseur entier  $u$  de  $K$ , puis à poser  $v = K/u$ . Un nombre premier est un entier  $p \geq 2$  dont les seuls diviseurs positifs sont 1 et  $p$ . Ses diviseurs entiers sont  $1, p, -1, -p$ . Il faut conserver les facteurs négatifs lorsque l'on travaille dans  $\mathbb{Z}$ .

## 3. Carrés et positivité

Pour tout entier  $a$ ,  $a^2 \geq 0$ . Si  $a \neq 0$ , alors  $a^2 \geq 1$ . Un entier strictement positif est au moins égal à 1 ; son carré aussi. Ces bornes seront décisives dans les problèmes 4, 6 et 7.

## IDENTITES A RECONNAITRE

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2, \quad (u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2,$$

$$u^2 - v^2 = (u - v)(u + v),$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca).$$

Pour la dernière identité, développer  $(a + b + c)(a + b + c)$  : les trois carrés apparaissent une fois et chaque produit croisé apparaît deux fois.

## 4. Chercher avant de calculer

Une expression contenant  $xy$ ,  $x$  et  $y$  suggère un produit à compléter. Une somme de carrés suggère un encadrement. Une puissance de 2 suggère l'étude de ses diviseurs. Un quotient supposé entier suggère une combinaison d'expressions entières.

## PIÈGE

Tester quelques couples peut aider à deviner la réponse ; cela ne prouve jamais à lui seul qu'il n'existe pas d'autres solutions.

## 03 / PROBLÈME 1

## Transformer une somme en produit

Repères vidéo : 00:51:43 à 00:58:01.

## ÉNONCÉ

Déterminer tous les couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que

$$xy = x + y.$$

## L'idée de départ

Tester des nombres peut donner des exemples, mais ne prouve pas que l'on a trouvé toutes les solutions. On cherche une forme qui utilise le fait que  $x$  et  $y$  sont entiers : un produit égal à 1.

## 1. Compléter le produit

Déplaçons les deux termes du membre droit, puis ajoutons 1 aux deux membres :

$$\begin{aligned} xy = x + y &\iff xy - x - y = 0 \\ &\iff xy - x - y + 1 = 1 \\ &\iff (x - 1)(y - 1) = 1. \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du développement  $(x - 1)(y - 1) = xy - x - y + 1$ .

## 2. Utiliser les facteurs entiers de 1

Les nombres  $x - 1$  et  $y - 1$  sont entiers. Leur produit vaut 1 ; ils sont donc soit tous deux égaux à 1, soit tous deux égaux à  $-1$ .

| $x - 1$ | $y - 1$ | $x$ | $y$ |
|---------|---------|-----|-----|
| 1       | 1       | 2   | 2   |
| $-1$    | $-1$    | 0   | 0   |

## 3. Vérifier et conclure

Pour  $(2, 2)$ ,  $xy = 4 = x + y$ . Pour  $(0, 0)$ ,  $xy = 0 = x + y$ . Les transformations étaient réversibles et tous les couples de facteurs entiers ont été examinés.

## CONCLUSION

L'ensemble des solutions est

$$S = \{(0, 0), (2, 2)\}.$$

## DEUX ERREURS A EVITER

Un produit égal à 1 n'impose pas que les deux facteurs valent  $+1$  : le couple  $(-1, -1)$  compte aussi. Diviser dès le départ par  $xy$  éliminerait sans justification la solution  $(0, 0)$ .

## 03 / PROBLÈME 2

## Enumérer tous les couples de facteurs

Repères vidéo : 00:58:45 à 01:03:59.

## ÉNONCÉ

Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  :

$$xy - x + y = 3.$$

## 1. Repérer les bons signes

Le développement  $(x + 1)(y - 1) = xy - x + y - 1$  ressemble exactement au membre gauche. Il lui manque seulement le terme  $-1$ . On le soustrait donc des deux côtés :

$$xy - x + y = 3 \iff xy - x + y - 1 = 2 \iff (x + 1)(y - 1) = 2.$$

## 2. Examiner les diviseurs positifs et négatifs

Posons  $u = x + 1$  et  $v = y - 1$ . Ce sont deux entiers de produit 2. Comme 2 est positif, les facteurs ont le même signe. Les quatre couples possibles sont :

| $u$ | $v$ | $(x, y) = (u - 1, v + 1)$ | Vérification $xy - x + y$ |
|-----|-----|---------------------------|---------------------------|
| 1   | 2   | $(0, 3)$                  | $0 - 0 + 3 = 3$           |
| 2   | 1   | $(1, 2)$                  | $2 - 1 + 2 = 3$           |
| -1  | -2  | $(-2, -1)$                | $2 + 2 - 1 = 3$           |
| -2  | -1  | $(-3, 0)$                 | $0 + 3 + 0 = 3$           |

L'ordre des facteurs compte :  $(u, v) = (1, 2)$  et  $(2, 1)$  donnent deux couples différents.

## CONCLUSION

$$S = \{(0, 3), (1, 2), (-2, -1), (-3, 0)\}.$$

## Pourquoi la liste est-elle complète ?

Si  $uv = 2$  avec  $u, v \in \mathbb{Z}$ , alors  $u$  est un diviseur entier de 2. Il appartient donc à  $\{1, 2, -1, -2\}$ . Une fois  $u$  fixé,  $v = 2/u$  est imposé. Il n'existe ainsi aucun autre cas à ajouter.

## UNE PROCÉDURE REPRODUCTIBLE

Reconnaître un produit décalé ; corriger la constante des deux côtés ; lister les couples de facteurs ; revenir aux inconnues initiales ; vérifier dans l'équation de départ.

## PIÈGE

Le signe devant  $y$  est positif. Le bon produit est  $(x + 1)(y - 1)$ , et non  $(x - 1)(y - 1)$ . Développer le produit choisi évite les erreurs de signe.

## 03 / MÉTHODE COMMUNE

## Comment trouver le terme à ajouter ?

Complément pédagogique aux problèmes 1, 2, 3 et 5.

## Le modèle à reconnaître

Pour des entiers fixés  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , considérons

$$xy + \alpha x + \beta y = \gamma.$$

Le terme associé à  $x$  provient du second facteur, celui associé à  $y$  du premier :

$$(x + \beta)(y + \alpha) = xy + \alpha x + \beta y + \alpha\beta.$$

## IDENTITÉ DE TRANSFORMATION

$$xy + \alpha x + \beta y = \gamma \iff (x + \beta)(y + \alpha) = \gamma + \alpha\beta.$$

On ajoute exactement  $\alpha\beta$  aux deux membres.

## Les trois applications du début

| Équation              | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\alpha\beta$ | Produit obtenu          |
|-----------------------|----------|---------|----------|---------------|-------------------------|
| $xy - x - y = 0$      | -1       | -1      | 0        | 1             | $(x - 1)(y - 1) = 1$    |
| $xy - x + y = 3$      | -1       | 1       | 3        | -1            | $(x + 1)(y - 1) = 2$    |
| $xy + 2x - 2y = 2031$ | 2        | -2      | 2031     | -4            | $(x - 2)(y + 2) = 2027$ |

## Deux situations très différentes

Si  $K = \gamma + \alpha\beta \neq 0$ , chaque diviseur entier non nul  $d$  de  $K$  fournit le couple

$$x = d - \beta, \quad y = \frac{K}{d} - \alpha.$$

Il n'y a qu'un nombre fini de diviseurs de  $K$ , donc un nombre fini de solutions.

Si  $K = 0$ , le produit est nul :

$$x + \beta = 0 \quad \text{ou} \quad y + \alpha = 0.$$

L'une des coordonnées est fixée et l'autre peut être n'importe quel entier. On obtient deux familles infinies, avec un point commun.

## POUR CHERCHER SANS APPRENDRE LA FORMULE

Écrire deux parenthèses  $(x + \text{---})(y + \text{---})$ , placer les coefficients, puis développer. Le terme constant obtenu indique la correction nécessaire.

## PIÈGE

Une factorisation n'autorise pas à confondre les cas  $uv = 1$ ,  $uv = 2$  et  $uv = 0$ . Les deux premiers demandent une liste de diviseurs ; le dernier utilise la règle du produit nul.

## 03 / PROBLÈME 3

## Un grand nombre, seulement quatre solutions

Repères vidéo : 01:04:34 à 01:10:45.

## ÉNONCÉ RECONSTITUÉ

Déterminer les couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant

$$xy + 2x - 2y = 2031.$$

Note de transcription. Le coefficient de  $y$  est mal reconnu lors de la première lecture. Le calcul ultérieur de l'enseignant,  $(x - 2)(y + 2) = 2027$ , impose le coefficient  $-2$  et le second membre 2031.

## 1. Factoriser

On développe  $(x - 2)(y + 2) = xy + 2x - 2y - 4$ . Ainsi :

$$xy + 2x - 2y = 2031 \iff (x - 2)(y + 2) = 2031 - 4 = 2027.$$

## 2. Exploiter la primalité de 2027

Le nombre 2027 est premier ; la vérification est détaillée à la page suivante. Ses seuls diviseurs entiers sont 1, 2027,  $-1$  et  $-2027$ .

| $x - 2$ | $y + 2$ | $x$   | $y$   |
|---------|---------|-------|-------|
| 1       | 2027    | 3     | 2025  |
| 2027    | 1       | 2029  | -1    |
| -1      | -2027   | 1     | -2029 |
| -2027   | -1      | -2025 | -3    |

## 3. Vérifier les quatre couples

$$\begin{aligned} (3, 2025) : & \quad 6075 + 6 - 4050 = 2031, \\ (2029, -1) : & \quad -2029 + 4058 + 2 = 2031, \\ (1, -2029) : & \quad -2029 + 2 + 4058 = 2031, \\ (-2025, -3) : & \quad 6075 - 4050 + 6 = 2031. \end{aligned}$$

## CONCLUSION

$$S = \{(3, 2025), (2029, -1), (1, -2029), (-2025, -3)\}.$$

## ASTUCE

Un grand second membre ne rend pas nécessairement l'exercice long. Après factorisation, c'est sa structure en diviseurs qui détermine le nombre de cas.

## 03 / COMPLÉMENT AU PROBLÈME 3

## Pourquoi 2027 est-il premier ?

Vérification détaillée de l'affirmation utilisée dans le cours.

## 1. Rappeler la définition

Un entier  $p \geq 2$  est premier lorsque ses seuls diviseurs positifs sont 1 et  $p$ . Pour justifier la liste des solutions précédente, il faut donc exclure tout autre diviseur positif de 2027.

## 2. Pourquoi s'arrêter à la racine carrée ?

Si un entier  $N \geq 2$  est composé, on peut l'écrire  $N = ab$  avec  $1 < a \leq b$ . Alors  $a^2 \leq ab = N$ , donc  $a \leq \sqrt{N}$ .

De plus,  $a$  possède un diviseur premier  $p \leq a$ . Il suffit donc de tester les nombres premiers inférieurs ou égaux à  $\sqrt{N}$ .

$$45^2 = 2025 < 2027 < 2116 = 46^2.$$

Les seuls nombres premiers  $a$  tester sont donc

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43.$$

## 3. Effectuer les divisions euclidiennes

Dans chaque ligne,  $2027 = pq + r$  et  $0 < r < p$ : le reste n'est jamais nul.

| $p$ | $q$  | $r$ | $p$ | $q$ | $r$ |
|-----|------|-----|-----|-----|-----|
| 2   | 1013 | 1   | 19  | 106 | 13  |
| 3   | 675  | 2   | 23  | 88  | 3   |
| 5   | 405  | 2   | 29  | 69  | 26  |
| 7   | 289  | 4   | 31  | 65  | 12  |
| 11  | 184  | 3   | 37  | 54  | 29  |
| 13  | 155  | 12  | 41  | 49  | 18  |
| 17  | 119  | 4   | 43  | 47  | 6   |

## CONCLUSION

Aucun nombre premier inférieur ou égal à  $\sqrt{2027}$  ne divise 2027. Par conséquent, 2027 est premier.

## CE QUE LA PRIMALITE APPORTE

Pour  $uv = p$  avec  $u, v \in \mathbb{Z}$  et  $p$  premier positif, les possibilités sont exactement  $(1, p)$ ,  $(p, 1)$ ,  $(-1, -p)$  et  $(-p, -1)$ .

## PIEGE

Un nombre impair n'est pas forcément premier :  $9 = 3 \times 3$  et  $15 = 3 \times 5$ . Tester seulement 2, 3 et 5 ne suffit pas pour justifier la primalité de 2027.

## 03 / PROBLÈME 4

Reconnaître la somme  $x + y$ 

Repères vidéo : 01:11:14 à 01:19:20.

## ÉNONCÉ

Trouver tous les couples  $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tels que

$$x^2 + y^2 + xy(x + y + 2) = 6.$$

## 1. Faire apparaître une identité remarquable

Développons uniquement la partie utile :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + xy(x + y + 2) &= x^2 + y^2 + xy(x + y) + 2xy \\&= (x + y)^2 + xy(x + y) \\&= (x + y)(x + y + xy).\end{aligned}$$

L'équation est donc équivalente à  $(x + y)(x + y + xy) = 6$ .

## 2. Encadrer les deux facteurs

Posons  $A = x + y$  et  $B = x + y + xy$ . Puisque  $x \geq 1$  et  $y \geq 1$  :

$$A \geq 2, \quad xy \geq 1, \quad B = A + xy > A.$$

On cherche ainsi deux entiers positifs  $A < B$ , de produit 6. Les couples de facteurs dans cet ordre sont (1, 6) et (2, 3). Le premier est impossible, car  $A \geq 2$ . Il reste :

$$A = 2, \quad B = 3, \quad \text{donc } x + y = 2, \quad xy = B - A = 1.$$

3. Revenir à  $x$  et  $y$ Deux entiers strictement positifs dont la somme vaut 2 sont nécessairement 1 et 1. On obtient donc  $x = y = 1$ .

$$1^2 + 1^2 + 1 \cdot 1(1 + 1 + 2) = 1 + 1 + 4 = 6.$$

## CONCLUSION

$$S = \{(1, 1)\}.$$

## LE RÉFLEXE À RETENIR

Lorsque  $x + y$  apparaît plusieurs fois, chercher à regrouper  $x^2 + y^2$  avec  $2xy$  pour obtenir  $(x + y)^2$ . Une expression apparemment compliquée devient alors un produit de deux entiers simples.

## PIÈGE

Le raisonnement  $B > A$  utilise  $xy > 0$ . Il faut citer l'hypothèse  $x, y \in \mathbb{N}^*$  ; elle ne serait pas automatique pour des entiers relatifs quelconques.

## 03 / COMPLÉMENT AU PROBLÈME 4

## Une autre méthode : atteindre le minimum

Complément pédagogique : résoudre grâce à une minoration.

### L'observation

Dans le problème 4, chaque inconnue est au moins égale à 1. L'expression factorisée vaut

$$F = (x + y)(x + y + xy).$$

Le premier facteur est au moins 2, et le second au moins 3 :

$$F \geq 2 \times 3 = 6.$$

Or l'énoncé demande précisément  $F = 6$ . Il impose donc le plus petit résultat possible.

### Justifier le cas d'égalité

Posons à nouveau  $A = x + y \geq 2$  et  $P = xy \geq 1$ . On a

$$A(A + P) \geq A(A + 1) \geq 2 \times 3 = 6.$$

Si  $A > 2$ , alors  $A \geq 3$ , donc  $A(A + 1) \geq 12 > 6$ . Ainsi  $A = 2$ . Puis  $2(2 + P) = 6$  impose  $P = 1$ . Cela donne  $x = y = 1$ .

#### UNE EGALITE AU BOUT D'UNE CHAÎNE

Si  $U \geq V \geq 6$  et  $U = 6$ , alors  $U = V = 6$ . On doit ensuite identifier exactement les conditions qui rendent chaque inégalité égale.

### On peut même travailler dans l'expression initiale

Comme  $x, y \geq 1$  :

$$x^2 \geq 1, \quad y^2 \geq 1, \quad xy \geq 1, \quad x + y + 2 \geq 4.$$

Par conséquent,

$$x^2 + y^2 + xy(x + y + 2) \geq 1 + 1 + 1 \times 4 = 6.$$

Si  $x \geq 2$ , alors  $x^2 \geq 4$  et les autres termes restent au moins 1 et 4 : la somme est au moins 9, donc strictement supérieure à 6. On exclut de même  $y \geq 2$ . Il reste uniquement  $x = y = 1$ .

#### QUAND PENSER À CETTE MÉTHODE ?

Une équation à termes positifs avec un petit second membre invite à chercher un minimum. Si le second membre coïncide avec ce minimum, les conditions d'égalité peuvent déterminer toutes les inconnues.

#### PIÈGE

Trouver  $(1, 1)$  par essai prouve seulement qu'il existe une solution. La minoration et son cas d'égalité prouvent qu'il n'y en a aucune autre.

## 03 / PROBLÈME 5

## Quand le produit vaut zéro

Repères vidéo : 01:19:30 à 01:23:35.

## ÉNONCÉ

Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  :

$$xy - x - y + 1 = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad xy + 1 = x + y.$$

## 1. Factoriser et appliquer la bonne règle

$$xy - x - y + 1 = 0 \iff (x - 1)(y - 1) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } y = 1.$$

Un produit est nul si au moins l'un de ses facteurs est nul. L'autre facteur est libre ; il n'est pas obligé d'être nul lui aussi.

## 2. Décrire toutes les solutions

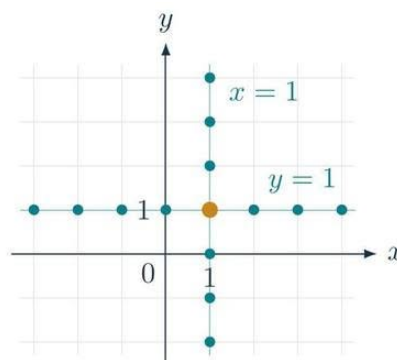
Si  $x = 1$ , tout entier  $y = k$  convient :  $k - 1 - k + 1 = 0$ . Si  $y = 1$ , tout entier  $x = k$  convient :  $k - k - 1 + 1 = 0$ .

## CONCLUSION

$$S = \{(1, k) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(k, 1) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Il existe une infinité de solutions. Les deux familles ont le couple  $(1, 1)$  en commun.

## 3. Visualiser les deux familles



Seuls les points à coordonnées entières appartiennent à  $S$  ; les traits servent à guider la lecture.

## PIÈGE

Remplacer « ou » par « et » ne garderait que  $(1, 1)$  et ferait perdre toutes les autres solutions, par exemple  $(1, -2)$  ou  $(-3, 1)$ .

## 03 / PROBLÈME 6

## Réduire trois inconnues à quelques essais

Repères vidéo : 01:24:07 à 01:28:33.

## ÉNONCÉ

Déterminer les triplets  $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$  tels que

$$5xy + 3z = 14.$$

## 1. Borner z grâce à la positivité

Comme  $x, y \geq 1$ , on a  $5xy > 0$ . L'équation donne donc  $3z < 14$ , soit  $z < 14/3$ . Puisque  $z$  est un entier strictement positif :

$$z \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

On a transformé une recherche infinie en quatre cas.

## 2. Utiliser la divisibilité par 5

Écrivons  $5xy = 14 - 3z$ . Le membre de droite doit être un multiple positif de 5.

| $z$ | $14 - 3z$ | $xy = (14 - 3z)/5$ | Décision                |
|-----|-----------|--------------------|-------------------------|
| 1   | 11        | 11/5               | impossible : non entier |
| 2   | 8         | 8/5                | impossible : non entier |
| 3   | 5         | 1                  | possible                |
| 4   | 2         | 2/5                | impossible : non entier |

## 3. Déterminer x et y

Le seul cas restant est  $z = 3$  et  $xy = 1$ . Puisque  $x, y \in \mathbb{N}^*$ , on obtient nécessairement  $x = y = 1$ . Vérification

$$5 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 5 + 9 = 14.$$

## CONCLUSION

$$S = \{(1, 1, 3)\}.$$

## COMPLEMENT : UNE BORNE ENCORE PLUS PRECISE

On sait même que  $5xy \geq 5$ . Ainsi  $3z = 14 - 5xy \leq 9$ , donc  $z \leq 3$ . Cette remarque permet de supprimer le cas  $z = 4$  dès le début.

## UNE METHODE TRES GENERALE

Dans une somme de termes positifs égale à une petite constante, chaque terme est borné. Isoler une inconnue, établir une borne, puis utiliser la divisibilité pour éliminer les cas.

## 03 / PROBLÈME 7 — 1/2

## Utiliser z pour borner x et y

Repères vidéo : 01:28:52 à 01:41:04.

## ÉNONCÉ

Trouver les triplets  $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$  vérifiant

$$2xy + 4z = zx^2 + 4zy^2.$$

## 1. Regrouper les termes qui contiennent z

$$\begin{aligned} 2xy + 4z = zx^2 + 4zy^2 &\iff 2xy = zx^2 + 4zy^2 - 4z \\ &\iff 2xy = z(x^2 + 4y^2 - 4). \end{aligned}$$

Notons  $D = x^2 + 4y^2 - 4$ . Avant de diviser par D, vérifions son signe. Comme  $x, y \geq 1$  :

$$D \geq 1 + 4 - 4 = 1 > 0.$$

La division est donc autorisée et l'on obtient  $z = 2xy/D$ .

## 2. Exploiter la contrainte z au moins égal a 1

Puisque  $z \geq 1$  et  $D > 0$ , on a  $zD \geq D$ . Or  $zD = 2xy$ , donc

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 4 &\leq 2xy, \\ x^2 - 2xy + 4y^2 &\leq 4, \\ (x - y)^2 + 3y^2 &\leq 4. \end{aligned}$$

Le carré apparaît en écrivant  $4y^2 = y^2 + 3y^2$ .

## 3. Déterminer y

Un carré est toujours positif ou nul. Ainsi

$$3y^2 \leq (x - y)^2 + 3y^2 \leq 4.$$

Si  $y \geq 2$ , on aurait  $3y^2 \geq 12$ , contradiction. Comme y est strictement positif, il reste uniquement

$$\boxed{y = 1}.$$

## LE PASSAGE DECISIF

Une variable entière positive vérifie  $z \geq 1$ . Après avoir contrôlé le signe du facteur qui la multiplie, cette information transforme une équation à trois inconnues en une inégalité à deux inconnues.

## PIÈGE

L'inégalité obtenue est une condition nécessaire. Tout couple qui la satisfait n'est pas automatiquement une solution : il faudra calculer z et vérifier l'équation initiale.

## 03 / PROBLÈME 7 — 2/2

## Reconstruire et vérifier les triplets

Suite de la résolution du problème 7.

4. Déterminer les valeurs possibles de  $x$ 

Nous avons trouvé  $y = 1$ . La condition nécessaire devient :

$$(x - 1)^2 + 3 \leq 4 \iff (x - 1)^2 \leq 1 \iff -1 \leq x - 1 \leq 1.$$

Donc  $0 \leq x \leq 2$ . Comme  $x \in \mathbb{N}^*$ , la valeur 0 est interdite :

$$x \in \{1, 2\}.$$

5. Revenir à l'égalité pour trouver  $z$ 

Lorsque  $y = 1$ , le facteur  $D = x^2 + 4y^2 - 4$  vaut simplement  $x^2$ . La formule précédente donne :

$$z = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}.$$

La simplification est légitime, car  $x \geq 1$ .

| $x$ | $y$ | $z = 2/x$ | Triplet candidat |
|-----|-----|-----------|------------------|
| 1   | 1   | 2         | (1, 1, 2)        |
| 2   | 1   | 1         | (2, 1, 1)        |

## 6. Vérifier les deux candidats

Pour (1,1,2) :

$$2xy + 4z = 2 + 8 = 10, \quad zx^2 + 4zy^2 = 2 + 8 = 10.$$

Pour (2,1,1) :

$$2xy + 4z = 4 + 4 = 8, \quad zx^2 + 4zy^2 = 4 + 4 = 8.$$

Les trois coordonnées de chaque triplet sont strictement positives. Tous les cas permis par les contraintes ont été examinés.

## CONCLUSION

$$S = \{(1, 1, 2), (2, 1, 1)\}.$$

## La structure logique de la résolution

Toute solution impose  $D > 0$ , puis  $(x - y)^2 + 3y^2 \leq 4$ , donc  $y = 1$  et  $x \in \{1, 2\}$ . Cela donne une liste de candidats. La substitution dans l'égalité et la vérification finale établissent que les deux candidats sont bien des solutions.

## ASTUCE

Le signe du dénominateur et le caractère entier des inconnues font ici tout le travail. Sans ces conditions, les encadrements ne réduiraient pas la recherche aux deux triplets trouvés.

## 03 / PROBLÈME 8 — 1/3

## Une puissance de 2 voisine d'un carré

Repères vidéo : 01:41:28 à 01:58:02.

## ÉNONCÉ

Déterminer tous les couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que

$$2^x + 1 = y^2.$$

## 1. Ne pas oublier les exposants négatifs et zéro

Le domaine est  $\mathbb{Z}^2$  :  $x$  peut a priori être négatif, nul ou positif. Pour une base non nulle  $a$  et un entier  $m \geq 1$  :

$$a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

En particulier,  $2^x > 0$  pour tout entier  $x$ .CAS 1:  $x$  EST NÉGATIFSi  $x < 0$ , écrivons  $x = -m$  avec  $m \geq 1$ . Alors

$$0 < 2^x = \frac{1}{2^m} < 1, \quad \text{donc} \quad 1 < y^2 < 2.$$

Or  $y^2$  est un entier. Aucun entier n'est strictement compris entre 1 et 2. Il n'existe donc aucune solution dans ce cas.CAS 2 :  $x$  VAUT ZÉROSi  $x = 0$ , l'équation donne  $y^2 = 2$ . Pour un entier  $y$ , soit  $|y| \leq 1$  et  $y^2 \leq 1$ , soit  $|y| \geq 2$  et  $y^2 \geq 4$ . Le carré ne peut donc pas valoir 2.2. Préparer le cas où  $x$  est positifIl reste  $x \geq 1$ . Le nombre  $2^x$  est alors pair, donc  $y^2 = 2^x + 1$  est impair. Si  $y$  était pair, son carré serait pair ; ainsi  $y$  est impair.Posons  $t = |y|$ . Ce choix permet de travailler avec des facteurs positifs tout en conservant ensuite les deux signes possibles de  $y$ . Comme  $y^2 \geq 3$  et  $t$  est un entier impair positif,  $t \geq 3$ .

$$2^x = t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1).$$

## CE QUE NOUS SAVONS DESORMAIS

 $t-1$  et  $t+1$  sont deux entiers positifs pairs ; leur produit est une puissance de 2 et leur différence vaut exactement 2.

## 03 / PROBLÈME 8 — 2/3

## Deux puissances de 2 distantes de 2

Suite : factoriser, soustraire, conclure.

## 3. Décrire les facteurs d'une puissance de 2

Un diviseur positif de  $2^x$  est une puissance de 2. En effet, sa décomposition en facteurs premiers ne peut contenir que le nombre premier 2. Comme  $t - 1$  et  $t + 1$  sont pairs et  $t - 1 < t + 1$ , il existe des entiers  $p, q$  tels que

$$t - 1 = 2^p, \quad t + 1 = 2^q, \quad 1 \leq p < q.$$

Le produit donne également  $2^{p+q} = 2^x$ , donc  $p + q = x$ .

## 4. Utiliser la différence des facteurs

Soustrayons les deux égalités :

$$2^q - 2^p = (t + 1) - (t - 1) = 2.$$

On factorise par la plus petite puissance :

$$2^p(2^{q-p} - 1) = 2.$$

Puisque  $q - p \geq 1$ , le facteur  $2^{q-p} - 1$  est un entier impair positif. Comme  $p \geq 1$ , le facteur  $2^p$  est au moins 2. Pour que le produit soit 2, il faut

$$2^p = 2, \quad 2^{q-p} - 1 = 1.$$

La première égalité donne  $p = 1$ . La seconde donne  $2^{q-p} = 2$ , donc  $q - p = 1$  et  $q = 2$ .

## 5. Revenir aux inconnues

$$x = p + q = 3, \quad t - 1 = 2^1 = 2, \quad t = 3.$$

Puisque  $t = |y|$ , on obtient  $y = 3$  ou  $y = -3$ . Dans les deux cas :

$$2^3 + 1 = 8 + 1 = 9 = (\pm 3)^2.$$

## CONCLUSION

$$S = \{(3, 3), (3, -3)\}.$$

LE CAS D'UN EXPOSANT  $p$  NUL

Si l'on n'a pas utilisé d'abord la parité et que l'on essaie  $p = 0$ , alors  $t - 1 = 1$ , donc  $t = 2$  et  $t + 1 = 3$ . Or 3 n'est pas une puissance de 2. Ce cas, discuté dans le cours, est donc impossible.

## PIÈGE

Conclure seulement  $y = 3$  oublie une solution : un carré ne distingue pas 3 de  $-3$ . Le retour de  $t = |y|$  à  $y$  doit conserver les deux signes.

## 03 / PROBLÈME 8 — 3/3

## Revoir la méthode et une autre justification

Complément pédagogique : deux entiers consécutifs.

### Une autre fin de résolution

Les cas  $x < 0$  et  $x = 0$  ont été exclus. Pour  $x \geq 1$ , on sait que  $t = |y|$  est impair et  $t \geq 3$ . Écrivons donc

$$t = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

L'équation factorisée devient :

$$2^x = (t - 1)(t + 1) = 2k(2k + 2) = 4k(k + 1).$$

Comme  $k(k + 1) \geq 2$ , on a  $2^x \geq 8$ , donc  $x \geq 3$ . On peut diviser par 4 :

$$k(k + 1) = 2^{x-2}.$$

### Le rôle des entiers consécutifs

Les entiers positifs  $k$  et  $k + 1$  sont chacun une puissance de 2, puisqu'ils divisent une puissance de 2. Mais deux entiers consécutifs ont des parités différentes : l'un est impair.

La seule puissance de 2 impaire est  $2^0 = 1$ . L'un des deux facteurs vaut donc 1. Comme  $k + 1 \geq 2$ , c'est nécessairement  $k = 1$ . On en déduit

$$t = 3, \quad 2^{x-2} = 1 \times 2 = 2, \quad x = 3.$$

On retrouve  $(x, y) = (3, 3)$  ou  $(3, -3)$ .

#### LE PLAN COMPLET À REFAIRE SEUL

1. Séparer les trois cas  $x < 0$ ,  $x = 0$ ,  $x > 0$ .
2. Dans le troisième cas, établir la parité de  $y$ .
3. Poser  $t = |y|$ , puis factoriser  $t^2 - 1$ .
4. Exploiter les diviseurs d'une puissance de 2.
5. Utiliser l'écart de 2 entre  $t - 1$  et  $t + 1$ .
6. Retrouver  $x$  et les deux signes de  $y$  ; vérifier.

### Pourquoi les essais numériques ne suffisent pas

Les essais  $x = 1, 2, 3$  donnent 3, 5, 9 pour  $2^x + 1$  ; ils permettent de découvrir  $x = 3$ . Ils ne prouvent pas qu'un carré ne réapparaîtra jamais pour un entier plus grand. C'est la factorisation et la structure des puissances de 2 qui excluent tous les autres exposants à la fois.

#### ASTUCE

Quand deux carrés ou une puissance et 1 apparaissent, essayer l'identité  $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ . Les facteurs obtenus ont souvent un écart fixé, ce qui impose de fortes contraintes.

## 03 / PROBLÈME 9

# Construire une solution avec des puissances

Repères vidéo : 01:58:53 à 02:02:41.

## ÉNONCÉ

Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs  $x, y, z$  tels que

$$x^3 = y^2 + z^4.$$

### 1. Comprendre ce qui est demandé

Il suffit de construire un seul triplet qui vérifie l'égalité. L'exercice ne demande pas de déterminer toutes les solutions.

### 2. Choisir deux termes égaux à droite

L'astuce du cours consiste à additionner deux puissances de 2 identiques :

$$2^m + 2^m = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}.$$

On veut que  $2^m$  soit à la fois un carré et une quatrième puissance, et que  $2^{m+1}$  soit un cube.

Pour cela, choisissons  $m$  multiple de 4 et  $m + 1$  multiple de 3. Les multiples positifs de 4 commencent par 4, 8, 12, ... ;  $m = 8$  convient car  $m+1 = 9$ .

### 3. Réécrire chaque puissance

$$2^9 = 2^8 + 2^8.$$

Or

$$2^9 = (2^3)^3, \quad 2^8 = (2^4)^2, \quad 2^8 = (2^2)^4.$$

Donc

$$(2^3)^3 = (2^4)^2 + (2^2)^4.$$

## CONCLUSION

Le triplet

$$(x, y, z) = (8, 16, 4)$$

convient. En effet,  $8^3 = 512$  et  $16^2 + 4^4 = 256 + 256 = 512$ .

## CONSTRUIRE AU LIEU DE TESTER AU HASARD

Partir d'une identité simple, ici  $2A = A + A$ , puis choisir  $A$  pour que chaque terme puisse être écrit avec l'exposant demandé. La base 2 transforme le facteur 2 en une augmentation de l'exposant.

## PIEGE

Ne pas intervertir les bases : le terme au carré est  $16^2$  et le terme à la puissance 4 est  $4^4$ . Écrire  $(8, 4, 16)$  ne donne pas la même égalité.

## 03 / PROBLÈME 10 — 1/2

Une construction pour chaque exposant  $n$ 

Repères vidéo : 02:02:57 à 02:05:25.

## ÉNONCÉ

Pour tout entier  $n \geq 1$ , construire des entiers strictement positifs  $x, y, z$  tels que

$$x^n = y^{n-1} + z^{n+1}.$$

## 1. Reprendre l'idée du problème précédent

Nous cherchons à rendre les deux termes de droite égaux à une même puissance de 2 :

$$2^M + 2^M = 2^{M+1}.$$

Pour  $n \geq 2$ , un choix pratique consiste à prendre  $M$  divisible à la fois par  $n - 1$  et par  $n + 1$ . Le produit  $(n - 1)(n + 1)$  convient.

2. Pourquoi le carré  $n$  au carré apparaît-il ?

L'identité remarquable donne :

$$M = (n - 1)(n + 1) = n^2 - 1, \quad M + 1 = n^2.$$

L'exposant de gauche est alors divisible par  $n$ . Les trois exposants s'organisent exactement comme il faut :

$$\begin{aligned} 2^{n^2} &= (2^n)^n, \\ 2^{n^2-1} &= 2^{(n+1)(n-1)} = (2^{n+1})^{n-1}, \\ 2^{n^2-1} &= 2^{(n-1)(n+1)} = (2^{n-1})^{n+1}. \end{aligned}$$

## 3. Donner la construction et la vérifier

## CONCLUSION

Pour chaque entier  $n \geq 1$ , un choix qui convient est

$$x = 2^n, \quad y = 2^{n+1}, \quad z = 2^{n-1}.$$

Les exposants  $n, n + 1$  et  $n - 1$  sont des entiers positifs ou nuls ; les trois nombres sont donc des entiers strictement positifs. Enfin :

$$y^{n-1} + z^{n+1} = 2^{n^2-1} + 2^{n^2-1} = 2^{n^2} = x^n.$$

Cette vérification fonctionne aussi pour  $n = 1$ , cas traité explicitement à la page suivante.

## ASTUCE

La formule n'est pas à deviner sans raison : on choisit des exposants compatibles, puis on utilise  $(n - 1)(n + 1) + 1 = n^2$ .

## 03 / PROBLÈME 10 — 2/2

## Vérifier les cas particuliers et la portée

Complément pédagogique : lire correctement une construction générale.

1. Le cas limite  $n = 1$ 

La formule donne  $x = 2$ ,  $y = 4$ ,  $z = 1$ . L'équation devient

$$x = y^0 + z^2.$$

Comme  $y = 4 \neq 0$ , on a  $y^0 = 1$ . Ainsi :

$$2 = 4^0 + 1^2 = 1 + 1.$$

La construction fonctionne donc dès  $n = 1$ . Il n'apparaît aucune expression  $0^0$ .

## 2. Les premiers exemples

| $n$ | $x$ | $y$ | $z$ | Égalité obtenue             |
|-----|-----|-----|-----|-----------------------------|
| 1   | 2   | 4   | 1   | $2 = 1 + 1$                 |
| 2   | 4   | 8   | 2   | $4^2 = 8 + 2^3 = 16$        |
| 3   | 8   | 16  | 4   | $8^3 = 16^2 + 4^4 = 512$    |
| 4   | 16  | 32  | 8   | $16^4 = 32^3 + 8^5 = 65536$ |

Pour  $n = 4$ , les deux termes de droite valent chacun 32768. Pour  $n = 3$ , on retrouve exactement le triplet du problème 9.

## 3. Ce qui est démontré, et ce qui ne l'est pas

La phrase « pour tout  $n \geq 1$ , il existe un triplet » signifie que chaque valeur autorisée de  $n$  possède au moins une solution. Les trois inconnues peuvent dépendre de  $n$ .

La construction fournit une solution explicite pour chaque exposant. Elle ne prétend pas classer tous les triplets possibles pour un  $n$  fixé, et elle ne dit pas qu'un seul triplet conviendrait simultanément pour tous les  $n$ .

## RÉDIGER UNE PREUVE D'EXISTENCE

1. Fixer un paramètre  $n$  quelconque dans le domaine annoncé.
2. Proposer des valeurs précises de  $x$ ,  $y$  et  $z$  en fonction de  $n$ .
3. Vérifier que ces valeurs appartiennent au domaine demandé.
4. Calculer les deux membres et établir leur égalité.

## PIÈGE

Vérifier seulement  $n = 1, 2, 3, 4$  ne prouve pas l'énoncé pour tous les entiers. C'est le calcul avec le paramètre  $n$  qui constitue la démonstration générale ; le tableau sert à comprendre et à contrôler la formule.

## 03 / PROBLÈME 11

## Prouver qu'un quotient est entier

Repères vidéo : 02:06:05 à 02:10:27.

## ÉNONCÉ PRÉCISÉ

Soient  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , avec  $S = a + b + c \neq 0$ . On suppose que

$$q = \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que  $r = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$  est aussi un entier.

## 1. Relier les deux numérateurs

Le carré d'une somme de trois termes contient les carrés et les doubles produits :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

En isolant la somme des carrés :

$$a^2 + b^2 + c^2 = S^2 - 2(ab + bc + ca).$$

## 2. Diviser par le dénominateur commun

Comme  $S \neq 0$ , on peut diviser chaque terme par  $S$  :

$$\begin{aligned} r &= \frac{S^2 - 2(ab + bc + ca)}{S} \\ &= S - 2 \frac{ab + bc + ca}{S} \\ &= S - 2q. \end{aligned}$$

Or  $S$  est une somme d'entiers et  $q$  est entier par hypothèse. Donc  $S - 2q$  est entier.

## CONCLUSION

$$r = (a + b + c) - 2q \in \mathbb{Z}.$$

## 3. Un exemple avec un entier négatif

Pour  $(a, b, c) = (1, 1, -1)$ , on a  $S = 1$ ,  $q = (1 - 1 - 1)/1 = -1$  et  $r = (1 + 1 + 1)/1 = 3$ . L'identité donne bien  $r = 1 - 2(-1) = 3$ .

## LA CONDITION DE DÉFINITION EST INDISPENSABLE

Dire seulement que  $a, b, c$  ne sont pas tous nuls ne suffit pas. Par exemple,  $(1, -1, 0)$  n'est pas le triplet nul, mais sa somme vaut 0 : les deux quotients seraient indéfinis. Il faut bien supposer  $a + b + c \neq 0$ .

## ASTUCE

Le cours utilise la stabilité des entiers par addition, soustraction et multiplication. L'objectif est de remplacer le quotient à étudier par une expression construite avec des entiers déjà connus.

## 03 / PROBLÈME 12

## Trouver une combinaison d'entiers

Repères vidéo : 02:11:02 à 02:14:18.

## ÉNONCÉ

Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$ . On suppose que

$$q = \frac{3a + 4b}{5} \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que  $r = \frac{4a - 3b}{5}$  est un entier.1. Chercher à utiliser l'entier connu  $q$ 

On cherche une expression de la forme  $r = kq + ua + vb$ , avec des coefficients entiers. Alors chaque terme sera entier. Le cours propose :

$$r = 3q - a - 3b.$$

## 2. Vérifier l'identité sans sauter de calcul

$$\begin{aligned} 3q - a - 3b &= 3 \frac{3a + 4b}{5} - a - 3b \\ &= \frac{9a + 12b}{5} - \frac{5a}{5} - \frac{15b}{5} \\ &= \frac{9a + 12b - 5a - 15b}{5} \\ &= \frac{4a - 3b}{5} = r. \end{aligned}$$

Comme  $q, a$  et  $b$  sont entiers,  $3q - a - 3b$  est un entier. Cela prouve le résultat.

## CONCLUSION

$$\boxed{\frac{4a - 3b}{5} = 3 \frac{3a + 4b}{5} - a - 3b \in \mathbb{Z} .}$$

## 3. Contrôler sur un exemple

Pour  $a = 2$  et  $b = 1$ , on a  $q = (6 + 4)/5 = 2$  et  $r = (8 - 3)/5 = 1$ . L'identité donne également  $3 \times 2 - 2 - 3 \times 1 = 1$ .

## COMMENT TROUVER LE COEFFICIENT 3 ?

En calculant  $3(3a + 4b) - (4a - 3b)$ , on obtient  $5a + 15b$ , dont les deux coefficients sont multiples de 5. On peut donc écrire  $3q - r = a + 3b$ , puis isoler  $r$ .

## PIÈGE

Le fait que  $(3a + 4b)/5$  soit entier ne signifie pas que  $3a/5$  et  $4b/5$  soient séparément entiers. Dans l'exemple  $a = 2, b = 1$ , ils valent  $6/5$  et  $4/5$  ; seule leur somme est entière.

## 04 / LE DEVOIR FINAL — 1/2

## La combinaison trouvée est-elle unique ?

Repères vidéo : 02:14:20 à 02:15:21 ; résolution ajoutée au cours.

## QUESTION LAISSÉE À CHERCHER

Avec  $q = (3a + 4b)/5$  et  $r = (4a - 3b)/5$ , le cours a montré que

$$r = 3q - a - 3b.$$

Peut-on trouver d'autres combinaisons à coefficients entiers de  $q$ ,  $a$  et  $b$  qui donnent  $r$  ? Y en a-t-il une seule ?

## 1. Construire une deuxième réponse

Essayons de multiplier  $q$  par  $-2$  :

$$-2q = \frac{-6a - 8b}{5}.$$

Pour obtenir le numérateur  $4a - 3b$ , il faut ajouter  $10a + 5b$  au numérateur, donc  $2a + b$  à l'expression :

$$\begin{aligned} -2q + 2a + b &= \frac{-6a - 8b + 10a + 5b}{5} \\ &= \frac{4a - 3b}{5} = r. \end{aligned}$$

Nous disposons donc déjà de deux écritures distinctes :

$$r = 3q - a - 3b = -2q + 2a + b.$$

## 2. Comprendre pourquoi plusieurs écritures existent

Par définition de  $q$ , on a  $5q = 3a + 4b$ , soit

$$5q - 3a - 4b = 0.$$

On peut ajouter à une expression n'importe quel multiple entier de zéro sans changer sa valeur. Pour tout  $t \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} r &= 3q - a - 3b + t(5q - 3a - 4b) \\ &= (3 + 5t)q - (1 + 3t)a - (3 + 4t)b. \end{aligned}$$

## CONCLUSION

La combinaison n'est pas unique. On obtient une infinité d'identités :

$$r = (3 + 5t)q - (1 + 3t)a - (3 + 4t)b, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

## ASTUCE

Pour  $t = -1$ , on retrouve  $r = -2q + 2a + b$ . Pour  $t = 1$ , on obtient  $r = 8q - 4a - 7b$ . Chaque formule prouve de nouveau que  $r$  est entier lorsque  $q$ ,  $a$ ,  $b$  le sont.

Portée de la réponse. On cherche ici des coefficients fixes donnant une identité générale. Pour une paire particulière  $(a, b)$ , des égalités accidentelles supplémentaires peuvent exister.

## 04 / LE DEVOIR FINAL — 2/2

## Trouver toutes les identités de cette forme

Complément pédagogique : démontrer que la famille est complète.

## 1. Introduire trois coefficients inconnus

Cherchons tous les entiers  $k, u, v$  pour lesquels

$$r = kq + ua + vb.$$

En remplaçant  $q$  et  $r$  par leurs expressions, puis en multipliant par 5, on obtient :

$$4a - 3b = (3k + 5u)a + (4k + 5v)b.$$

Pour que cette égalité soit une identité générale, il faut et il suffit que

$$\begin{cases} 3k + 5u = 4, \\ 4k + 5v = -3. \end{cases}$$

Même si l'on se limite aux couples pour lesquels  $q$  est entier, ces conditions restent nécessaires : il suffit de tester  $(a, b) = (5, 0)$  puis  $(0, 5)$ .

2. Déterminer les valeurs de  $k$ 

La première équation impose que  $3k - 4$  soit un multiple de 5. En examinant les cinq restes possibles de  $k$  :

|                                      |   |   |   |   |   |
|--------------------------------------|---|---|---|---|---|
| Reste de $k$ dans la division par 5  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Reste de $3k$ dans la division par 5 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |

Le reste recherché est 4. On doit donc avoir  $k = 3 + 5t$  pour un entier  $t$ . Cette écriture inclut les valeurs négatives. Les multiplicateurs  $-4$  et  $-5$ , évoqués comme essais à l'oral, ne conviennent pas.

3. Calculer  $u$  et  $v$ 

En substituant  $k = 3 + 5t$  :

$$u = \frac{4 - 3k}{5} = -1 - 3t, \quad v = \frac{-3 - 4k}{5} = -3 - 4t.$$

Les deux coefficients sont bien entiers pour tout entier  $t$ . Nous avons ainsi obtenu toutes les identités de la forme demandée.

| $t$ | $k$ | $u$ | $v$ | Identité            |
|-----|-----|-----|-----|---------------------|
| -2  | -7  | 5   | 5   | $r = -7q + 5a + 5b$ |
| -1  | -2  | 2   | 1   | $r = -2q + 2a + b$  |
| 0   | 3   | -1  | -3  | $r = 3q - a - 3b$   |
| 1   | 8   | -4  | -7  | $r = 8q - 4a - 7b$  |

## 05 / S'ENTRAÎNER SANS LA CORRECTION

## Tous les énoncés — problèmes 1 à 6

Cacher les pages de résolution et rédiger chaque justification.

**CONSIGNE COMMUNE**

Pour une recherche de toutes les solutions, donner une liste ou une description complète, puis justifier qu'aucune autre solution n'existe. Ne pas oublier le domaine.

**Problème 1 — Produit égal à 1**

Déterminer tous les couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que

$$xy = x + y.$$

Correction p. 14.

**Problème 2 — Produit égal à 2**

Déterminer tous les couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que

$$xy - x + y = 3.$$

Correction p. 15.

**Problème 3 — Diviseurs d'un nombre premier**

Déterminer tous les couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que

$$xy + 2x - 2y = 2031.$$

Justifier que 2027 est premier si vous utilisez cette propriété.

Correction p. 17.

**Problème 4 — Identité remarquable et positivité**

Déterminer tous les couples  $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tels que

$$x^2 + y^2 + xy(x + y + 2) = 6.$$

Correction p. 19.

**Problème 5 — Produit nul**

Déterminer tous les couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que

$$xy - x - y + 1 = 0.$$

Correction p. 21.

**Problème 6 — Borner une inconnue**

Déterminer tous les triplets  $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$  tels que

$$5xy + 3z = 14.$$

Correction p. 22.

## 05 / S'ENTRAÎNER SANS LA CORRECTION

## Tous les énoncés — problèmes 7 à 12

Le devoir final est rappelé en bas de page.

## Problème 7 — Équation et inégalité

Résoudre dans  $(\mathbb{N}^*)^3$  :

$$2xy + 4z = zx^2 + 4zy^2.$$

Correction p. 23.

## Problème 8 — Puissances et carrés

Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$ , en examinant tous les signes possibles de  $x$  :

$$2^x + 1 = y^2.$$

Correction p. 25.

## Problème 9 — Construire un exemple

Montrer qu'il existe  $x, y, z \in \mathbb{N}^*$  tels que

$$x^3 = y^2 + z^4.$$

Correction p. 28.

## Problème 10 — Construire avec un paramètre

Pour chaque entier  $n \geq 1$ , construire  $x, y, z \in \mathbb{N}^*$  tels que

$$x^n = y^{n-1} + z^{n+1}.$$

Correction p. 29.

## Problème 11 — Un quotient entier

Soient  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  avec  $a + b + c \neq 0$ . On suppose que

$$\frac{ab + bc + ca}{a + b + c} \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que  $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} \in \mathbb{Z}$ . Correction p. 31.

## Problème 12 — Une combinaison entière

Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Montrer que

$$\frac{3a + 4b}{5} \in \mathbb{Z} \implies \frac{4a - 3b}{5} \in \mathbb{Z}.$$

Correction p. 32.

## DEVOIR FINAL

Avec  $q = (3a + 4b)/5$  et  $r = (4a - 3b)/5$ , trouver toutes les identités  $r = kq + ua + vb$  à coefficients  $k, u, v \in \mathbb{Z}$ .

Correction p. 33 et 34.

## 06 / RÉPONSES ET REPÈRES

## Les résultats à retrouver

Cette page sert au contrôle, après une recherche rédigée.

| N° | Résultat                                                                                  | Corr. |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1  | $(x, y) = (0, 0)$ ou $(2, 2)$ .                                                           | 14    |
| 2  | $(x, y) \in \{(0, 3), (1, 2), (-2, -1), (-3, 0)\}$ .                                      | 15    |
| 3  | $(x, y) \in \{(3, 2025), (2029, -1), (1, -2029), (-2025, -3)\}$ .                         | 17    |
| 4  | Unique couple : $(x, y) = (1, 1)$ .                                                       | 19    |
| 5  | $(x, y) = (1, k)$ ou $(k, 1)$ , pour tout $k \in \mathbb{Z}$ .                            | 21    |
| 6  | Unique triplet : $(x, y, z) = (1, 1, 3)$ .                                                | 22    |
| 7  | $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ ou $(2, 1, 1)$ .                                                  | 23    |
| 8  | $(x, y) = (3, 3)$ ou $(3, -3)$ .                                                          | 25    |
| 9  | Un exemple : $(x, y, z) = (8, 16, 4)$ .                                                   | 28    |
| 10 | Pour $n \geq 1$ : $(x, y, z) = (2^n, 2^{n+1}, 2^{n-1})$ .                                 | 29    |
| 11 | Si $S = a + b + c \neq 0$ et $q = (ab + bc + ca)/S$ , alors $r = S - 2q \in \mathbb{Z}$ . | 31    |
| 12 | Avec $q = (3a + 4b)/5$ , on a $r = 3q - a - 3b \in \mathbb{Z}$ .                          | 32    |

## DEVOIR FINAL

Toutes les identités  $r = kq + ua + vb$  sont données par

$$(k, u, v) = (3 + 5t, -1 - 3t, -3 - 4t), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Il existe donc une infinité de combinaisons.

## Les autres questions mathématiques du cours

- Plus grand entier : il n'existe pas, car  $M + 1 > M$  pour tout entier  $M$  ; preuve par l'absurde p. 6.
- Associativité de la multiplication : calculer le volume d'un pavé droit en regroupant ses dimensions de deux manières ; illustration p. 8.
- Produit de deux négatifs : la distributivité permet d'établir  $(-a)(-b) = ab$  ; preuve p. 10.
- Argument trigonométrique : il donne correctement  $(-1)(-1) = 1$ , mais utilise des identités déjà construites dans l'arithmétique usuelle ; analyse p. 12.

## PIÈGE

Dans les problèmes 9 et 10, les résultats sont des constructions d'existence. Les présenter comme des listes exhaustives de solutions irait au-delà de ce qui a été démontré.

## 06 / MÉTHODES À RETENIR

## Choisir une idée de recherche

Synthèse du cours et aperçu de la suite annoncé à l'oral.

| Ce que l'on observe                 | Le réflexe utile                       | Problèmes  |
|-------------------------------------|----------------------------------------|------------|
| $xy$ , $x$ , $y$ et une constante   | Compléter $(x + \beta)(y + \alpha)$ .  | 1, 2, 3, 5 |
| Un produit entier égal à $K \neq 0$ | Lister les diviseurs signés de $K$ .   | 1, 2, 3    |
| Un produit nul                      | Un facteur nul ou l'autre nul.         | 5          |
| Des inconnues strictement positives | Utiliser $x, y, z \geq 1$ pour borner. | 4, 6, 7    |
| Une expression quadratique          | Compléter un carré positif ou nul.     | 4, 7       |
| Un carré voisin d'une puissance     | Factoriser une différence de carrés.   | 8          |
| Une existence à démontrer           | Construire à partir d'une identité.    | 9, 10      |
| Un quotient supposé entier          | Exprimer la cible avec cet entier.     | 11, 12     |

## Les cinq questions à se poser en rédigeant

1. Dans quel ensemble cherche-t-on ? Les nombres négatifs et zéro sont-ils autorisés ?
2. Chaque opération est-elle permise ? Le dénominateur est-il non nul ? Quel est son signe ?
3. S'agit-il d'une équivalence ou seulement d'une condition nécessaire ?
4. Pourquoi la recherche est-elle complète ? A-t-on examiné tous les diviseurs ou tous les cas permis par la borne ?
5. Les candidats vérifient-ils l'énoncé initial et son domaine ?

## La parité annoncée à la fin du fichier

Vers 02:16:41, l'enseignant annonce la suite autour des nombres pairs et impairs. Le fait utilisable dans ce fichier est le suivant :

**DEUX ENTIERS CONSÉCUTIFS**

Deux entiers consécutifs ont des parités différentes.

Si  $m = 2k$ , alors  $m + 1 = 2k + 1$  est impair.

Si  $m = 2k + 1$ , alors  $m + 1 = 2(k + 1)$  est pair.

Cette propriété explique notamment la seconde méthode du problème 8. La dernière amorce orale n'est pas un énoncé complet dans la transcription fournie ; aucun exercice supplémentaire n'est inventé à partir de ce fragment.

## 07 / SOURCE ET PRÉCISIONS

## Ce qui a été repris, rétabli et développé

Traçabilité de l'adaptation française.

### Source fournie

Source : Basic Mathematics, cours 01.

**Vidéo :** <https://www.youtube.com/watch?v=pkFvTh8T44U>

Support utilisé : transcription automatique Tactiq fournie, fichier tactiq-free-transcript-pkFvTh8T44U (4) txt.

Langue du cours : principalement hindi, avec des termes mathématiques en anglais. La transcription couvre environ 2 h 17.

Les repères de temps permettent de retrouver les passages dans la source. Les formules sont reconstituées à partir du texte et de la cohérence des calculs ; elles ne constituent pas une lecture certifiée du tableau de la vidéo.

### Périmètre du livret

Le document reprend le contenu mathématique : ensembles de nombres, raisonnement par l'absurde, propriétés des opérations, illustrations géométriques, règle des signes, transformations d'équations, discussion trigonométrique, douze problèmes et devoir final.

Les anecdotes, plaisanteries, encouragements et répétitions sont condensés. Les récits introductifs sur l'origine du comptage ne sont pas repris comme des affirmations historiques ou scientifiques établies. Le livret suit ce fichier ; il ne prétend pas couvrir à lui seul tout un programme scolaire marocain.

### Corrections et conditions explicitées

- Convention sur les naturels. Le domaine strictement positif de la vidéo est noté  $\mathbb{N}^*$  pour éviter l'ambiguïté autour de zéro.
- Problème 3. L'énoncé  $xy + 2x - 2y = 2031$  est fixé par la factorisation  $(x - 2)(y + 2) = 2027$ . Les chiffres des solutions sont recalculés.
- Problème 8. Les exposants négatifs, le cas  $x = 0$  et les deux signes de  $y$  sont traités explicitement.
- Problème 9. La solution est  $(8, 16, 4)$  : le terme au carré est  $16^2$ , ce que confirme l'identité en puissances de 2.
- Problème 11. Le numérateur est  $ab + bc + ca$ , avec le facteur 2 dans l'identité du carré. La condition indispensable est  $a + b + c \neq 0$ .
- Discussion trigonométrique. La valeur correcte est  $\cos 0 = 1$ , et le facteur  $1/2$  porte sur la somme des deux cosinus.

### Apports pédagogiques

Les vérifications numériques, la preuve de primalité de 2027, les méthodes alternatives signalées, les tableaux de synthèse et la résolution complète du devoir final sont développés pour rendre les raisonnements contrôlables et réutilisables.

#### L'OBJECTIF DU COURS

Comprendre pourquoi une transformation fonctionne, repérer le rôle des hypothèses et apprendre à démontrer qu'une réponse est complète.