

NOMBRES PAIRS ET IMPAIRS

La parité pour chercher,
construire et démontrer.

Des règles élémentaires
aux problèmes de raisonnement.

Toutes les notions du cours.
22 problèmes et défis corrigés.

LE MÊME STYLE, UN NOUVEAU PARCOURS

Définitions et démonstrations expliquées pas à pas
Méthodes, astuces, pièges et conditions à vérifier
Schémas : triangle, cube, gobelets et interrupteurs
Questions laissées à chercher et généralisations résolues
Énoncés regroupés, réponses et sommaire cliquable

$$(2k + 1)^2 = 8q + 1 \quad (k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1$$

Observer une régularité. Comprendre pourquoi elle tient.

Auteur : Maths Olympiad

Adaptation pédagogique développée de la transcription fournie :

EP 02 - Even & Odd Numbers (Basic Mathematics).

Vidéo yjmmnzbDTow, cours principalement en hindi, environ 2 h 50.

LIRE ET TRAVAILLER

Comment utiliser ce livret

Un cours développé en français, avec les corrections nécessaires.

Ce document reprend le contenu mathématique de la transcription : notions, démonstrations, exemples, vingt-deux problèmes et défis, ainsi que les questions laissées à chercher. Les répétitions et anecdotes sont condensées. Les compléments pédagogiques sont signalés.

CONVENTIONS

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$; $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. La parité concerne les entiers, y compris les entiers négatifs et zéro. Un nombre « strictement positif » est supérieur ou égal à 1 lorsqu'il est entier.

Pour trouver rapidement	Page
Définir pair et impair, comprendre zéro	5
Calculer avec les parités	7
Sommes, produits et raisonnement par l'absurde	9
Les vingt-deux problèmes et leurs repères vidéo	3
Compter les nombres à somme de chiffres paire	16
Permutations et produits cycliques	19
Triangle, polygones et cube	23
Carrés et divisibilité par 4 ou 8	28
L'énoncé à corriger sur les sommes de carrés	34
Interrupteurs et gobelets : les invariants	40
Tous les énoncés pour s'entraîner	44
Réponses et méthodes de recherche	47
Source et corrections de transcription	50

Une façon efficace de travailler

1. Lire le domaine et les hypothèses avant de calculer.
2. Chercher seul, puis lire l'idée de départ de la correction.
3. Expliquer pourquoi chaque passage est permis.
4. Refaire la preuve sans regarder, puis tester les cas limites.

UNE RÉGULARITÉ OBSERVÉE NE SUFFIT PAS

Quelques exemples permettent de deviner une règle. Une démonstration doit expliquer pourquoi elle vaut dans tous les cas annoncés. Les passages où l'oral se contente d'observer un motif sont complétés ici.

SE REPÉRER

Les problèmes 1 à 11

La numérotation du livret regroupe les défis et les exercices complets du fichier.

- | | |
|--|-------|
| 1. Trois sommes ne peuvent pas être toutes impaires | p. 11 |
| 00:29:04 / Additionner les trois expressions. | |
| 2. Changer les signes sans changer la parité | p. 12 |
| 00:35:45 / Retrancher un nombre pair. | |
| 3. Une somme impaire et ses quatre carrés | p. 13 |
| 00:38:58 / Développer le carré de la somme. | |
| 4. $m^2 - n^2 = 2026$ est-il possible ? | p. 14 |
| 00:43:09 / Somme et différence de même parité. | |
| 5. Sept entiers pairs consécutifs de somme nulle | p. 15 |
| 00:47:28 / Choisir le terme central. | |
| 6. Sept chiffres, somme des chiffres paire | p. 16 |
| 00:52:10 / Fixer le préfixe et choisir le dernier chiffre. | |
| 7. Décomposer des puissances en termes consécutifs | p. 18 |
| 01:04:30 / Centrer et compenser. | |
| 8. Une permutation de 1 à 9 | p. 19 |
| 01:09:29 / Produit impair, somme impossible. | |
| 9. Une somme cyclique de quotients ± 1 | p. 21 |
| 01:17:36 / Combiner somme et produit. | |
| 10. Un triangle de signes | p. 23 |
| 01:29:40 / Comparer les produits. | |
| 11. Huit sommets et six faces d'un cube | p. 26 |
| 01:40:26 / Compter les apparitions de chaque sommet. | |

DES QUESTIONS OUVERTES RÉSOLUES

Le livret démontre aussi l'unicité des sept entiers consécutifs (p. 15), étudie les polygones de signes (p. 24) et donne la correction du cube, laissée au lecteur dans la vidéo (p. 27).

SE REPÉRER

Les problèmes 12 à 22

La numérotation du livret regroupe les défis et les exercices complets du fichier.

12. Le jeu du carré impair moins 1 **p. 28**

01:44:37 / Deux entiers consécutifs, un facteur 8.

13. La somme de huit carrés impairs **p. 30**

01:53:38 / Additionner huit restes égaux à 1.

14. Écrire un impair comme différence de carrés **p. 31**

01:57:59 / Ajouter et retrancher un carré.

15. Compléter $a^2 + b^2$ lorsque ab est pair **p. 33**

02:00:33 / Construire deux carrés ; vérifier les limites.

16. L'impossibilité lorsque ab est impair **p. 35**

02:06:44 / Une différence de carrés ne vaut pas $4k + 2$.

17. Deux entiers consécutifs et leur produit **p. 36**

02:12:17 / Lire la parité avant de développer.

18. Trois carrés dont la somme est multiple de 4 **p. 37**

02:16:31 / Compter les termes impairs.

19. Les traversées d'une rivière **p. 38**

02:24:07 / Un changement de rive par traversée.

20. Onze feuillets retirés d'un livre **p. 39**

02:29:12 / Deux pages consécutives par feuillet.

21. Sept lampes et 2028 pressions **p. 40**

02:33:52 / Division euclidienne et cycles.

22. Sept gobelets, quatre retournements par coup **p. 42**

00:01:02 / 02:43:17 / Trouver une parité qui reste constante.

DES GÉNÉRALISATIONS EXPLIQUÉES

Le comptage à k chiffres est traité p. 17. Le raisonnement court sur trois carrés figure p. 37. La méthode pour n lampes et m pressions est développée p. 41.

01 / COMPRENDRE LA PARITÉ

Pairs et impairs : des définitions précises

Repères vidéo : 00:04:25 à 00:10:36.

LES DEUX FORMES À CONNAÎTRE

Un entier a est pair s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$.Un entier a est impair s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k + 1$.

$$\text{Pair : } 2k \quad \text{Impair : } 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

1. Être divisible par 2

Un entier est divisible par 2 lorsque son quotient par 2 est entier. Par exemple, $6/2 = 3$ et $-6/2 = -3$: 6 et -6 sont pairs. Le signe du quotient ne change rien à sa nature d'entier.

Entier	Écriture	Parité
-6	$2(-3)$	pair
-5	$2(-3) + 1$	impair
0	$2 \cdot 0$	pair
1	$2 \cdot 0 + 1$	impair
7	$2 \cdot 3 + 1$	impair

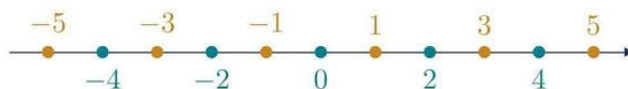
2. Pourquoi k doit parcourir tous les entiers

Si l'on impose $k \geq 1$ dans $2k$, on perd zéro et les pairs négatifs. Dans $2k + 1$, on perd aussi le nombre 1. Pour décrire tous les entiers d'une parité, il faut autoriser $k \in \mathbb{Z}$.

On peut également écrire un impair sous la forme $2k - 1$. Les formes $2k + 1$ et $2k - 1$ décrivent le même ensemble : il suffit de décaler le paramètre d'une unité.

3. Tous les entiers sont dans une seule des deux catégories

La division euclidienne par 2 donne un reste 0 ou 1. Ainsi, chaque entier est pair ou impair. Il ne peut pas être les deux : $2u = 2v + 1$ donnerait $2(u - v) = 1$, impossible pour un entier $u - v$.



PIEGE

La parité est ici une propriété des entiers. On ne classe pas $1/2$ ou $3,7$ comme pair ou impair.

01 / COMPRENDRE LA PARITÉ

Zéro, les nombres négatifs et les signes

Repères vidéo : 00:10:40 à 00:15:58.

1. Pourquoi zéro est pair

La définition suffit :

$$0 = 2 \times 0, \quad 0/2 = 0 \in \mathbb{Z}.$$

Le fait que zéro soit aussi divisible par 3, 4 ou 5 ne l'empêche pas d'être divisible par 2. Un nombre peut avoir plusieurs propriétés simultanément.

A DISTINGUER

Pour tout entier $d \neq 0$, $0/d = 0$.

En revanche, une division par zéro n'est pas définie.

Zéro est pair, sans être strictement positif ni strictement négatif.

2. L'alternance sur la droite des entiers

Si $a = 2k$ est pair, $a - 1 = 2(k - 1) + 1$ et $a + 1 = 2k + 1$ sont impairs. Si $a = 2k + 1$ est impair, ses voisins $a - 1 = 2k$ et $a + 1 = 2(k + 1)$ sont pairs.

Ainsi, les voisins de zéro, -1 et 1 , sont impairs. Cette observation illustre la définition ; elle n'est pas nécessaire pour prouver que zéro est pair.

3. La parité commande les puissances de moins un

Pour tout entier n :

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Pour un exposant positif, on regroupe les facteurs -1 par paires : chaque paire vaut 1. Avec un nombre impair de facteurs, il reste un -1 .

Pour $n = 0$, $(-1)^0 = 1$. Pour un exposant négatif $n = -m$ avec $m > 0$:

$$(-1)^{-m} = \frac{1}{(-1)^m}.$$

L'inverse de 1 est 1 et l'inverse de -1 est -1 ; la même règle s'applique.

EXEMPLES DU COURS

$$(-1)^2 = 1, (-1)^4 = 1, (-1)^3 = -1, (-1)^{-3} = -1, (-1)^{-5} = -1 \text{ et } (-1)^0 = 1.$$

ASTUCE

Coder deux états par $+1$ et -1 transforme un changement d'état en multiplication par -1 . Coder les mêmes états par 0 et 1 permet de compter combien d'objets ont changé.

01 / CALCULER AVEC LA PARITÉ

Sommes et différences

Repères vidéo : 00:16:49 à 00:20:05.

LES RÈGLES

	Premier entier	Second entier	Somme et différence
	pair	pair	paires
	impair	impair	paires
	pair	impair	impaires
	impair	pair	impaires

1. Deux entiers pairs

Écrivons les nombres $2u$ et $2v$, avec $u, v \in \mathbb{Z}$:

$$2u + 2v = 2(u + v), \quad 2u - 2v = 2(u - v).$$

Les résultats sont des multiples de 2.

2. Deux entiers impairs

Écrivons $2u + 1$ et $2v + 1$:

$$(2u + 1) + (2v + 1) = 2(u + v + 1),$$

$$(2u + 1) - (2v + 1) = 2(u - v).$$

La somme et la différence sont paires. Les paramètres u et v sont distincts pour ne pas supposer que les deux nombres sont égaux.

3. Deux entiers de parités différentes

$$(2u + 1) + 2v = 2(u + v) + 1,$$

$$(2u + 1) - 2v = 2(u - v) + 1.$$

Dans l'autre sens, $2v - (2u + 1) = 2(v - u - 1) + 1$, encore impair.

COMPRENDRE LES SIGNES

Les nombres a et $-a$ ont la même parité. Remplacer un terme par son opposé ne change donc pas la parité d'une somme. Par exemple, $7 + 4 = 11$ et $7 - 4 = 3$ sont tous deux impairs.

PIÈGE

« Pair » ne signifie pas « positif » : $3 - 7 = -4$ est pair. Une différence peut être négative sans modifier la règle de parité.

01 / CALCULER AVEC LA PARITÉ

Produits : un seul facteur pair suffit

Repères vidéo : 00:23:49 à 00:25:23.

1. Le produit de deux impairs

$$\begin{aligned}(2u + 1)(2v + 1) &= 4uv + 2u + 2v + 1 \\ &= 2(2uv + u + v) + 1.\end{aligned}$$

Le produit est impair. La démonstration fonctionne aussi pour les impairs négatifs.

2. Un entier pair multiplié par un entier quelconque

Si $a \in \mathbb{Z}$, alors

$$(2u)a = 2(ua).$$

Le produit est pair, que a soit pair, impair, positif, négatif ou nul.

DEUX ÉQUIVALENCES UTILES

Un produit fini d'entiers est impair si et seulement si tous ses facteurs sont impairs.
Il est pair si et seulement si au moins un facteur est pair.

3. Deux facteurs pairs donnent davantage

$$(2u)(2v) = 4uv.$$

Le produit de deux pairs est non seulement pair, mais divisible par 4. Plus généralement, un produit contenant r facteurs pairs est divisible par 2^r .

EXEMPLES

$7 \times (-3) = -21$ est impair.
 $8 \times 13 = 104$ est pair.
 $6 \times 10 = 60$ est divisible par 4.
 $2 \times 6 \times 14 = 168$ est divisible par $2^3 = 8$.

4. Deux entiers consécutifs

Deux entiers consécutifs ont des parités différentes. Leur produit $k(k + 1)$ contient donc un facteur pair :

$$k(k + 1) \text{ est pair pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Cette observation permettra de faire apparaître un facteur 8 dans le carré d'un impair.

PIÈGE

Le produit de deux pairs n'est pas forcément divisible par 8 : $2 \times 2 = 4$. Le facteur 4 est garanti ; un facteur supplémentaire demande une autre justification.

01 / CALCULER AVEC LA PARITÉ

Compter les termes impairs et les signes

Repères vidéo : 00:20:20 à 00:23:45 ; outils pour les problèmes de signes.

1. Une somme de plusieurs impairs

Pour r nombres impairs $2u_1 + 1, \dots, 2u_r + 1$:

$$(2u_1 + 1) + \dots + (2u_r + 1) = 2(u_1 + \dots + u_r) + r,$$

Le premier terme est pair. La parité de la somme est donc celle de r .

LA RÈGLE DE COMPTAGE

Un nombre pair de termes impairs donne une somme paire.

Un nombre impair de termes impairs donne une somme impaire.

Une somme de termes pairs est toujours paire.

Dans une somme qui mélange les deux catégories, les termes pairs ne changent pas la parité : il suffit de compter combien de termes sont impairs.

2. Exemple sans calculer la somme

Dans $11 + 24 - 37 + 100 + 9$, les termes impairs sont 11, -37 et 9 : il y en a trois. La somme est donc impaire. Le calcul 107 confirme la conclusion, mais il n'était pas nécessaire.

3. Une somme de nombres égaux à +1 ou à moins un

Supposons que N termes appartiennent à $\{+1, -1\}$. Notons p le nombre de $+1$ et q le nombre de -1 :

$$N = p + q, \quad S = p - q, \quad P = (-1)^q.$$

Ainsi :

$$S = 0 \iff p = q, \quad P = 1 \iff q \text{ est pair}.$$

COMBINER DEUX INFORMATIONS

Si une liste de signes a une somme nulle et un produit égal à 1, alors $p = q$ et q est pair. Son nombre total de termes est donc $N = 2q$, un multiple de 4.

4. Un vocabulaire commode : modulo 2

Dire que a et b ont la même parité revient à dire que $a - b$ est divisible par 2. On peut l'écrire $a \equiv b \pmod{2}$. Cette notation est un complément : toutes les preuves peuvent aussi se lire avec les mots « pair » et « impair ».

PIEGE

La parité du nombre de termes et la parité des termes eux-mêmes sont deux informations différentes. Trois nombres pairs ont une somme paire ; trois nombres impairs ont une somme impaire.

01 / LES OUTILS DE PREUVE

Même parité, contradiction et invariant

Repères vidéo : 00:25:29 à 00:28:46 ; méthode utilisée dans tout le fichier.

1. Une somme et une différence ont la même parité

Pour deux entiers a, b :

$$(a + b) - (a - b) = 2b.$$

Leur différence est paire. Donc $a + b$ et $a - b$ sont soit tous deux pairs, soit tous deux impairs.

UNE CONSÉQUENCE DÉCISIVE

Les facteurs $a + b$ et $a - b$ ont la même parité. Si leur produit est pair, l'un des facteurs est pair, donc l'autre aussi. Dans ce cas,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

est divisible par 4.

2. Reasonner par l'absurde

Pour prouver qu'une configuration est impossible :

1. Supposer qu'elle existe.
2. En déduire une propriété de parité.
3. Calculer la même quantité d'une autre façon.
4. Obtenir une contradiction, par exemple « ce nombre est à la fois pair et impair ».

La contradiction invalide l'hypothèse de départ. Elle doit provenir des hypothèses du problème et de transformations justifiées.

3. Distinguer une condition nécessaire d'une garantie

Un carré impair est de la forme $8k + 1$: cette condition est nécessaire. Elle n'est pas suffisante pour être un carré, car $17 = 8 \cdot 2 + 1$ n'est pas un carré. Un seul contre-exemple suffit à réfuter une affirmation universelle.

4. Chercher ce qui ne change pas

Dans un jeu de retournements, la configuration change à chaque coup. Pourtant, une propriété peut rester constante : c'est un invariant. Par exemple, retourner un nombre pair d'objets conserve la parité du nombre d'objets retournés par rapport à leur position initiale.

LES QUESTIONS QUI GUIDENT LA RECHERCHE

Que se passe-t-il si j'additionne toutes les expressions ? Si je les multiplie ? Combien de fois chaque terme apparaît-il ? Quelle parité reste inchangée après un coup ?

PIÈGE

Un invariant peut interdire une configuration. Le fait qu'il ne l'interdise pas ne suffit pas, à lui seul, à prouver qu'elle est accessible : il faut alors construire une suite de coups.

02 / PROBLÈME 1

Trois sommes ne sont jamais toutes impaires

Repères vidéo : 00:29:04 à 00:35:16.

ÉNONCÉ

Soient a, b, c des entiers strictement positifs. Montrer que les trois nombres

$$a + b, \quad b + c, \quad c + a$$

ne peuvent pas être tous impairs.

Méthode 1 : suivre les parités

Supposons que $a + b$ et $b + c$ soient impairs. Les nombres a et b ont alors des parités différentes ; de même pour b et c . Deux cas couvrent toutes les possibilités :

a	b	c	$c + a$
pair	impair	pair	pair
impair	pair	impair	pair

Dans les deux cas, la troisième somme est paire.

Méthode 2 : additionner les trois sommes

Supposons, par l'absurde, que les trois sommes soient impaires. Leur somme serait impaire, puisqu'il y aurait trois termes impairs. Mais :

$$(a + b) + (b + c) + (c + a) = 2a + 2b + 2c = 2(a + b + c).$$

Cette expression est paire. La même quantité ne peut pas être paire et impaire : l'hypothèse est impossible.

CONCLUSION

Au moins l'une des trois sommes $a + b$, $b + c$, $c + a$ est paire.

UNE ASTUCE TRÈS RÉUTILISABLE

Si plusieurs expressions se ressemblent et que chaque variable apparaît deux fois au total, les additionner fait apparaître un facteur 2.

Complément : ce que l'on peut préciser

La somme des trois expressions étant paire, le nombre d'expressions impaires est pair : il vaut 0 ou 2. Il ne peut valoir ni 1 ni 3. Avec $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, elles sont toutes paires ; avec $(1, 2, 3)$, exactement deux sont impaires.

PIÈGE

La conclusion n'affirme pas que les trois sommes sont toujours paires. Elle interdit seulement qu'elles soient toutes impaires. Les preuves fonctionnent même pour $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

02 / PROBLÈME 2

Changer un signe sans changer la parité

Repères vidéo : 00:35:45 à 00:38:47.

ÉNONCÉ

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a + b + c$ soit pair. Montrer que

$$a + b - c, \quad b + c - a, \quad c + a - b$$

sont tous pairs.

1. Utiliser la somme déjà connue

Posons $S = a + b + c$. Nous savons que S est pair. Pour remplacer $+c$ par $-c$, il faut retrancher deux fois c :

$$a + b - c = (a + b + c) - 2c = S - 2c.$$

Les deux termes S et $2c$ sont pairs ; leur différence est paire.

2. Procéder de la même manière pour les autres expressions

$$b + c - a = S - 2a, \quad c + a - b = S - 2b.$$

Les nombres $2a$ et $2b$ sont pairs. Les deux différences sont donc paires.

CONCLUSION

Les trois expressions annoncées sont paires, car chacune s'obtient en retranchant un entier pair à S .

3. Vérification sur un exemple

Prenons $(a, b, c) = (3, 4, 5)$. La somme vaut 12, paire. Les trois expressions valent :

$$3 + 4 - 5 = 2, \quad 4 + 5 - 3 = 6, \quad 5 + 3 - 4 = 4.$$

Elles sont toutes paires.

COMPLEMENT : UNE RÈGLE GENERALE

Dans une somme d'entiers, remplacer certains signes $+$ par des signes $-$ ne change pas la parité. Chaque remplacement modifie la somme d'un terme $-2a_i$, donc d'un nombre pair.

Ainsi $a+b+c$, $a-b+c$, $-a+b+c$ et $-a-b-c$ ont tous la même parité, même lorsque la somme initiale est impaire.

PIÈGE

Passer de $S = a+b+c$ à $a+b-c$ revient à retrancher $2c$, pas c . Retrancher seulement c donnerait $a+b$.

ASTUCE

Avant de développer ou d'étudier huit cas de parité, chercher une différence simple entre l'expression connue et l'expression à étudier.

02 / PROBLÈME 3

Une somme impaire et quatre carrés

Repères vidéo : 00:38:58 à 00:42:57.

ÉNONCÉ

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. On sait que $S = a + b + c + d$ est impair. La somme $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ est-elle paire ou impaire ? Justifier.

1. La méthode du cours : développer le carré

Pour quatre termes, on obtient les quatre carrés et les six doubles produits :

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

Le terme ad doit être présent, même s'il est omis dans la reconnaissance automatique de certaines phrases.

2. Isoler la somme des carrés

En posant $Q = ab + ac + ad + bc + bd + cd \in \mathbb{Z}$:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = S^2 - 2Q.$$

S est impair, donc S^2 est impair. Le terme $2Q$ est pair. La différence d'un impair et d'un pair est impaire.

CONCLUSION

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \text{ est impair.}$$

3. Complément : une preuve plus courte

Tout entier a la même parité que son carré. En effet, un pair au carré reste pair et un impair au carré reste impair. On peut aussi observer :

$$a^2 - a = a(a - 1),$$

produit de deux entiers consécutifs, donc pair. Les différences $b^2 - b$, $c^2 - c$, $d^2 - d$ sont également paires. Ainsi la somme des carrés a la même parité que $a + b + c + d$.

RECONSTRUIRE L'IDENTITÉ À QUATRE TERMES

Écrire $(a + b + c + d)^2 = ((a + b) + (c + d))^2$. Développer en utilisant $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$, puis développer chaque parenthèse. Les six paires distinctes sont ab, ac, ad, bc, bd, cd .

ASTUCE

Pour la parité, remplacer un entier par son carré ne change rien. Cette règle évite souvent un développement long ; l'identité complète reste utile lorsque l'on étudie d'autres divisibilités.

02 / PROBLÈME 4

Une différence de carrés égale à 2026 ?

Repères vidéo : 00:43:09 à 00:47:07.

ÉNONCÉ

Existe-t-il des entiers m, n tels que

$$m^2 - n^2 = 2026 ?$$

1. Factoriser

Supposons qu'une solution existe. L'identité de différence de carrés donne

$$(m + n)(m - n) = 2026 = 2 \times 1013.$$

Le nombre 2026 est pair, mais n'est pas divisible par 4 :

$$2026 = 4 \times 506 + 2.$$

2. Exploiter la parité commune des facteurs

Le produit $(m + n)(m - n)$ étant pair, au moins l'un des facteurs est pair. Or $m+n$ et $m-n$ ont la même parité. Ils sont donc tous deux pairs.

Il existe ainsi des entiers u, v tels que $m+n = 2u$ et $m-n = 2v$. Leur produit vaut $4uv$, divisible par 4. Il ne peut donc pas être égal à 2026.

CONCLUSION

Il n'existe aucun couple $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $m^2 - n^2 = 2026$.

3. Complément : le même résultat avec les restes

Le carré d'un pair s'écrit $4k^2$. Le carré d'un impair s'écrit $4k + 1$. Un carré a donc pour reste 0 ou 1 dans la division par 4.

Reste de m^2	Reste de n^2	Reste de $m^2 - n^2$
0	0	0
1	1	0
1	0	1
0	1	3

Le reste 2 n'apparaît jamais. Cela interdit 2026.

ASTUCE

Une différence de deux carrés entiers ne peut jamais être de la forme $4k + 2$. La réciproque et les constructions correspondantes sont étudiées p. 32.

PIÈGE

La factorisation numérique correcte est $2026 = 2 \times 1013$. Il n'est pas nécessaire de savoir si 1013 est premier : seule l'absence de divisibilité par 4 intervient.

02 / PROBLÈME 5 ET QUESTION À CHERCHER

Sept entiers pairs consécutifs

Repères vidéo : 00:47:28 à 00:51:12.

ÉNONCÉ

Sept entiers pairs consécutifs ont une somme nulle. On note A leur produit et $B = 2$. Lequel est le plus grand ? Peut-on trouver un autre groupe de sept entiers pairs consécutifs de somme nulle ?

1. Utiliser le terme du milieu

Notons u le quatrième nombre, placé au centre. Les sept nombres s'écrivent :

$$u-6, u-4, u-2, u, u+2, u+4, u+6.$$

Les décalages négatifs et positifs s'annulent dans la somme :

$$(u-6) + (u-4) + (u-2) + u + (u+2) + (u+4) + (u+6) = 7u.$$

La somme étant nulle, $7u = 0$, donc $u = 0$.

2. Trouver les nombres et leur produit

On obtient nécessairement :

$$-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$$

Le produit contient un facteur nul :

$$A = (-6)(-4)(-2) \cdot 0 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 = 0.$$

Ainsi $A = 0 < 2 = B$: B est le plus grand.

3. Répondre à la question laissée ouverte

Il n'existe aucun autre groupe de sept entiers pairs consécutifs ayant une somme nulle. Notre écriture avec le terme central u représente tous les groupes possibles, et l'équation impose uniquement $u = 0$.

UNE MÉTHODE PLUS FORTE QU'UN ESSAI

Le cours construit le groupe symétrique autour de zéro. L'introduction d'un terme central permet de prouver en plus son unicité, ce qui répond au devoir proposé.

Complément : généraliser

Pour $2r + 1$ termes régulièrement espacés de pas 2, centrés en u , la somme vaut $(2r + 1)u$. Une somme nulle impose donc le centre zéro. Si ces termes sont pairs, le groupe est $-2r, \dots, -2, 0, 2, \dots, 2r$, et son produit est nul.

PIÈGE

« Consécutifs pairs » signifie espacés de 2. Les entiers 2,3,4 sont consécutifs, mais ne sont pas trois entiers pairs consécutifs.

02 / PROBLÈME 6 - 1/2

Compter sans examiner neuf millions de nombres

Repères vidéo : 00:52:10 à 01:01:50.

ÉNONCÉ

Combien d'entiers positifs à sept chiffres ont une somme des chiffres paire ? Ce nombre s'écrit $mn \cdot 10^n$, où $m, n \in \{1, \dots, 9\}$. Déterminer $m + n$.

1. Comprendre les deux parités

On étudie la somme des chiffres, pas la parité du nombre lui-même. Par exemple, 19 est impair mais $1+9=10$ est pair ; 20 est pair et $2+0=2$ est également pair.

2. Fixer les six premiers chiffres

Le premier chiffre possède 9 choix, de 1 à 9. Chacun des cinq chiffres suivants possède 10 choix, de 0 à 9. Il existe donc

$$9 \times 10^5$$

préfixes de six chiffres possibles. Pour chacun, leur somme a une parité déterminée.

3. Choisir le dernier chiffre

Si la somme du préfixe est paire, le dernier chiffre doit être parmi 0,2,4,6,8. Si elle est impaire, il doit être parmi 1,3,5,7,9. Dans les deux cas, il y a exactement 5 choix.

$$N = 9 \times 10^5 \times 5 = \boxed{4\,500\,000}.$$

Il y a donc autant de nombres à somme des chiffres paire qu'impaire.

4. Déterminer m et n

$$4\,500\,000 = 9 \times 5 \times 10^5.$$

On obtient $m = 9$, $n = 5$, donc $m + n = 14$.

Pour vérifier l'unicité dans le domaine annoncé : si $n \leq 4$, alors $mn \cdot 10^n \leq 9 \cdot 4 \cdot 10^4 = 360\,000$. Si $n \geq 6$, alors $mn \cdot 10^n \geq 6 \cdot 10^6 = 6\,000\,000$. Seul $n = 5$ reste possible, puis $m = 9$ est imposé.

LE DÉTAIL QUI ÉVITE UN FAUX RAISONNEMENT

Les sommes des chiffres ne suivent pas une alternance parfaite d'un entier au suivant : 19 et 20 ont toutes deux une somme paire. Fixer le préfixe fournit une preuve complète, sans dépendre d'une alternance apparente.

02 / PROBLÈME 6 - 2/2

La formule générale et son cas limite

Repères vidéo : 01:02:05 à 01:04:04 ; justification développée.

1. Pour k chiffres, avec k au moins égal à 2

On choisit le premier chiffre de 9 façons, les $k - 2$ chiffres intermédiaires de 10^{k-2} façons, puis le dernier chiffre de 5 façons pour obtenir la parité voulue. Ainsi :

COMPTAGE GÉNÉRAL

Pour tout entier $k \geq 2$:

$$N_{\text{somme paire}} = N_{\text{somme impaire}} = 45 \times 10^{k-2}.$$

Cela représente la moitié des $9 \times 10^{k-1}$ entiers positifs à k chiffres.

Nombre de chiffres	Total	Chaque parité de somme
2	90	45
3	900	450
5	90 000	45 000
7	9 000 000	4 500 000
8	90 000 000	45 000 000
9	900 000 000	450 000 000

Les trois dernières variantes à cinq, huit et neuf chiffres répondent aux questions proposées à la fin du passage.

2. Une autre preuve : associer les nombres deux par deux

Pour chaque préfixe fixé, on associe les unités :

$$(0,1), (2,3), (4,5), (6,7), (8,9).$$

Chaque paire contient un nombre à somme des chiffres paire et un nombre à somme impaire. L'association est réversible et ne provoque aucune retenue. Elle prouve directement l'égalité des deux effectifs.

3. Attention aux nombres à un chiffre

Les entiers positifs à un chiffre sont $1, \dots, 9$: quatre ont une somme paire et cinq une somme impaire. La formule précédente ne s'applique pas à $k = 1$.

Si l'on considère les dix chiffres $0, \dots, 9$, on obtient cinq pairs et cinq impairs, mais il s'agit alors d'un ensemble différent, qui comprend zéro.

PIÈGE

Ne pas confondre « une suite de k chiffres, avec zéro initial autorisé » et « un entier positif à k chiffres ». Le premier chiffre d'un tel entier ne peut pas être zéro.

02 / PROBLÈME 7

Centrer les termes et compenser les écarts

Repères vidéo : 01:04:30 à 01:08:57.

ÉNONCÉ EN TROIS PARTIES

Pour $n \geq 2$, écrire 2^n comme somme de deux impairs consécutifs. Écrire aussi 3^n comme somme de trois entiers consécutifs, puis de trois impairs consécutifs.

1. Deux impairs consécutifs

Partons de $2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1}$. Retrancher 1 au premier terme et ajouter 1 au second conserve la somme :

$$2^n = (2^{n-1} - 1) + (2^{n-1} + 1).$$

Puisque $n \geq 2$, 2^{n-1} est pair. Les deux termes sont donc impairs, positifs et distants de 2 : ce sont bien deux impairs consécutifs. Pour $n=4$: $16=7+9$.

2. Trois entiers consécutifs

Partons de trois termes égaux à 3^{n-1} . On ajoute les décalages $-1, 0, +1$, dont la somme est nulle :

$$3^n = (3^{n-1} - 1) + 3^{n-1} + (3^{n-1} + 1).$$

Les trois termes sont consécutifs, espacés de 1. Pour $n=3$: $27=8+9+10$.

3. Trois impairs consécutifs

Le centre 3^{n-1} est impair. Pour préserver cette parité, utilisons les décalages $-2, 0, +2$:

$$3^n = (3^{n-1} - 2) + 3^{n-1} + (3^{n-1} + 2).$$

Les termes sont impairs et espacés de 2. Le plus petit est au moins $3 - 2 = 1$. Pour $n=3$: $27 = 7 + 9 + 11$.

L'ASTUCE DE CONSTRUCTION

Trouver d'abord la moyenne des termes cherchés. Placer ensuite les termes symétriquement autour de cette moyenne, avec des écarts dont la somme est nulle.

PIEGE

Des entiers consécutifs ont un écart de 1. Des impairs consécutifs ont un écart de 2. Par ailleurs, deux termes égaux comme $1 + 1$ ne sont pas deux impairs consécutifs ; la condition $n \geq 2$ dans la première partie est utile.

Contrôle du plus petit exposant

Pour $n=2$: $4=1+3$, $9=2+3+4$ et $9=1+3+5$. Toutes les constructions respectent les conditions annoncées.

02 / PROBLÈME 8 - 1/2

Une permutation de neuf entiers

Repères vidéo : 01:09:29 à 01:16:47.

ÉNONCÉ

Les nombres $a_1, \dots, a_9$ sont une permutation de $1, \dots, 9$: chacun de ces neuf nombres apparaît exactement une fois. Montrer que

$$P = (a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_9 - 9)$$

est pair.

1. Comprendre le mot permutation

Une permutation change l'ordre, sans ajouter ni retirer d'élément. Pour trois lettres, les six ordres possibles sont :

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Pour les neuf nombres de l'énoncé, on a toujours

$$a_1 + \cdots + a_9 = 1 + \cdots + 9 = 45.$$

2. Supposer que le produit est impair

Un produit est impair seulement si chacun de ses facteurs est impair. Si P était impair, les neuf entiers

$$a_1 - 1, a_2 - 2, \dots, a_9 - 9$$

seraient tous impairs. Leur somme serait alors impaire, puisqu'elle comporterait neuf termes impairs.

3. Calculer cette somme autrement

$$\begin{aligned}(a_1 - 1) + \cdots + (a_9 - 9) &= (a_1 + \cdots + a_9) - (1 + \cdots + 9) \\ &= 45 - 45 = 0.\end{aligned}$$

Or zéro est pair. La contradiction montre que tous les facteurs ne peuvent pas être impairs. Au moins un facteur est pair, donc le produit est pair.

CONCLUSION

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_9 - 9) \text{ est pair.}$$

ASTUCE

Lorsqu'un produit doit être pair, chercher un facteur pair. Si aucun facteur particulier ne se distingue, supposer tous les facteurs impairs et étudier leur somme peut débloquent le problème.

PIÈGE

Le produit peut être nul : si un $a_i = i$, un facteur vaut zéro. Cela convient parfaitement, car zéro est pair. Il n'est pas permis de diviser par les facteurs sans vérifier qu'ils sont non nuls.

02 / PROBLÈME 8 - 2/2

Pourquoi le nombre neuf est important

Complément pédagogique : généralisation et seconde méthode.

1. La preuve fonctionne pour tout nombre impair de termes

Soit N impair, et soit $(a_1, \dots, a_N)$ une permutation de $(1, \dots, N)$. Toujours :

$$\sum_{i=1}^N (a_i - i) = 0.$$

Si tous les facteurs étaient impairs, leur somme, constituée d'un nombre impair de termes impairs, serait impaire. C'est impossible. Par conséquent :

$$\prod_{i=1}^N (a_i - i) \text{ est pair si } N \text{ est impair.}$$

Les symboles $\sum$ et $\prod$ désignent respectivement une somme et un produit de tous les termes indiqués.

2. Une lecture directe avec cinq places et quatre nombres

Parmi les indices $1, \dots, 9$, cinq sont impairs : $1, 3, 5, 7, 9$. Si tous les facteurs $a_i - i$ étaient impairs, chaque a_i placé à un indice impair devrait être pair.

Il faudrait donc placer cinq nombres pairs distincts à ces cinq positions. Or la liste $1, \dots, 9$ ne contient que quatre pairs : $2, 4, 6, 8$. C'est impossible. C'est une application du principe suivant : on ne peut pas remplir cinq places par cinq objets distincts si l'on n'en possède que quatre.

3. Pour un nombre pair de termes, l'énoncé peut échouer

Pour $N = 2$, choisissons $(a_1, a_2) = (2, 1)$:

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) = (2 - 1)(1 - 2) = -1,$$

qui est impair. Plus généralement, pour $N = 2r$, échanger les nombres deux par deux donne

$$(a_1, \dots, a_{2r}) = (2, 1, 4, 3, \dots, 2r, 2r - 1).$$

Les facteurs sont $1, -1, 1, -1, \dots$; leur produit vaut $(-1)^r$, impair.

UN EXEMPLE NON NUL POUR NEUF TERMES

Choisissons $(a_1, \dots, a_9) = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1)$. Les huit premiers facteurs valent 1 et le dernier vaut $1 - 9 = -8$. Le produit vaut -8 , pair sans être nul.

ASTUCE

Une généralisation doit conserver l'hypothèse qui fait fonctionner la preuve. Ici, ce n'est pas la valeur précise 9 qui compte : c'est le nombre impair de facteurs.

02 / PROBLÈME 9 - 1/2

Une somme cyclique de quotients

Repères vidéo : 01:17:36 à 01:24:58.

ÉNONCÉ

Soient $x_1, \dots, x_n \in \{+1, -1\}$, où $n \geq 1$. On suppose

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} = 0.$$

Montrer que n est divisible par 4. Pour $n = 1$, la somme cyclique se réduit à $x_1/x_1 = 1$, donc l'hypothèse n'est pas satisfaite.

1. Remplacer les quotients par des signes simples

Posons $x_{n+1} = x_1$ et

$$y_i = \frac{x_i}{x_{i+1}} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Les dénominateurs sont non nuls. Chaque quotient vaut $+1$ ou -1 :

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{-1}{-1} = 1, \quad \frac{1}{-1} = -1, \quad \frac{-1}{1} = -1.$$

L'hypothèse devient $y_1 + \dots + y_n = 0$.

2. Compter les signes positifs et négatifs

Notons p le nombre de termes égaux à $+1$ et q le nombre de termes égaux à -1 . Le nombre total de termes est

$$p + q = n.$$

Leur somme vaut $p - q$. Puisqu'elle est nulle, $p - q = 0$, donc $p = q$. Par conséquent :

$$n = 2q.$$

Nous savons déjà que n est pair. Il reste à montrer que q est pair pour obtenir un facteur 4.

OÙ CHERCHER L'INFORMATION MANQUANTE ?

La somme nous donne autant de signes positifs que négatifs. Pour connaître la parité du nombre de signes négatifs, étudions le produit : il vaut $(-1)^q$.

PIÈGE

S'arrêter à $n = 2q$ ne répond pas entièrement à la question. Tous les multiples de 4 sont pairs, mais un entier pair, comme 6, n'est pas nécessairement multiple de 4.

02 / PROBLÈME 9 - 2/2

Le produit fait apparaître le facteur quatre

Repères vidéo : 01:25:16 à 01:28:40 ; exemple ajouté.

3. Multiplier tous les quotients

$$y_1 y_2 \cdots y_n = \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_3} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n} \frac{x_n}{x_1} = 1.$$

Chaque x_i apparaît une fois au numérateur et une fois au dénominateur. Tous se simplifient : c'est un produit télescopique.

4. Relier ce produit au nombre de signes négatifs

Les p signes positifs ne changent pas le produit ; les q signes négatifs donnent

$$y_1 \cdots y_n = 1^p (-1)^q = (-1)^q.$$

Donc $(-1)^q = 1$, ce qui impose $q = 2r$ pour un entier r . Comme $n = 2q$:

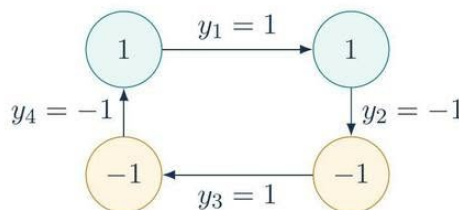
CONCLUSION

$$n = 2(2r) = 4r.$$

Le nombre de termes est divisible par 4.

5. Vérifier qu'une configuration existe

Pour $n = 4$, choisissons $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, -1, -1)$. Les quotients sont $(1, -1, 1, -1)$, de somme nulle.



Pour tout $n = 4r$ avec $r \geq 1$, répéter le bloc $(1, 1, -1, -1)$ donne également une somme cyclique nulle. C'est un complément qui montre que la condition est aussi réalisable pour chaque multiple positif de 4.

ASTUCE

Dans une expression cyclique, le dernier terme qui revient au premier est décisif. Sans le quotient x_n/x_1 , la simplification complète du produit ne serait plus garantie.

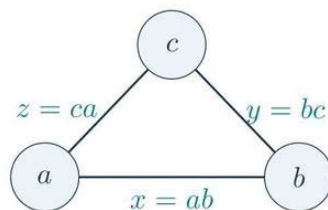
03 / PROBLÈME 10

Six signes sur un triangle

Repères vidéo : 01:29:40 à 01:38:49.

ÉNONCÉ

Aux sommets d'un triangle, on place $a, b, c \in \{+1, -1\}$ avec $abc = 1$. Chaque côté reçoit le produit de ses extrémités : $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$. La somme des six nombres peut-elle être nulle ?



1. Ce qu'impliquerait une somme nulle

Les six nombres valent tous $+1$ ou -1 . Si leur somme était nulle, il y aurait trois $+1$ et trois -1 . Leur produit vaudrait donc $(-1)^3 = -1$.

2. Calculer le même produit à partir des sommets

$$abcxyz = abc(ab)(bc)(ca) = a^3b^3c^3 = (abc)^3 = 1.$$

La dernière égalité utilise l'hypothèse $abc = 1$. Le produit ne peut pas valoir à la fois 1 et -1 .

CONCLUSION

La somme des six nombres ne peut pas être nulle.

3. Complément : trouver les valeurs exactes de la somme

De $abc = 1$ et $c^2 = 1$, on déduit $ab = c$. De même, $bc = a$ et $ca = b$. Ainsi :

$$a+b+c+ab+bc+ca=2(a+b+c).$$

Le produit $abc = 1$ impose zéro ou deux signes négatifs parmi a, b, c . Avec zéro signe négatif, la somme totale vaut 6 ; avec deux, elle vaut -2 . Ce sont les seules valeurs possibles.

PIÈGE

La condition $abc = 1$ est essentielle. Avec $(a, b, c) = (-1, 1, 1)$, elle n'est pas satisfaite, et la somme des six signes vaut bien zéro. On ne doit pas supprimer cette hypothèse.

03 / QUESTION OUVERTE - 1/2

Peut-on faire la même chose sur un polygone ?

Repères vidéo : 01:39:08 à 01:39:44 ; résolution ajoutée.

GÉNÉRALISATION PRÉCISÉE

Sur un polygone à $n \geq 3$ sommets, placer $a_1, \dots, a_n \in \{+1, -1\}$ avec $\prod a_i = 1$. Le côté i reçoit $b_i = a_i a_{i+1}$, avec $a_{n+1} = a_1$. La somme des $2n$ nombres peut-elle être nulle ?

Le cours invite à examiner carré, pentagone, hexagone puis polygone. Nous conservons ici la condition de produit des sommets égale à 1 du problème du triangle.

1. Le produit de tous les côtés

Chaque sommet apparaît dans deux côtés :

$$b_1 \cdots b_n = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \cdots (a_n a_1) = a_1^2 \cdots a_n^2 = 1.$$

Le produit des $2n$ nombres, sommets et côtés réunis, vaut donc 1.

2. Une condition nécessaire

Si la somme des $2n$ signes était nulle, il y aurait n signes positifs et n signes négatifs. Leur produit vaudrait $(-1)^n$. Ainsi :

$$(-1)^n = 1, \quad \text{donc } n \text{ est pair.}$$

Pour un triangle, un pentagone ou tout polygone ayant un nombre impair de sommets, la somme nulle est impossible.

3. Deux exemples pour un nombre pair de sommets

	Carré	Hexagone
Sommets, dans l'ordre	$-1, -1, 1, 1$	$-1, 1, 1, -1, 1, 1$
Somme des sommets	0	2
Somme des côtés	0	-2
Somme totale	0	0
Produit des sommets	1	1

Ces exemples montrent que la somme nulle est réalisable pour $n = 4$ et $n = 6$. La page suivante construit une configuration pour chaque entier pair $n \geq 4$.

NE PAS S'ARRÊTER À MI-CHEMIN

La parité fournit une obstruction pour n impair. Pour conclure « si et seulement si n est pair », il faut encore prouver l'existence pour tous les n pairs.

03 / QUESTION OUVERTE - 2/2

Construire tous les polygones pairs

Complément pédagogique : une construction complète.

1. Compter les sommets négatifs et les changements de signe

Notons r le nombre de sommets négatifs et e le nombre de côtés négatifs. Un côté est négatif exactement lorsque ses deux extrémités ont des signes différents.

Les sommes des sommets et des côtés valent respectivement $n - 2r$ et $n - 2e$. La somme totale vaut donc

$$S = 2n - 2(r + e).$$

Elle est nulle si et seulement si $r + e = n$. La condition de produit des sommets impose que r soit pair.

2. Premier cas : $n = 4k$

Pour $k \geq 1$, plaçons les signes en répétant le bloc

$$(-1, -1, +1, +1)$$

k fois autour du polygone. Chaque bloc apporte deux sommets négatifs et deux changements de signe, en comptant la transition vers le bloc suivant.

$$r = 2k, \quad e = 2k, \quad r + e = 4k = n.$$

Le produit des sommets vaut 1 et la somme totale vaut zéro.

3. Second cas : $n = 4k + 2$

Pour $k \geq 1$, commençons par le bloc de six signes

$$(-1, +1, +1, -1, +1, +1),$$

puis ajoutons $k-1$ blocs $(-1, -1, +1, +1)$. Le bloc de six apporte deux sommets négatifs et quatre changements de signe, transition finale comprise. Chaque bloc de quatre en apporte deux et deux. Ainsi :

$$r = 2 + 2(k - 1) = 2k, \quad e = 4 + 2(k - 1) = 2k + 2.$$

Donc $r + e = 4k + 2 = n$ et, là encore, le produit des sommets vaut 1.

CONCLUSION

Sous les conditions précisées p. 24, la somme des sommets et des côtés peut être nulle si et seulement si n est pair.

ASTUCE

Quand les valeurs possibles sont seulement $+1$ et -1 , une somme se ramène à un comptage. Sur un cycle, un produit d'extrémités traduit un changement de signe : cela permet de remplacer le dessin par deux nombres r et e .

03 / PROBLÈME 11 - 1/2

Huit sommets et six faces d'un cube

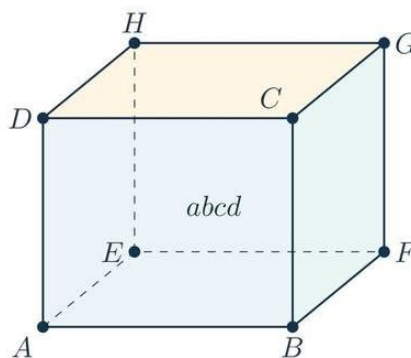
Repères vidéo : 01:40:26 à 01:43:52 ; problème laissé à chercher.

ÉNONCÉ

À chacun des huit sommets d'un cube, on écrit $+1$ ou -1 . Sur chaque face, on écrit le produit des quatre nombres placés à ses sommets. La somme des huit nombres des sommets et des six nombres des faces peut-elle être nulle ?

1. Comprendre les quatorze nombres

Il y a huit signes aux sommets et six signes sur les faces. Chaque produit de quatre signes vaut encore $+1$ ou -1 . Les quatorze nombres sont donc tous des signes.



On note a, b, c, d, e, f, g, h les signes aux sommets A, B, C, D, E, F, G, H du schéma.

Face	Produit	Face	Produit
ABCD	$abcd$	EFGH	$efgh$
ABFE	$abfe$	DCGH	$dcgh$
ADHE	$adhe$	BCGF	$bcgf$

2. L'idée qui évite les nombreux essais

Au lieu d'examiner les $2^8 = 256$ façons de choisir les signes des sommets, calculons le produit des quatorze nombres. La question essentielle est : combien de fois chaque sommet y apparaît-il ?

ASTUCE

Chaque sommet du cube appartient exactement à trois faces. Cette donnée géométrique permet de contrôler le signe du produit total.

03 / PROBLÈME 11 - 2/2

Chaque sommet apparaît quatre fois

Correction complète du problème du cube.

1. Calculer le produit des six nombres des faces

Posons $V = abcdefgh$, produit des huit signes des sommets. Chaque sommet appartient à trois faces, donc, dans le produit de tous les nombres des faces, chaque lettre apparaît trois fois :

$$F = a^3 b^3 c^3 d^3 e^3 f^3 g^3 h^3 = V^3.$$

2. Inclure les nombres écrits aux sommets

Le produit des quatorze nombres vaut

$$P = V \cdot F = V^4.$$

Puisque V vaut $+1$ ou -1 , sa puissance quatrième vaut toujours 1 :

$$P = 1.$$

On peut aussi dire que chaque signe intervient une fois comme sommet et trois fois par ses faces, soit quatre fois au total.

3. Montrer qu'une somme nulle est impossible

Si les quatorze signes avaient une somme nulle, il y aurait exactement sept $+1$ et sept -1 . Leur produit serait alors

$$1^7 (-1)^7 = -1.$$

C'est incompatible avec $P = 1$. On obtient une contradiction.

CONCLUSION

La somme des huit signes des sommets et des six signes des faces du cube ne peut jamais être nulle.

4. Complément : une information plus précise

Puisque leur produit vaut 1 , le nombre q de signes négatifs parmi les quatorze est pair. Leur somme vaut

$$S = (14 - q) - q = 14 - 2q.$$

En écrivant $q = 2r$, on obtient $S = 14 - 4r$, de reste 2 dans la division par 4 . Zéro, qui a pour reste 0 , est donc interdit.

PIÈGE

Contrairement au triangle, il n'est pas nécessaire d'imposer que le produit des signes des sommets soit égal à 1 . Ici, même si $V = -1$, on a $V^4 = 1$. Le cube fournit automatiquement la contrainte utile.

L'ASTUCE DE COMPTAGE

Dans un produit construit à partir d'une figure, compter les occurrences de chaque variable. Un nombre pair d'occurrences d'un signe ± 1 le fait disparaître du produit final.

04 / PROBLÈME 12 ET THÉORÈME

Le carré d'un impair moins un

Repères vidéo : 01:44:37 à 01:49:56.

LE JEU PROPOSÉ

Choisir un entier impair, l'élever au carré, retrancher 1, puis diviser par 8. Pourquoi obtient-on toujours un entier ?

1. Écrire l'impair sous sa forme générale

Soit $a = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En développant :

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1.$$

Les entiers k et $k + 1$ sont consécutifs. L'un des deux est pair ; leur produit est donc pair. Il existe un entier q tel que $k(k + 1) = 2q$. Ainsi :

$$a^2 = 4(2q) + 1 = 8q + 1.$$

CONCLUSION

Pour tout entier impair a :

$$8 \mid (a^2 - 1) \quad \text{et} \quad \frac{a^2 - 1}{8} \in \mathbb{Z}.$$

Le symbole $8 \mid (a^2 - 1)$ signifie que 8 divise $a^2 - 1$.

2. Les exemples du jeu

a	$a^2 - 1$	$(a^2 - 1)/8$
5	24	3
7	48	6
13	168	21
-3	8	1
1 ou -1	0	0

3. Complément : une preuve par factorisation

$$a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1).$$

Les deux facteurs sont pairs et espacés de 2. L'un est divisible par 4 et l'autre par 2 ; leur produit est donc divisible par 8. Cela reste vrai lorsqu'un facteur vaut zéro.

ASTUCE

Le facteur 8 vient de deux informations combinées : les voisins d'un impair sont pairs, et parmi deux pairs consécutifs, l'un est un multiple de 4.

04 / LES CARRÉS ET LEURS RESTES

Une condition nécessaire n'est pas suffisante

Repères vidéo : 01:46:17 à 01:52:54.

1. Les formes garanties pour un carré

Si $a = 2k$ est pair, alors $a^2 = 4k^2$ est divisible par 4. Si a est impair, la page précédente donne $a^2 = 8q + 1$, donc aussi une expression de la forme $4r + 1$.

RESTES DES CARRÉS

Dans la division par 4, un carré a pour reste 0 ou 1.

Dans la division par 8, un carré impair a pour reste 1.

Précision ajoutée : un carré pair s'écrit $4k^2$. Si k est pair, ce nombre est divisible par 8 ; si k est impair, il laisse le reste 4. Ainsi, tous les carrés entiers ont pour restes possibles 0, 1, 4 modulo 8.

2. Pourquoi la réciproque est fausse

« Tout carré impair est de la forme $8q + 1$ » ne signifie pas « tout nombre de la forme $8q + 1$ est un carré ».

q	$8q + 1$	Est-ce un carré ?
1	9	oui : 3^2
2	17	non : $4^2 < 17 < 5^2$
3	25	oui : 5^2
4	33	non : $5^2 < 33 < 6^2$
5	41	non : $6^2 < 41 < 7^2$
6	49	oui : 7^2

Le seul exemple 17 suffit déjà à réfuter la réciproque.

3. Utiliser correctement un test de reste

Un nombre positif de reste 2, 3, 5, 6 ou 7 modulo 8 n'est pas un carré. Si son reste appartient à $\{0, 1, 4\}$, le test n'a pas suffi à conclure : il faut poursuivre.

EXEMPLES DE DÉCISION

$2026 = 8 \cdot 253 + 2$ n'est pas un carré.

$2025 = 8 \cdot 253 + 1$ passe le test ; un calcul supplémentaire donne $2025 = 45^2$.

$2033 = 8 \cdot 254 + 1$ passe aussi le test, mais $45^2 < 2033 < 46^2$: ce n'est pas un carré.

PIÈGE

Un test nécessaire peut éliminer des candidats. Le réussir ne garantit pas que le candidat possède la propriété recherchée.

04 / PROBLÈME 13

La somme de huit carrés impairs

Repères vidéo : 01:53:38 à 01:57:30.

ÉNONCÉ

Les entiers $a_1, a_2, \dots, a_8$ sont impairs. Montrer que

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2$$

est divisible par 8.

1. Appliquer le théorème à chaque terme

Pour chaque indice i , il existe un entier q_i tel que

$$a_i^2 = 8q_i + 1.$$

On utilise des paramètres différents : rien n'impose que les huit carrés soient égaux.

2. Additionner les huit égalités

$$\begin{aligned} a_1^2 + \dots + a_8^2 &= (8q_1 + 1) + \dots + (8q_8 + 1) \\ &= 8(q_1 + \dots + q_8) + 8 \\ &= 8(q_1 + \dots + q_8 + 1). \end{aligned}$$

L'expression entre parenthèses est entière.

CONCLUSION

$$8 \mid (a_1^2 + \dots + a_8^2).$$

3. Vérifier sur un exemple

Avec les huit impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 :

$$1 + 9 + 25 + 49 + 81 + 121 + 169 + 225 = 680 = 8 \times 85.$$

Cet exemple illustre le résultat ; la démonstration précédente couvre tous les choix.

4. Généralisation proposée dans le cours

Pour r entiers impairs :

$$a_1^2 + \dots + a_r^2 = 8Q + r$$

pour un certain entier Q . La somme a donc le même reste que r dans la division par 8. Elle est divisible par 8 si et seulement si r est multiple de 8.

Ainsi 16, 24 ou 32 carrés impairs donnent une somme divisible par 8 ; six ou sept carrés impairs n'en donnent jamais une.

ASTUCE

Quand tous les termes ont le même reste, additionner revient à compter les restes. Ici chaque carré apporte 1 ; huit apports de 1 produisent le facteur 8.

04 / PROBLÈME 14

Tout impair est une différence de carrés

Repères vidéo : 01:57:59 à 02:00:08.

ÉNONCÉ

Montrer que tout entier impair peut s'écrire comme différence des carrés de deux entiers.

1. Partir de la forme d'un impair

Soit $N = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{Z}$. L'expression $2k + 1$ ressemble à $(k + 1)^2$ auquel il manquerait k^2 . Ajoutons et retranchons donc k^2 :

$$\begin{aligned} N = 2k + 1 &= k^2 + 2k + 1 - k^2 \\ &= (k + 1)^2 - k^2. \end{aligned}$$

Les nombres $k + 1$ et k sont bien des entiers.

CONCLUSION

$$2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2.$$

Tout impair est une différence de deux carrés d'entiers consécutifs.

2. Une formule directement en fonction de N

Comme $k = (N - 1)/2$:

$$N = \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{N-1}{2}\right)^2 \quad (N \text{ impair}).$$

Les deux bases sont entières puisque $N - 1$ et $N + 1$ sont pairs.

3. Exemples positifs, nul parmi les bases et négatifs

$$7 = 4^2 - 3^2, \quad 15 = 8^2 - 7^2, \quad 1 = 1^2 - 0^2.$$

Pour $N = -7$, on prend $k = -4$:

$$-7 = (-3)^2 - (-4)^2 = 9 - 16.$$

La construction vaut donc aussi pour les impairs négatifs.

L'ASTUCE « AJOUTER ET RETRANCHER »

Ajouter puis retrancher une même quantité ne modifie pas l'expression. On choisit cette quantité pour compléter une identité remarquable. Ici, k^2 transforme $2k + 1$ en un carré reconnaissable.

PIÈGE

Les deux bases sont annoncées entières, pas forcément strictement positives. Pour $N = 1$, la construction utilise zéro ; cette nuance sera importante au problème 15.

04 / COMPLÉMENT AUX PROBLÈMES 4 ET 14

Quels entiers sont des différences de carrés ?

Synthèse développée à partir des deux problèmes du cours.

CARACTÉRISATION

Un entier N s'écrit $u^2 - v^2$, avec $u, v \in \mathbb{Z}$, si et seulement si N n'est pas de la forme $4k + 2$.

1. Pourquoi la forme $4k + 2$ est impossible

Si $N = u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ est pair, les deux facteurs ont la même parité et sont donc tous deux pairs. Leur produit est divisible par 4. Une différence de carrés paire ne peut donc pas laisser le reste 2.

2. Construire tous les impairs

Pour $N = 2k + 1$, la page précédente fournit

$$N = (k + 1)^2 - k^2.$$

Cela traite aussi les impairs négatifs.

3. Construire tous les multiples de 4

Pour $N = 4k$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$(k + 1)^2 - (k - 1)^2 = k^2 + 2k + 1 - (k^2 - 2k + 1) = 4k.$$

Donc

$$4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2.$$

Pour $k = 0$, on obtient $0 = 1^2 - (-1)^2$.

N	Nature	Construction ou impossibilité
9	impair	$9 = 5^2 - 4^2$
12	multiple de 4	$12 = 4^2 - 2^2$
-8	multiple de 4	$-8 = (-1)^2 - (-3)^2$
2026 reste 2 modulo 4 impossible		

4. Le lien avec une factorisation

Écrire $N = rs$ avec des facteurs r, s de même parité permet de poser

$$u = \frac{r + s}{2}, \quad v = \frac{s - r}{2}.$$

Les deux bases sont entières et $u^2 - v^2 = rs = N$. La condition de même parité est exactement celle qui rend les deux demi-sommes entières.

ASTUCE

Les deux constructions précédentes correspondent à des facteurs simples : $(1, N)$ pour un impair, et $(2, 2k)$ pour $N = 4k$.

04 / PROBLÈME 15 - 1/2

Compléter deux carrés : le cas pair

Repères vidéo : 02:00:33 à 02:06:39 ; domaine corrigé.

VERSION TOUJOURS VRAIE

Soient a, b des entiers strictement positifs, avec ab pair. Construire des entiers strictement positifs c, d tels que

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2.$$

L'oral annonce des entiers a, b sans toujours exclure zéro. Avec cette formulation plus large et $c, d > 0$, certains cas échouent. Ils sont étudiés à la page suivante.

1. Poser la quantité à représenter

Notons $S = a^2 + b^2$. On cherche $S = d^2 - c^2$. Puisque ab est pair, au moins l'un des deux nombres est pair. Deux cas restent possibles.

2. Cas de parités différentes

Alors S est impair. Posons

$$c = \frac{S-1}{2}, \quad d = \frac{S+1}{2}.$$

Les deux nombres sont entiers. Comme $a, b \geq 1$ et l'un est pair, $S \geq 1^2 + 2^2 = 5$, donc $c \geq 2$ et $d \geq 3$. Enfin :

$$d^2 - c^2 = (d-c)(d+c) = 1 \cdot S = S.$$

Exemple : $a = 1, b = 2$ donne $S = 5, c = 2, d = 3$:

$$1^2 + 2^2 + 2^2 = 9 = 3^2.$$

3. Cas de deux nombres pairs

Leurs carrés sont multiples de 4, donc $S = 4t$ avec $t \in \mathbb{Z}$. Comme a, b sont pairs strictement positifs, $S \geq 8$, donc $t \geq 2$. Posons :

$$c = t - 1 = \frac{S}{4} - 1, \quad d = t + 1 = \frac{S}{4} + 1.$$

Ils sont strictement positifs, et $d^2 - c^2 = (t+1)^2 - (t-1)^2 = 4t = S$.

CONCLUSION

Dans les deux cas, les valeurs construites donnent bien $S + c^2 = d^2$ avec $c, d \in \mathbb{N}^*$.

ASTUCE

L'écriture du cours $S = 4k + 4$ correspond à $t = k+1$. On prend alors $c = k$ et $d = k+2$. C'est la même construction avec un paramètre décalé.

04 / PROBLÈME 15 - 2/2

Les cas limites que l'énoncé doit préciser

Correction mathématique de la formulation avec a et b entiers quelconques.

1. Pourquoi « entiers » et « strictement positifs » changent tout

Si a, b peuvent être nuls, le seul fait que ab soit pair ne garantit pas des c, d strictement positifs. Considérons a = 1, b = 0. Le produit est pair, mais l'égalité demandée devient :

$$d^2 - c^2 = 1.$$

Avec c, d ≥ 1, on aurait d > c, donc d ≥ c + 1 et

$$d^2 - c^2 \geq (c + 1)^2 - c^2 = 2c + 1 \geq 3.$$

Le résultat 1 est impossible.

2. Le second cas exceptionnel

Pour a = 2, b = 0, il faut d² - c² = 4. Les facteurs d - c et d + c seraient positifs, de même parité et de produit 4. Seul le couple (2, 2) a la même parité, mais il donne c = 0. Il n'y a donc pas de solution avec c > 0.

3. Une formulation complète pour a et b dans Z

Supposons toujours ab pair et posons S = a² + b². Alors S est impair ou multiple de 4. Les possibilités sont :

Valeur de S	Des c et d strictement positifs ?
S = 0	Oui : a = b = 0, puis choisir c = d = 1.
S = 1 ou S = 4	Non : les deux obstructions viennent d'être prouvées.
S > 1 impair	Oui : c = (S - 1)/2, d = (S + 1)/2.
S ≥ 8 multiple de 4	Oui : c = S/4 - 1, d = S/4 + 1.

CONCLUSION

Pour a, b ∈ Z avec ab pair, des c, d ∈ N* existent exactement lorsque a² + b² ∉ {1, 4}.

4. Si zéro est autorisé pour c

Si l'on demande seulement c, d ∈ N, les exceptions disparaissent : 1 = 1² - 0² et 4 = 2² - 0². La version sans contrainte de positivité stricte est alors vraie pour tous a, b ∈ Z avec ab pair.

PIÈGE

Une formule peut satisfaire l'égalité tout en violant le domaine. Après avoir construit c et d, vérifier séparément qu'ils sont entiers et qu'ils ont le signe exigé.

04 / PROBLÈME 16

Pourquoi le cas impair est impossible

Repères vidéo : 02:06:44 à 02:11:46.

ÉNONCÉ

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que ab soit impair. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers strictement positifs c, d vérifiant

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2.$$

1. Dédurre la parité de a et b

Puisque leur produit est impair, a et b sont tous deux impairs. Il existe donc des entiers u, v tels que

$$a^2 = 8u + 1, \quad b^2 = 8v + 1.$$

Par conséquent :

$$a^2 + b^2 = 8(u + v) + 2.$$

Cette somme est paire mais n'est pas divisible par 4.

2. Supposer une solution et factoriser

Si l'égalité annoncée existait, on aurait

$$a^2 + b^2 = d^2 - c^2 = (d - c)(d + c).$$

Le produit de droite serait pair. Ses facteurs $d - c$ et $d + c$ ont la même parité ; ils seraient donc tous deux pairs. Leur produit serait alors divisible par 4.

3. Repérer la contradiction

Le membre gauche laisse le reste 2 dans la division par 4, tandis que le membre droit serait divisible par 4. Ils ne peuvent pas être égaux.

CONCLUSION

L'égalité est impossible. La preuve exclut même tous les $c, d \in \mathbb{Z}$, sans avoir besoin de leur positivité.

COMPLEMENT : UNE VERSION COURTE MODULO 4

Les carrés de a et de b ont chacun pour reste 1 modulo 4. Ainsi $a^2 + b^2$ a pour reste 2. Or une différence de carrés n'a jamais ce reste. Le résultat suit immédiatement du problème 4.

Un exemple pour comprendre l'obstacle

Avec $a = b = 1$, on chercherait $d^2 - c^2 = 2$. Aucune différence de carrés entiers ne vaut 2 : les carrés successifs 0, 1, 4, 9, 16, ... ne fournissent pas un tel écart, et la preuve de parité exclut tous les autres couples.

ASTUCE

Les problèmes 15 et 16 utilisent la même transformation $a^2 + b^2 = d^2 - c^2$. La parité de ab décide si une construction est possible, avec les précisions de domaine de la page précédente.

04 / PROBLÈME 17

Deux entiers consécutifs et leur produit

Repères vidéo : 02:12:17 à 02:16:12.

ÉNONCÉ

Soient a, b deux entiers strictement positifs consécutifs et $c = ab$. On pose

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Montrer que cette quantité est un entier impair.

1. Lire les parités avant de développer

Deux entiers consécutifs ont des parités différentes. L'un des carrés a^2 , b^2 est donc pair et l'autre impair ; leur somme est impaire.

De plus, $c = ab$ est pair, car le produit contient un facteur pair. Son carré c^2 est pair. Ainsi :

$$a^2 + b^2 + c^2 = \underbrace{(a^2 + b^2)}_{\text{impair}} + \underbrace{c^2}_{\text{pair}}$$

est impair.

CONCLUSION

$$a^2 + b^2 + (ab)^2 \text{ est un entier impair.}$$

2. Complément : c'est même un carré explicite

L'écriture m^2 suggère une question supplémentaire : la somme est-elle effectivement un carré entier ? Oui, car $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ pour deux entiers consécutifs. Donc :

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2.$$

En ajoutant $(ab)^2$:

$$a^2 + b^2 + (ab)^2 = (ab)^2 + 2ab + 1 = (ab + 1)^2.$$

On peut donc prendre $m = ab + 1$. Ce nombre est impair puisque ab est pair.

EXEMPLES

Pour $(a, b) = (1, 2)$, $c = 2$ et $1 + 4 + 4 = 9 = 3^2$.

Pour $(a, b) = (2, 3)$, $c = 6$ et $4 + 9 + 36 = 49 = 7^2$.

Pour $(a, b) = (3, 4)$, $c = 12$ et $9 + 16 + 144 = 169 = 13^2$.

ASTUCE

Pour répondre uniquement à une question de parité, les signes « pair » et « impair » peuvent suffire. Chercher ensuite une identité exacte permet d'obtenir un résultat plus fort, comme ici $m = ab + 1$.

04 / PROBLÈME 18 ET DEVOIR

Trois carrés et un multiple de quatre

Repères vidéo : 02:16:31 à 02:23:10.

ÉNONCÉ

Soient $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Si $k^2 + m^2 + n^2$ est divisible par 4, montrer que k, m, n sont tous pairs. Trouver aussi une preuve courte, comme demandé à la fin du passage.

1. La méthode par cas du cours

Le carré d'un pair a pour reste 0 modulo 4 ; celui d'un impair a pour reste 1. On peut donc classer les possibilités par le nombre d'entiers impairs parmi k, m, n :

Nombre d'impairs	Reste de la somme modulo 4	Conclusion
0	0	compatible
1	1	impossible
2	2	impossible
3	3	impossible

Seule la première ligne convient : aucun des trois entiers n'est impair.

2. Le devoir : une preuve courte par l'absurde

Supposons qu'au moins l'un des trois entiers soit impair, et notons r le nombre d'impairs. Alors $1 \leq r \leq 3$.

Chaque carré impair s'écrit $4q_i + 1$ et chaque carré pair $4q_i$. Leur somme s'écrit donc $4Q + r$ pour un entier Q . Si cette somme est divisible par 4, r l'est aussi. Or aucun entier de 1 à 3 n'est divisible par 4 : contradiction.

CONCLUSION

k, m, n sont tous pairs.

3. Complément : pourquoi trois termes comptent

Pour une somme quelconque de carrés entiers, le reste modulo 4 est celui du nombre de bases impaires. Si la somme est divisible par 4, ce nombre est un multiple de 4.

Avec trois bases, il doit être nul. Avec quatre bases, il pourrait valoir 4 : $1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$ est divisible par 4, alors que les quatre bases sont impaires.

PIÈGE

On ne peut donc pas remplacer « trois carrés » par « un nombre quelconque de carrés » en conservant la conclusion « toutes les bases sont paires ».

05 / PROBLÈME 19

Les traversées d'une rivière

Repères vidéo : 02:24:07 à 02:28:56.

ÉNONCÉ

Une barque part de la rive gauche et traverse plusieurs fois une rivière, chaque traversée l'amenant sur l'autre rive. Si elle revient sur la rive gauche, le nombre de traversées est-il pair ou impair ? Et si elle termine sur la rive droite ?

1. Observer les premiers déplacements

Traversées effectuées	Position	Parité du nombre
0	gauche	paire
1	droite	impaire
2	gauche	paire
3	droite	impaire
4	gauche	paire

2. Justifier la règle pour n'importe quel nombre

Deux traversées successives ramènent toujours à la rive de départ. Après $2k$ traversées, on peut former k paires : la barque est sur la rive gauche.

Après $2k + 1$ traversées, les $2k$ premières la ramènent à gauche et la dernière l'emmène à droite.

CONCLUSION

Depuis la rive gauche : un nombre pair de traversées conduit à gauche ; un nombre impair conduit à droite.

3. Les variantes proposées

= Après 2026 traversées : même rive qu'au départ.

= Après 2025, 2027, 2029 ou 2031 traversées : rive opposée.

= Si la barque part de droite, le principe est identique : pair signifie même rive, impair signifie rive opposée.

MODÉLISER UN CHANGEMENT D'ÉTAT

Un état possède deux possibilités. Chaque action échange ces possibilités. Deux actions successives s'annulent : seule la parité du nombre d'actions détermine l'état final.

PIÈGE

On compte les traversées, pas les positions visitées. La position de départ correspond à zéro traversée ; la compter comme une traversée décale toute la réponse.

05 / PROBLÈME 20

Onze feuillets retirés d'un livre

Repères vidéo : 02:29:12 à 02:32:53.

ÉNONCÉ PRÉCISÉ

On retire onze feuillets d'un livre. Chaque feuillet comporte deux pages, recto et verso, portant des numéros consécutifs. On additionne les numéros des vingt-deux pages retirées. Cette somme S peut-elle être divisible par 4 ?

1. Distinguer page et feuillet

Dans la description orale, le mot « page » désigne parfois la feuille matérielle, portant un numéro sur chacune de ses deux faces. Le raisonnement concerne bien onze feuillets, donc vingt-deux numéros.



2. Etudier un seul feuillet

Si ses numéros sont t et $t + 1$, leur somme vaut

$$t + (t + 1) = 2t + 1,$$

qui est impaire. Cela ne dépend pas du feuillet choisi.

3. Additionner les onze contributions

Les onze feuillets donnent onze sommes impaires. Une somme d'un nombre impair de termes impairs est impaire. Ainsi S est impaire.

CONCLUSION

La somme S ne peut pas être divisible par 4, car tout multiple de 4 est pair.

4. Complément : avec la pagination usuelle

Si les paires recto-verso sont $(1,2)$, $(3,4)$, $(5,6)$,..., chaque paire s'écrit $(2k - 1, 2k)$ et a pour somme $4k - 1$.

Pour onze feuillets :

$$S = 4(k_1 + \cdots + k_{11}) - 11,$$

donc S laisse même le reste 1 dans la division par 4.

PIÈGE

Si l'on choisissait seulement onze numéros de pages isolés, la conclusion pourrait changer. Par exemple $1 + 2 + \cdots + 10 + 13 = 68$ est divisible par 4. Il faut conserver la structure recto-verso de l'énoncé.

05 / PROBLÈME 21 - 1/2

Sept lampes et 2028 pressions

Repères vidéo : 02:33:52 à 02:40:24.

ÉNONCÉ

Sept lampes A, B, C, D, E, F, G possèdent chacune un interrupteur. Au départ, A, C, E, G sont allumées et B, D, F sont éteintes. On appuie successivement sur A, B,...,G, puis on recommence à A. Quelles lampes sont allumées après 2028 pressions ?

1. Séparer les tours complets du reste

Un tour complet comporte sept pressions. La division euclidienne donne :

$$2028 = 7 \times 289 + 5.$$

Il y a 289 tours complets, puis cinq pressions supplémentaires sur A, B, C, D, E.

2. Utiliser la parité du nombre de changements

Après 289 tours, chaque lampe a changé d'état 289 fois. Ce nombre étant impair, elles sont toutes dans l'état opposé à l'état initial : seules B, D, F sont allumées.

Les cinq pressions restantes inversent de nouveau A, B, C, D, E. Les lampes F, G gardent leur état obtenu après les tours complets.

	A	B	C	D	E	F	G
Départ							
289 tours							
État final							

Les disques dorés représentent les lampes allumées ; les disques gris, les lampes éteintes.

CONCLUSION

A, C, E, F sont allumées.

3. Un contrôle direct

Les lampes A à E subissent 290 pressions chacune, donc reviennent à leur état initial. Les lampes F, G en subissent 289 : F s'allume et G s'éteint.

PIÈGE

2028 désigne le nombre total de pressions individuelles, pas le nombre de tours. Confondre les deux donne une mauvaise configuration finale.

05 / PROBLÈME 21 - 2/2

La méthode pour n lampes et m pressions

Repères vidéo : 02:40:27 à 02:41:48 ; variantes résolues.

1. Effectuer une division euclidienne

Pour $n \geq 1$ lampes et $m \geq 0$ pressions, écrire

$$m = nq + r, \quad 0 \leq r < n.$$

Il y a q tours complets, puis une pression supplémentaire sur chacune des r premières lampes.

NOMBRE DE PRESSIONS PAR LAMPE

Les r premières lampes sont actionnées q + 1 fois.

Les n — r autres sont actionnées q fois.

Un nombre pair de pressions conserve l'état initial ; un nombre impair l'inverse.

2. Une formule avec les états 0 et 1

Notons u_i l'état initial de la lampe i : 0 pour éteinte et 1 pour allumée. L'état final est le reste modulo 2 de

$$u_i + q + \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq r, \\ 0 & \text{si } i > r. \end{cases}$$

La méthode fonctionne pour n'importe quelle configuration initiale.

3. Les variantes suggérées dans la vidéo

Dans ce tableau, on conserve un départ alterné : A,C,E,... allumées, B, D, F,... éteintes. Les interrupteurs sont toujours parcourus de gauche à droite.

n	m	q	r	Lampes allumées à la fin
7	2032	290	2	B, C, E, G
7	2033	290	3	B, E, G
7	2034	290	4	B, D, E, G
7	100	14	2	B, C, E, G
4	2028	507	0	B, D
5	2028	405	3	A, C, D
6	2028	338	0	A, C, E
8	2028	253	4	A, C, F, H
9	2028	225	3	A, C, D, F, H

UN RACCOURCI PAR PERIODE

Deux tours complets, soit $2n$ pressions, rétablissent tous les états et ramènent au même prochain interrupteur. On peut donc commencer par réduire m modulo $2n$. Pour sept lampes, $2028 = 14 \cdot 144 + 12$: il suffit d'étudier 12 pressions.

05 / PROBLÈME 22 - 1/2

Sept gobelets : une configuration impossible

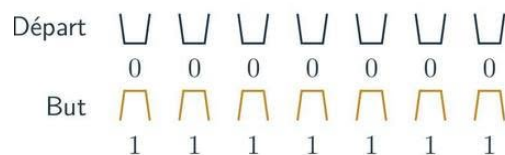
Repères vidéo : 00:01:02 à 00:04:21 et 02:43:17 à 02:49:00.

ÉNONCÉ

Sept gobelets sont initialement ouverts vers le haut. À chaque coup, on choisit exactement quatre gobelets distincts et on retourne chacun d'eux. Peut-on obtenir les sept gobelets ouverts vers le bas ?

1. Coder les deux positions

Un gobelet ouvert vers le haut reçoit la valeur 0 ; un gobelet ouvert vers le bas reçoit la valeur 1. La somme des sept valeurs est donc le nombre S de gobelets ouverts vers le bas.



Au départ, $S = 0$, pair. Dans la configuration recherchée, $S = 7$, impair.

2. Calculer l'effet d'un coup quelconque

Parmi les quatre gobelets choisis, supposons que r soient déjà ouverts vers le bas. Ces r gobelets repassent vers le haut : S diminue de r . Les $4 - r$ autres passent vers le bas : S augmente de $4 - r$.

$$S_{\text{nouveau}} = S - r + (4 - r) = S + 4 - 2r.$$

La variation $4 - 2r$ est toujours paire. La parité de S ne change donc jamais.

CONCLUSION

On part de $S = 0$, pair, et chaque coup conserve cette parité. Il est donc impossible d'atteindre $S = 7$, impair, quel que soit le nombre de coups.

L'INVARIANT

Ce n'est pas le nombre de gobelets vers le bas qui reste constant ; c'est sa parité. Il peut passer de 0 à 4, puis à 2 ou à 6, tout en restant pair.

PIÈGE

Chercher longtemps une suite de coups ne permet pas de prouver une impossibilité. L'invariant exclut d'un seul raisonnement toutes les suites de coups, même très longues.

05 / PROBLÈME 22 - 2/2

Compter les retournements de deux façons

Compléments pédagogiques au défi des gobelets.

1. Une deuxième preuve

Supposons que les sept gobelets aient finalement changé d'orientation. Chacun doit alors avoir été retourné un nombre impair de fois : un nombre pair de retournements le ramènerait à sa position initiale.

Le nombre total de retournements individuels serait donc la somme de sept nombres impairs, c'est-à-dire un nombre impair.

Mais chaque coup comporte quatre retournements. Après t coups, il y a exactement $4t$ retournements individuels, un nombre pair. Contradiction.

DEUX COMPTAGES D'UNE MÊME QUANTITÉ

Par gobelet : sept nombres impairs additionnés donnent un impair.

Par coup : quatre retournements répétés t fois donnent un pair.

Les deux comptages ne peuvent pas être simultanément vrais.

2. Généralisation utile

Si le nombre de gobelets est impair et si chaque coup en retourne un nombre pair, il est impossible de tous les inverser à partir d'une position identique. La même preuve fonctionne sans connaître précisément les deux nombres.

3. Changer les règles peut rendre le but accessible

Avec huit gobelets et quatre retournements par coup, deux coups suffisent : retourner les quatre premiers, puis les quatre derniers.

Avec sept gobelets mais trois retournements par coup, on peut retourner successivement :

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{1, 4, 5\}, \quad \{1, 6, 7\}.$$

Le gobelet 1 est retourné trois fois ; chacun des autres une fois. Tous ont subi un nombre impair de retournements et se retrouvent inversés.

Gobelet	1	2 à 7	Conclusion
Nombre de retournements	3	1 chacun	tous impairs

ASTUCE

Une impossibilité dépend des règles exactes. Après avoir trouvé un invariant, modifier le nombre d'objets ou le nombre d'objets retournés permet de comprendre quelle hypothèse produit l'obstacle.

PIÈGE

Une condition de parité compatible ne garantit pas à elle seule qu'un objectif est réalisable. Dans les deux variantes ci-dessus, ce sont les suites de coups explicites qui établissent la possibilité.

06 / S'ENTRAÎNER

Enoncés des problèmes 1 à 7

Chercher sans regarder les corrections ; préciser chaque domaine.

1. Trois sommes

Pour $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, prouver que $a+b$, $b+c$, $c+a$ ne peuvent pas être tous impairs. Donner deux démonstrations. Correction p. 11.

2. Signes et parité

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a + b + c$ pair. Montrer que $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$ sont tous pairs. Correction p. 12.

3. Quatre carrés

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ tels que $a + b + c + d$ soit impair. Déterminer la parité de

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Utiliser le carré de la somme, puis chercher une méthode plus courte.

Correction p. 13.

4. Différence de carrés

Existe-t-il $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m^2 - n^2 = 2026$? Correction p. 14.

5. Sept entiers consécutifs pairs

Sept entiers pairs consécutifs ont une somme nulle. Leur produit A est-il plus grand que $B = 2$? Trouver tous les groupes de sept entiers pairs consécutifs ayant cette somme. Correction p. 15.

6. Somme des chiffres

Compter les entiers positifs à sept chiffres dont la somme des chiffres est paire. Le nombre obtenu s'écrit $mn \cdot 10^n$ avec $m, n \in \{1, \dots, 9\}$. Trouver $m + n$.

Généraliser à $k \geq 2$ chiffres et à une somme des chiffres impaire. Que se passe-t-il pour les entiers positifs à un chiffre ? Correction p. 16 et 17.

7. Sommes de termes consécutifs

Pour $n \geq 2$, écrire :

- 2^n comme somme de deux impairs consécutifs ;
- 3^n comme somme de trois entiers consécutifs ;
- 3^n comme somme de trois impairs consécutifs.

Correction p. 18.

AVANT D'OUVRIR LA CORRECTION

Se demander : faut-il additionner, factoriser, choisir un terme central, ou fixer tous les chiffres sauf le dernier ?

06 / S'ENTRAÎNER

Énoncés des problèmes 8 à 14

Les questions sur les figures se traitent par comptage des signes.

8. Permutation

Soit $(a_1, \dots, a_9)$ une permutation de $(1, \dots, 9)$. Montrer que $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_9 - 9)$ est pair. Correction p. 19.

9. Quotients cycliques

Soient $x_1, \dots, x_n \in \{+1, -1\}$ avec $n \geq 1$ et $x_{n+1} = x_1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1}} = 0 \implies 4 \mid n.$$

Correction p. 21.

10. Triangle et polygone

Des signes a, b, c aux sommets d'un triangle vérifient $abc = 1$. Sur les côtés, on écrit ab, bc, ca . La somme des six signes peut-elle être nulle ?

Reprendre la question sur un polygone à n sommets, en conservant un produit des signes des sommets égal à 1. Correction p. 23 à 25.

11. Cube

Placer un signe ± 1 à chaque sommet d'un cube. Sur chaque face, écrire le produit de ses quatre sommets. La somme des quatorze signes peut-elle être nulle ? Correction p. 26.

12. Le jeu du carré

Pour un entier impair a , prouver que $(a^2 - 1)/8$ est entier. Tout entier de la forme $8q + 1$ est-il un carré ? Correction p. 28 et 29.

13. Huit carrés

Pour huit entiers impairs $a_1, \dots, a_8$, montrer que $a_1^2 + \dots + a_8^2$ est divisible par 8. Généraliser à r carrés impairs. Correction p. 30.

14. Construire deux carrés

Montrer que tout entier impair N s'écrit $u^2 - v^2$ avec $u, v \in \mathbb{Z}$. En complément, caractériser tous les entiers qui s'écrivent comme différence de deux carrés entiers. Correction p. 31 et 32.

06 / S'ENTRAÎNER

Énoncés des problèmes 15 à 22

Ne pas oublier les conditions de positivité et le sens de chaque action.

15. Produit pair

Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$ avec ab pair, construire $c, d \in \mathbb{N}^*$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Si l'on autorise $a, b \in \mathbb{Z}$, quels sont les cas exceptionnels ?
Correction p. 33 et 34.

16. Produit impair

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ avec ab impair, montrer que $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ est impossible avec c, d entiers. Correction p. 35.

17. Entiers consécutifs

Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$ consécutifs et $c = ab$, déterminer la parité de $a^2 + b^2 + c^2$. En complément, montrer qu'il s'agit d'un carré entier et donner sa racine positive.
Correction p. 36.

18. Trois carrés

Si $k, m, n \in \mathbb{Z}$ et $4 \mid (k^2 + m^2 + n^2)$, montrer que k, m, n sont tous pairs. Donner une preuve courte par l'absurde.
Correction p. 37.

19. Barque

Une barque part de la rive gauche et change de rive à chaque traversée. Où se trouve-t-elle après un nombre pair de traversées ? Un nombre impair ? Après 2026 traversées ?
Correction p. 38.

20. Livre

On retire onze feuillets d'un livre, chacun portant deux numéros de pages consécutifs. La somme des vingt-deux numéros peut-elle être divisible par 4 ?
Correction p. 39.

21. Interrupteurs

Au départ, parmi sept lampes $A, \dots, G$, seules A, C, E, G sont allumées. On appuie en boucle sur $A, B, \dots, G$. Quelles lampes sont allumées après 2028 pressions ? Généraliser à n lampes et m pressions.
Correction p. 40 et 41.

22. Gobelets

Sept gobelets sont ouverts vers le haut. Chaque coup en retourne exactement quatre distincts. Peut-on tous les ouvrir vers le bas ? Donner deux preuves. En complément, que se passe-t-il avec huit gobelets, ou avec trois retournements par coup ?
Correction p. 42 et 43.

07 / CONTRÔLER SON TRAVAIL

Réponses des problèmes 1 à 11

Ces résultats doivent être accompagnés d'une démonstration.

N°	Résultat et idée clé	Corr.
1	Impossible que les trois sommes soient impaires : leur somme vaut $2(a + b + c)$. Au moins une est paire.	11
2	Toutes paires : chacune vaut $S - 2a$, $S - 2b$ ou $S - 2c$, avec $S = a + b + c$ pair.	12
3	La somme des quatre carrés est impaire. Un entier et son carré ont la même parité.	13
4	Aucune solution entière : 2026 a pour reste 2 modulo 4, ce qui est impossible pour une différence de carrés.	14
5	Groupe unique : $-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$. Son produit $A = 0$ est inférieur à $B = 2$.	15
6	$4\,500\,000 = 9 \cdot 5 \cdot 10^5$; donc $m + n = 14$. Pour $k \geq 2$, chaque parité de somme compte $45 \cdot 10^{k-2}$ entiers.	16
7	Avec $u = 2^{n-1}$: $2^n = (u - 1) + (u + 1)$. Avec $v = 3^{n-1}$: $3^n = (v - 1) + v + (v + 1) = (v - 2) + v + (v + 2)$.	18
8	Le produit est pair : neuf facteurs impairs auraient une somme impaire, alors que leur somme vaut zéro.	19
9	nest multiple de 4 : la somme impose autant de signes + que - ; le produit cyclique impose un nombre pair de signes -.	21.
10	Pour le triangle avec $abc = 1$, somme nulle impossible ; seules les valeurs 6 et -2 apparaissent.	23
11	Pour le cube, somme nulle impossible : le produit des quatorze nombres vaut toujours 1, alors que sept signes négatifs donneraient -1 .	26

LA QUESTION SUR LES POLYGONES

Pour $n \geq 3$, avec un produit des signes des sommets égal à 1 et des côtés égaux aux produits de leurs extrémités, la somme totale peut être nulle exactement lorsque n est pair. Construction p. 25.

PIÈGE

Un exemple ne démontre pas une impossibilité ni une affirmation valable pour tous les choix. Les réponses ci-dessus renvoient aux preuves complètes.

07 / CONTRÔLER SON TRAVAIL

Réponses des problèmes 12 a 22

Vérifier la conclusion, mais aussi le domaine des variables.

N°	Résultat et idée clé	Corr.
12	Pour a impair, $8 \mid (a^2 - 1)$. La réciproque « $8q + 1$ est toujours un carré » est fausse : 17 est un contre-exemple.	28
13	La somme de huit carrés impairs est divisible par 8. Pour r termes impairs, cette divisibilité équivaut à $8 \mid r$.	30
14	$2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$. Plus généralement, seuls les entiers de la forme $4k + 2$ ne sont pas des différences de carrés entiers.	31
15	Poser $S = a^2 + b^2$. Pour $S > 1$ impair : $c = (S - 1)/2$, $d = (S + 1)/2$. Pour $S \geq 8$ multiple de 4 : $c = S/4 - 1$, $d = S/4 + 1$.	33
16	Aucune solution : ab impair impose $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{4}$, impossible pour $d^2 - c^2$.	35
17	La somme est impaire ; elle vaut exactement $(ab + 1)^2$. Sa racine positive est $ab + 1$, impaire.	36
18	Les trois entiers sont pairs. Le nombre d'impairs doit être multiple de 4 et est compris entre 0 et 3.	37
19	Nombre pair de traversées : même rive. Nombre impair : rive opposée. Après 2026 traversées depuis la gauche : gauche.	38
20	Non : chaque feuillet donne une somme impaire, et onze contributions impaires ont une somme impaire.	39
21	Après 2028 pressions, les lampes allumées sont A, C, E, F. Utiliser $2028 = 7 \cdot 289 + 5$.	40
22	Impossible : le nombre de gobelets ouverts vers le bas conserve une parité paire, alors que le but en exige sept.	42

LA PRÉCISION INDISPENSABLE AU PROBLÈME 15

Si a, b sont des entiers quelconques avec ab pair, des $c, d > 0$ existent sauf lorsque $a^2 + b^2 = 1$ ou 4. Pour $a = b = 0$, on peut prendre $c = d = 1$. La version avec a, b strictement positifs ne présente pas ces exceptions.

ASTUCE

Une construction doit être vérifiée dans l'égalité et dans le domaine. Une impossibilité doit exclure tous les cas, pas seulement quelques essais.

07 / UNE FICHE DE MÉTHODES

Les astuces les plus réutilisables

Choisir une idée en fonction de la forme du problème.

Ce que l'on remarque	L'astuce à essayer	Problèmes
Plusieurs expressions où les lettres reviennent	Tout additionner ; compter les occurrences.	1, 8
Un signe + remplacé par un signe -	La variation vaut deux fois un entier.	2
Des carrés dans une question de parité	Remplacer chaque carré par la parité de sa base.	3), 17
Une différence de carrés	Factoriser ; les facteurs ont la même parité.	4, 14, 16
Des termes consécutifs	Choisir un centre ; compenser les écarts.	5, 7
Une condition sur la somme des chiffres	Fixer le préfixe ; choisir le dernier chiffre.	6
Une somme de signes ± 1	Compter les signes négatifs ; étudier le produit.	9, 10, 11
Le carré d'un impair	Faire apparaître $4k(k+1)+1$.	12, 13
Une divisibilité par 4	Compter les carrés impairs, chacun de reste 1.	18
Une opération qui échange deux états	Compter les actions par objet ou par cycle.	19, 21, 22

Quatre réflexes de rédaction

1. Écrire le domaine. Entiers relatifs, naturels avec zéro, ou entiers strictement positifs ?
2. Nommer la propriété utilisée. Somme de deux impairs, produit de deux pairs, carré impair de reste 1 modulo 8...
3. Justifier le passage du particulier au général. Une table d'exemples aide à chercher ; une formule ou un comptage prouve.
4. Examiner les limites. Que se passe-t-il pour zéro, un seul chiffre, un facteur nul, un nombre pair de termes ?

UNE IDÉE QUI RELIE TOUT LE FICHIER

La parité transforme une multitude de valeurs en deux catégories. On perd de l'information numérique, mais on gagne une contrainte très simple qui peut suffire pour construire une solution ou prouver une impossibilité.

08 / SOURCE ET PRÉCISIONS

Ce qui a été repris, corrigé et développé

Traçabilité de l'adaptation française.

Source fournie

Titre : EP 02 - Even & Odd Numbers (Basic Mathematics).

Vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=yjmmnzbDTow>

Support : transcription automatique Tactiq fournie, fichier tactiq-free-transcript-yjmmnzbDTow.txt.

Langue : principalement hindi, avec des termes mathématiques en anglais. Durée transcrite : environ 2 h 50.

Ce livret est une adaptation pédagogique développée, pas une traduction mot à mot. Les répétitions, effets de présentation et anecdotes sont condensés. Les repères de temps renvoient à l'énoncé ou à sa discussion dans la source.

Périmètre

Les 22 numéros constituent une numérotation éditoriale des problèmes et défis du fichier. Elle inclut le jeu du carré impair et le puzzle des gobelets, posé au début puis résolu à la fin.

Le livret traite aussi les questions laissées à chercher : unicité des sept entiers consécutifs, polygones de signes, cube, preuve courte sur trois carrés et généralisation des interrupteurs. Les dernières secondes annoncent le fichier suivant sur les nombres premiers ; ces fragments ne forment pas des énoncés complets et ne sont pas développés en problèmes inventés.

Corrections et conditions explicitées

- = Définitions : les paramètres de $2k$ et $2k + 1$ parcourent $\mathbb{Z}$. Zéro est pair ; les divisions par zéro restent interdites.
- = Développements : la somme de deux impairs vaut $2(u + v + 1)$; le carré de quatre termes contient les six doubles produits, dont $2ad$.
- Différence de carrés : $2026 = 2 \cdot 1013 = 4 \cdot 506 + 2$. La reconnaissance automatique déforme certains chiffres.
- Comptage : l'égalité des deux effectifs à k chiffres est démontrée pour $k \geq 2$. Les entiers positifs à un chiffre forment un cas distinct.
- Sommes de carrés : l'énoncé du problème 15 est corrigé pour la positivité de c, d . Les exceptions $a^2 + b^2 = 1$ ou 4 sont expliquées.
- = Livre : il s'agit de onze feuillets recto-verso, donc de vingt-deux numéros de pages.
- Lampes : $2028 = 7 \cdot 289 + 5$; les lettres de la conclusion sont vérifiées par comptage des pressions.

Apports pédagogiques

Les méthodes alternatives, la classification des différences de carrés, les constructions pour les polygones, les variantes numériques et les vérifications de domaine sont des développements explicités. Les formules sont rétablies à partir du texte et de la cohérence mathématique des calculs.

POUR PROGRESSER

Chercher le détail qui fait fonctionner une preuve : une occurrence paire, un terme central, un reste, un nombre de signes négatifs ou une propriété conservée.