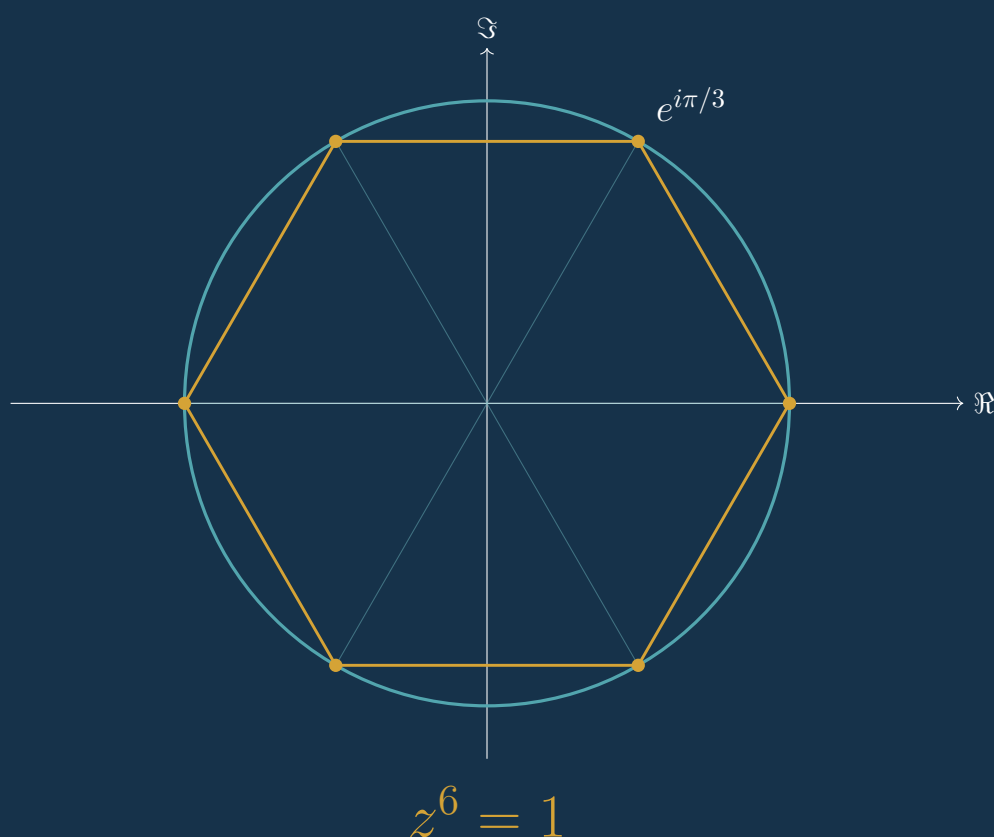


Algèbre

Cours, méthodes
et problèmes corrigés



8 chapitres • 83 problèmes guidés
16 exercices supplémentaires avec corrigés

Maths Olympiad

Comprendre les structures, construire les preuves

PARCOURS DE LECTURE

Sommaire

Un parcours complet d'algèbre

Des ensembles aux matrices : les mêmes idées reviennent sous des formes différentes. Factoriser, changer de variable, exploiter une symétrie ou compter par complément permet de simplifier des problèmes qui semblent longs.

Chapitre	Méthodes et problèmes	Page
1. Ensembles	Cardinaux, fractions, régions du plan • 4 problèmes	3
2. Équations	Viète, paramètres, valeurs absolues • 7 problèmes	8
3. Suites et sommes	Progressions, récurrences, télescopage • 13 problèmes	14
4. Binôme	Coefficients, rationalité, congruences • 11 problèmes	23
5. Dénombrement	Arrangements, contraintes, répétitions • 13 problèmes	31
6. Probabilités	Conditionnement, lois, espérance • 12 problèmes	40
7. Nombres complexes	Formes, puissances, géométrie • 10 problèmes	49
8. Matrices	Déterminants, inverses, structures • 13 problèmes	58
Fiche de synthèse	Les réflexes qui sécurisent une solution	68

Pour qui ?

Lycée avancé et approfondissement. Les bases nécessaires sont rappelées au début de chaque chapitre. Les matrices, les séries et les puissances complexes constituent des prolongements accompagnés.

Note sur les énoncés

Ce livret adapte les données mathématiques exploitables du texte fourni. Les énoncés sont réécrits pour être autonomes et les calculs sont revérifiés. Les expressions ambiguës sont précisées ou signalées comme reformulations. Les systèmes dont les équations ne sont pas lisibles ne sont pas reconstitués arbitrairement ; deux variantes complètes sont proposées à la fin du chapitre 8.

ASTUCE / Un usage actif

Chercher avant de lire la solution, puis refaire le raisonnement sans regarder. Les 16 exercices de fin de chapitre sont des compléments originaux ; leur correction figure sur la même page ou la page suivante.

CHAPITRE 1 / COURS

Ensembles et cardinaux

Un ensemble est une collection d'objets distincts. Son cardinal, noté $|A|$, est le nombre de ses éléments lorsqu'il est fini. Décrire un même objet de deux façons ne crée pas deux éléments.

THÉORÈME / Réunion et complément

Pour deux ensembles finis,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Dans un univers fini Ω , $|\Omega \setminus A| = |\Omega| - |A|$.

Démonstration

Dans $|A| + |B|$, chaque élément de l'intersection est compté deux fois. On le retire une fois. Les éléments hors de l'intersection ne sont comptés qu'une fois.

Compter des choix indépendants

Si une construction comporte p choix à la première étape et, pour chacun, q choix à la seconde, elle admet pq réalisations. Une partie d'un ensemble à n éléments correspond à n choix « prendre ou laisser » : il existe donc 2^n parties, dont $2^n - 1$ non vides.

THÉORÈME / Fractions réduites et produits de nombres premiers

Une fraction positive possède une unique écriture irréductible. Tout entier strictement positif possède une unique décomposition en facteurs premiers, à l'ordre des facteurs près.

Ces propriétés permettent de remplacer une question sur des nombres par une question sur leurs représentations, à condition d'avoir garanti l'unicité.

Traduire une condition géométrique

L'égalité $|x| + |y| = r$ dessine un losange. L'égalité $|x + y| = r$ est la réunion de deux droites. L'inégalité triangulaire donne toujours

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

L'égalité a lieu exactement lorsque x et y ont le même signe, ou lorsque l'un est nul.

PIÈGE / Ne pas oublier le domaine

Un logarithme exige un argument strictement positif. Un quotient exige un dénominateur non nul. Le changement $t = \sqrt{x}$ impose $t \geq 0$.

CHAPITRE 1 / PROBLÈMES GUIDÉS

Des écritures sans doublon

PROBLÈME E1 / Fractions irréductibles

Soit $A = \{1, \dots, 10\}$ et $B = \{m/n : m, n \in A, m < n, \gcd(m, n) = 1\}$. Calculer $|B|$.

Solution

Fixons le dénominateur n . Il faut compter les entiers $1 \leq m < n$ premiers avec n . On obtient :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nombre	1	2	2	4	2	6	4	6	4

L'unicité de l'écriture irréductible assure qu'aucune fraction n'est comptée sous deux dénominateurs différents. Ainsi

$$|B| = 1 + 2 + 2 + 4 + 2 + 6 + 4 + 6 + 4 = 31.$$

PROBLÈME E2 / Produits de nombres premiers

Soit S l'ensemble des dix premiers nombres premiers. L'ensemble A contient les produits des parties non vides de S , chaque premier étant utilisé au plus une fois. Combien de couples $(p, a) \in S \times A$ vérifient $p \mid a$?

Solution

Fixons $p \in S$. Le produit doit contenir p . Chacun des neuf autres nombres premiers peut être choisi ou non : 2^9 produits conviennent. Ils sont distincts par unicité de la factorisation.

Il existe dix choix de p . Les couples sont donc au nombre de

$$10 \times 2^9 = 5120.$$

ASTUCE / Compter les incidences

Un même produit peut apparaître dans plusieurs couples : ce n'est pas un doublon si le premier membre change. Pour r nombres premiers, le résultat général est $r2^{r-1}$.

CHAPITRE 1 / GÉOMÉTRIE

Deux contraintes sur le plan

PROBLÈME E3 / Droites et losange

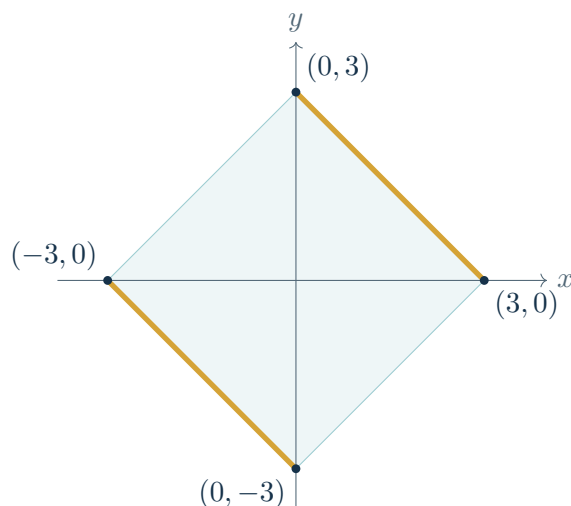
On pose $A = \{(x, y) : |x + y| \geq 3\}$, $B = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 3\}$, et $C = \{(x, y) \in A \cap B : xy = 0\}$.
Décrire $A \cap B$ puis calculer $\sum_{(x,y) \in C} |x + y|$.

Solution

Sur l'intersection, l'inégalité triangulaire impose

$$3 \leq |x + y| \leq |x| + |y| \leq 3.$$

Toutes les inégalités sont donc des égalités. Les points appartiennent au bord du losange et leurs coordonnées ont le même signe : ce sont les segments joignant $(3, 0)$ à $(0, 3)$ et $(-3, 0)$ à $(0, -3)$.



La condition $xy = 0$ retient les quatre sommets. Chaque terme de la somme vaut 3, d'où

$$\sum_{(x,y) \in C} |x + y| = 4 \times 3 = 12.$$

ASTUCE / L'encadrement qui force l'égalité

Lorsque la même quantité est à la fois au moins r et au plus r , exploiter chaque cas d'égalité. Cela évite une longue étude par quadrants.

CHAPITRE 1 / CHANGEMENTS DE VARIABLE

Une réunion de deux ensembles

PROBLÈME E4 / Logarithmes et racines

On définit

$$A = \left\{ x \in (0, \pi) \setminus \{\pi/2\} : \log_{2/\pi} |\sin x| + \log_{2/\pi} |\cos x| = 2 \right\},$$

$$B = \{x \geq 0 : \sqrt{x}(\sqrt{x} - 4) - 3|\sqrt{x} - 2| + 6 = 0\}.$$

Calculer $|A \cup B|$. Les parenthèses sont explicitées dans cet énoncé reformulé.

Solution

1. Ensemble A. La base $2/\pi$ est positive et différente de 1. En additionnant les logarithmes,

$$|\sin x \cos x| = (2/\pi)^2, \quad |\sin 2x| = \frac{8}{\pi^2}.$$

Le nombre $8/\pi^2$ est strictement entre 0 et 1. Sur $0 < 2x < 2\pi$, la valeur absolue du sinus atteint cette valeur exactement quatre fois. Donc $|A| = 4$.

2. Ensemble B. Posons $t = \sqrt{x} \geq 0$. Pour $t \geq 2$,

$$t^2 - 4t - 3(t - 2) + 6 = (t - 3)(t - 4) = 0.$$

Les deux valeurs 3 et 4 conviennent. Pour $0 \leq t < 2$,

$$t^2 - 4t - 3(2 - t) + 6 = t(t - 1) = 0.$$

Les valeurs 0 et 1 conviennent également. Ainsi $B = \{0, 1, 9, 16\}$.

3. Intersection. Comme $A \subset (0, \pi)$, seul 1 pourrait appartenir aux deux ensembles. Or $\sin 2 > 0,9$ et $8/\pi^2 < 0,82$, donc $1 \notin A$.

$$|A \cup B| = 4 + 4 = 8.$$

ASTUCE / Justifier l'encadrement

La série alternée du sinus donne $\sin 2 > 2 - 2^3/3! + 2^5/5! - 2^7/7! > 0,9$. De plus, $\pi > 3,14$ entraîne $8/\pi^2 < 0,82$.

CHAPITRE 1 / ENTRAÎNEMENT

Compter avec une représentation unique

EXERCICE 1

Combien de fractions irréductibles m/n vérifient $1 \leq m < n \leq 8$?

EXERCICE 2

Un ensemble S contient six nombres premiers distincts. Pour chaque partie $T \subseteq S$, on forme son produit, avec le produit vide égal à 1. Combien de couples (p, a) vérifient $p \in S$, $p \mid a$ et a est le produit d'exactly trois premiers de S ?

Corrigé 1

Pour les dénominateurs 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, les nombres de numérateurs admissibles sont respectivement 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4. Leur somme vaut

$$\boxed{21.}$$

Chaque fraction est comptée une seule fois car elle est irréductible.

Corrigé 2 : deux lectures du même ensemble de couples

Fixons le premier p . Il faut lui adjoindre deux premiers parmi les cinq autres : $\binom{5}{2} = 10$ choix. Avec six choix de p , le résultat vaut

$$\boxed{6 \binom{5}{2} = 60.}$$

Autre raisonnement : il existe $\binom{6}{3} = 20$ produits de trois premiers. Chacun possède exactement trois diviseurs premiers dans S , soit $20 \times 3 = 60$ couples.

THÉORÈME / Une identité de double comptage

Pour $1 \leq k \leq n$,

$$n \binom{n-1}{k-1} = k \binom{n}{k}.$$

À gauche, on choisit d'abord un élément distingué, puis les $k-1$ autres. À droite, on choisit une partie à k éléments, puis l'élément distingué.

PIÈGE / Produit vide

Le produit vide vaut 1 et n'a aucun diviseur premier. Il n'ajoute donc aucun couple à un comptage de divisibilités par les premiers de S .

CHAPITRE 2 / COURS

Équations et polynômes

THÉORÈME / Relations de Viète

Si $a \neq 0$ et si α, β sont les racines de $ax^2 + bx + c$, comptées avec multiplicité, alors

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

On l'obtient en développant $a(x - \alpha)(x - \beta)$ puis en identifiant les coefficients.

Calculer sans résoudre

En posant $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha\beta$,

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p, \quad \alpha^4 + \beta^4 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2.$$

La deuxième identité vient du carré de $\alpha^2 + \beta^2$.

THÉORÈME / Nature des racines réelles

Pour un polynôme réel du second degré, $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif si les deux racines réelles sont distinctes, nul si la racine réelle est double, négatif s'il n'existe aucune racine réelle.

Valeurs absolues : résoudre par morceaux

L'expression $|u(x)|$ vaut $u(x)$ lorsque $u(x) \geq 0$, et $-u(x)$ sinon. Chaque équation obtenue ne vaut que sur son intervalle : une racine extérieure doit être rejetée.

Identifier deux polynômes

Si deux polynômes coïncident pour une infinité de réels, ils sont égaux coefficient par coefficient. En effet, leur différence aurait sinon un nombre de racines au plus égal à son degré.

ASTUCE / Avant de développer

Chercher une racine évidente, une expression répétée ou une symétrie. Poser $t = x^2 - 9x$ peut transformer une équation du quatrième degré en un simple trinôme en t .

PIÈGE / Solutions et multiplicités

Une racine double reste une seule solution réelle. Les relations de Viète portent sur toutes les racines d'un même polynôme, avec leurs multiplicités ; elles ne s'appliquent pas directement à des racines sélectionnées dans plusieurs branches.

CHAPITRE 2 / PROBLÈMES GUIDÉS

Exploiter les relations de Viète

PROBLÈME Q1 / Extrêmes d'une somme de puissances

Les racines α, β de $2x^2 + \cos \theta x - 1 = 0$ dépendent de $\theta \in [0, 2\pi]$. Soient m, M les valeurs minimale et maximale de $\alpha^4 + \beta^4$. Calculer $16(m + M)$.

Solution

Le discriminant $\cos^2 \theta + 8$ est positif. Par Viète,

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{2} \cos \theta, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1 + \frac{1}{4} \cos^2 \theta.$$

Ainsi $\alpha^4 + \beta^4 = (1 + \cos^2 \theta / 4)^2 - 1/2$. Cette expression croît avec $\cos^2 \theta \in [0, 1]$. Les bornes sont atteintes :

$$m = \frac{1}{2}, \quad M = \frac{17}{16}, \quad 16(m + M) = 25.$$

PROBLÈME Q2 / Une racine connue

Le polynôme $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b)$ est de degré 2 et possède une racine double. On donne $a + c = 15$ et $b = 36/5$. Calculer $a^2 + c^2$.

Solution

La somme de ses coefficients est nulle : 1 est une racine. Comme elle est double, le produit des racines vaut 1, donc

$$a(b - c) = c(a - b), \quad b(a + c) = 2ac.$$

On en déduit $2ac = (36/5) \times 15 = 108$, puis

$$a^2 + c^2 = (a + c)^2 - 2ac = 225 - 108 = 117.$$

Pour vérifier la compatibilité, a, c sont les racines de $u^2 - 15u + 54 = 0$, soit 6 et 9. Dans les deux ordres, le coefficient dominant est non nul.

ASTUCE / Une racine avant le discriminant

Ici, reconnaître $x = 1$ réduit la condition de racine double à une égalité simple entre deux coefficients.

CHAPITRE 2 / PROBLÈMES GUIDÉS

Substitution et découpage

PROBLÈME Q3 / Une équation du quatrième degré

Résoudre $(x^2 - 9x + 11)^2 - (x - 4)(x - 5) = 3$ et calculer le produit de ses racines rationnelles.

Solution

Posons $t = x^2 - 9x$. Alors $(x - 4)(x - 5) = t + 20$ et

$$(t + 11)^2 - (t + 20) = 3 \iff t^2 + 21t + 98 = 0 \iff (t + 14)(t + 7) = 0.$$

Pour $t = -14$, $x^2 - 9x + 14 = 0$ donne $x = 2, 7$. Pour $t = -7$, on obtient $x = (9 \pm \sqrt{53})/2$, irrationnels car 53 n'est pas un carré.

Produit des racines rationnelles = $2 \times 7 = 14$.

PROBLÈME Q4 / Le minimum de deux distances

Déterminer les solutions réelles de $x^2 + 3x + 2 = \min(|x - 3|, |x + 2|)$.

Solution

Le point où les deux distances sont égales est $x = 1/2$. Leur minimum vaut donc

$$\begin{cases} -x - 2 & x \leq -2, \\ x + 2 & -2 \leq x \leq 1/2, \\ 3 - x & 1/2 \leq x \leq 3, \\ x - 3 & x \geq 3. \end{cases}$$

Les équations correspondantes sont :

- $(x + 2)^2 = 0$: -2 convient.
- $x(x + 2) = 0$: -2 et 0 conviennent.
- $x^2 + 4x - 1 = 0$: $-2 \pm \sqrt{5}$ ne sont pas dans $[1/2, 3]$.
- $x^2 + 2x + 5 = 0$: son discriminant vaut -16 , donc aucune racine réelle.

En supprimant le doublon -2 , on trouve exactement

$\{-2, 0\}$.

CHAPITRE 2 / VALEUR ABSOLUE

Garder seulement les racines admissibles

PROBLÈME Q5 / Deux branches, deux solutions

Résoudre $x^2 + |2x - 3| - 4 = 0$, puis calculer la somme des carrés des solutions.

Solution

Le changement de signe de $2x - 3$ se produit en $3/2$.

Branche $x \geq 3/2$. L'équation devient

$$x^2 + 2x - 7 = 0, \quad x = -1 \pm 2\sqrt{2}.$$

La racine $-1 - 2\sqrt{2}$ est négative et doit être rejetée. La racine $-1 + 2\sqrt{2}$ est supérieure à $3/2$ car $2\sqrt{2} > 5/2$.

Branche $x < 3/2$. L'équation devient

$$x^2 - 2x - 1 = 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Seule $1 - \sqrt{2}$ est inférieure à $3/2$.

Les solutions sont donc $u = -1 + 2\sqrt{2}$ et $v = 1 - \sqrt{2}$. Leur somme de carrés vaut

$$u^2 + v^2 = (9 - 4\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2}).$$

$$u^2 + v^2 = 12 - 6\sqrt{2}.$$

PIÈGE / Un usage abusif de Viète

Les deux solutions retenues ne sont pas les deux racines d'un même trinôme obtenu ci-dessus. Additionner directement les carrés de toutes les racines des deux branches inclurait deux valeurs interdites.

Vérification dans l'équation initiale

Pour u , on a $2u - 3 = -5 + 4\sqrt{2} > 0$ et $u^2 + (2u - 3) - 4 = 0$. Pour v , $2v - 3 = -1 - 2\sqrt{2} < 0$ et $v^2 - (2v - 3) - 4 = 0$. Les signes utilisés sont bien ceux imposés par les branches.

CHAPITRE 2 / PROBLÈMES GUIDÉS

Identités et paramètres

PROBLÈME Q6 / Un polynôme déterminé par une identité

Un polynôme réel f de degré 2 vérifie $f(x) < 1$ et $f(x)f(1/x) = f(x) + f(1/x)$ pour tout $x \neq 0$. Trouver f , puis la somme des carrés des réels k tels que $f(k) = -2k$.

Solution

Écrivons $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. L'identification des coefficients de x^2 , x et 1 dans l'identité de Laurent donne

$$ac = a, \quad b(a + c) = b, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2c.$$

La première relation impose $c = 1$. La deuxième donne $ab = 0$, donc $b = 0$. La dernière donne $a^2 = 1$. Comme $f(x) < 1$ pour $x \neq 0$, on retient $a = -1$, et $f(x) = 1 - x^2$.

Alors $f(k) = -2k$ équivaut à $k^2 - 2k - 1 = 0$. La somme des racines vaut 2 et leur produit -1 , d'où

$$k_1^2 + k_2^2 = 2^2 - 2(-1) = 6.$$

PROBLÈME Q7 / Aucune racine réelle

Pour quels entiers a l'équation $2x^2 + (a - 5)x + 15 = 3a$ n'a-t-elle aucune solution réelle ? Calculer la somme des carrés de ces entiers.

Solution

Le coefficient de x^2 est toujours 2. Le discriminant vaut

$$\Delta = (a - 5)^2 - 8(15 - 3a) = a^2 + 14a - 95 = (a - 5)(a + 19).$$

On veut $\Delta < 0$, donc $-19 < a < 5$. Les entiers admissibles vont de -18 à 4. Ainsi

$$\sum_{a=-18}^4 a^2 = \sum_{j=1}^{18} j^2 + \sum_{j=1}^4 j^2 = \frac{18 \cdot 19 \cdot 37}{6} + 30.$$

$$\sum_{a=-18}^4 a^2 = 2139.$$

CHAPITRE 2 / ENTRAÎNEMENT

Vérifier les domaines

EXERCICE 3

Résoudre $x^2 + |x - 2| - 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4

Les racines α, β de $x^2 - 3x + 1 = 0$ sont données implicitement. Calculer $\alpha^4 + \beta^4$ sans les déterminer, puis retrouver le résultat grâce à une récurrence.

Corrigé 3

Pour $x \geq 2$, on obtient $x^2 + x - 4 = 0$, de racines $(-1 \pm \sqrt{17})/2$. Aucune n'est au moins 2 puisque $\sqrt{17} < 5$.

Pour $x < 2$, l'équation devient $x^2 - x = 0$, soit $x = 0$ ou $x = 1$. Les deux valeurs sont dans le domaine de cette branche et vérifient l'équation initiale.

$$x \in \{0, 1\}.$$

Corrigé 4

Par Viète, $\alpha + \beta = 3$ et $\alpha\beta = 1$. Donc $\alpha^2 + \beta^2 = 9 - 2 = 7$, puis

$$\alpha^4 + \beta^4 = 7^2 - 2 = 47.$$

Posons maintenant $s_n = \alpha^n + \beta^n$. Chaque racine r vérifie $r^2 = 3r - 1$, d'où, après multiplication par r^n puis addition,

$$s_{n+2} = 3s_{n+1} - s_n, \quad s_0 = 2, \quad s_1 = 3.$$

On trouve successivement $s_2 = 7$, $s_3 = 18$, puis $s_4 = 54 - 7 = 47$.

ASTUCE / Une passerelle vers les suites

Une relation polynomiale satisfaite par les racines produit une récurrence sur leurs sommes de puissances. La même méthode fonctionne dans $\mathbb{C}$.

CHAPITRE 3 / COURS

Suites et sommes

THÉORÈME / Progressions arithmétiques

Si $u_{n+1} = u_n + d$, alors $u_n = u_1 + (n - 1)d$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(2u_1 + (n - 1)d).$$

Pourquoi la formule de somme fonctionne

En écrivant la somme à l'endroit puis à l'envers, chaque paire verticale vaut $u_1 + u_n$. On obtient $2S_n = n(u_1 + u_n)$. Plus généralement, dans une progression arithmétique, $u_i + u_j$ ne dépend que de $i + j$.

THÉORÈME / Progressions géométriques

Si $u_{n+1} = qu_n$, alors $u_n = u_1 q^{n-1}$. Pour $q \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Si $|q| < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1 - q)$ et $\sum_{k=0}^{\infty} kq^k = q/(1 - q)^2$.

La formule finie résulte de la soustraction $S - qS = 1 - q^n$. La première série s'obtient par passage à la limite. Pour la seconde, soustraire qT de $T = \sum kq^k$ donne $T(1 - q) = \sum_{k \geq 1} q^k = q/(1 - q)$.

Télescoper

La décomposition $1/[k(k + 1)] = 1/k - 1/(k + 1)$ fait disparaître tous les termes intérieurs d'une somme : seuls restent les bords.

Transformer une récurrence

Pour une récurrence affine, chercher une constante à ajouter à la suite. Pour une récurrence d'ordre 2, essayer les différences $u_{n+1} - u_n$ lorsque les coefficients s'y prêtent.

PIÈGE / Une raison n'est pas forcément positive

Une progression peut décroître. En revanche, si ses termes sont entiers, la raison, différence de deux termes consécutifs, est entière.

CHAPITRE 3 / PROBLÈMES GUIDÉS

Produits et rangs alternés

PROBLÈME S1 / Une progression géométrique croissante

Une suite géométrique strictement croissante à termes positifs vérifie $u_1 u_5 = 28$ et $u_2 + u_4 = 29$. Calculer u_6 .

Solution

Posons $u_n = Aq^{n-1}$, avec $A > 0$ et $q > 1$. On a $u_2 u_4 = A^2 q^4 = u_1 u_5 = 28$. Les nombres u_2, u_4 sont donc les racines de $t^2 - 29t + 28 = 0$, soit 1 et 28.

Comme la suite croît, $u_2 = 1$ et $u_4 = 28$. Ainsi $q^2 = u_4/u_2 = 28$ et

$$u_6 = u_2 q^4 = 28^2 = 784.$$

PROBLÈME S2 / Séparer les rangs pairs et impairs

Une progression arithmétique comporte $2k$ termes. La somme des termes de rang impair vaut 40, celle des termes de rang pair vaut 55 et le dernier terme dépasse le premier de 27. Déterminer k et la raison d .

Solution

Chacune des k différences $u_{2j} - u_{2j-1}$ vaut d . En soustrayant les deux sommes, on obtient $kd = 55 - 40 = 15$.

Par ailleurs, $u_{2k} - u_1 = (2k - 1)d = 27$. Or $(2k - 1)d = 2kd - d = 30 - d$, donc $d = 3$ puis $k = 5$.

$$d = 3, \quad k = 5.$$

On peut contrôler le résultat : la somme totale est 95 sur dix termes, donc $5(2u_1 + 9d) = 95$, ce qui donne $u_1 = -4$. Les termes impairs sont $-4, 2, 8, 14, 20$, de somme 40.

ASTUCE / Soustraire deux sommes structurées

Quand les rangs sont alternés, apparier chaque terme pair avec le terme impair qui le précède simplifie immédiatement le calcul.

CHAPITRE 3 / PROBLÈMES GUIDÉS

Sommes de blocs et termes centraux

PROBLÈME S3 / Deux blocs de quatre termes

Une suite arithmétique commence par $u_1 = 3$. La somme des quatre premiers termes vaut le cinquième de celle des quatre suivants. Calculer S_{20} .

Solution

Les deux blocs valent $12 + 6d$ et $12 + 22d$. La condition donne

$$5(12 + 6d) = 12 + 22d \iff 8d = -48 \iff d = -6.$$

D'où

$$S_{20} = 10(2 \times 3 + 19(-6)) = -1080.$$

PROBLÈME S4 / Des termes qui sont des racines

Une suite arithmétique de raison $3/2$ vérifie $S_{11} = 88$. Ses dixième et onzième termes sont les racines de $3x^2 - px + q = 0$. Calculer $q - 2p$.

Solution

Dans une progression de onze termes, la moyenne est le sixième terme. Ainsi $u_6 = 88/11 = 8$. Par conséquent,

$$u_{10} = 8 + 4 \times \frac{3}{2} = 14, \quad u_{11} = 8 + 5 \times \frac{3}{2} = \frac{31}{2}.$$

La somme et le produit des racines donnent

$$\frac{p}{3} = 14 + \frac{31}{2} = \frac{59}{2}, \quad \frac{q}{3} = 14 \times \frac{31}{2} = 217.$$

Donc $p = 177/2$ et $q = 651$, puis

$$q - 2p = 651 - 177 = 474.$$

THÉORÈME / Le terme central est la moyenne

Pour $2r + 1$ termes arithmétiques, $u_j + u_{2r+2-j} = 2u_{r+1}$. En sommant, $S_{2r+1} = (2r + 1)u_{r+1}$.

CHAPITRE 3 / PROBLÈMES GUIDÉS

Télescopage et série infinie

PROBLÈME S5 / Une somme qui fixe une raison

Posons $T_n = \sum_{k=1}^n 1/[k(k+1)]$. Une progression arithmétique de premier terme $-p$ et de raison p a ses six premiers termes de somme $\sqrt{2026T_{2025}}$. Calculer $|u_{20} - u_{15}|$. Le multiplicateur est explicité dans cette reformulation.

Solution

La décomposition en éléments simples donne $T_n = 1 - 1/(n+1) = n/(n+1)$. Donc $\sqrt{2026T_{2025}} = \sqrt{2025} = 45$.

La somme des six termes vaut $3(-2p + 5p) = 9p$, d'où $p = 5$. Les rangs diffèrent de cinq unités :

$$|u_{20} - u_{15}| = |5p| = 25.$$

PROBLÈME S6 / Une série arithmético-géométrique

Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ sachant que $\sum_{n=0}^{\infty} (5 + n\alpha)/7^n = 7$.

Solution

La série converge absolument car le facteur géométrique domine le facteur n . Notons sa somme T . En soustrayant $T/7$ de T , tous les coefficients successifs diffèrent de α :

$$\frac{6}{7}T = 5 + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} 7^{-n} = 5 + \frac{\alpha}{6}.$$

Avec $T = 7$, on obtient $6 = 5 + \alpha/6$, donc

$$\alpha = 6.$$

PIÈGE / Aligner les indices

Dans $T/7$, le terme constant disparaît et chaque terme se décale d'un rang. Écrire les trois premiers termes suffit souvent à éviter une erreur de bord.

CHAPITRE 3 / PROBLÈMES GUIDÉS

La symétrie des sommes

PROBLÈME S7 / Une donnée superflue

Une suite arithmétique vérifie $S_{40} = 1030$ et $S_{12} = 57$. Calculer $S_{30} - S_{10}$.

Solution

La somme recherchée porte sur $u_{11}, \dots, u_{30}$, soit vingt termes. Ses extrêmes vérifient $11 + 30 = 1 + 40$, donc $u_{11} + u_{30} = u_1 + u_{40}$. Ainsi

$$S_{30} - S_{10} = 10(u_1 + u_{40}) = \frac{1}{2}S_{40}.$$

$$S_{30} - S_{10} = 515.$$

La donnée S_{12} n'est pas nécessaire pour cette question.

PROBLÈME S8 / Retrouver un rang

Une progression arithmétique vérifie $u_m = 1/25$, $u_{25} = 1/20$ et $20S_{25} = 13$. Calculer $5m \sum_{r=m}^{2m} u_r$.

Solution

La formule de somme fournit

$$20 \times \frac{25}{2} \left(u_1 + \frac{1}{20} \right) = 13, \quad u_1 = \frac{1}{500}.$$

Puis $24d = 1/20 - 1/500 = 24/500$, donc $d = 1/500$ et $u_r = r/500$. La relation $u_m = 1/25$ donne $m = 20$.

De $r = 20$ à $r = 40$, on compte $40 - 20 + 1 = 21$ termes. Alors

$$5m \sum_{r=m}^{2m} u_r = 100 \times \frac{21}{2} \left(\frac{1}{25} + \frac{2}{25} \right).$$

$$5m \sum_{r=m}^{2m} u_r = 126.$$

PIÈGE / Compter les termes d'un intervalle de rangs

De m à $2m$ inclus, il y a $m + 1$ termes, et non m .

CHAPITRE 3 / RÉCURRENCE

Faire apparaître une suite géométrique

PROBLÈME S9 / Une récurrence d'ordre 2

Soit $a_0 = 0$, $a_1 = 1/2$ et $2a_{n+2} = 5a_{n+1} - 3a_n$ pour $n \geq 0$. Exprimer a_n , puis $\sum_{n=1}^{100} a_n$ en fonction de a_{100} .

Solution

Réorganisons la récurrence :

$$2(a_{n+2} - a_{n+1}) = 3(a_{n+1} - a_n).$$

La suite des différences $d_n = a_{n+1} - a_n$ est géométrique de raison $3/2$, avec $d_0 = 1/2$. Donc $d_n = \frac{1}{2}(3/2)^n$.

Pour $n \geq 1$, le télescopage donne

$$a_n - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} d_k = \frac{1}{2} \frac{(3/2)^n - 1}{3/2 - 1} = (3/2)^n - 1.$$

Cette expression vaut aussi 0 pour $n = 0$.

$$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1.$$

En sommant de 1 à 100,

$$\sum_{n=1}^{100} a_n = \frac{3}{2} \frac{(3/2)^{100} - 1}{3/2 - 1} - 100 = 3((3/2)^{100} - 1) - 100.$$

$$\sum_{n=1}^{100} a_n = 3a_{100} - 100.$$

Contrôle de la formule

Elle donne $a_0 = 0$ et $a_1 = 1/2$. De plus, pour $q = 3/2$, l'identité $2q^2 = 5q - 3$ assure que $q^n - 1$ satisfait la récurrence. Les deux premiers termes et la relation déterminent alors toute la suite.

ASTUCE / Le signal à reconnaître

Lorsque les coefficients d'une récurrence s'équilibrent, ici $2 = 5 - 3$, les différences successives peuvent simplifier l'ordre de la relation.

CHAPITRE 3 / PROBLÈMES GUIDÉS

Sommes rationnelles et angles

PROBLÈME S10 / Un télescopage décalé

On donne $4a_k = k^2 + 5k + 6$. Calculer $\sum_{k=1}^{2025} 1/a_k$.

Solution

On factorise $4a_k = (k+2)(k+3)$, puis

$$\frac{1}{a_k} = \frac{4}{(k+2)(k+3)} = 4 \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right).$$

Pour tout $n \geq 1$, la somme vaut $4(1/3 - 1/(n+3)) = 4n/[3(n+3)]$. À $n = 2025$,

$$\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{a_k} = \frac{225}{169}.$$

PROBLÈME S11 / Les angles d'un polygone

Les angles intérieurs d'un polygone simple forment, après classement, une progression arithmétique de raison 6° . Le plus grand vaut 219° . Combien a-t-il de côtés ?

Solution

S'il possède n côtés, le premier angle vaut $219 - 6(n-1) = 225 - 6n$ degrés. La somme des angles intérieurs d'un polygone simple vaut $180(n-2)$ degrés. Ainsi

$$\frac{n}{2}(225 - 6n + 219) = 180(n-2).$$

Cela donne $3n^2 - 42n - 360 = 0$, soit $(n-20)(n+6) = 0$. Comme $n \geq 3$, on retient

$$n = 20.$$

Le plus petit angle est alors $225 - 120 = 105^\circ$.

PIÈGE / Simple n'implique pas convexe

Un angle de 219° est rentrant. Un tel polygone ne peut pas être convexe. La somme $180(n-2)$ reste valable pour un polygone simple non convexe.

CHAPITRE 3 / PROBLÈMES GUIDÉS

Contraintes entières et grands indices

PROBLÈME S12 / Une raison entière

Une suite arithmétique à termes entiers positifs a ses trois premiers termes de somme 54 et vérifie $1600 < S_{20} < 1800$. Calculer u_{11} .

Solution

Si $u_1 = a$ et la raison vaut d , alors $3a + 3d = 54$, donc $a + d = 18$. Ensuite,

$$S_{20} = 10(2a + 19d) = 360 + 170d.$$

L'encadrement devient $1240 < 170d < 1440$, soit $124/17 < d < 144/17$. Comme d est entier, $d = 8$. Alors $a = 10$ et

$$u_{11} = a + 10d = 90.$$

PROBLÈME S13 / Un sous-ensemble de rangs

Une suite arithmétique vérifie

$$u_1 + (u_5 + u_{10} + \cdots + u_{2020}) + u_{2024} = 2233.$$

Calculer S_{2024} .

Solution

Le bloc central contient $2020/5 = 404$ termes. En les appariant depuis les extrémités, chaque paire a une somme de rangs égale à $5 + 2020 = 2025 = 1 + 2024$. Elle vaut donc $u_1 + u_{2024}$.

Les 404 termes forment 202 paires. En ajoutant les deux termes extérieurs,

$$203(u_1 + u_{2024}) = 2233 \implies u_1 + u_{2024} = 11.$$

La somme complète vaut alors

$$S_{2024} = \frac{2024}{2} \times 11 = 11132.$$

ASTUCE / Le bon invariant

Pour une progression arithmétique, comparer les sommes des indices est souvent plus utile que déterminer le premier terme et la raison.

CHAPITRE 3 / ENTRAÎNEMENT

Transformer avant de calculer

EXERCICE 5

Calculer $\sum_{k=1}^n 1/[(k+1)(k+3)]$ pour $n \geq 1$.

EXERCICE 6

Soit $b_0 = 2$ et $b_{n+1} = 3b_n - 4$. Déterminer b_n . Refaire la question avec $b_0 = 5$.

Corrigé 5

On a

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right).$$

Le décalage est de deux rangs : deux termes subsistent à chaque bord. Ainsi

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right).$$

Pour $n = 1$, la formule donne bien $1/8$.

Corrigé 6

La valeur fixe ℓ doit vérifier $\ell = 3\ell - 4$, donc $\ell = 2$. Posons $c_n = b_n - 2$. Alors

$$c_{n+1} = 3b_n - 6 = 3c_n, \quad c_n = (b_0 - 2)3^n.$$

Par conséquent,

$$b_n = 2 + (b_0 - 2)3^n.$$

Avec $b_0 = 2$, la suite est constante égale à 2. Avec $b_0 = 5$, on obtient $b_n = 2 + 3^{n+1}$.

THÉORÈME / Récurrence affine

Pour $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$, la translation par $\ell = b/(1-a)$ transforme la récurrence en progression géométrique : $u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$.

CHAPITRE 4 / COURS

Binôme et coefficients

THÉORÈME / Formule du binôme

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Dans le produit de n facteurs $(a + b)$, choisir les r facteurs qui apportent b explique le coefficient $\binom{n}{r}$.

Relations à connaître et à comprendre

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n-r}{r+1}, \quad r \binom{n}{r} = n \binom{n-1}{r-1}.$$

La première égalité échange « choisir » et « ne pas choisir ». Les deux autres se vérifient avec les factorielles.

THÉORÈME / Sommes de coefficients

Pour $n \geq 1$, la somme des coefficients pairs et celle des coefficients impairs valent chacune 2^{n-1} . De plus,

$$\sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} = n 2^{n-1}, \quad \sum_{r=0}^n r^2 \binom{n}{r} = n(n+1) 2^{n-2}.$$

En évaluant $(1+x)^n$ en 1 et -1 , on sépare les parités. Pour la dernière formule, écrire $r^2 = r(r-1) + r$ et utiliser deux fois l'identité précédente : la somme de $r(r-1)\binom{n}{r}$ vaut $n(n-1)2^{n-2}$.

Termes rationnels d'un développement

Pour un produit de puissances rationnelles de nombres premiers distincts, la rationalité impose que chaque exposant soit entier. On peut le voir en élevant à une puissance commune puis en comparant les exposants dans les décompositions en facteurs premiers.

PIÈGE / Rang du terme et indice

Le terme d'indice r est le $(r+1)$ -ième terme. Le trentième terme correspond donc à $r = 29$.

CHAPITRE 4 / PROBLÈMES GUIDÉS

Parité et symétrie

PROBLÈME B1 / Une somme de quotients

Écrire sous forme irréductible m/n la somme $\sum_{r=0}^5 \binom{11}{2r+1}/(2r+2)$, puis calculer $m - n$.

Solution

L'identité $\binom{11}{j}/(j+1) = \binom{12}{j+1}/12$ transforme la somme en

$$\frac{1}{12} \sum_{r=0}^5 \binom{12}{2r+2} = \frac{1}{12} (2^{11} - 1) = \frac{2047}{12}.$$

Le terme d'indice 0 a été retiré de la somme des coefficients pairs. Comme 2047 n'est divisible ni par 2 ni par 3, la fraction est irréductible.

$$m - n = 2047 - 12 = 2035.$$

PROBLÈME B2 / Faire disparaître une racine

Pour $x \geq 1$, on pose $P(x) = (x + \sqrt{x^3 - 1})^5 + (x - \sqrt{x^3 - 1})^5$. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ses coefficients en x^7, x^5, x^3, x . Résoudre $\alpha u + \beta v = 18, \gamma u + \delta v = 20$.

Solution

Les puissances impaires de la racine s'annulent. En conservant les indices 0, 2 et 4,

$$P(x) = 2[x^5 + 10x^3(x^3 - 1) + 5x(x^3 - 1)^2].$$

D'où $\alpha = 10, \beta = 2, \gamma = -20, \delta = 10$. Le système devient

$$5u + v = 9, \quad -2u + v = 2.$$

En soustrayant, $7u = 7$; puis $v = 4$.

$$u = 1, \quad v = 4, \quad u + v = 5.$$

PIÈGE / Le facteur 2

Additionner les deux développements double les termes d'indice pair ; il ne suffit pas d'effacer les termes impairs.

CHAPITRE 4 / PROBLÈMES GUIDÉS

Pondérations et multinôme

PROBLÈME B3 / Une somme pondérée

Calculer $T = \sum_{r=1}^{30} r^2 \binom{30}{r}^2 / \binom{30}{r-1}$. Écrire $T = \alpha 2^{29}$.

Solution

Le quotient de deux coefficients consécutifs donne

$$\frac{\binom{30}{r}}{\binom{30}{r-1}} = \frac{31-r}{r}, \quad T = \sum_{r=1}^{30} (31r - r^2) \binom{30}{r}.$$

Les formules du cours conduisent à

$$T = 31 \cdot 30 \cdot 2^{29} - 30 \cdot 31 \cdot 2^{28} = 30 \cdot 31 \cdot 2^{28}.$$

$$T = 465 \cdot 2^{29}, \quad \alpha = 465.$$

PROBLÈME B4 / Termes rationnels d'un multinôme

Dans le développement multinomial complet de $(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt{3})^6$, calculer la somme des termes individuellement rationnels.

Solution

Un terme s'écrit $\frac{6!}{i!j!k!} 2^{j/3} 3^{k/2}$ avec $i + j + k = 6$. Il est rationnel exactement lorsque $3 \mid j$ et $2 \mid k$. Les possibilités sont :

(j, k)	$(0, 0)$	$(0, 2)$	$(0, 4)$	$(0, 6)$	$(3, 0)$	$(3, 2)$	$(6, 0)$
valeur	1	45	135	27	40	360	4

Par exemple, pour $(j, k) = (3, 2)$, $i = 1$ et le terme vaut $6!/(1!3!2!) \times 2 \times 3 = 360$.

$$1 + 45 + 135 + 27 + 40 + 360 + 4 = 612.$$

PIÈGE / Ce que l'on somme

Il s'agit des termes rationnels pris séparément dans le développement multinomial. Ce n'est pas une demande de simplification de toute l'expression.

CHAPITRE 4 / PROBLÈMES GUIDÉS

Des coefficients qui déterminent les exposants

PROBLÈME B5 / Deux coefficients suffisent

Dans $(1+x)^p(1-x)^q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$, les coefficients de x et x^2 valent respectivement 1 et -2 . Calculer $p^2 + q^2$.

Solution

Le coefficient de x est $p - q = 1$. Celui de x^2 vaut

$$\binom{p}{2} + \binom{q}{2} - pq = \frac{(p-q)^2 - (p+q)}{2} = -2.$$

Il s'ensuit que $p + q = 5$, donc $p = 3$ et $q = 2$.

$$p^2 + q^2 = 13.$$

PROBLÈME B6 / Trois coefficients en progression arithmétique

Les coefficients des cinquième, sixième et septième termes de $(1+x)^{n+4}$ sont en progression arithmétique. On suppose $n \geq 2$ et $n \neq 10$. Trouver le plus grand coefficient du développement.

Solution

Les indices concernés sont 4, 5 et 6. Divisons l'égalité par $\binom{n+4}{5} > 0$:

$$\frac{5}{n} + \frac{n-1}{6} = 2.$$

En multipliant par $6n$, on obtient $n^2 - 13n + 30 = 0$, soit $(n-3)(n-10) = 0$. La valeur admise est $n = 3$.

Le développement est donc celui de $(1+x)^7$. Le quotient des coefficients consécutifs $(7-r)/(r+1)$ est supérieur à 1 jusqu'au centre, puis inférieur à 1. Les deux coefficients centraux sont égaux :

$$\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35.$$

ASTUCE / Diviser par le coefficient central

Une relation entre trois coefficients consécutifs se réduit souvent à deux quotients simples, sans développer de grandes factorielles.

CHAPITRE 4 / PROBLÈMES GUIDÉS

Monotonie et nombres complexes

PROBLÈME B7 / Un rapport de coefficients

Dans $(1+x)^{2n-1}$, a et b sont les coefficients des trentième et douzième termes. Sachant que $n \geq 15$ et $2a = 5b$, déterminer n .

Solution

Posons $N = 2n - 1 \geq 29$ et $R(N) = \binom{N}{29} / \binom{N}{11}$. Pour les entiers $N \geq 29$,

$$\frac{R(N+1)}{R(N)} = \frac{N-10}{N-28} > 1.$$

Le rapport est donc strictement croissant. À $N = 41$, la symétrie donne

$$R(41) = \frac{\binom{41}{12}}{\binom{41}{11}} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}.$$

Cette valeur est unique ; $2n - 1 = 41$ conduit à

$$n = 21.$$

PROBLÈME B8 / Une somme alternée filtrée

Calculer $\alpha = 1 + \sum_{r=1}^6 (-3)^{r-1} \binom{12}{2r-1}$.

Solution

Posons $z = i\sqrt{3}$. Puisque $z^{2r-2} = (-3)^{r-1}$, l'extraction des puissances impaires donne

$$\sum_{r=1}^6 (-3)^{r-1} \binom{12}{2r-1} = \frac{(1+z)^{12} - (1-z)^{12}}{2z}.$$

Or $1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i\pi/3}$, donc les deux puissances douzièmes valent 2^{12} . Le quotient est nul et

$$\alpha = 1.$$

ASTUCE / Un filtre de parité

La différence $P(z) - P(-z)$ ne conserve que les puissances impaires. Le chapitre 7 rappelle la forme exponentielle utilisée ici.

CHAPITRE 4 / PROBLÈMES GUIDÉS

Rationalité et divisibilité

PROBLÈME B9 / Deux questions sur les termes

Pour $a, b > 0$, peut-on trouver trois termes consécutifs de $(a + b)^{12}$ en progression géométrique ? Calculer aussi la somme des termes rationnels de $(3^{1/4} + 4^{1/3})^{12}$.

Solution

Pour trois indices $r - 1, r, r + 1$ avec $1 \leq r \leq 11$, l'égalité des deux rapports imposerait

$$\frac{13 - r}{r} \frac{b}{a} = \frac{12 - r}{r + 1} \frac{b}{a}.$$

Après simplification, $(13 - r)(r + 1) = r(12 - r)$ donnerait $13 = 0$. Aucun triplet ne convient.

Dans le second développement, le terme d'indice r est $\binom{12}{r} 3^{(12-r)/4} 2^{2r/3}$. La rationalité exige $4 \mid (12 - r)$ et $3 \mid r$, donc $12 \mid r$. Seuls $r = 0, 12$ conviennent :

0 triplet géométrique, $3^3 + 4^4 = 27 + 256 = 283.$
--

PROBLÈME B10 / Un nombre imposé de termes entiers

Quel est le plus petit entier $n \geq 0$ pour lequel $(7^{1/3} + 11^{1/12})^n$ possède exactement 183 termes entiers dans son développement binomial ?

Solution

Le terme d'indice r vaut $\binom{n}{r} 7^{(n-r)/3} 11^{r/12}$. Il est entier si et seulement si $12 \mid r$ et $3 \mid (n - r)$. Il faut donc $3 \mid n$; dans ce cas, il y a $\lfloor n/12 \rfloor + 1$ indices admissibles.

L'égalité $\lfloor n/12 \rfloor + 1 = 183$ équivaut à $2184 \leq n \leq 2195$. Le plus petit entier de cet intervalle, 2184, est divisible par 3.

$n_{\min} = 2184.$

CHAPITRE 4 / ARITHMÉTIQUE

Réduire une grande puissance

PROBLÈME B11 / Un reste modulo 23

Déterminer le reste de la division de 7^{103} par 23.

Solution

La notation $u \equiv v \pmod{23}$ signifie que 23 divise $u - v$. Elle est compatible avec l'addition et la multiplication.

Calculons quelques puissances :

$$7^2 = 49 \equiv 3, \quad 7^3 = 21 \equiv -2 \pmod{23}.$$

Donc $7^9 \equiv (-2)^3 = -8$, puis

$$7^{11} = 7^9 \cdot 7^2 \equiv -8 \cdot 3 = -24 \equiv -1 \pmod{23}.$$

Comme $103 = 9 \times 11 + 4$,

$$7^{103} = (7^{11})^9 7^4 \equiv (-1)^9 (7^2)^2 \equiv -9 \equiv 14 \pmod{23}.$$

Le nombre 14 appartient à $\{0, 1, \dots, 22\}$: c'est le reste demandé.

14.

ASTUCE / Chercher une petite puissance remarquable

Atteindre 1 ou -1 modulo le diviseur permet de réduire de très grands exposants. Ici, aucune formule générale supplémentaire n'est nécessaire.

Pourquoi les calculs intermédiaires sont fiables

Si $u - v = 23k$, alors $uw - vw = 23kw$, donc on peut multiplier une congruence par n'importe quel entier. En répétant cette propriété, on peut également l'élever à une puissance entière positive.

PIÈGE / Reste et représentant

Les nombres -9 , 14 et 37 sont congrus modulo 23. Seul 14 appartient à l'intervalle imposé pour le reste euclidien.

CHAPITRE 4 / ENTRAÎNEMENT

Combiner les identités

EXERCICE 7

Pour $n \geq 2$, calculer $\sum_{r=0}^n r(r-1)\binom{n}{r}$. Donner une interprétation par double comptage.

EXERCICE 8

Combien de termes rationnels contient le développement binomial de $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{12}$? Calculer leur somme.

Corrigé 7

L'identité $r(r-1)\binom{n}{r} = n(n-1)\binom{n-2}{r-2}$ donne

$$\sum_{r=0}^n r(r-1)\binom{n}{r} = n(n-1)2^{n-2}.$$

Interprétation : on choisit une partie d'un ensemble de n éléments, puis deux éléments distincts ordonnés de cette partie. À gauche, on fixe sa taille r . À droite, on choisit d'abord les deux éléments distingués ($n(n-1)$ possibilités), puis on inclut ou non chacun des $n-2$ éléments restants.

Corrigé 8

Le terme d'indice r est $\binom{12}{r}2^{(12-r)/2}3^{r/3}$. Il est rationnel si $12-r$ est pair et si r est multiple de 3, donc si $6 \mid r$.

Il existe trois indices : $r = 0, 6, 12$. Les valeurs correspondantes sont

$$2^6 = 64, \quad \binom{12}{6}2^33^2 = 924 \times 72 = 66528, \quad 3^4 = 81.$$

3 termes rationnels, de somme 66673.

PIÈGE / Le coefficient ne supprime pas une racine irrationnelle

Un coefficient binomial entier non nul ne transforme pas une puissance irrationnelle de premiers distincts en rationnel. Les conditions sur les exposants restent nécessaires.

CHAPITRE 5 / COURS

Dénombrer avec des contraintes

THÉORÈME / Les trois constructions de base

- Ordonner n objets distincts : $n!$ possibilités.
- Choisir r objets parmi n , sans ordre : $\binom{n}{r}$ possibilités.
- Ordonner n lettres avec multiplicités $n_1, \dots, n_s$: $n!/(n_1! \cdots n_s!)$ possibilités, avec $\sum n_j = n$.

La dernière formule part de $n!$ arrangements d'objets étiquetés. Permuter les n_j copies d'une même lettre ne change pas le mot ; on divise donc par chaque $n_j!$.

Trois méthodes pour les voisinages

Blocs. Réunir les objets consécutifs en un bloc, puis compter leurs ordres internes.

Intervalles. Après avoir disposé n objets, il reste $n + 1$ espaces, y compris aux extrémités. En plaçant au plus un nouvel objet par espace, on évite leur voisinage.

Complément. Compter toutes les configurations, puis enlever celles qui possèdent la propriété interdite.

THÉORÈME / Solutions entières sans borne supérieure

Le nombre de solutions de $x_1 + \cdots + x_k = s$ avec $x_j \geq 0$ entiers est $\binom{s+k-1}{k-1}$.

Représenter s unités par des étoiles et séparer les k groupes avec $k - 1$ barres. Choisir les positions des barres parmi $s + k - 1$ places décrit exactement une solution, y compris les groupes vides.

Avec des bornes supérieures

Compter d'abord sans les bornes. Pour exclure $x_j \geq M$, poser $x'_j = x_j - M \geq 0$ et compter les solutions restantes. Ajouter les intersections retirées deux fois si elles sont possibles.

PIÈGE / Lire les mots logiques

« Pas tous ensemble » est différent de « aucun voisinage ». « Pas divisible simultanément par 4 et 9 » est différent de « ni divisible par 4 ni divisible par 9 ».

CHAPITRE 5 / PROBLÈMES GUIDÉS

Choisir et ordonner

PROBLÈME D1 / Une lettre au milieu

On choisit cinq lettres distinctes parmi les 26 lettres de l'alphabet et on les écrit dans l'ordre alphabétique. Combien de choix donnent M comme troisième lettre ?

Solution

Il faut choisir exactement deux lettres avant M parmi les douze premières, et deux lettres après M parmi les treize dernières. L'ordre final est imposé, donc aucun facteur de permutation n'est nécessaire.

$$\binom{12}{2} \binom{13}{2} = 66 \times 78 = 5148.$$

PROBLÈME D2 / Deux blocs, un voisinage interdit

Trois filles et quatre garçons, tous distincts, se placent en ligne. Toutes les filles sont ensemble et tous les garçons sont ensemble. Deux garçons désignés ne doivent pas être voisins. Combien d'ordres conviennent ?

Solution

Les deux blocs peuvent se placer dans deux ordres. Les filles ont 3! ordres internes. Pour les garçons, il existe 4! ordres en tout.

Si les deux garçons désignés sont voisins, on les réunit en un bloc : trois objets sont alors à ordonner, soit 3! possibilités, et le couple a deux ordres internes. Il faut enlever $2 \times 3!$ cas.

$$2 \times 3! \times (4! - 2 \times 3!) = 144.$$

ASTUCE / Une étape, un facteur

Le produit final décrit successivement l'ordre des blocs, celui des filles, puis l'ordre admissible des garçons. Cette lecture permet de contrôler que chaque configuration est comptée exactement une fois.

CHAPITRE 5 / PROBLÈMES GUIDÉS

Blocs et espaces disponibles

PROBLÈME D3 / Deux sens de « séparées »

Avec les huit lettres distinctes de DAUGHTER, compter les arrangements où les trois voyelles A, U, E ne sont pas toutes consécutives. Comparer avec le nombre d'arrangements où aucune paire de voyelles n'est voisine.

Solution

Pas toutes consécutives. Il existe $8!$ arrangements. Si les trois voyelles sont ensemble, leur bloc et les cinq consonnes constituent six objets, soit $6! \times 3!$ arrangements. Donc

$$8! - 6!3! = 36000.$$

Aucune paire voisine. On ordonne les cinq consonnes de $5!$ façons. Elles créent six espaces. On en choisit trois, puis on y place les voyelles dans $3!$ ordres :

$$5! \binom{6}{3} 3! = 14400.$$

PROBLÈME D4 / Deux cas incompatibles

Cinq garçons et quatre filles distincts se placent en ligne. Compter les arrangements où tous les garçons sont ensemble ou bien aucun garçon n'est voisin d'un autre.

Solution

Dans le premier cas, le bloc des garçons et les quatre filles forment cinq objets : $5! \times 5!$ arrangements.

Dans le second, on ordonne d'abord les filles de $4!$ façons. Les cinq espaces disponibles doivent tous recevoir un garçon, dans l'un des $5!$ ordres.

Les deux cas sont disjoints puisque cinq garçons ne peuvent être à la fois tous consécutifs et tous séparés. Ainsi

$$5!5! + 4!5! = 17280.$$

PIÈGE / Réunion ou somme ?

On peut additionner directement seulement si les cas sont incompatibles. Sinon, il faut retirer leur intersection.

CHAPITRE 5 / PROBLÈMES GUIDÉS

Préciser la condition logique

PROBLÈME D5 / Des multiples à trois chiffres

Compter les entiers à trois chiffres divisibles par 2 et par 3, mais pas simultanément par 4 et par 9. Que devient la réponse si l'on exige qu'ils ne soient divisibles ni par 4 ni par 9 ?

Solution

Les multiples de 6 entre 100 et 999 sont au nombre de $\lfloor 999/6 \rfloor - \lfloor 99/6 \rfloor = 166 - 16 = 150$.

Être divisible simultanément par 4 et 9 signifie être multiple de 36. Il y en a $27 - 2 = 25$ à trois chiffres. La première réponse est donc

$$150 - 25 = 125.$$

Pour la seconde formulation, il faut exclure les multiples de 12 (75 cas) et ceux de 18 (50 cas), puis rétablir ceux de 36, retirés deux fois :

$$150 - 75 - 50 + 25 = 50.$$

PROBLÈME D6 / Fonctions à valeurs binaires

Combien de fonctions $f : \{1, \dots, 100\} \rightarrow \{0, 1\}$ prennent exactement une fois la valeur 1 parmi les arguments $1, \dots, 98$?

Solution

On choisit l'unique argument de $\{1, \dots, 98\}$ envoyé sur 1 : 98 choix. Les 97 autres images sont alors fixées à 0.

Les images de 99 et 100 sont libres, chacune avec deux choix indépendants. Ainsi

$$98 \times 2^2 = 392.$$

PIÈGE / Une restriction locale

« Exactement une fois parmi les 98 premiers arguments » n'interdit pas d'autres valeurs 1 aux arguments 99 et 100.

CHAPITRE 5 / PROBLÈMES GUIDÉS

Répartir les choix

PROBLÈME D7 / Une sélection dans deux groupes

Le groupe A contient sept garçons et trois filles, le groupe B six garçons et cinq filles. Former un groupe de quatre garçons et quatre filles, dont cinq personnes de A et trois de B. Combien de choix sont possibles ?

Solution

Si l'on prend g garçons de A, on y prend $5 - g$ filles. Les trois filles disponibles imposent $g \geq 2$, et le total de garçons impose $g \leq 4$. Il reste donc trois cas :

garçons A	filles A	composition B	nombre
4	1	0 garçon, 3 filles	$\binom{7}{4} \binom{3}{1} \binom{5}{3} = 1050$
3	2	1 garçon, 2 filles	$\binom{7}{3} \binom{3}{2} \binom{6}{1} \binom{5}{2} = 6300$
2	3	2 garçons, 1 fille	$\binom{7}{2} \binom{3}{3} \binom{6}{2} \binom{5}{1} = 1575$

Les cas sont disjoints et couvrent toutes les possibilités.

$$1050 + 6300 + 1575 = 8925.$$

PROBLÈME D8 / Une borne stricte

Combien de nombres à cinq chiffres strictement supérieurs à 50000 utilisent seulement les chiffres de 0 à 7, avec répétition autorisée, et ont leur premier et leur dernier chiffre de somme au plus 8 ?

Solution

Le premier chiffre vaut 5, 6 ou 7. Le dernier admet respectivement 4 choix (0, 1, 2, 3), 3 choix (0, 1, 2) ou 2 choix (0, 1). Les trois chiffres intermédiaires sont libres : 8^3 possibilités.

Cela compte $8^3(4 + 3 + 2) = 4608$ nombres au moins égaux à 50000. Le nombre 50000 satisfait les contraintes sur les chiffres mais est exclu par la borne stricte.

$$4608 - 1 = 4607.$$

PIÈGE / Le point frontière

Après un comptage par premier chiffre, contrôler séparément la valeur limite imposée par « strictement supérieur ».

CHAPITRE 5 / COEFFICIENTS ET GÉOMÉTRIE

D'un rapport à un cercle

PROBLÈME D9 / Une chaîne de coefficients binomiaux

On donne $\binom{n}{r-1} = 28$, $\binom{n}{r} = 56$, $\binom{n}{r+1} = 70$. Déterminer n, r . Puis décrire le lieu du centre de gravité $G(x, y)$ du triangle de sommets

$$A = \left(\frac{n}{2} \cos t, \frac{n}{2} \sin t\right), \quad B = (2 \sin t, -2 \cos t), \quad C = (3r - n, r^2 - n - 1),$$

quand t parcourt $\mathbb{R}$.

Solution

Les quotients donnent

$$\frac{n-r+1}{r} = 2, \quad \frac{n-r}{r+1} = \frac{5}{4}.$$

De la première relation, $n = 3r - 1$. En reportant dans la seconde, $4(2r - 1) = 5(r + 1)$, donc $r = 3$ et $n = 8$. Les coefficients sont bien $\binom{8}{2} = 28$, $\binom{8}{3} = 56$, $\binom{8}{4} = 70$.

Les sommets deviennent $A = (4 \cos t, 4 \sin t)$, $B = (2 \sin t, -2 \cos t)$ et $C = (1, 0)$. Les coordonnées du centre de gravité sont les moyennes :

$$3x - 1 = 4 \cos t + 2 \sin t, \quad 3y = 4 \sin t - 2 \cos t.$$

En élevant au carré et en additionnant, les termes croisés s'annulent :

$$(3x - 1)^2 + 9y^2 = 20.$$

Il s'agit du cercle de centre $(1/3, 0)$ et de rayon $2\sqrt{5}/3$.

Pourquoi tout le cercle est parcouru

Le vecteur $(3x - 1, 3y)$ est l'image de $(\cos t, \sin t)$ par la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Ses colonnes sont orthogonales et de même norme $\sqrt{20}$: elle est une rotation suivie d'une homothétie. Le cercle unité est donc envoyé sur tout le cercle annoncé.

CHAPITRE 5 / PROBLÈMES GUIDÉS

Sommes de chiffres et multiplicités

PROBLÈME D10 / Trois chiffres de somme 15

Compter les entiers entre 212 et 999 dont la somme des chiffres vaut 15.

Solution

Aucun entier entre 200 et 211 n'a une somme de chiffres égale à 15. On peut donc prendre un chiffre des centaines $2 + x$, avec $0 \leq x \leq 7$, puis deux chiffres $0 \leq y, z \leq 9$. Il faut $x + y + z = 13$.

Sans borne supérieure, il y a $\binom{15}{2} = 105$ solutions. Les cas $x \geq 8$ sont au nombre de $\binom{7}{2} = 21$. Les cas $y \geq 10$ et $z \geq 10$ sont au nombre de $\binom{5}{2} = 10$ chacun. Deux dépassements simultanés sont impossibles car leur somme minimale dépasse 13.

$$105 - 21 - 10 - 10 = 64.$$

PROBLÈME D11 / Aucune lettre isolée

Combien de mots de six lettres peut-on former avec M, A, T, H, S, en autorisant les répétitions, si chaque lettre utilisée doit apparaître au moins deux fois ?

Solution

Les partitions possibles des six positions en multiplicités au moins égales à 2 sont 6, $4 + 2$, $3 + 3$ et $2 + 2 + 2$:

multiplicités	construction	nombre
6	5 choix de lettre	5
$4 + 2$	$5 \cdot 4 \cdot 6! / (4!2!)$	300
$3 + 3$	$\binom{5}{2} \cdot 6! / (3!3!)$	200
$2 + 2 + 2$	$\binom{5}{3} \cdot 6! / (2!2!2!)$	900

Les rôles « quatre fois » et « deux fois » sont distincts, contrairement aux rôles égaux dans les deux dernières lignes.

$$5 + 300 + 200 + 900 = 1405.$$

CHAPITRE 5 / PROBLÈMES GUIDÉS

Borner et classer

PROBLÈME D12 / Sept chiffres parmi 1, 2, 3

Compter les nombres à sept chiffres utilisant seulement 1, 2 et 3 et dont la somme des chiffres vaut 11.

Solution

Retirons 1 à chacun des sept chiffres. On cherche $x_1 + \dots + x_7 = 4$, avec $0 \leq x_j \leq 2$. Sans borne supérieure, il y a $\binom{10}{6} = 210$ solutions.

Pour une position fixée avec $x_j \geq 3$, retirer 3 laisse une somme égale à 1, soit $\binom{7}{6} = 7$ solutions. Deux positions ne peuvent dépasser 2 simultanément. Le nombre recherché est donc

$$210 - 7 \times 7 = 161.$$

PROBLÈME D13 / Un rang lexicographique

Les permutations des six lettres distinctes de KANPUR sont classées par ordre alphabétique. Déterminer la 440^e. Le rang 440 est fixé explicitement dans cette reformulation.

Solution

L'ordre des lettres est A, K, N, P, R, U. Chaque première lettre crée un bloc de $5! = 120$ mots. Les trois premiers blocs couvrent 360 mots ; la lettre initiale est P et le rang interne est $440 - 360 = 80$.

Parmi A, K, N, R, U, chaque deuxième lettre crée un bloc de $4! = 24$ mots. Après trois blocs, il reste le rang $80 - 72 = 8$: la deuxième lettre est R.

Parmi A, K, N, U, chaque troisième lettre crée un bloc de $3! = 6$ mots. Le rang 8 est dans le bloc K, au rang interne 2. Parmi les permutations de A, N, U, les deux premières sont ANU et AUN.

$$\text{La 440}^{\text{e}} \text{ permutation est PRKAUN.}$$

ASTUCE / Vérifier le rang

Il y a $3 \cdot 120 + 3 \cdot 24 + 1 \cdot 6 + 1 = 439$ mots avant PRKAUN. Son rang, en commençant à 1, est bien 440.

CHAPITRE 5 / ENTRAÎNEMENT

Éviter les doublons

EXERCICE 9

Quatre personnes A, B, C, D et trois personnes X, Y, Z se placent en ligne. Les personnes X, Y, Z ne doivent jamais être voisines entre elles. Combien d'ordres sont possibles ?

EXERCICE 10

Compter les solutions entières de $x + y + z = 10$ avec $0 \leq x, y, z \leq 5$.

Corrigé 9

On ordonne d'abord A, B, C, D : $4!$ choix. Les cinq espaces ainsi créés peuvent recevoir au plus une personne parmi X, Y, Z. On choisit trois espaces, puis l'ordre des trois personnes.

$$4! \binom{5}{3} 3! = 24 \times 10 \times 6 = 1440.$$

Chaque arrangement admissible redonne de manière unique l'ordre des quatre premières personnes et les trois espaces occupés.

Corrigé 10

Sans borne supérieure, le nombre de solutions vaut $\binom{12}{2} = 66$. Pour $x \geq 6$, poser $x' = x - 6$ laisse $x' + y + z = 4$, donc $\binom{6}{2} = 15$ solutions. Il en est de même pour y et z .

Deux variables ne peuvent être simultanément au moins égales à 6 puisque la somme ne vaut que 10. Ainsi

$$66 - 3 \times 15 = 21.$$

ASTUCE / Une deuxième vérification

Poser $u = 5 - x$, $v = 5 - y$, $w = 5 - z$ transforme le système en $u + v + w = 5$, avec $u, v, w \geq 0$. Les bornes supérieures sont alors automatiques. On retrouve $\binom{7}{2} = 21$.

CHAPITRE 6 / COURS

Probabilités et conditionnement

Dans un univers fini équiprobable, la probabilité d'un événement est le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles. L'équiprobabilité doit être justifiée par le modèle.

THÉORÈME / Conditionner

Si $P(B) > 0$,

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A \cap B) = P(B)P(A | B).$$

Conditionner par B revient à restreindre l'univers aux résultats appartenant à B et à renormaliser les probabilités.

Indépendance

Les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Deux tirages sans remise ne sont généralement pas indépendants, car le premier modifie le contenu disponible.

THÉORÈME / Probabilités totales et Bayes

Si $B_1, \dots, B_s$ forment une partition de l'univers, avec $P(B_j) > 0$,

$$P(A) = \sum_{j=1}^s P(B_j)P(A | B_j).$$

Si $P(A) > 0$, alors

$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j)P(A | B_j)}{\sum_k P(B_k)P(A | B_k)}.$$

La première identité découpe A en morceaux disjoints $A \cap B_j$. La seconde applique simplement la définition du conditionnement.

Espérance et variance

Si X prend des valeurs x_j avec probabilités p_j , alors

$$E(X) = \sum_j x_j p_j, \quad \text{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2.$$

La dernière égalité résulte du développement du carré et de la linéarité de l'espérance.

PIÈGE / Une loi doit être définie

Il n'existe pas de loi uniforme sur tous les entiers naturels. Il faut préciser un intervalle fini, une loi sur les entiers ou un passage à la limite.

CHAPITRE 6 / PROBLÈMES GUIDÉS

Conditionner et énumérer

PROBLÈME P1 / Deux tirages sans remise

Une urne contient quatre boules blanches et six noires. On tire deux boules successivement sans remise. Sachant que la seconde est noire, quelle est la probabilité que la première soit noire ?

Solution

Notons N_1, N_2 les événements « la première, respectivement la seconde, boule est noire ». On a $P(N_1 \cap N_2) = (6/10)(5/9) = 1/3$.

Par symétrie des positions, $P(N_2) = 6/10$. Les probabilités totales le confirment :

$$P(N_2) = \frac{6}{10} \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \frac{6}{9} = \frac{6}{10}.$$

Ainsi

$$P(N_1 | N_2) = \frac{1/3}{3/5} = \frac{5}{9}.$$

PROBLÈME P2 / Un motif dans trois lancers

Une pièce équilibrée est lancée trois fois. La variable X compte les occurrences de PF sur deux lancers consécutifs, P désignant pile et F face. Calculer $64(E(X) + \text{Var}(X))$.

Solution

Deux occurrences ne peuvent pas coexister : le lancer central devrait être simultanément F et P. Les huit suites équiprobables donnent :

X	suites	$P(X)$
0	PPP, FPP, FFP, FFF	1/2
1	PPF, PFP, PFF, FPF	1/2

Donc $E(X) = 1/2$, $E(X^2) = 1/2$ et $\text{Var}(X) = 1/2 - 1/4 = 1/4$.

$$64(E(X) + \text{Var}(X)) = 64 \times \frac{3}{4} = 48.$$

PIÈGE / Occurrences qui se chevauchent

Les événements « PF aux positions 1 et 2 » et « PF aux positions 2 et 3 » ne sont pas indépendants : ils sont incompatibles.

CHAPITRE 6 / PROBLÈMES GUIDÉS

Événements et faces répétées

PROBLÈME P3 / Compléments et conditionnement

On donne $P(A \cap B) = 1/10$, $P(A | B) = 1/4$, $P(B | A) = 1/3$. Calculer $P(A^c \cup B^c)/P(A^c \cap B^c)$.

Solution

La définition du conditionnement donne $P(B) = (1/10)/(1/4) = 4/10$ et $P(A) = (1/10)/(1/3) = 3/10$.

Les lois de De Morgan et l'inclusion-exclusion conduisent à

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = \frac{9}{10},$$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{4}{10} - \frac{1}{10} \right) = \frac{4}{10}.$$

$$\boxed{\frac{P(A^c \cup B^c)}{P(A^c \cap B^c)} = \frac{9}{4}.$$

PROBLÈME P4 / Deux dés non usuels

Deux dés indépendants ont six faces équiprobables. Le premier porte 1, 1, 2, 2, 3, 4, le second 1, 2, 2, 3, 3, 4. Calculer la probabilité que la somme soit 4 ou 5.

Solution

Les 36 couples de faces sont équiprobables, même si plusieurs faces portent le même nombre.

Pour la somme 4 : (1, 3) donne $2 \times 2 = 4$ couples de faces ; (2, 2) en donne 4 ; (3, 1) en donne 1. Total : 9.

Pour la somme 5 : (1, 4) donne 2 couples ; (2, 3) en donne 4 ; (3, 2) en donne 2 ; (4, 1) en donne 1. Total : 9.

$$\boxed{P(\text{somme 4 ou 5}) = \frac{9+9}{36} = \frac{1}{2}.$$

PIÈGE / Valeurs et issues élémentaires

Les nombres 1, 2, 3, 4 ne sont pas équiprobables sur ces dés. Il faut compter les faces, ou employer leurs probabilités respectives.

CHAPITRE 6 / COMPLÉMENT

Deux cases qui ne se touchent pas

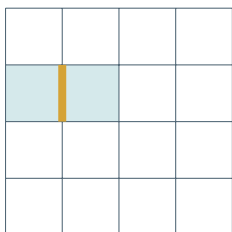
PROBLÈME P5 / Voisinage dans une grille

On choisit uniformément deux cases distinctes d'une grille 4×4 . Quelle est la probabilité qu'elles n'aient aucun côté commun ? Un contact par un sommet est autorisé.

Solution

Il existe $\binom{16}{2} = 120$ paires non ordonnées de cases. Comptons le complément, c'est-à-dire les paires partageant un côté.

Chaque ligne possède trois jonctions horizontales, donc $4 \times 3 = 12$ paires voisines horizontalement. Chaque colonne possède de même trois jonctions verticales, soit 12 autres paires. Aucune paire distincte de cases ne partage deux côtés : il n'y a pas de doublon.



Un côté intérieur correspond à une unique paire interdite.

12 jonctions horizontales

12 jonctions verticales

La probabilité cherchée est donc

$$1 - \frac{24}{120} = \frac{4}{5}.$$

ASTUCE / Généraliser sans recompter les cases

Dans une grille $m \times n$, il y a $m(n-1) + n(m-1)$ côtés intérieurs. Pour $mn \geq 2$, la probabilité de ne pas partager un côté est

$$1 - \frac{m(n-1) + n(m-1)}{\binom{mn}{2}}.$$

CHAPITRE 6 / PROBLÈMES GUIDÉS

Un jeu répété et une matrice aléatoire

PROBLÈME P6 / Avantage du premier joueur

A puis B lancent alternativement deux dés équilibrés. A gagne s'il obtient une somme 5, B s'il obtient une somme 8. Le jeu s'arrête au premier succès. Quelle est la probabilité que A gagne ?

Solution

À son tour, A réussit avec $p = 4/36 = 1/9$; B avec $q = 5/36$. Après un échec de chacun, la situation initiale se reproduit. Si W est la probabilité de victoire de A,

$$W = p + (1 - p)(1 - q)W.$$

Donc

$$W = \frac{p}{1 - (1 - p)(1 - q)} = \frac{1/9}{1 - (8/9)(31/36)} = \frac{36}{76}.$$

$$W = \frac{9}{19}.$$

La probabilité de dépasser k cycles est $[(1 - p)(1 - q)]^k$, qui tend vers 0 : le jeu se termine presque sûrement.

PROBLÈME P7 / Inversibilité aléatoire

Les quatre coefficients d'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sont indépendants et uniformes dans $\{0, 1\}$. Calculer la probabilité que M soit inversible.

Solution

Le déterminant $ad - bc$ est non nul si les deux produits sont différents. Or $P(ad = 1) = P(bc = 1) = 1/4$, et les produits sont indépendants car ils portent sur des coefficients disjoints.

Les possibilités $(ad, bc) = (1, 0)$ et $(0, 1)$ sont incompatibles et ont chacune pour probabilité $(1/4)(3/4)$.

$$P(M \text{ inversible}) = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

ASTUCE / Une autre lecture

Sur les 16 matrices binaires possibles, six sont inversibles. Le chapitre 8 étudie la loi complète du déterminant.

CHAPITRE 6 / PROBLÈMES GUIDÉS

Calculer une loi, définir un modèle

PROBLÈME P8 / Deux fruits défectueux au maximum

Parmi dix oranges, trois sont défectueuses. On choisit uniformément deux oranges sans remise. Pour X , nombre d'oranges défectueuses obtenues, déterminer la loi, l'espérance et la variance.

Solution

Les $\binom{10}{2} = 45$ paires sont équiprobables. On obtient

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\binom{7}{2}/45 = 7/15$	$3 \cdot 7/45 = 7/15$	$\binom{3}{2}/45 = 1/15$

D'où $E(X) = 7/15 + 2/15 = 3/5$ et $E(X^2) = 7/15 + 4/15 = 11/15$. Ainsi

$$\text{Var}(X) = \frac{11}{15} - \frac{9}{25} = \frac{28}{75}.$$

PROBLÈME P9 / Des puissances de i choisies au hasard

Pour un entier $N \geq 1$, on choisit indépendamment K_1, K_2 uniformes dans $\{1, \dots, 4N\}$. Calculer $P(i^{K_1} + i^{K_2} \neq 0)$. Ce modèle fini précise la formulation du texte de départ.

Solution

Chaque classe modulo 4 contient exactement N nombres de l'intervalle. Les valeurs $1, i, -1, -i$ sont donc équiprobables pour chacune des deux puissances.

La somme est nulle exactement lorsque les deux valeurs sont opposées. Pour chacune des quatre premières valeurs, une seule seconde valeur convient, soit quatre couples sur seize.

$$P(i^{K_1} + i^{K_2} \neq 0) = 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}.$$

PIÈGE / Pas d'uniformité sur tous les naturels

Attribuer à chaque entier la même probabilité donnerait soit une somme totale nulle, soit une somme infinie. Le choix sur $\{1, \dots, 4N\}$ rend le raisonnement exact.

CHAPITRE 6 / PROBLÈMES GUIDÉS

Symétrie et formule de Bayes

PROBLÈME P10 / L'ordre de deux voyelles

Une permutation des six lettres distinctes de GARDEN est choisie uniformément. Quelle est la probabilité que les voyelles ne soient pas dans l'ordre alphabétique ?

Solution

Les voyelles sont A et E. Échanger leur position établit une bijection entre les permutations où A précède E et celles où E précède A. Aucun mot n'est inchangé par cet échange.

Les deux classes ont donc le même cardinal et couvrent les $6!$ permutations. Le mauvais ordre alphabétique est E avant A :

$$P = \frac{1}{2}.$$

Pour r voyelles distinctes, leurs $r!$ ordres relatifs sont équiprobables. La probabilité de ne pas être dans l'ordre alphabétique devient $1 - 1/r!$.

PROBLÈME P11 / Identifier une urne après un tirage

On choisit uniformément une des trois urnes. Elles contiennent dix boules chacune, dont respectivement six, quatre et cinq blanches ; les autres sont noires. On tire une boule de l'urne choisie. Sachant qu'elle est blanche, quelle est la probabilité d'avoir choisi la deuxième urne ?

Solution

Notons U_j l'urne choisie et W l'événement « boule blanche ». Par probabilités totales,

$$P(W) = \frac{1}{3} \left(\frac{6}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10} \right) = \frac{1}{2}.$$

La formule de Bayes fournit

$$P(U_2 | W) = \frac{(1/3)(4/10)}{1/2} = \frac{4}{15}.$$

ASTUCE / Pourquoi le facteur $1/3$ disparaît

Les urnes sont choisies avec la même probabilité et ont le même effectif total. Les probabilités a posteriori sont donc proportionnelles à leurs nombres de boules blanches : $6 : 4 : 5$.

CHAPITRE 6 / PROBABILITÉS TOTALES

Un transfert entre deux urnes

PROBLÈME P12 / Retrouver un effectif

L'urne A contient quatre boules blanches et cinq noires. L'urne B contient n boules blanches et trois noires. On transfère au hasard une boule de A vers B, puis on tire une boule de B. La probabilité d'obtenir une blanche est $29/45$. Déterminer n .

Solution

Il existe deux situations après le transfert.

Une blanche est transférée, avec probabilité $4/9$. L'urne B contient alors $n + 1$ blanches parmi $n + 4$ boules, donc la probabilité conditionnelle de tirer une blanche est $(n + 1)/(n + 4)$.

Une noire est transférée, avec probabilité $5/9$. L'urne B contient alors n blanches parmi $n + 4$ boules, donc la probabilité conditionnelle vaut $n/(n + 4)$.

En additionnant les deux chemins,

$$\frac{4}{9} \frac{n+1}{n+4} + \frac{5}{9} \frac{n}{n+4} = \frac{9n+4}{9(n+4)} = \frac{29}{45}.$$

Comme $n + 4 > 0$, on peut multiplier sans changer l'équivalence :

$$5(9n + 4) = 29(n + 4), \quad 16n = 96.$$

$$\boxed{n = 6.}$$

Vérification

Avec $n = 6$, les deux probabilités conditionnelles valent $7/10$ et $6/10$. Leur moyenne pondérée est

$$\frac{4}{9} \frac{7}{10} + \frac{5}{9} \frac{6}{10} = \frac{28 + 30}{90} = \frac{29}{45}.$$

PIÈGE / Après le transfert

Le dénominateur est $n + 4$ dans les deux branches. Oublier la boule transférée ferait travailler avec le mauvais effectif total.

CHAPITRE 6 / ENTRAÎNEMENT

Conditionner dans le bon sens

EXERCICE 11

Une urne contient cinq boules blanches et trois noires. On en tire deux sans remise. Sachant qu'au moins une boule est blanche, quelle est la probabilité que les deux soient blanches ?

EXERCICE 12

A joue avant B dans un jeu alterné. À chaque tour, A gagne avec probabilité $1/4$ et B avec probabilité $1/3$, indépendamment des tours précédents. Calculer la probabilité que A gagne.

Corrigé 11

Il existe $\binom{8}{2} = 28$ paires. Les paires entièrement noires sont au nombre de $\binom{3}{2} = 3$. L'événement conditionnant contient donc 25 paires équiprobables.

Parmi elles, $\binom{5}{2} = 10$ paires sont entièrement blanches. Ainsi

$$P(\text{deux blanches} \mid \text{au moins une blanche}) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

Corrigé 12

Notons w la probabilité de victoire de A. A gagne immédiatement avec probabilité $1/4$. Sinon, le jeu revient à son état initial si A échoue puis B échoue, ce qui arrive avec probabilité $(3/4)(2/3) = 1/2$.

$$w = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}w \quad \implies \quad w = \frac{1}{2}.$$

$$P(A \text{ gagne}) = \frac{1}{2}.$$

Les chances par tour diffèrent, mais l'avantage de jouer en premier compense ici exactement la probabilité de succès plus faible de A.

ASTUCE / Un contrôle global

La probabilité que B gagne est $(3/4)(1/3)/(1 - 1/2) = 1/2$. Les deux probabilités s'additionnent à 1, conformément à la terminaison presque sûre du jeu.

CHAPITRE 7 / COURS

Nombres complexes : trois lectures

Forme algébrique

Un complexe s'écrit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. Son conjugué est $\bar{z} = x - iy$, son module $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. On a $z\bar{z} = |z|^2$ et $z + \bar{z} = 2\Re(z)$.

THÉORÈME / Forme trigonométrique et exponentielle

Pour $z \neq 0$, il existe un réel θ , défini modulo 2π , tel que

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}.$$

Les modules se multiplient et les arguments s'additionnent. En particulier,

$$z^n = |z|^n e^{in\theta} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Les formules d'addition du sinus et du cosinus prouvent la règle du produit. La formule des puissances en découle par récurrence, puis par inversion pour les exposants négatifs.

Lecture géométrique

Le complexe z représente le point (x, y) . Le module $|z - a|$ est sa distance au point d'affixe a . Multiplier par $re^{i\theta}$, avec $r > 0$, effectue une rotation d'angle θ suivie d'une homothétie de rapport r .

THÉORÈME / Droite et cercle

Pour $a \neq 0$ et $c \in \mathbb{R}$, $az + \bar{a}\bar{z} = c$ décrit une droite. L'équation $|z - z_0| = R$, avec $R > 0$, décrit un cercle de centre z_0 et de rayon R .

Racines de l'unité

Les solutions de $z^n = 1$ sont $e^{2ik\pi/n}$, pour $k = 0, \dots, n-1$. Pour $\omega = e^{2i\pi/3}$, on a $\omega^3 = 1$ et $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

PIÈGE / Conjuguer tout le produit

$\overline{az} = \bar{a}\bar{z}$. Le conjugué de $(1 + i)z$ est $(1 - i)\bar{z}$, et non $(1 + i)\bar{z}$.

CHAPITRE 7 / PROBLÈMES GUIDÉS

Modules et segments circulaires

PROBLÈME C1 / Trois points du cercle unité

Les complexes z_1, z_2, z_3 sont de module 1 et ont pour arguments $-\pi/4, 0, \pi/4$. Écrire $|z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1|^2 = \alpha + \beta\sqrt{2}$ et calculer $\alpha^2 + \beta^2$.

Solution

On a $z_2 = 1, \bar{z}_3 = z_1$ et $\bar{z}_1 = z_3$. L'expression intérieure devient $2z_1 + z_3^2$. Or $z_1 = (1-i)/\sqrt{2}$ et $z_3^2 = i$, donc

$$2z_1 + z_3^2 = \sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}).$$

Son module au carré vaut $2 + (1 - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{2}$. Ainsi

$$\alpha = 5, \quad \beta = -2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 29.$$

PROBLÈME C2 / Une droite partage un disque

La droite $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 4$ partage le disque $|z-3| \leq 1$ en deux régions d'aires a et b . Calculer $|a-b|$.

Solution

En posant $z = x + iy$, l'équation devient $2(x-y) = 4$, soit $x-y = 2$. Le cercle a pour centre $(3, 0)$ et rayon 1. Les intersections sont $(2, 0)$ et $(3, 1)$; les rayons correspondants forment un angle droit.

La petite région est un secteur de quart de disque auquel on retire le triangle rectangle de côtés 1 et 1. Son aire vaut $a = \pi/4 - 1/2$. L'autre aire vaut $b = \pi - a$, donc

$$|a-b| = \pi - 2a = \frac{\pi}{2} + 1.$$

ASTUCE / Revenir aux coordonnées

Une équation mêlant z et $\bar{z}$ devient souvent une simple équation réelle en posant $z = x + iy$.

CHAPITRE 7 / PROBLÈMES GUIDÉS

Un cercle et une récurrence de puissances

PROBLÈME C3 / Un quotient de distances

Le lieu $|(\bar{z} - i)/(2\bar{z} + i)| = 1/3$ est un cercle de centre C . Le triangle de sommets $O = (0, 0)$, C et $(\alpha, 0)$ a pour aire 11. Calculer α^2 .

Solution

Avec $z = x + iy$, l'égalité des modules donne

$$9(x^2 + (y + 1)^2) = 4x^2 + (1 - 2y)^2,$$

soit $5x^2 + 5y^2 + 22y + 8 = 0$. En complétant le carré,

$$x^2 + \left(y + \frac{11}{5}\right)^2 = \frac{81}{25}.$$

Le centre est $C = (0, -11/5)$ et le rayon $9/5$. Le point où le dénominateur s'annule, $z = i/2$, n'appartient pas à ce cercle.

L'aire du triangle vaut $\frac{1}{2}|\alpha| \cdot 11/5 = 11$, donc $|\alpha| = 10$.

$$\alpha^2 = 100.$$

PROBLÈME C4 / Identifier un polynôme par des puissances

Les racines α, β de $z^2 - az - b = 0$ vérifient $t_n = \alpha^n - \beta^n$, avec $t_3 = -5i\sqrt{7}$, $t_4 = -3i\sqrt{7}$, $t_5 = 11i\sqrt{7}$, $t_6 = 45i\sqrt{7}$. Calculer $\alpha^4 + \beta^4$.

Solution

Chaque racine vérifie $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$. Ainsi $t_{n+2} = at_{n+1} + bt_n$. Les données donnent

$$11 = -3a - 5b, \quad 45 = 11a - 3b.$$

On trouve $a = 3$, $b = -4$, donc $\alpha + \beta = 3$ et $\alpha\beta = 4$. Par conséquent $\alpha^2 + \beta^2 = 9 - 8 = 1$, puis

$$\alpha^4 + \beta^4 = 1^2 - 2 \times 4^2 = -31.$$

Une somme de puissances paires de nombres complexes peut être négative : ce n'est pas une somme de carrés réels.

CHAPITRE 7 / CERCLE UNITÉ

Compter huit solutions

PROBLÈME C5 / Deux équations complexes

Combien de complexes satisfont simultanément $|z| = 1$ et $|z/\bar{z} + \bar{z}/z| = 1$?

Solution

Puisque $|z| = 1$, on a $z\bar{z} = 1$ et les dénominateurs ne sont pas nuls. Avec $z = x + iy$,

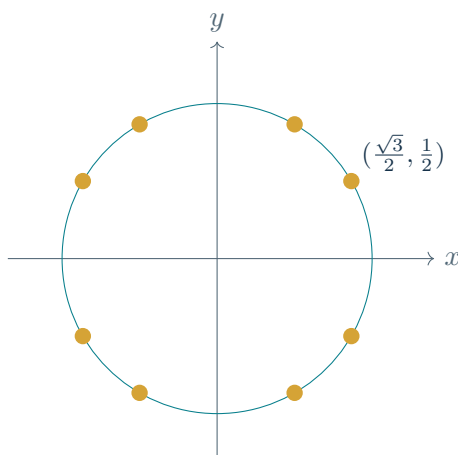
$$\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = z^2 + \bar{z}^2 = 2(x^2 - y^2).$$

Il faut donc $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 - y^2 = \pm 1/2$. Les deux cas donnent

$$(x^2, y^2) = (3/4, 1/4) \quad \text{ou} \quad (1/4, 3/4).$$

Dans chaque cas, les signes de x et y sont indépendants et les deux coordonnées sont non nulles. On obtient quatre points par cas, soit

8 solutions.



ASTUCE / Autre méthode

Avec $z = e^{i\theta}$, le second membre devient $|2 \cos 2\theta| = 1$. Sur $0 \leq \theta < 2\pi$, les deux équations $\cos 2\theta = \pm 1/2$ donnent également huit angles.

CHAPITRE 7 / PUISSANCES ESPACÉES

Construire une récurrence de pas quatre

PROBLÈME C6 / Éviter de calculer les racines

Les racines de $2z^2 - 3z - 2i = 0$ sont α, β . Posons $p_n = \alpha^n + \beta^n$. Calculer $(p_{19} + p_{11})/p_{15}$.

Solution

Aucune racine n'est nulle. Pour une racine z , on peut diviser l'équation par $2z$:

$$z - \frac{i}{z} = \frac{3}{2}.$$

En élevant au carré, $z^2 - z^{-2} = 9/4 + 2i$. Un second carré donne

$$z^4 + z^{-4} - 2 = \left(\frac{9}{4} + 2i\right)^2 = \frac{17}{16} + 9i.$$

Ainsi

$$z^4 + z^{-4} = \frac{49}{16} + 9i.$$

En multipliant par z^{15} , puis en additionnant les égalités pour α et β ,

$$p_{19} + p_{11} = \left(\frac{49}{16} + 9i\right) p_{15}.$$

Vérifier que le quotient existe

Aucune racine n'a de module 1. En effet, si $z = x + iy$ et $|z| = 1$, alors $1/z = \bar{z}$ et

$$z - i\bar{z} = (x - y) + i(y - x).$$

Cette expression ne peut pas être le réel non nul $3/2$: une partie imaginaire nulle imposerait aussi une partie réelle nulle.

Comme $\alpha\beta = -i$, on a $|\alpha||\beta| = 1$. Les deux modules sont donc distincts ; sinon ils vaudraient tous deux 1. L'égalité $\alpha^{15} = -\beta^{15}$ est impossible car elle imposerait des modules égaux. Ainsi $p_{15} \neq 0$ et

$$\frac{p_{19} + p_{11}}{p_{15}} = \frac{49}{16} + 9i.$$

ASTUCE / Adapter le pas de la relation

Les exposants 11, 15 et 19 sont espacés de quatre. Les deux élévations au carré fabriquent exactement ce pas, sans calculer α et β .

CHAPITRE 7 / PROBLÈMES GUIDÉS

Rotation et factorisation

PROBLÈME C7 / Un triangle défini par une rotation

On donne $z_1 = \sqrt{3} + 2i\sqrt{2}$ et $z_2 = z_1 e^{i\pi/6} / \sqrt{3}$. Les points O, A, B ont pour affixes $0, z_1, z_2$. Déterminer la nature du triangle et son aire. Les radicaux sont explicités dans cette reformulation.

Solution

On a $|z_1|^2 = 3 + 8 = 11$ et $|z_2| = \sqrt{11/3}$. De plus,

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}, \quad \left| \frac{z_2}{z_1} - 1 \right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Donc $AB = |z_2 - z_1| = \sqrt{11/3} = OB$. Le triangle est isocèle en B. L'angle en O vaut $\pi/6$; celui en A vaut aussi $\pi/6$, et celui en B vaut $2\pi/3$.

$$\text{Triangle isocèle obtusangle,} \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} \sqrt{11} \sqrt{\frac{11}{3}} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{11}{4\sqrt{3}}.$$

PROBLÈME C8 / Un second degré complexe

Les racines de $z^2 - (3 - 2i)z + 2 - 2i = 0$ sont $\alpha + i\beta$ et $\gamma + i\delta$, avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Calculer $\alpha\gamma + \beta\delta$.

Solution

La somme cherchée pour les racines est $3 - 2i$ et leur produit $2 - 2i$. On reconnaît directement les nombres 1 et $2 - 2i$:

$$z^2 - (3 - 2i)z + 2 - 2i = (z - 1)(z - (2 - 2i)).$$

Les parties réelles sont 1 et 2 ; les parties imaginaires sont 0 et -2 . L'expression est inchangée si l'on échange les racines.

$$\alpha\gamma + \beta\delta = 2.$$

PIÈGE / Racine carrée complexe

Pour contrôler avec le discriminant, $\Delta = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$. La racine carrée d'un complexe ne se calcule pas en prenant séparément les racines de ses parties réelle et imaginaire.

CHAPITRE 7 / GÉOMÉTRIE

La distance minimale entre deux disques

PROBLÈME C9 / Deux points mobiles

Les complexes z_1, z_2 vérifient $|z_1 - (8 + 2i)| \leq 1$ et $|z_2 - (2 - 6i)| \leq 2$. Calculer la plus petite valeur de $|z_1 - z_2|$.

Solution

Notons $a = 8 + 2i$ et $b = 2 - 6i$ les centres. Leur distance vaut

$$|a - b| = |6 + 8i| = 10.$$

Par l'inégalité triangulaire appliquée à $a - b = (a - z_1) + (z_1 - z_2) + (z_2 - b)$,

$$10 \leq 1 + |z_1 - z_2| + 2, \quad |z_1 - z_2| \geq 7.$$

Il reste à montrer que cette borne est atteinte. Posons $u = (a - b)/10 = (3 + 4i)/5$, de module 1. Choisissons les points alignés entre les centres :

$$z_1 = a - u, \quad z_2 = b + 2u.$$

Ils appartiennent aux deux bords, et $z_1 - z_2 = 10u - 3u = 7u$. Leur distance vaut donc exactement 7.

$$\boxed{\min |z_1 - z_2| = 7.}$$

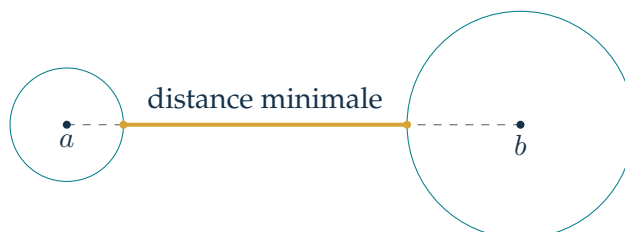


Schéma de principe, sans échelle : les points les plus proches sont sur la droite des centres.

ASTUCE / Formule générale pour deux disques fermés

Si leurs centres sont à distance d et leurs rayons valent r_1, r_2 , la distance minimale est $\max(0, d - r_1 - r_2)$.

CHAPITRE 7 / SYNTHÈSE

Racines de l'unité et couples entiers

PROBLÈME C10 / Une contrainte déterminantale

Soit $\omega = e^{2i\pi/3}$. Compter les couples $(a, b) \in \{-3, \dots, 3\}^2$, avec $a + b \neq 0$, pour lesquels il existe un complexe z vérifiant

$$\det \begin{pmatrix} z+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & z+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & z+\omega \end{pmatrix} = 1, \quad \left| \frac{z-a}{z+b} \right| = 1.$$

Solution

1. Déterminer z . Pour $v = (1, \omega, \omega^2)^T$, la matrice est $zI + vv^T$. On a $v^T v = 1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega + \omega^2 = 0$, donc $(vv^T)^2 = 0$. Par multilinéarité en colonnes, les termes utilisant au moins deux colonnes de vv^T sont nuls, car ces colonnes sont proportionnelles. Il reste $\det(zI + vv^T) = z^3 + z^2(v^T v) = z^3$.

Ainsi $z^3 = 1$, soit $z \in \{1, \omega, \omega^2\}$.

2. Traduire l'égalité de modules. Sous réserve que $z + b \neq 0$,

$$|z - a|^2 = |z + b|^2 \iff (a + b)(a - b - 2\Re z) = 0.$$

Comme $a + b \neq 0$, il faut $a - b = 2\Re z$.

Pour $z = 1$, $a - b = 2$. Les cinq couples possibles sont

$$(-1, -3), (0, -2), (1, -1), (2, 0), (3, 1).$$

On retire $(1, -1)$, qui viole $a + b \neq 0$ et annule le dénominateur. Il reste quatre couples.

Pour $z = \omega$ ou ω^2 , $2\Re z = -1$, donc $a - b = -1$. Les six couples sont $(a, a+1)$ pour $a = -3, -2, -1, 0, 1, 2$. Aucun n'a une somme nulle ; le dénominateur ne s'annule pas car z est non réel.

$$4 + 6 = 10 \text{ couples.}$$

PIÈGE / Ne pas compter deux fois les mêmes couples

Les deux valeurs ω et ω^2 imposent exactement la même condition sur (a, b) . La question compte les couples, pas les triplets (a, b, z) .

CHAPITRE 7 / ENTRAÎNEMENT

Choisir la bonne forme

EXERCICE 13

Décrire le lieu des $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tels que $|(z-1)/(z+1)| = 2$. Donner son centre et son rayon.

EXERCICE 14

Résoudre $z^4 = 16$ dans $\mathbb{C}$ et calculer la somme des solutions.

Corrigé 13

Écrivons $z = x + iy$. En élevant l'égalité des modules au carré,

$$(x-1)^2 + y^2 = 4((x+1)^2 + y^2).$$

Après réduction, $3x^2 + 3y^2 + 10x + 3 = 0$, d'où

$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}.$$

Le centre est $(-5/3, 0)$ et le rayon $4/3$. Le point -1 n'est pas sur ce cercle, car $(-1 + 5/3)^2 = 4/9 \neq 16/9$. Le lieu est donc le cercle entier.

Corrigé 14

Le module doit vérifier $|z|^4 = 16$, donc $|z| = 2$. Si $z = 2e^{i\theta}$, l'argument vérifie $4\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, soit $\theta = k\pi/2$.

$$z \in \{2, 2i, -2, -2i\}, \quad \sum z = 0.$$

Géométriquement, les quatre solutions sont les sommets d'un carré centré à l'origine. Algébriquement, leur somme nulle correspond au coefficient nul de z^3 dans $z^4 - 16$.

ASTUCE / Trois formes, trois usages

La forme algébrique convient aux équations en coordonnées ; la forme exponentielle aux puissances ; la lecture géométrique aux distances et aux rotations.

CHAPITRE 8 / COURS

Matrices et déterminants

Pour une matrice $A = (a_{ij})$, le coefficient du produit AB est $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$. La transposée A^T échange lignes et colonnes. La trace d'une matrice carrée est $\text{tr } A = \sum_i a_{ii}$.

THÉORÈME / Règles fondamentales

Pour des matrices carrées d'ordre n ,

$$\det(AB) = \det A \det B, \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det A, \quad \det(A^T) = \det A.$$

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Si A, B sont inversibles, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Opérations sur les lignes ou les colonnes

Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ne change pas le déterminant. Échanger deux lignes change son signe. Multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ . Ces propriétés proviennent de la multilinéarité et de l'alternance du déterminant.

THÉORÈME / Comatrice adjointe

On note $\text{adj } A$ la transposée de la matrice des cofacteurs. Alors

$$A \text{adj } A = (\det A)I, \quad \det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1}.$$

Si A est inversible, $\text{adj } A = (\det A)A^{-1}$. Pour $n = 3$,

$$\text{adj}(\text{adj } A) = (\det A)A.$$

La première identité résulte du développement du déterminant par cofacteurs : les termes hors diagonale correspondent à deux lignes égales. Les deux autres suivent en prenant un déterminant ou une inverse lorsque A est inversible ; le cas singulier suit par continuité des expressions polynomiales.

PIÈGE / Deux formules à ne pas inventer

En général $AB \neq BA$, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ et $\text{tr}(\text{adj } A)$ n'est pas un multiple fixe de $\text{tr } A$. Pour une double adjointe d'ordre 3, utiliser l'identité exacte ci-dessus.

CHAPITRE 8 / COURS

Reconnaître une structure

THÉORÈME / Matrice antisymétrique

Une matrice réelle vérifie $X^T A X = 0$ pour tout vecteur X si et seulement si $A^T = -A$.

Preuve. En prenant $X = e_i$, on obtient $a_{ii} = 0$. Avec $X = e_i + e_j$, on trouve $a_{ij} + a_{ji} = 0$. Réciproquement, si $A^T = -A$, le scalaire $s = X^T A X$ vérifie $s = s^T = X^T A^T X = -s$, donc $s = 0$.

Trois simplifications de puissances

- Si $B = P A P^{-1}$, alors $B^k = P A^k P^{-1}$ par annulation des facteurs voisins $P^{-1} P$.
- Si $A = I + N$ avec $N^2 = 0$, alors $A^m = I + mN$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Pour $m \geq 0$, c'est le binôme ; pour $m < 0$, utiliser $(I + N)^{-1} = I - N$.
- Si $A = uv^T$, alors $A^2 = u(v^T u)v^T = (v^T u)A$. Le produit $v^T u$ est un scalaire.

THÉORÈME / Systèmes linéaires et rangs

Pour $AX = b$ avec n inconnues :

- si $\text{rg } A < \text{rg}(A \mid b)$, il n'existe aucune solution ;
- si les deux rangs valent n , la solution est unique ;
- si les deux rangs sont égaux à $r < n$, il existe une infinité de solutions, avec $n - r$ paramètres libres.

Le rang est le nombre de pivots indépendants après élimination. Une ligne $0 = \text{constante non nulle}$ rend le système incompatible ; sinon, les inconnues sans pivot peuvent être choisies librement.

PIÈGE / Quand le déterminant s'annule

Pour un système carré, $\det A = 0$ exclut l'unicité, mais ne distingue pas absence et infinité de solutions. Même l'annulation de tous les déterminants de Cramer n'est pas un critère suffisant d'existence quand le rang est trop faible. L'élimination ou les rangs donnent le bon diagnostic.

CHAPITRE 8 / PROBLÈMES GUIDÉS

Adjointe : compter les exposants

PROBLÈME M1 / Une adjointe emboîtée

La matrice A est d'ordre 3 et $\det A = -2$. Décomposer en facteurs premiers

$$D = \det(3 \operatorname{adj}(-6 \operatorname{adj}(3A))).$$

Solution

À chaque multiplication de toute une matrice d'ordre 3 par un scalaire, ce scalaire sort du déterminant au cube. À chaque adjointe, le déterminant est élevé au carré. Ainsi

$$\begin{aligned} D &= 3^3 [\det(-6 \operatorname{adj}(3A))]^2 \\ &= 3^3 [(-6)^3 \det(\operatorname{adj}(3A))]^2 \\ &= 3^3 \cdot 6^6 [\det(3A)]^4 \\ &= 3^3 \cdot (2 \cdot 3)^6 \cdot (3^3(-2))^4. \end{aligned}$$

$$D = 2^{10} 3^{21}.$$

PROBLÈME M2 / Trace d'une double adjointe

Une matrice A d'ordre 3 vérifie $\det A = 1/2$ et $\operatorname{tr} A = 3$. Posons $B = \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(2A))$. Calculer $\det B + \operatorname{tr} B$.

Solution

Pour une matrice d'ordre 3, $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} X) = (\det X)X$. Or $\det(2A) = 2^3 \det A = 4$, donc

$$B = 4(2A) = 8A.$$

Par conséquent $\operatorname{tr} B = 8 \operatorname{tr} A = 24$ et $\det B = 8^3 \det A = 256$.

$$\det B + \operatorname{tr} B = 256 + 24 = 280.$$

ASTUCE / Simplifier la matrice avant ses invariants

Identifier directement $B = 8A$ détermine à la fois sa trace et son déterminant, sans aucune formule approximative sur la trace d'une adjointe.

CHAPITRE 8 / PROBLÈMES GUIDÉS

Inverses et coefficients utiles

PROBLÈME M3 / Inverser un produit structuré

Les matrices carrées A, B et $S = \text{adj}(A^{-1}) + \text{adj}(B^{-1})$ sont inversibles. Simplifier $(AS^{-1}B)^{-1}$.

Solution

On inverse les facteurs dans l'ordre opposé : $(AS^{-1}B)^{-1} = B^{-1}SA^{-1}$. De plus,

$$\text{adj}(A^{-1}) = \det(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = \frac{A}{\det A}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} B^{-1}SA^{-1} &= B^{-1} \left(\frac{A}{\det A} + \frac{B}{\det B} \right) A^{-1} \\ &= \frac{B^{-1}}{\det A} + \frac{A^{-1}}{\det B}. \end{aligned}$$

En remplaçant chaque inverse par son adjointe divisée par son déterminant,

$$(AS^{-1}B)^{-1} = \frac{\text{adj } A + \text{adj } B}{\det A \det B}.$$

PROBLÈME M4 / Un seul coefficient à retrouver

Une matrice $A = (a_{ij})$ d'ordre 3 vérifie

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer a_{23} .

Solution

Seule la deuxième composante de chaque égalité est utile. La première donne $a_{22} = 0$. Les deux autres donnent

$$4a_{21} + 3a_{23} = 1, \quad 2a_{21} + 2a_{23} = 0.$$

La seconde implique $a_{21} = -a_{23}$; en remplaçant dans la première, $-a_{23} = 1$.

$$a_{23} = -1.$$

CHAPITRE 8 / MATRICE ANTISYMMÉTRIQUE

Passer d'une forme quadratique à une matrice

PROBLÈME M5 / Une identité pour tout vecteur

Une matrice réelle A d'ordre 3 vérifie $X^T A X = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, ainsi que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Décomposer $D = \det(\text{adj}(2(A + I)))$ sous la forme $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$, puis calculer $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

Solution

La condition $X^T A X = 0$ impose $A^T = -A$. Ses coefficients diagonaux sont donc nuls.

La différence des deux égalités vectorielles donne la deuxième colonne : $A(0, 1, 0)^T = (-1, 0, -3)^T$. Par antisymétrie, $a_{21} = 1$ et $a_{23} = 3$. Enfin, la première composante de $A(1, 1, 1)^T$ donne $-1 + a_{13} = 1$, donc $a_{13} = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

En développant selon la première ligne,

$$\det(A + I) = 1(1 + 9) + 1(1 + 6) + 2(-3 + 2) = 15.$$

Donc $\det(2(A + I)) = 2^3 \times 15$, puis

$$D = (2^3 \times 15)^2 = 2^6 3^2 5^2.$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6^2 + 2^2 + 2^2 = 44.$$

PIÈGE / La position du facteur 2

$2(A + I)$ et $2A + I$ sont deux matrices différentes. Les parenthèses déterminent quels coefficients sont multipliés par 2.

CHAPITRE 8 / PROBLÈMES GUIDÉS

Une limite et un dénombrement

PROBLÈME M6 / Une limite de déterminants

Pour $s(x) = \sin x/x$ et $x \neq 0$, on pose

$$f(x) = \det \begin{pmatrix} a + s(x) & 1 & b \\ a & 1 + s(x) & b \\ a & 1 & b + s(x) \end{pmatrix}.$$

Écrire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda a + \mu b + \nu$, puis calculer $(\lambda + \mu + \nu)^2$. La limite en 0 est précisée.

Solution

Le déterminant est continu en ses coefficients, et $s(x) \rightarrow 1$. Plus généralement, pour $s \neq 0$, la matrice est $sI + uv^T$, avec $u = (1, 1, 1)^T$, $v = (a, 1, b)^T$. Son déterminant vaut $s^3 + s^2(a + 1 + b)$, identité aussi vérifiable par développement.

Ainsi la limite est $a + b + 2$, donc $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\nu = 2$.

$$(\lambda + \mu + \nu)^2 = 16.$$

PROBLÈME M7 / Matrices à coefficients imposés

Les coefficients d'une matrice réelle d'ordre 3 appartiennent à $S = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$. Compter celles qui sont symétriques, antisymétriques ou de trace nulle.

Solution

Une matrice symétrique est déterminée par six coefficients : 5^6 choix. Aucune matrice antisymétrique n'est possible, car sa diagonale devrait être nulle et $0 \notin S$.

Pour une trace nulle, les triplets diagonaux sont les permutations de $(-3, 1, 2)$, $(-2, 1, 1)$ et $(-1, -1, 2)$, soit $6 + 3 + 3 = 12$ possibilités. Les six coefficients hors diagonale sont libres : $12 \cdot 5^6$ matrices.

L'intersection « symétrique et trace nulle » contient $12 \cdot 5^3$ matrices. Par inclusion-exclusion,

$$5^6 + 12 \cdot 5^6 - 12 \cdot 5^3 = 201625.$$

CHAPITRE 8 / PROBLÈMES GUIDÉS

Puissances sans multiplication répétée

PROBLÈME M8 / Conjugaison par une rotation

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad B = PAP^T, \quad C = P^T B^{10} P.$$

Calculer $\text{tr } C = m/n$ sous forme irréductible, puis $m + n$. Le radical dans A est explicité.

Solution

Les identités trigonométriques donnent $P^T P = P P^T = I$. Par simplification des facteurs voisins, $B^{10} = P A^{10} P^T$ et $C = A^{10}$.

Une puissance d'une matrice triangulaire est triangulaire, et ses coefficients diagonaux sont les puissances des coefficients diagonaux initiaux. Ainsi

$$\text{tr } C = (1/\sqrt{2})^{10} + 1 = \frac{1}{32} + 1 = \frac{33}{32}.$$

$$m + n = 65.$$

PROBLÈME M9 / Des exposants entiers

Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, trouver tous les entiers m tels que $A^{m^2} + A^m = 3I - A^{-6}$.

Solution

Écrivons $A = I + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie $N^2 = 0$ et $N \neq 0$. Donc $A^k = I + kN$ pour tout entier k , y compris négatif.

L'équation devient

$$2I + (m^2 + m)N = 3I - (I - 6N) = 2I + 6N.$$

Comme $N \neq 0$, il faut et il suffit que $m^2 + m - 6 = 0$, soit $(m + 3)(m - 2) = 0$.

$$m \in \{-3, 2\}.$$

CHAPITRE 8 / PROBLÈMES GUIDÉS

Opérations et cofacteurs

PROBLÈME M10 / Les extrêmes d'un déterminant

Pour $s = \sin^2 x$, $c = \cos^2 x$, $t = 4 \sin 4x$, on pose

$$f(x) = \det \begin{pmatrix} 1+s & c & t \\ s & 1+c & t \\ s & c & 1+t \end{pmatrix}.$$

Soient m et M ses valeurs minimale et maximale sur $\mathbb{R}$. Calculer $M^4 - m^4$.

Solution

En effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, le déterminant devient

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ s & c & 1+t \end{pmatrix} = 1 + t + c + s = 2 + 4 \sin 4x.$$

Le sinus parcourt $[-1, 1]$, donc $m = -2$, $M = 6$, et

$$M^4 - m^4 = 6^4 - (-2)^4 = 1280.$$

PROBLÈME M11 / Des logarithmes qui s'annulent

Soit

$$A = \begin{pmatrix} \log_5 128 & \log_4 5 \\ \log_5 8 & \log_4 25 \end{pmatrix}.$$

Notons K sa matrice de cofacteurs et définissons $c_{ij} = \sum_{k=1}^2 a_{ik} K_{jk}$. Calculer $8 \det C$.

Solution

Posons $u = \log_2 5 > 0$. Les règles de changement de base donnent

$$A = \begin{pmatrix} 7/u & u/2 \\ 3/u & u \end{pmatrix}, \quad \det A = 7 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

La définition de C signifie $C = AK^T = A \operatorname{adj} A = (\det A)I_2$. Donc $\det C = (11/2)^2$ et

$$8 \det C = 8 \times \frac{121}{4} = 242.$$

CHAPITRE 8 / PROBLÈMES GUIDÉS

Loi d'un déterminant et rang un

PROBLÈME M12 / La loi complète du déterminant

Les quatre coefficients d'une matrice 2×2 sont indépendants et uniformes dans $\{0, 1\}$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de son déterminant X .

Solution

Avec $X = ad - bc$, chacun des produits ad, bc vaut 1 dans un cas sur quatre et 0 dans trois cas sur quatre. Les deux produits sont indépendants. Parmi les seize matrices :

x	-1	0	1
nombre	$3 \cdot 1 = 3$	$3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 10$	$1 \cdot 3 = 3$
$P(X = x)$	$3/16$	$10/16$	$3/16$

La symétrie donne $E(X) = 0$ et $E(X^2) = 6/16$. Ainsi

$$E(X) = 0, \quad \text{Var}(X) = \frac{3}{8}.$$

PROBLÈME M13 / Une matrice formée de puissances

Une matrice A d'ordre 3 est définie par $a_{ij} = 2^{(i+j)/2}$, pour $1 \leq i, j \leq 3$. Écrire la somme des coefficients de la troisième ligne de A^2 sous la forme $\alpha + \beta\sqrt{2}$ et calculer $\alpha + \beta$. L'exposant est explicité dans cette reformulation.

Solution

Posons $v = (\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2})^T$. On a $A = vv^T$, donc

$$A^2 = v(v^T v)v^T = (2 + 4 + 8)A = 14A.$$

La troisième ligne de A est $(4, 4\sqrt{2}, 8)$. Sa somme vaut $12 + 4\sqrt{2}$; celle de la troisième ligne de A^2 vaut donc

$$14(12 + 4\sqrt{2}) = 168 + 56\sqrt{2}.$$

$$\alpha + \beta = 168 + 56 = 224.$$

ASTUCE / Reconnaître un produit extérieur

Si $a_{ij} = u_i v_j$, la matrice s'écrit uv^T et ses puissances se ramènent à un produit scalaire.

CHAPITRE 8 / ENTRAÎNEMENT

Diagnostiquer les systèmes linéaires

Ces deux variantes complètes prolongent les passages du texte de départ où les systèmes ne sont pas explicitement donnés.

EXERCICE 15

Selon le paramètre réel λ , déterminer le nombre de solutions du système $x + y = 1$, $2x + \lambda y = 2$. Donner les solutions lorsqu'elles existent.

EXERCICE 16

On considère le système à trois inconnues

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + 2z = 2, \\ 3x + 3y + 3z = \mu. \end{cases}$$

Étudier les solutions selon μ . Que valent le déterminant de la matrice des coefficients et les trois déterminants de Cramer ?

Corrigé 15

Soustrayons deux fois la première équation de la seconde : $(\lambda - 2)y = 0$.

Si $\lambda \neq 2$, on obtient $y = 0$, puis $x = 1$: la solution est unique. Si $\lambda = 2$, la seconde équation répète la première ; toutes les solutions sont $(x, y) = (1 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$\lambda \neq 2$: une solution; $\lambda = 2$: une infinité.
--

Corrigé 16

La deuxième équation est toujours le double de la première. La troisième est compatible avec elles exactement lorsque $\mu = 3$.

Si $\mu = 3$, les solutions sont $(x, y, z) = (1 - s - t, s, t)$ avec $s, t \in \mathbb{R}$. Le rang de la matrice des coefficients et celui de la matrice augmentée valent tous deux 1.

Si $\mu \neq 3$, l'élimination donne $0 = \mu - 3$, impossible. Le rang augmenté vaut 2, alors que le rang des coefficients reste 1.

PIÈGE / Le contre-exemple décisif

Le déterminant principal est nul. Chacun des trois déterminants de Cramer est également nul, car après remplacement d'une colonne par les constantes, les deux autres colonnes restent identiques. Cela arrive même pour $\mu \neq 3$, alors que le système n'a aucune solution.

FICHE DE SYNTHÈSE

Huit réflexes pour une preuve solide

Situation	Réflexe utile
Ensemble de nombres	Choisir une représentation unique avant de compter. Distinguer nombre d'objets et nombre de descriptions.
Équation par morceaux	Noter le domaine de chaque branche, puis filtrer les racines et supprimer les doublons.
Suite ou somme	Chercher une symétrie de rangs, une différence télescopique ou une suite auxiliaire géométrique.
Coefficient binomial	Identifier le bon indice. Utiliser un quotient, une symétrie ou un filtre pair/im-pair.
Dénombrement	Décrire une construction réversible. Additionner des cas disjoints ou corriger les intersections.
Probabilités	Définir les issues et leur loi. Séparer indépendance, incompatibilité et conditionnement.
Nombre complexe	Choisir entre coordonnées, forme exponentielle et géométrie selon l'opération demandée.
Matrice	Exploiter sa structure avant de multiplier. Pour un système singulier, vérifier la compatibilité par élimination.

ASTUCE / Avant d'encadrer le résultat

Vérifier le signe, le domaine, les bornes strictes, les dénominateurs et les cas d'égalité. Une valeur trouvée n'est pas encore une solution tant qu'elle n'a pas été confrontée aux contraintes initiales.

Pour réviser efficacement

Choisir un problème de chaque chapitre et rédiger sa solution sans regarder le corrigé. Identifier ensuite la décision qui a réellement simplifié le raisonnement. Si elle reste difficile à expliquer, reprendre le cours associé puis un exercice voisin.

Maths Olympiad

Comprendre les structures, construire les preuves.