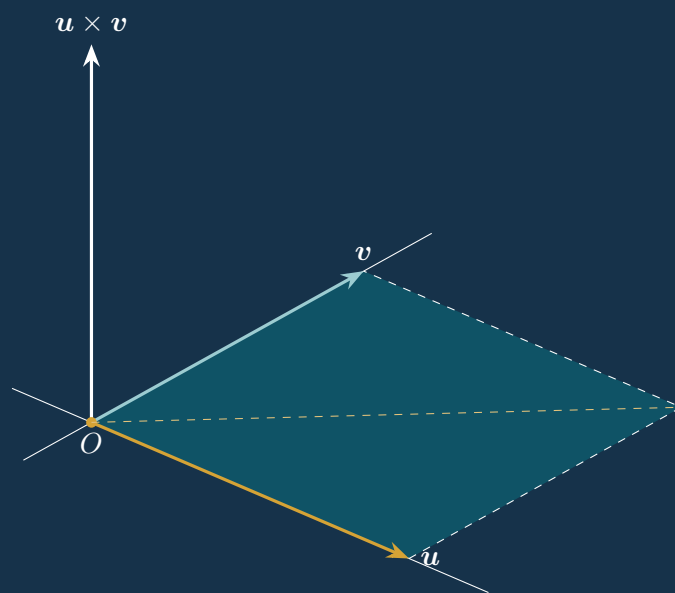


Algèbre vectorielle

Angles, projections, aires et volumes



9 problèmes guidés • 12 exercices corrigés
Démonstrations • Figures • Méthodes et astuces

Maths Olympiad

Choisir le bon produit avant de calculer

PARCOURS DE LECTURE

Sommaire

L'objectif du livret

Transformer une question géométrique en une relation simple : un angle conduit au produit scalaire, une aire au produit vectoriel et une contrainte de parallélisme à une seule inconnue réelle.

Partie	Contenu	Page
1. Les bases	Vecteurs, coordonnées et normes	3
2. Le produit scalaire	Angles, identités et inégalités	4
3. Le produit vectoriel	Orientation, calcul et propriétés	6
4. Aires et projections	Déterminants et orthogonalité	8
5. Le produit mixte	Volumes et coplanarité	10
6. Neuf problèmes guidés	Choix de méthode et solutions détaillées	11
7. Entraînement	12 exercices progressifs	25
8. Corrigés	Raisonnement et contrôles	27
9. Synthèse	Formules, conditions et réflexes	32

À qui s'adresse ce livret ?

Aux lycéens qui maîtrisent les coordonnées, les équations simples et les bases de la trigonométrie. Les produits vectoriel et mixte sont introduits progressivement comme outils d'approfondissement dans l'espace.

Des énoncés autonomes

Les problèmes sont reformulés et, lorsque nécessaire, complétés pour rendre toutes les données explicites. Les démonstrations, variantes et exercices complémentaires permettent de réutiliser les idées dans d'autres situations.

Convention de lecture

Les vecteurs sont notés en gras, par exemple $\mathbf{u}$, ou avec une flèche entre deux points. Sauf mention contraire, les coordonnées sont données dans un repère orthonormé direct de l'espace. Une norme et une aire sont des réels positifs ou nuls.

ASTUCE / Une façon efficace de travailler

Lire l'énoncé, annoncer l'outil choisi, chercher seul, puis comparer avec la solution. Pour chaque formule, retenir aussi les hypothèses qui rendent son utilisation légitime.

COURS / 01

Des points aux vecteurs

Un vecteur décrit un déplacement. Dans un repère de l'espace, si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, alors

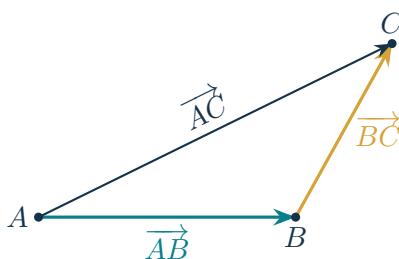
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

THÉORÈME / La relation de Chasles

Pour tous points A, B, C , $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. En particulier,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

L'ordre est essentiel : vecteur d'arrivée moins vecteur de départ.



Addition et multiplication par un réel

Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$, on calcule coordonnée par coordonnée :

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \quad tu = (tu_1, tu_2, tu_3).$$

Pour $t > 0$, le sens est conservé ; pour $t < 0$, il est inversé. Deux vecteurs sont colinéaires lorsque l'un est un multiple de l'autre, à condition de choisir comme référence un vecteur non nul. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Exemple

Avec $A = (1, -2, 0)$ et $B = (4, 2, -1)$, on trouve $\overrightarrow{AB} = (3, 4, -1)$. Le milieu de $[AB]$ est $I = (5/2, 0, -1/2)$, et $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

PIÈGE / Un point et un vecteur ne jouent pas le même rôle

Les coordonnées de M représentent le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Pour calculer $\overrightarrow{PM}$, il faut encore soustraire les coordonnées de P . Un dessin ne dispense pas de préciser le point de départ.

COURS / 02

Le produit scalaire mesure un angle

Dans un repère orthonormé, le produit scalaire de u et v est

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Son résultat est un **nombre réel**, qui peut être positif, nul ou négatif.

THÉORÈME / Norme, angle et orthogonalité

$$\|u\|^2 = u \cdot u = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

Si u et v sont non nuls et $\theta \in [0, \pi]$ est leur angle,

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta.$$

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Les règles qui permettent de développer

Le produit scalaire est symétrique et bilinéaire :

$$u \cdot v = v \cdot u, \quad u \cdot (sa + tb) = s(u \cdot a) + t(u \cdot b).$$

On peut ainsi transformer une égalité vectorielle en une équation réelle en prenant son produit scalaire avec un vecteur bien choisi.

Exemple : reconnaître un angle obtus

Pour $u = (0, 1, 1)$ et $v = (1, -1, 0)$, on a

$$u \cdot v = -1, \quad \|u\| = \|v\| = \sqrt{2}, \quad \cos \theta = -\frac{1}{2}.$$

Donc $\theta = 120^\circ$. Le signe négatif du produit scalaire permettait déjà de prévoir un angle obtus.

Lecture du signe, pour deux vecteurs non nuls

Un produit scalaire positif correspond à $\theta < 90^\circ$; un produit nul à $\theta = 90^\circ$; un produit négatif à $\theta > 90^\circ$.

PIÈGE / L'angle du vecteur nul n'est pas défini

On a bien $0 \cdot v = 0$, mais on ne peut pas diviser par $\|0\|$. La formule de calcul de l'angle exige deux vecteurs non nuls.

COURS / 03

Développer une norme au carré

Pour calculer la longueur d'une somme, on commence souvent par son carré. La bilinéarité du produit scalaire donne directement les identités utiles.

THÉORÈME / Deux formules à savoir retrouver

$$\|s\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2 = s^2 \|\mathbf{u}\|^2 + t^2 \|\mathbf{v}\|^2 + 2st(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).$$

En additionnant les cas $(s, t) = (1, 1)$ et $(1, -1)$, on obtient l'identité du parallélogramme :

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2.$$

Démonstration de Cauchy-Schwarz

Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, posons $t = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) / \|\mathbf{v}\|^2$. La positivité d'une norme au carré donne

$$0 \leq \|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Ainsi $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$. Si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, l'inégalité est immédiate. L'égalité correspond à des vecteurs colinéaires.

Maximiser une combinaison trigonométrique

Pour $A, B > 0$ et $x \in [0, \pi/2]$, Cauchy-Schwarz appliquée à (A, B) et $(\cos x, \sin x)$ donne

$$A \cos x + B \sin x \leq \sqrt{A^2 + B^2}.$$

L'égalité est atteinte quand $\cos x = A/\sqrt{A^2 + B^2}$ et $\sin x = B/\sqrt{A^2 + B^2}$, donc quand $\tan x = B/A$.

ASTUCE / Une borne ne suffit pas : vérifier qu'elle est atteinte

Après une majoration, identifier le cas d'égalité et s'assurer qu'il est compatible avec le domaine de la variable. C'est ce qui transforme une borne supérieure en un maximum.

PIÈGE / La norme n'est pas linéaire

En général, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \neq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. En revanche, $\|t\mathbf{u}\| = |t| \|\mathbf{u}\|$: une valeur absolue est indispensable si $t < 0$.

COURS / 04

Le produit vectoriel donne une normale

Dans l'espace orienté, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ est un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{u}$ et à $\mathbf{v}$. Si les vecteurs sont colinéaires, ce produit est le vecteur nul.

THÉORÈME / Norme et coordonnées

Pour deux vecteurs non nuls d'angle $\theta \in [0, \pi]$,

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta.$$

Dans une base orthonormée directe $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

L'orientation est fixée par l'ordre

La règle de la main droite donne le sens du résultat. On retient

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

En inversant les facteurs, le signe change. Le produit de chaque vecteur de base par lui-même vaut 0.

Un calcul avec contrôle immédiat

Pour $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ et $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (2 \cdot 3 - (-1)(-1), (-1)2 - 1 \cdot 3, 1(-1) - 2 \cdot 2) \\ &= (5, -5, -5). \end{aligned}$$

Le résultat est bien orthogonal aux deux vecteurs :

$$(5, -5, -5) \cdot (1, 2, -1) = 0, \quad (5, -5, -5) \cdot (2, -1, 3) = 0.$$

Sa norme vaut $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

ASTUCE / Vérifier deux produits scalaires

Après un produit vectoriel calculé en coordonnées, vérifier que le résultat est orthogonal aux deux facteurs permet de détecter de nombreuses erreurs de signe. Ce contrôle ne fixe toutefois pas à lui seul la longueur ni le sens.

PIÈGE / Ne pas confondre les deux produits

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ est un réel ; $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ est un vecteur. Leur nature détermine les opérations que l'on peut effectuer ensuite.

COURS / 05

Les signes font partie de la méthode

THÉORÈME / Bilinéarité et antisymétrie

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, & \mathbf{u} \times \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \\ (s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= s(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + t(\mathbf{v} \times \mathbf{w}). \end{aligned}$$

La distributivité est valable dans les deux facteurs, mais l'ordre doit être conservé dans chacun des produits.

Factoriser du même côté

Dans $\mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, les deux occurrences de $\mathbf{a}$ ne sont pas du même côté. On commence donc par inverser le second produit :

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} = (\mathbf{r} - \mathbf{b}) \times \mathbf{a}.$$

Si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, l'égalité à 0 équivaut à $\mathbf{r} - \mathbf{b} = t\mathbf{a}$ pour un réel t . Le cas $\mathbf{r} = \mathbf{b}$ est inclus avec $t = 0$.

THÉORÈME / Identité de Lagrange

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

Pour des vecteurs non nuls, il suffit d'utiliser $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$. Si l'un est nul, les deux membres sont nuls.

Exemple

Pour les vecteurs de la page précédente, les normes au carré valent 6 et 14, et le produit scalaire vaut -3 . Donc

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = 6 \cdot 14 - (-3)^2 = 75,$$

ce qui confirme $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = 5\sqrt{3}$.

PIÈGE / Le produit vectoriel n'est pas associatif

Les parenthèses comptent. Par exemple,

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = -\mathbf{j}.$$

On ne peut donc pas supprimer les parenthèses d'un double produit vectoriel.

COURS / 06

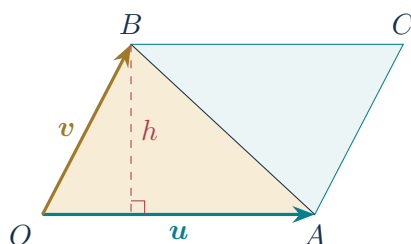
Aires : choisir les deux bons côtés

THÉORÈME / Parallélogramme et triangle

Pour deux côtés issus du même sommet, de vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}$,

$$\mathcal{A}_{\text{parallélogramme}} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|, \quad \mathcal{A}_{\text{triangle}} = \frac{1}{2} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$

Ces formules restent valables dans le cas dégénéré : l'aire vaut alors zéro.



Pourquoi le sinus apparaît-il ?

La hauteur vaut $h = \|\mathbf{v}\| \sin \theta$. L'aire du parallélogramme est donc $\|\mathbf{u}\| h = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$. Une diagonale le partage en deux triangles de même aire.

THÉORÈME / Changement de côtés par combinaison linéaire

Si $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ et $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{a} + \delta \mathbf{b}$, alors

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Le nombre $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ est le déterminant des coefficients. Les aires sont multipliées par $|\Delta|$.

Démonstration en une ligne

Les produits $\mathbf{a} \times \mathbf{a}$ et $\mathbf{b} \times \mathbf{b}$ sont nuls. Il reste $\alpha\delta \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \beta\gamma \mathbf{b} \times \mathbf{a}$, d'où le résultat.

ASTUCE / Si l'on demande le carré de l'aire

Calculer directement $\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4} (\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2)$ évite une racine carrée suivie d'une élévation au carré.

COURS / 07

Séparer le parallèle et l'orthogonal

Soit $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. On cherche à écrire un vecteur $\mathbf{b}$ comme une somme de deux vecteurs : l'un parallèle à $\mathbf{a}$, l'autre orthogonal à $\mathbf{a}$.

THÉORÈME / Décomposition orthogonale

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}, \quad \mathbf{b}_{\parallel} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}_{\perp} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}.$$

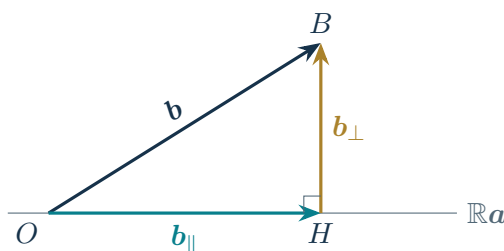
Le premier terme est la projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par $\mathbf{a}$; le second est orthogonal à cette droite.

Démonstration et unicité

Écrivons $\mathbf{b} = t\mathbf{a} + \mathbf{r}$ et imposons $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = 0$. On obtient

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = t \|\mathbf{a}\|^2,$$

d'où l'unique valeur de t donnée ci-dessus. Le dénominateur est strictement positif.



Une formule de norme très utile

Par orthogonalité et Pythagore,

$$\|\mathbf{b}_{\perp}\|^2 = \|\mathbf{b}\|^2 - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^2}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

De plus, pour tout réel s , $\|\mathbf{b} - s\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{b}_{\perp}\|^2 + \|\mathbf{b}_{\parallel} - s\mathbf{a}\|^2$. La projection fournit donc aussi le point de la droite le plus proche de B .

PIÈGE / Projection vectorielle et longueur projetée

La projection vectorielle est un vecteur. La projection scalaire orientée vaut $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) / \|\mathbf{a}\|$; elle peut être négative. Sa valeur absolue est une longueur.

COURS / 08

Le produit mixte et les volumes

Le produit mixte de trois vecteurs est le réel

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Il s'obtient aussi par le déterminant de leurs coordonnées, écrites dans cet ordre en lignes ou en colonnes.

THÉORÈME / Volume et coplanarité

$$V_{\text{parallélépipède}} = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|, \quad V_{\text{tétraèdre}} = \frac{1}{6} |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|.$$

Les trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul. Cela inclut les situations où deux vecteurs sont colinéaires.

Pourquoi cette formule donne-t-elle un volume ?

Si $\mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, sa norme donne l'aire de la base et sa direction est normale à cette base. Le produit scalaire avec $\mathbf{a}$ multiplie cette aire par la hauteur orientée. La valeur absolue enlève le signe d'orientation. Si la base est dégénérée, le produit et le volume sont nuls.

Exemple complet

Prenons $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1)$ et $\mathbf{c} = (1, 1, 0)$. Alors

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (-1, 1, -2), \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (1, 0, 1) \cdot (-1, 1, -2) = -3.$$

Le volume du parallélépipède vaut 3, et celui du tétraèdre de côtés issus d'un même sommet $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vaut $1/2$. Les vecteurs ne sont pas coplanaires.

Permutations et répétitions

Une permutation circulaire conserve le produit mixte :

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Échanger deux vecteurs change son signe. Si deux vecteurs sont égaux, il est nul ; par exemple $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = 0$.

ASTUCE / Le résultat nul se lit souvent sans calcul

Un produit vectoriel est orthogonal à ses deux facteurs. Dès qu'on le multiplie scalairement par l'un de ces facteurs, le résultat est zéro.

PROBLÈME GUIDÉ / 1

Maximiser une somme de longueurs

Énoncé

Deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vérifient $\|\mathbf{a}\| = 2$ et $\|\mathbf{b}\| = 3$. Déterminer le maximum de

$$E = 3\|3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\| + 4\|3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}\|.$$

Préciser pour quel angle entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ il est atteint.

1. Introduire l'angle

Notons $\theta \in [0, \pi]$ l'angle entre les deux vecteurs. Le produit scalaire vaut $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 6 \cos \theta$. Donc

$$\begin{aligned}\|3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\|^2 &= 9 \cdot 4 + 4 \cdot 9 + 12 \cdot 6 \cos \theta \\ &= 72(1 + \cos \theta) = 144 \cos^2(\theta/2), \\ \|3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}\|^2 &= 72(1 - \cos \theta) = 144 \sin^2(\theta/2).\end{aligned}$$

Comme $\theta/2 \in [0, \pi/2]$, le sinus et le cosinus sont positifs ou nuls. On peut donc écrire

$$\|3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\| = 12 \cos(\theta/2), \quad \|3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}\| = 12 \sin(\theta/2).$$

2. Appliquer Cauchy-Schwarz

L'expression devient $E = 12(3 \cos(\theta/2) + 4 \sin(\theta/2))$. Ainsi

$$E \leq 12\sqrt{3^2 + 4^2} = 60.$$

3. Prouver que la borne est atteinte

L'égalité est obtenue pour $\cos(\theta/2) = 3/5$ et $\sin(\theta/2) = 4/5$. Ces valeurs appartiennent au domaine demandé et donnent

$$E_{\max} = 60, \quad \theta = 2 \arctan(4/3).$$

On peut aussi caractériser cet angle par $\cos \theta = 9/25 - 16/25 = -7/25$.

PIÈGE / On ne maximise pas séparément les deux normes

Le maximum de $\|3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\|$ exige $\theta = 0$, tandis que celui de $\|3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}\|$ exige $\theta = \pi$. Ces deux situations ne peuvent pas se produire simultanément.

PROLONGEMENT / OPTIMISATION

La même idée, sans trigonométrie

Reprenons $X = \|3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\|$ et $Y = \|3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}\|$. Les deux nombres sont positifs ou nuls.

Une contrainte fixe

L'identité du parallélogramme donne

$$X^2 + Y^2 = 2\|3\mathbf{a}\|^2 + 2\|2\mathbf{b}\|^2 = 2 \cdot 36 + 2 \cdot 36 = 144.$$

Par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$,

$$(3X + 4Y)^2 \leq (3^2 + 4^2)(X^2 + Y^2) = 25 \cdot 144.$$

Comme $E = 3X + 4Y \geq 0$, on retrouve $E \leq 60$.

Le cas d'égalité et sa réalisation

Il faut (X, Y) proportionnel à $(3, 4)$, avec le même sens. La contrainte impose

$$X = \frac{36}{5}, \quad Y = \frac{48}{5}.$$

Ces valeurs correspondent à $\cos \theta = -7/25$, qui appartient à $[-1, 1]$. Le maximum est donc réalisable par deux vecteurs de normes 2 et 3.

THÉORÈME / Une formule plus générale

Si $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = R > 0$ et $A, B > 0$, alors, lorsque l'angle entre les vecteurs varie,

$$\max (A \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| + B \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|) = 2R\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Le minimum vaut $2R \min(A, B)$.

Pourquoi le minimum vaut-il cette valeur ?

Avec $x = \theta/2 \in [0, \pi/2]$, on a $\cos x + \sin x \geq 1$. Par conséquent,

$$A \cos x + B \sin x \geq \min(A, B)(\cos x + \sin x) \geq \min(A, B).$$

L'égalité est atteinte à $x = 0$ si $A \leq B$, ou à $x = \pi/2$ si $B \leq A$. Pour le problème précédent, on obtient donc $\boxed{36 \leq E \leq 60}$.

ASTUCE / Repérer des normes égales après multiplication

Ici, $\|3\mathbf{a}\| = \|2\mathbf{b}\| = 6$. Cette égalité explique à la fois les formules d'angle moitié et la simplification du problème.

PROBLÈME GUIDÉ / 2

Deux inconnues, deux produits scalaires

Énoncé

On donne $\mathbf{a} = (-1, 1, 3)$, $\mathbf{b} = (1, 3, 1)$, $\mathbf{d} = (3, -6, 2)$ et $\mathbf{e} = (1, 1, 1)$. Un vecteur $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ vérifie

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 10, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{e} = -2.$$

Déterminer λ, μ , puis $\|\mathbf{c}\|^2$.

1. Préparer les quatre coefficients

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = -3 - 6 + 6 = -3,$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{d} = 3 - 18 + 2 = -13,$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = -1 + 1 + 3 = 3,$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{e} = 1 + 3 + 1 = 5.$$

La bilinéarité transforme les deux données en un système réel :

$$\begin{cases} -3\lambda - 13\mu = 10, \\ 3\lambda + 5\mu = -2. \end{cases}$$

2. Éliminer puis remplacer

L'addition des équations donne $-8\mu = 8$, donc $\mu = -1$. La seconde équation devient $3\lambda - 5 = -2$, d'où $\lambda = 1$.

3. Reconstituer le vecteur demandé

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (-2, -2, 2), \quad \boxed{\|\mathbf{c}\|^2 = 4 + 4 + 4 = 12}.$$

On vérifie les données initiales : $(-2, -2, 2) \cdot (3, -6, 2) = -6 + 12 + 4 = 10$ et $(-2, -2, 2) \cdot (1, 1, 1) = -2$.

ASTUCE / Le système indique aussi l'unicité

Le déterminant vaut $(-3) \cdot 5 - (-13) \cdot 3 = 24 \neq 0$. Les deux équations déterminent donc un unique couple (λ, μ) .

PIÈGE / Deux données ne garantissent pas toujours deux équations indépendantes

Si une équation était un multiple de l'autre, elle n'apporterait pas d'information supplémentaire. Il faut regarder les coefficients, pas seulement compter les lignes.

PROBLÈME GUIDÉ / 3

Tourner un côté jusqu'à l'angle droit

Énoncé

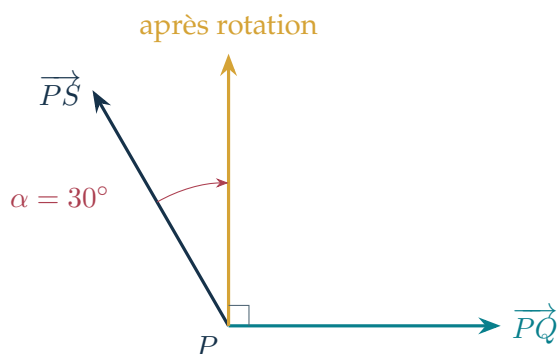
Dans un parallélogramme $PQRS$, on a $\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 1)$ et $\overrightarrow{PS} = (1, -1, 0)$. On fait tourner $\overrightarrow{PS}$, dans le plan du parallélogramme et autour de P , du plus petit angle aigu α qui le rend orthogonal à $\overrightarrow{PQ}$. Calculer

$$\sin^2 \frac{5\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

1. Calculer l'angle initial

Les normes des deux vecteurs valent $\sqrt{2}$ et leur produit scalaire vaut -1 . Ainsi $\cos \theta = -1/2$, donc $\theta = 120^\circ$. La rotation aiguë cherchée vaut

$$\alpha = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$



2. Simplifier avant de calculer

L'identité $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A + B) \sin(A - B)$ donne

$$\sin^2 \frac{5\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sin(3\alpha) \sin(2\alpha) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

PIÈGE / Ne pas confondre angle initial et angle de rotation

L'angle entre les vecteurs vaut 120° , mais la rotation demandée vaut 30° . Dans l'autre sens, la première direction orthogonale est atteinte après 150° , ce qui n'est pas un angle aigu.

PROBLÈME GUIDÉ / 4

Isoler un coefficient sans coordonnées

Énoncé

Les vecteurs unitaires $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ font un angle aigu et vérifient $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{3}/2$. On pose

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Exprimer λ comme combinaison linéaire de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$ et $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$, sans terme constant.

1. Retrouver le produit scalaire

Les normes valent 1, donc $\sin \theta = \sqrt{3}/2$. Comme l'angle est aigu, $\theta = 60^\circ$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1/2$.

2. Faire disparaître le terme normal

Le vecteur $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ est orthogonal aux deux autres. En multipliant scalairement par $\mathbf{u}$, puis par $\mathbf{v}$, on obtient

$$p := \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \lambda + \frac{1}{2}, \quad q := \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \frac{\lambda}{2} + 1.$$

3. Éliminer la constante

Le calcul $2p - q$ donne $2\lambda + 1 - \lambda/2 - 1 = 3\lambda/2$. Ainsi

$$\lambda = \frac{4}{3}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) - \frac{2}{3}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}).$$

Les expressions $\lambda = p - 1/2$ et $\lambda = 2q - 2$ sont également correctes, mais ne présentent pas la forme demandée.

PIÈGE / L'hypothèse « angle aigu » choisit le signe

La donnée $\sin \theta = \sqrt{3}/2$ autoriserait aussi $\theta = 120^\circ$ sans cette hypothèse. Le produit scalaire serait alors $-1/2$, et les équations changeraient.

Un prolongement : la norme de ce vecteur

La partie $\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}$ est orthogonale à $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Donc

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \lambda^2 + \lambda + 1 + \frac{3}{4} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}.$$

Le minimum de $\|\mathbf{a}\|^2$, lorsque λ varie, vaut $3/2$.

PROLONGEMENT / DÉCOMPOSITION

Des directions qui ne sont pas orthogonales

Supposons $\|u\| = \|v\| = 1$ et posons $c = u \cdot v$, avec $|c| < 1$. Les trois vecteurs $u, v, u \times v$ forment une base de l'espace.

THÉORÈME / Retrouver les trois coefficients

Si $a = \lambda u + \mu v + \nu(u \times v)$ et si

$$p = a \cdot u, \quad q = a \cdot v, \quad r = a \cdot (u \times v),$$

alors

$$\lambda = \frac{p - cq}{1 - c^2}, \quad \mu = \frac{q - cp}{1 - c^2}, \quad \nu = \frac{r}{1 - c^2}.$$

Démonstration

Les deux premiers produits scalaires donnent $p = \lambda + c\mu$ et $q = c\lambda + \mu$. En calculant $p - cq$, puis $q - cp$, on élimine successivement μ et λ . Pour le troisième coefficient, l'orthogonalité donne $r = \nu \|u \times v\|^2$. Or l'identité de Lagrange donne $\|u \times v\|^2 = 1 - c^2$. Le dénominateur est strictement positif, ce qui assure l'unicité.

Retrouver le problème précédent

Avec $c = 1/2$, on obtient $\lambda = \frac{4}{3}p - \frac{2}{3}q$. Dans ce problème, les données imposent en outre $\mu = 1$ et $\nu = 1$. La formule générale retrouve donc exactement la même expression.

Pourquoi les produits scalaires ne sont-ils pas les coefficients ?

Dans une base orthonormée, projeter sur un vecteur de base isole un coefficient. Ici, $u \cdot v = c$ peut être non nul : chaque projection mélange deux coefficients. Résoudre le petit système corrige ce mélange.

PIÈGE / Le cas colinéaire ne se traite pas par division

Si $c = 1$ ou $c = -1$, les vecteurs u et v sont colinéaires, leur produit vectoriel est nul et le dénominateur $1 - c^2$ s'annule. On n'a plus une base de l'espace.

PROBLÈME GUIDÉ / 5

Une équation vectorielle cache une projection

Énoncé

On donne $\mathbf{a} = (\sqrt{7}, 1, -1)$ et $\mathbf{b} = (0, 1, 2)$. Le vecteur $\mathbf{r}$ vérifie

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = 0.$$

Déterminer $\mathbf{r}$ et calculer $\|3\mathbf{r}\|^2$.

1. Passer à une seule inconnue

L'antisymétrie permet d'écrire $(\mathbf{r} - \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Comme $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, il existe un réel λ tel que

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} + \lambda \mathbf{a}.$$

2. Utiliser la condition d'orthogonalité

On a $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 1 - 2 = -1$ et $\|\mathbf{a}\|^2 = 7 + 1 + 1 = 9$. Ainsi

$$0 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = -1 + 9\lambda, \quad \lambda = \frac{1}{9}.$$

Il en résulte

$$\mathbf{r} = \frac{1}{9}(\sqrt{7}, 10, 17), \quad 3\mathbf{r} = \frac{1}{3}(\sqrt{7}, 10, 17).$$

$$\|3\mathbf{r}\|^2 = \frac{7 + 100 + 289}{9} = 44.$$

3. Une vérification sans coordonnées

Le vecteur $\mathbf{r}$ est la composante de $\mathbf{b}$ orthogonale à $\mathbf{a}$. La formule de projection donne

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{b}\|^2 - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^2}{\|\mathbf{a}\|^2} = 5 - \frac{1}{9} = \frac{44}{9}.$$

Comme $\|3\mathbf{r}\|^2 = 9 \|\mathbf{r}\|^2$, on retrouve 44.

PIÈGE / Le coefficient est une racine carrée

La première coordonnée de $\mathbf{a}$ est $\sqrt{7}$, donc son carré vaut 7. Remplacer cette coordonnée par 7 changerait la norme au carré et tout le résultat.

ASTUCE / La vérification géométrique

On contrôle $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = 0$ et $\mathbf{r} - \mathbf{b} = \mathbf{a}/9$. Ces deux relations prouvent directement que les deux contraintes initiales sont satisfaites.

PROLONGEMENT / SYSTÈME VECTORIEL

Résoudre avec un produit et une projection

Considérons le système

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = d, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

Le premier membre de la première équation est toujours orthogonal à $\mathbf{a}$. Il faut donc nécessairement $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0$.

THÉORÈME / Condition et solution unique

Si $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} \neq 0$, le système n'a aucune solution. Si $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0$, il possède l'unique solution

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{k} + d\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

Démonstration

L'identité du double produit vectoriel, vérifiable en développant les trois coordonnées, donne

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{r} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}.$$

Toute solution doit donc avoir la forme annoncée. Réciproquement, pour ce candidat, le produit scalaire avec $\mathbf{a}$ vaut d . De plus,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{k}.$$

Le produit vectoriel avec $\mathbf{a}$ vaut donc bien $\mathbf{k}$. L'existence et l'unicité sont démontrées.

Exemple numérique

Pour $\mathbf{a} = (0, 0, 2)$, $\mathbf{k} = (4, -2, 0)$ et $d = 6$, on a $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0$, $\|\mathbf{a}\|^2 = 4$ et $\mathbf{a} \times \mathbf{k} = (4, 8, 0)$. Ainsi

$$\mathbf{r} = \frac{(4, 8, 0) + (0, 0, 12)}{4} = (1, 2, 3).$$

Vérification : $(1, 2, 3) \times (0, 0, 2) = (4, -2, 0)$ et $(1, 2, 3) \cdot (0, 0, 2) = 6$.

PIÈGE / On ne divise pas par un vecteur

Une équation comme $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{k}$ ne se résout pas par une « division par $\mathbf{a}$ ». Elle laisse libre une composante parallèle à $\mathbf{a}$; c'est la seconde contrainte qui la fixe.

PROBLÈME GUIDÉ / 6

Construire un point par deux déplacements

Énoncé

On pose $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}$ et $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{b}$. Le point R appartient à $[OP]$ et vérifie $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OP}$. Le point M est défini par $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$. Exprimer $\overrightarrow{PM}$ en fonction de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

1. Traduire les rapports dans le bon sens

Les relations données s'écrivent

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{5}\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{RM} = \frac{1}{5}\mathbf{b}.$$

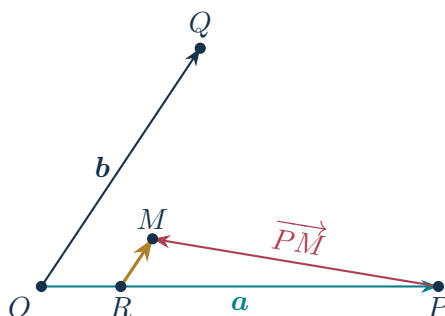
La relation de Chasles donne alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RM} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/5$.

2. Changer le point de départ

Pour partir de P , il faut soustraire son vecteur-position :

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{5} - \mathbf{a}.$$

$$\boxed{\overrightarrow{PM} = \frac{\mathbf{b} - 4\mathbf{a}}{5}}.$$



ASTUCE / Une formule qui se généralise

Si $\overrightarrow{OR} = \mathbf{a}/m$ et $\overrightarrow{RM} = \mathbf{b}/n$, avec $m, n \neq 0$, alors

$$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{1}{m} - 1\right)\mathbf{a} + \frac{1}{n}\mathbf{b}.$$

PIÈGE / Une relation de longueurs ne suffit pas toujours

Une égalité vectorielle fixe une direction et un sens. Une simple égalité entre longueurs ne les fixe pas. C'est pourquoi les flèches dans l'énoncé portent une information essentielle.

PROBLÈME GUIDÉ / 7

Faire disparaître un terme en une ligne

Énoncé

Trois vecteurs vérifient $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 3$. Calculer $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$.

1. Lire l'orthogonalité cachée

Puisque $\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, le vecteur $\mathbf{b}$ est orthogonal à $\mathbf{c}$. On a donc $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$. Cette égalité reste vraie si le produit vectoriel est nul.

2. Développer uniquement ce qui est demandé

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 3 - 2 \cdot 0.$$

$$\boxed{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 3.}$$

Il n'est pas nécessaire de connaître les coordonnées des trois vecteurs, ni même la norme de $\mathbf{c}$.

THÉORÈME / La version générale

Si $\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, alors, pour tous réels s, t ,

$$\mathbf{c} \cdot (s\mathbf{a} + t\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}).$$

Le terme contenant $\mathbf{b}$ disparaît automatiquement.

Autre lecture : un produit mixte avec répétition

On peut écrire $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$. Il s'agit d'un produit mixte contenant deux fois le même vecteur ; il est donc nul.

Construire un exemple pour contrôler

Prenons $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ et $\mathbf{c} = (3, 2, 0)$. Alors $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 3$ et $\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} = (0, 0, 2)$. On obtient

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = (3, 2, 0) \cdot (1, 0, -4) = 3.$$

Cet exemple confirme le résultat, tandis que la preuve précédente le démontre pour toutes les données autorisées.

ASTUCE / Chercher les termes nuls avant les coordonnées

Un calcul peut se raccourcir fortement si l'on repère d'abord l'orthogonalité. Les coordonnées restent utiles pour vérifier une réponse ou traiter une contrainte qui n'a pas encore été utilisée.

PROBLÈME GUIDÉ / 8

Une aire obtenue par factorisation

Énoncé reformulé

On donne $\mathbf{a} = (2, 3, 3)$ et $\mathbf{b} = (6, 3, 3)$. Un triangle possède, issus du même sommet, les côtés

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}.$$

Calculer le carré de son aire $\mathcal{A}$.

1. Simplifier le produit avant les coordonnées

La bilinéarité donne

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \mathbf{a} \times \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \times \mathbf{b} + 3\mathbf{b} \times \mathbf{a} - 6\mathbf{b} \times \mathbf{b} \\ &= -2\mathbf{a} \times \mathbf{b} - 3\mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &= -5(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Le coefficient -5 se retrouve immédiatement par le déterminant $1 \cdot (-2) - 3 \cdot 1$.

2. Calculer un seul produit vectoriel

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (3 \cdot 3 - 3 \cdot 3, 3 \cdot 6 - 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 - 3 \cdot 6) \\ &= (0, 12, -12). \end{aligned}$$

Donc $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = 12^2 + (-12)^2 = 288$.

3. Passer directement au carré de l'aire

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \frac{25}{4} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \frac{25}{4} \cdot 288.$$

$$\boxed{\mathcal{A}^2 = 1800, \quad \mathcal{A} = 30\sqrt{2}.$$

PIÈGE / Deux facteurs à ne pas oublier

Le passage du parallélogramme au triangle donne un facteur $1/2$ dans l'aire, donc $1/4$ dans son carré. Le coefficient -5 donne quant à lui un facteur 25 dans le carré de la norme.

ASTUCE / Une même aire pour différents côtés

La structure décisive est le déterminant des coefficients. Dès qu'il vaut -5 , le produit vectoriel des côtés est $-5(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ et le calcul de l'aire suit la même démarche.

PROLONGEMENT / DEUXIÈME MÉTHODE

Contrôler une aire avec des produits scalaires

Le résultat du problème précédent peut être retrouvé sans calculer les trois coordonnées d'un produit vectoriel.

1. Réduire la tâche aux vecteurs de départ

Le déterminant des coefficients vaut -5 , donc

$$\mathcal{A}^2 = \frac{25}{4} (\|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2).$$

Or

$$\begin{aligned} \|a\|^2 &= 4 + 9 + 9 = 22, & \|b\|^2 &= 36 + 9 + 9 = 54, \\ a \cdot b &= 12 + 9 + 9 = 30. \end{aligned}$$

Ainsi $22 \cdot 54 - 30^2 = 1188 - 900 = 288$, puis $\mathcal{A}^2 = (25/4) \cdot 288 = 1800$.

2. Un contrôle direct avec les côtés du triangle

On peut aussi calculer $u = (20, 12, 12)$ et $v = (-10, -3, -3)$. Alors

$$\|u\|^2 = 688, \quad \|v\|^2 = 118, \quad u \cdot v = -272.$$

Le carré de l'aire vaut

$$\frac{1}{4} (688 \cdot 118 - 272^2) = \frac{1}{4} (81184 - 73984) = \boxed{1800}.$$

Cette vérification est plus longue, mais elle contrôle indépendamment le choix des côtés et le facteur de transformation.

THÉORÈME / Le déterminant de Gram de deux vecteurs

Le nombre

$$G = \begin{vmatrix} \|u\|^2 & u \cdot v \\ u \cdot v & \|v\|^2 \end{vmatrix} = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$$

est positif ou nul. Il est nul exactement lorsque les vecteurs sont colinéaires. Pour un triangle de côtés u, v issus du même sommet, $G = 4\mathcal{A}^2$.

ASTUCE / Choisir selon les données disponibles

Si l'énoncé donne surtout des normes et un produit scalaire, l'identité de Lagrange est naturelle. S'il donne de petites coordonnées, le produit vectoriel peut être plus rapide.

PROBLÈME GUIDÉ / 9

Une seconde équation vectorielle

Énoncé

On donne $\mathbf{a} = (4, -1, 3)$ et $\mathbf{b} = (10, 2, -1)$. Un vecteur $\mathbf{c}$ vérifie

$$2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + 3(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 15.$$

Calculer $\mathbf{c} \cdot (1, 1, -3)$.

1. Factoriser en respectant l'ordre

Comme $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times \mathbf{b}$, la première relation devient

$$(2\mathbf{a} - 3\mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Le vecteur $\mathbf{b}$ est non nul, donc $2\mathbf{a} - 3\mathbf{c} = \lambda\mathbf{b}$ pour un réel λ .

2. Fixer le paramètre

Le produit scalaire avec $\mathbf{a}$ donne

$$2\|\mathbf{a}\|^2 - 3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

On calcule $\|\mathbf{a}\|^2 = 16 + 1 + 9 = 26$ et $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 40 - 2 - 3 = 35$. Ainsi $52 - 45 = 35\lambda$, donc $\lambda = 1/5$.

3. Calculer le vecteur puis le résultat

$$\mathbf{c} = \frac{1}{3} \left(2\mathbf{a} - \frac{1}{5}\mathbf{b} \right) = \frac{1}{15}(10\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \frac{1}{15}(30, -12, 31).$$

Par conséquent,

$$\mathbf{c} \cdot (1, 1, -3) = \frac{30 - 12 - 93}{15} = -5.$$

Vérification des contraintes

On a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (120 + 12 + 93)/15 = 15$. De plus, $2\mathbf{a} - 3\mathbf{c} = \mathbf{b}/5$, ce qui rend bien nul le produit vectoriel avec $\mathbf{b}$.

ASTUCE / Garder les fractions jusqu'à la fin

La forme $\mathbf{c} = (10\mathbf{a} - \mathbf{b})/15$ évite plusieurs fractions intermédiaires. Elle permet aussi de calculer directement un produit scalaire sans écrire toutes les coordonnées de $\mathbf{c}$.

PROLONGEMENT / CONDITIONS

Quand le paramètre n'est plus déterminé

Considérons des vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ non nuls et les contraintes

$$2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + 3(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = s.$$

Comme précédemment, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $2\mathbf{a} - 3\mathbf{c} = \lambda\mathbf{b}$. Le paramètre doit vérifier

$$2\|\mathbf{a}\|^2 - 3s = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

THÉORÈME / Trois situations à distinguer

- Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0$, il existe une unique solution, obtenue avec

$$\lambda = \frac{2\|\mathbf{a}\|^2 - 3s}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}, \quad \mathbf{c} = \frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{\lambda}{3}\mathbf{b}.$$

- Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ et $2\|\mathbf{a}\|^2 - 3s \neq 0$, il n'y a aucune solution.
- Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ et $2\|\mathbf{a}\|^2 - 3s = 0$, tous les réels λ conviennent : il y a une infinité de solutions.

Calculer seulement ce qui est demandé

Dans le problème précédent, $\mathbf{c} = (10\mathbf{a} - \mathbf{b})/15$. Pour $\mathbf{d} = (1, 1, -3)$,

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = \frac{10(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}}{15}.$$

Or $\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = 4 - 1 - 9 = -6$ et $\mathbf{b} \cdot \mathbf{d} = 10 + 2 + 3 = 15$. Ainsi

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = \frac{10(-6) - 15}{15} = \boxed{-5}.$$

Cette méthode retrouve le résultat sans calculer les coordonnées du vecteur inconnu.

PIÈGE / Un dénominateur nul signale un changement de situation

La formule de λ n'est valable que si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0$. Si ce produit est nul, revenir à l'équation avant division permet de distinguer une impossibilité d'une famille de solutions.

ENTRAÎNEMENT / 1 À 6

Consolider les méthodes de base

Les niveaux 1, 2 et 3 indiquent une difficulté croissante. Pour chaque exercice, commencer par nommer l'outil choisi et terminer par un contrôle du résultat.

Exercice 1 · Niveau 1 · Angle et longueurs

On donne $\mathbf{a} = (1, -2, 2)$ et $\mathbf{b} = (2, 1, 0)$. Calculer $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, les deux normes, l'angle entre les vecteurs, puis $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2$. Vérifier ce dernier résultat en coordonnées.

Exercice 2 · Niveau 1 · Une norme sans coordonnées

On sait que $\|\mathbf{a}\| = 3$, $\|\mathbf{b}\| = 2$ et $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$. Déterminer l'angle entre les vecteurs et calculer $\|2\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.

Exercice 3 · Niveau 1 · Normale et aire

Soient $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ et $\mathbf{v} = (0, 2, -1)$. Calculer $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ et vérifier qu'il est orthogonal à chacun des deux facteurs. Déterminer l'aire du triangle dont $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sont deux côtés issus du même sommet.

Exercice 4 · Niveau 2 · Projection et système

On donne $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$ et $\mathbf{b} = (3, 0, 0)$. Calculer la projection de $\mathbf{b}$ sur la droite engendrée par $\mathbf{a}$, puis le vecteur $\mathbf{r}$ qui vérifie

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = 0.$$

Déterminer $\|\mathbf{r}\|^2$ de deux manières.

Exercice 5 · Niveau 2 · Un maximum et un minimum

Les vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sont unitaires. Lorsque leur angle varie, déterminer les valeurs maximale et minimale de

$$E = 5 \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| + 12 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Préciser un angle pour lequel chaque extremum est atteint.

Exercice 6 · Niveau 2 · Reconstituer un vecteur

Pour $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$ et $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, on sait que $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 4$ et $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 5$. Déterminer $\lambda, \mu, \mathbf{c}$ et $\|\mathbf{c}\|^2$.

ASTUCE / Réflexes utiles

Dans les exercices 2 et 5, des coordonnées seraient superflues. Dans l'exercice 4, reconnaître une projection évite de résoudre trois inconnues indépendantes.

ENTRAÎNEMENT / 7 À 12

Approfondir et contrôler les cas limites

Exercice 7 · Niveau 2 · Décomposition dans une base oblique

Deux vecteurs unitaires u, v font un angle de 60° . On pose $a = 2u - 3v + 4(u \times v)$. Calculer $p = a \cdot u$, $q = a \cdot v$ et $r = a \cdot (u \times v)$. Retrouver les trois coefficients à partir de p, q, r , puis calculer $\|a\|^2$.

Exercice 8 · Niveau 2 · Transformation d'aire

Soient $a = (1, 1, 0)$, $b = (0, 1, 1)$, $u = 2a + b$ et $v = a - 3b$. Calculer le carré de l'aire du triangle de côtés u, v issus d'un même sommet. Utiliser d'abord le déterminant des coefficients, puis vérifier avec des produits scalaires.

Exercice 9 · Niveau 1 · Un parcours en deux étapes

On pose $\overrightarrow{OP} = a$, $\overrightarrow{OQ} = b$, $\overrightarrow{OR} = a/3$ et $\overrightarrow{RM} = b/4$. Exprimer $\overrightarrow{PM}$. Appliquer avec $O = (0, 0, 0)$, $P = (6, 0, 0)$ et $Q = (0, 8, 0)$; donner M et la longueur PM .

Exercice 10 · Niveau 2 · Coplanarité et volume

On donne $a = (1, 0, 1)$, $b = (0, 2, 1)$ et $c = (2, 1, t)$, avec $t \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur de t les trois vecteurs sont-ils coplanaires ? Pour $t = 1$, calculer le volume du tétraèdre dont ces vecteurs sont les trois côtés issus d'un sommet.

Exercice 11 · Niveau 3 · Aucune ou plusieurs solutions

Soient $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$ et $s \in \mathbb{R}$. Étudier toutes les solutions c du système

$$2(a \times b) + 3(b \times c) = 0, \quad a \cdot c = s.$$

Lorsqu'il existe des solutions, déterminer celle de norme minimale.

Exercice 12 · Niveau 3 · Une condition de compatibilité

On fixe $a = (1, 1, 1)$, $k = (1, -1, 0)$ et $d = 3$. Résoudre $r \times a = k$, $r \cdot a = d$, puis calculer $\|r\|^2$. Que se passe-t-il si l'on remplace k par $(1, 0, 0)$?

CORRIGÉS / 1 À 3

Angles, normes et aire d'un triangle

Exercice 1

Le produit scalaire vaut $1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$. Les vecteurs sont non nuls, donc leur angle vaut 90° . Leurs normes sont

$$\|a\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \quad \|b\| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

Par orthogonalité, $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 = 9 + 5 = 14$. En coordonnées, $a + b = (3, -1, 2)$, dont la norme au carré vaut bien $9 + 1 + 4 = 14$.

Exercice 2

La formule du produit scalaire donne $\cos \theta = 3/(3 \cdot 2) = 1/2$. L'angle entre deux vecteurs est dans $[0, \pi]$, donc $\theta = 60^\circ$. En développant le carré de la norme,

$$\|2a - b\|^2 = 4\|a\|^2 + \|b\|^2 - 4(a \cdot b) = 36 + 4 - 12 = 28.$$

Ainsi $\|2a - b\| = 2\sqrt{7}$.

PIÈGE / Le coefficient du terme croisé

Le coefficient est $2 \times 2 \times (-1) = -4$. Écrire seulement $-2(a \cdot b)$ oublierait le coefficient 2 présent devant a .

Exercice 3

Le produit vectoriel est

$$u \times v = (0(-1) - 1 \cdot 2, 1 \cdot 0 - 1(-1), 1 \cdot 2 - 0 \cdot 0) = (-2, 1, 2).$$

Les contrôles donnent $(-2, 1, 2) \cdot (1, 0, 1) = 0$ et $(-2, 1, 2) \cdot (0, 2, -1) = 0$. Sa norme vaut $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3$. L'aire du triangle est donc $\mathcal{A} = 3/2$.

ASTUCE / Un contrôle supplémentaire par Lagrange

Les normes au carré valent 2 et 5, et le produit scalaire vaut -1 . Ainsi $\|u \times v\|^2 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$, ce qui confirme la norme 3.

CORRIGÉS / 4 À 6

Projections, extrema et système linéaire

Exercice 4

On a $\|a\|^2 = 9$ et $b \cdot a = 6$. La projection de b sur $\mathbb{R}a$ est donc

$$b_{\parallel} = \frac{6}{9}a = \boxed{(4/3, -2/3, 4/3)}.$$

La première contrainte s'écrit $(r - b) \times a = 0$, donc $r = b + \lambda a$. La seconde donne $0 = 6 + 9\lambda$, soit $\lambda = -2/3$. Ainsi

$$r = b - b_{\parallel} = \boxed{(5/3, 2/3, -4/3)}.$$

En coordonnées, $\|r\|^2 = (25 + 4 + 16)/9 = \boxed{5}$. Par projection, on retrouve $\|b\|^2 - (b \cdot a)^2 / \|a\|^2 = 9 - 36/9 = 5$.

Exercice 5

Pour $x = \theta/2 \in [0, \pi/2]$, les deux normes valent $2 \cos x$ et $2 \sin x$. Par conséquent,

$$E = 2(5 \cos x + 12 \sin x) \leq 2\sqrt{25 + 144} = \boxed{26}.$$

L'égalité est atteinte pour $\cos x = 5/13$ et $\sin x = 12/13$, soit $\theta = 2 \arctan(12/5)$. Pour le minimum, $5 \cos x + 12 \sin x \geq 5(\cos x + \sin x) \geq 5$. Il vaut donc $\boxed{10}$, atteint pour $x = 0$, c'est-à-dire $\boxed{u = v}$.

Exercice 6

Les normes au carré de a, b valent 2 et leur produit scalaire vaut 1. Le système devient

$$2\lambda + \mu = 4, \quad \lambda + 2\mu = 5.$$

Deux fois la première équation moins la seconde donne $3\lambda = 3$, donc $\lambda = 1$, puis $\mu = 2$. Ainsi

$$\boxed{c = (1, 2, 3)}, \quad \boxed{\|c\|^2 = 14}.$$

Les contrôles sont $c \cdot a = 1 + 3 = 4$ et $c \cdot b = 2 + 3 = 5$.

CORRIGÉS / 7 ET 8

Base oblique et déterminant d'aire

Exercice 7 · Projeter sur trois directions

On a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1/2$ et $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = 3/4$. L'orthogonalité du produit vectoriel donne

$$p = 2 - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}, \quad q = 1 - 3 = \boxed{-2}, \quad r = 4 \cdot \frac{3}{4} = \boxed{3}.$$

La formule de décomposition avec $c = 1/2$ permet de retrouver les coefficients :

$$\lambda = \frac{1/2 - (1/2)(-2)}{3/4} = 2, \quad \mu = \frac{-2 - (1/2)(1/2)}{3/4} = -3, \quad \nu = \frac{3}{3/4} = 4.$$

Pour la norme, les deux composantes dans le plan et normale au plan sont orthogonales :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\|^2 &= \|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}\|^2 + 16 \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 \\ &= 4 + 9 - 12 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot \frac{3}{4} = \boxed{19}. \end{aligned}$$

Exercice 8 · Simplifier avant de développer

Le déterminant des coefficients vaut $\Delta = 2(-3) - 1 \cdot 1 = -7$. De plus,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, -1, 1), \quad \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = 3.$$

Le carré de l'aire est donc

$$\boxed{\mathcal{A}^2 = \frac{\Delta^2}{4} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \frac{147}{4}}.$$

Pour vérifier, calculons $\mathbf{u} = (2, 3, 1)$ et $\mathbf{v} = (1, -2, -3)$. On trouve $\|\mathbf{u}\|^2 = 14$, $\|\mathbf{v}\|^2 = 14$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 - 6 - 3 = -7$. Alors

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4}(14 \cdot 14 - (-7)^2) = \frac{1}{4}(196 - 49) = \frac{147}{4}.$$

L'aire elle-même vaut $\boxed{7\sqrt{3}/2}$.

PIÈGE / Le signe du déterminant indique une orientation

Le coefficient $\Delta = -7$ inverse le sens du vecteur normal. L'aire, elle, reste positive ; elle est multipliée par 7, et son carré par 49.

CORRIGÉS / 9 ET 10

Positions, coplanarité et volume

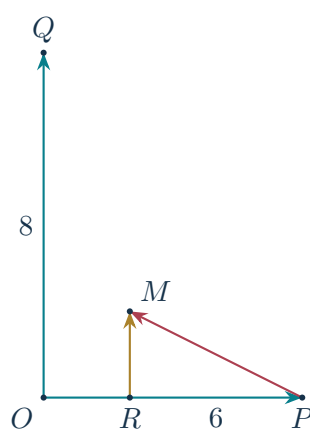
Exercice 9 · Additionner les déplacements

La relation de Chasles donne $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a}/3 + \mathbf{b}/4$. En soustrayant $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}$,

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{4}\mathbf{b} - \frac{2}{3}\mathbf{a}.$$

Avec $\mathbf{a} = (6, 0, 0)$ et $\mathbf{b} = (0, 8, 0)$, on obtient $R = (2, 0, 0)$ puis $M = (2, 2, 0)$. Ainsi

$$\overrightarrow{PM} = (-4, 2, 0), \quad PM = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}.$$



Exercice 10 · Annuler le produit mixte

On calcule $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (2t - 1, 2, -4)$. Donc

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (1, 0, 1) \cdot (2t - 1, 2, -4) = 2t - 5.$$

Les trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si $2t - 5 = 0$, soit $t = 5/2$. Pour $t = 1$, le produit mixte vaut -3 . Le volume du tétraèdre est donc

$$V = \frac{|-3|}{6} = \frac{1}{2}.$$

ASTUCE / Le signe ne donne pas un volume négatif

Le produit mixte est orienté et peut être négatif. Le volume géométrique est sa valeur absolue, divisée par 6 pour un tétraèdre.

CORRIGÉS / 11 ET 12

Étudier l'existence avant de résoudre

Exercice 11 · Un paramètre libre

Comme $b \neq 0$, l'équation vectorielle équivaut à $2a - 3c = \lambda b$. Avec les coordonnées données,

$$c = \left(\frac{2}{3}, -\frac{\lambda}{3}, 0 \right).$$

Son produit scalaire avec $a = (1, 0, 0)$ vaut toujours $2/3$. Il n'existe donc aucune solution si $s \neq 2/3$. Si $s = 2/3$, toutes les solutions s'écrivent

$$c = \left(\frac{2}{3}, t, 0 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Leur norme au carré vaut $4/9 + t^2$. Elle est minimale pour $t = 0$. Le vecteur de norme minimale est donc $(2/3, 0, 0)$, de norme $2/3$.

Exercice 12 · Vérifier la compatibilité

On a $k \cdot a = 1 - 1 + 0 = 0$ et $\|a\|^2 = 3$. Le système possède donc une unique solution. Le produit vectoriel vaut

$$a \times k = (1, 1, -2).$$

En utilisant la formule établie à la page 18,

$$r = \frac{a \times k + 3a}{3} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

La norme au carré vaut $(16 + 16 + 1)/9 = 11/3$. Les contrôles donnent

$$r \cdot a = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 3, \quad r \times a = (1, -1, 0) = k.$$

Si l'on remplace k par $(1, 0, 0)$, son produit scalaire avec a vaut $1 \neq 0$. Or $r \times a$ est nécessairement orthogonal à a . Le système devient donc **impossible**.

PIÈGE / L'existence ne se vérifie pas après coup seulement

Une condition comme $k \cdot a = 0$ peut exclure une solution avant tout calcul. L'ignorer conduit à chercher un vecteur qui ne peut pas exister.

SYNTHÈSE

Les réflexes à retenir

Ce que l'on voit	Le bon réflexe
Un angle ou une orthogonalité	Utiliser le produit scalaire.
Une norme de somme	Développer d'abord son carré.
Deux normes de somme et différence	Chercher l'identité du parallélogramme ou l'angle moitié.
Une aire de triangle	Prendre la moitié de la norme du produit vectoriel des deux côtés issus d'un sommet.
Des côtés qui sont des combinaisons	Calculer le déterminant des coefficients avant les coordonnées.
Un produit vectoriel nul	Traduire la colinéarité avec un paramètre réel, en choisissant un vecteur de référence non nul.
Un produit vectoriel suivi d'un produit scalaire	Repérer une orthogonalité ou un produit mixte.
Une contrainte de norme minimale	Chercher une décomposition orthogonale.
Un volume ou une coplanarité	Calculer le produit mixte.
Un quotient dans une formule	Vérifier le dénominateur avant de diviser.

THÉORÈME / Trois identités fondamentales

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2,$$

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2,$$

$$\text{proj}_{\mathbb{R}\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}).$$

ASTUCE / La dernière vérification

Avant de conclure, vérifier la nature du résultat, son signe et les contraintes initiales. Une aire et une norme sont positives ou nulles. Examiner aussi les cas nuls, les dénominateurs et les conditions d'égalité.