

ALGÈBRE

Problèmes, méthodes et corrigés

Comprendre les idées.

Choisir la méthode. Vérifier le résultat.

234 fiches de travail

8 chapitres • Édition française

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b)^n$$



$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I = 0 \quad (A \text{ d'ordre } 2)$$

Équations • Suites • Binôme

Matrices • Statistiques

Dénombrement • Probabilités



Un livret pour travailler avec méthode

Ce que contient cette édition. 234 fiches organisées par thème : exercices résolus, parties récupérables d'énoncés et trois propriétés matricielles expliquées. Les formulations sont réécrites en français et les calculs sont corrigés lorsque le texte présente une erreur.

Ce que permet le fichier fourni. Il s'agit d'une transcription orale, pas du recueil d'énoncés affiché à l'écran. Certaines formules ne sont pas dictées et d'autres exercices sont renvoyés à des documents extérieurs absents. Le millier de questions annoncé dans le titre du fichier ne correspond donc pas à mille énoncés disponibles.

Traçabilité. Toutes les questions repérées et suffisamment explicites sont reprises ou traitées dans leur partie exploitable. L'annexe conserve les passages incomplets identifiés, les ambiguïtés et les informations manquantes. Aucun énoncé absent n'est présenté comme connu.

Lire les repères

Repère	Sens
Sans mention particulière	Données suffisamment explicites pour résoudre la fiche.
Reconstitué	Formulation rétablie à partir des relations ou des calculs dictés ; elle n'est pas une copie de la diapositive.
Partie exploitable	Une étape ou une sous-question est résolue ; le problème original complet n'est pas disponible.
Ambiguïté / modèle incomplet	Les réponses dépendent des hypothèses précisées dans la fiche.
Énoncé incohérent	Les données se contredisent : la fiche explique pourquoi.

Une séance efficace

1. Lire le rappel de méthode du chapitre.
2. Cacher le corrigé et chercher une première idée pendant quelques minutes.
3. Comparer la démarche, puis refaire le problème sans regarder.
4. Inscrire le piège rencontré dans un carnet et reprendre la fiche deux jours plus tard.

Conventions : $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$. Les racines sont comptées comme solutions distinctes, sauf indication contraire. Les personnes et objets sont distincts lorsque l'énoncé le précise.

Parcours de lecture

Bloc	Chapitre	Fiches	Page
A	Outils de départ	9	4
B	Équations du second degré	26	7
C	Suites, sommes et inégalités	54	12
D	Binôme et arithmétique	33	21
E	Matrices et déterminants	34	27
F	Statistiques	3	35
G	Dénombrement	43	36
H	Probabilités	32	44
	Points de vigilance		51
	Passages incomplets		52
	Index des fiches		56

Trois parcours possibles

Consolider les bases : A01, A04, B01, B13, C01, C05, D06, G01, G08, H03.

Apprendre les raccourcis justifiés : B08, B09, C06, C20, C49, C52, D14, D29, E06, E08.

Déjouer les pièges avancés : B21, B24, D04, D27, G15, G25, H12, H23, H28, H30.

La routine en quatre questions

Quel est le domaine ?

Quelle structure reconnaît-on ?

Quelle transformation est réversible ?

Le résultat respecte-t-il toutes les hypothèses ?

A Outils de départ

Valeurs absolues, ensembles et logarithmes

LA BOÎTE À OUTILS

La bonne première question : quel est le domaine ? Repérer les racines carrées, les dénominateurs et les arguments des logarithmes.

Valeur absolue. $|u| = u$ si $u \geq 0$, et $|u| = -u$ sinon. Pour $|P(x)| = Q(x)$, commencer par imposer $Q(x) \geq 0$.

Changement de variable. Si $x^2 + 2ax$ et $|x + a|$ apparaissent ensemble, utiliser $t = |x + a|$.

Ensembles. Pour trois ensembles, $|A \cup B \cup C|$ vaut la somme des trois effectifs, moins les trois intersections doubles, plus l'intersection triple.

A01 | Un changement de variable décisif

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x(x+2)| = 5|x+1| + 1$. Combien y a-t-il de solutions distinctes ?

Démarche et réponse. Posons $t = |x+1| \geq 0$. Comme $x(x+2) = (x+1)^2 - 1$, il vient $|t^2 - 1| = 5t + 1$. Si $0 \leq t < 1$, alors $t(t+5) = 0$, donc $t = 0$. Si $t \geq 1$, $t^2 - 5t - 2 = 0$, donc $t = (5 + \sqrt{33})/2$. On obtient

$$x = -1 \quad \text{ou} \quad x = -1 \pm \frac{5 + \sqrt{33}}{2}.$$

Il y a trois solutions.

À retenir. Une valeur positive de $|x+1|$ fournit deux valeurs de x ; la valeur zéro n'en fournit qu'une.

A02 | Deux valeurs absolues, trois zones

Résoudre $x|x+5| = 2 - 2|x+7|$.

Démarche et réponse. Les changements de signe sont -7 et -5 . Pour $x < -7$, on trouve $x^2 + 7x + 16 = 0$, sans racine réelle. Pour $-7 \leq x < -5$, l'équation devient $x^2 + 3x - 12 = 0$: seule $(-3 - \sqrt{57})/2$ appartient à cette zone. Pour $x \geq -5$, on trouve $(x+3)(x+4) = 0$. Ainsi

$$S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{57}}{2}, -4, -3 \right\}.$$

À retenir. Après chaque résolution, filtrer les racines avec l'intervalle utilisé.

A03 | Trois ensembles dans une enquête

Sur 220 personnes, 10 ne sont dans aucun des ensembles M, P, C . On sait $125 \leq |M| \leq 130$, $85 \leq |P| \leq 95$, $75 \leq |C| \leq 90$, et $|M \cap P| = 40$, $|P \cap C| = 30$, $|C \cap M| = 50$. Déterminer les valeurs extrêmes du nombre appartenant aux trois ensembles.

Démarche et réponse. Notons $t = |M \cap P \cap C|$. L'inclusion-exclusion donne $210 = |M| + |P| + |C| - 120 + t$, donc $t = 330 - (|M| + |P| + |C|)$. Les bornes donnent $15 \leq t \leq 45$, mais $t \leq |P \cap C| = 30$. La borne 15 est atteinte pour (130, 95, 90) ; la borne 30 pour (125, 90, 85). Dans ces deux cas toutes les régions exclusives du diagramme ont des effectifs positifs ou nuls. Donc $t_{\min} = 15$, $t_{\max} = 30$ et leur somme vaut 45.

À retenir. Une borne algébrique ne suffit pas : vérifier qu'une répartition réalisable l'atteint.

A04 | Centrer avant de développer

Résoudre $|x^2 + 4x + 3| = 4|x + 2| - 5$.

Démarche et réponse. Posons $t = |x + 2|$. L'équation devient $|t^2 - 1| = 4t - 5$. Le second membre doit être positif ou nul, donc $t \geq 5/4$. Ainsi $t^2 - 1 = 4t - 5$, soit $(t - 2)^2 = 0$. On en déduit $x = -4$ ou $x = 0$.

À retenir. La positivité du second membre peut éliminer un cas entier.

A05 | Somme des chiffres égale à 14

Combien d'entiers à trois chiffres ont une somme des chiffres égale à 14 ?

Démarche et réponse. Pour un chiffre des centaines $a = 1, \dots, 9$, les chiffres b, c vérifient $b + c = 14 - a$, avec $0 \leq b, c \leq 9$. Les nombres de couples sont successivement 6, 7, 8, 9, 10, 9, 8, 7, 6. Leur somme est $\boxed{70}$.

À retenir. Le premier chiffre ne peut pas être zéro ; les deux autres le peuvent.

A06 | Sommer des carrés sans tout calculer

Calculer la somme des carrés des solutions de chacune des équations $(x - 2)^2 + |x - 2| - 2 = 0$ et $x^2 - 2|x - 3| - 5 = 0$, puis additionner les deux résultats.

Démarche et réponse. Pour la première, $t = |x - 2|$ donne $(t + 2)(t - 1) = 0$, donc $x = 1, 3$ et la somme vaut 10. Pour la seconde, la zone $x \geq 3$ ne donne aucune racine admissible. Sur $x < 3$, $x^2 + 2x - 11 = 0$, d'où $x = -1 \pm 2\sqrt{3}$. Par Viète, la somme des carrés vaut $(-2)^2 - 2(-11) = 26$. Le total est $\boxed{36}$.

A07 | Compter les fractions distinctes

Pour $1 \leq m < n \leq 10$, combien de valeurs distinctes prend m/n ?

Démarche et réponse. Chaque fraction possède une écriture irréductible unique a/b avec $1 \leq a < b \leq 10$. Pour les dénominateurs 2, 3, ..., 10, les nombres de numérateurs premiers avec le dénominateur sont 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 6, 4. Leur somme donne $\boxed{31}$.

À retenir. Les 45 couples (m, n) ne donnent pas 45 fractions distinctes : $1/2 = 2/4$.

A08 | Logarithmes et trigonométrie

Partie exploitable

Pour $x \in (0, \pi) \setminus \{\pi/2\}$, résoudre $\log_{2/\pi} |\sin x| + \log_{2/\pi} |\cos x| = 2$.

Démarche et réponse. La base $2/\pi$ appartient à $(0, 1)$; les deux arguments sont strictement positifs sur le domaine. L'addition des logarithmes donne $|\sin x \cos x| = 4/\pi^2$, soit $|\sin 2x| = 8/\pi^2$. Posons $\theta = \arcsin(8/\pi^2) \in (0, \pi/2)$. Les quatre solutions sont

$$\frac{\theta}{2}, \frac{\pi - \theta}{2}, \frac{\pi + \theta}{2}, \pi - \frac{\theta}{2}.$$

À retenir. Le fichier associe cette question à un second ensemble dont l'équation manque ; voir l'annexe.

A09 | Changer de base intelligemment

Soient $a, b > 0$ tels que $a^{\log_3 5} = 9$ et $b^{\log_5 7} = 125$. Calculer $a^{(\log_3 5)^2} + b^{(\log_5 7)^2}$.

Démarche et réponse. On réutilise les égalités au lieu de chercher a et b : $a^{(\log_3 5)^2} = 9^{\log_3 5} = 5^2 = 25$, et $b^{(\log_5 7)^2} = 125^{\log_5 7} = 7^3 = 343$. Le résultat est 368.

B Équations du second degré

Viète, paramètres et localisation des racines

LA BOÎTE À OUTILS

Pour $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$, $\alpha + \beta = -b/a$ et $\alpha\beta = c/a$.

Sommes de puissances. Si les racines vérifient $z^2 = pz - q$, leurs puissances donnent une récurrence $S_n = pS_{n-1} - qS_{n-2}$.

Signe. Pour $a > 0$ et deux racines réelles distinctes, le polynôme est négatif entre les racines et positif à l'extérieur.

Paramètres. Contrôler séparément le degré, le discriminant, les bornes des intervalles et les racines doubles. Un test de signes strict ne couvre pas tous les cas limites.



B01 | Viète et puissances des racines

Reconstitué

Soient α, β les racines de $x^2 - px + q = 0$. Calculer $1/\alpha + 1/\beta$ si $q \neq 0$, puis $\alpha^4 + \beta^4$.

Démarche et réponse. Viète donne $\alpha + \beta = p$ et $\alpha\beta = q$. Ainsi $1/\alpha + 1/\beta = p/q$. Puis $\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - 2q$, donc

$$\alpha^4 + \beta^4 = (p^2 - 2q)^2 - 2q^2 = p^4 - 4p^2q + 2q^2.$$

B02 | Ne pas perdre le signe d'une somme

Deux réels ont pour produit 45 et vérifient $(u - v)^2 = 144$. Les déterminer.

Démarche et réponse. On a $(u + v)^2 = (u - v)^2 + 4uv = 324$, donc $u + v = 18$ ou -18 . Les équations associées sont $t^2 - 18t + 45 = 0$ et $t^2 + 18t + 45 = 0$. Les paires non ordonnées sont $\{3, 15\}$ et $\{-3, -15\}$. Si les nombres sont supposés positifs, seule la première reste.

À retenir. De $s^2 = 324$, on ne peut pas déduire uniquement $s = 18$.

B03 | Un paramètre et des racines complexes

Les racines complexes α, β de $x^2 - \sqrt[4]{60}x + a = 0$ vérifient $\alpha^4 + \beta^4 = -30$. Trouver les valeurs réelles de a et leur produit.

Démarche et réponse. Posons $p = \sqrt[4]{60}$. La formule de B01 donne $60 - 4\sqrt[4]{60}a + 2a^2 = -30$, donc $a^2 - 4\sqrt[4]{15}a + 45 = 0$. D'où $a = \sqrt[4]{15}$ ou $3\sqrt[4]{15}$ et le produit vaut 45 .

À retenir. Une somme de quatrièmes puissances peut être négative pour des nombres complexes.

B04 | Utiliser le rapport des racines

Pour $m \neq 0$, les racines α, β de $3m^2x^2 + m(m-4)x + 2 = 0$ vérifient $\alpha/\beta + \beta/\alpha = 1$. Trouver le plus petit m réel.

Démarche et réponse. La condition équivaut à $(\alpha + \beta)^2 = 3\alpha\beta$. Par Viète, $(m-4)^2/(9m^2) = 2/m^2$, d'où $(m-4)^2 = 18$. Donc $m_{\min} = 4 - 3\sqrt{2}$. Les racines doivent ici être comprises dans $\mathbb{C}$; aucune paire réelle non nulle ne satisfait la condition.

B05 | Factoriser une somme à quatre termes

Reconstitué

a, b sont les racines de $x^2 + 20x - 2020 = 0$ et c, d celles de $x^2 - 20x + 2020 = 0$. Calculer $ac(a-c) + ad(a-d) + bc(b-c) + bd(b-d)$.

Démarche et réponse. Regroupons l'expression en $(a^2 + b^2)(c + d) - (a + b)(c^2 + d^2)$. On a $a + b = -20$, $ab = -2020$, $c + d = 20$, $cd = 2020$. Les sommes de carrés valent 4440 et -3640. Le résultat est $4440 \times 20 - (-20)(-3640) = 16000$.

B06 | Ordre des racines et signes trigonométriques

Pour $-\pi/6 < \theta < -\pi/12$, noter $\alpha_1 > \beta_1$ les racines de $x^2 - 2x \sec \theta + 1 = 0$, et $\alpha_2 > \beta_2$ celles de $x^2 + 2x \tan \theta - 1 = 0$. Calculer $\alpha_1 + \beta_2$.

Démarche et réponse. Dans cet intervalle, $\sec \theta > 0$ et $\tan \theta < 0$. Ainsi $\alpha_1 = \sec \theta + |\tan \theta| = \sec \theta - \tan \theta$, et $\beta_2 = -\tan \theta - |\sec \theta| = -\tan \theta - \sec \theta$. D'où $\alpha_1 + \beta_2 = -2 \tan \theta$.

À retenir. $\sqrt{\tan^2 \theta} = |\tan \theta|$, jamais automatiquement $\tan \theta$.

B07 | Une suite gouvernée par un polynôme

Soit $a_n = (-2)^n + 3^n$. Trouver p, q tels que $a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0$ pour $n \geq 2$, puis calculer $|p + q|$.

Démarche et réponse. Les nombres -2 et 3 sont racines de $(t+2)(t-3) = t^2 - t - 6$. Multiplier cette identité par t^{n-2} puis sommer pour les deux racines donne $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$. Ainsi $p = -1, q = -6$ et $|p + q| = 7$.

B08 | Réduire des puissances de rang élevé

Si α, β sont les racines de $x^2 - x - 4 = 0$ et $P_n = \alpha^n - \beta^n$, calculer $\frac{(P_{16} - P_{15})(P_{15} - P_{14})}{P_{13}P_{14}}$.

Démarche et réponse. De $x^2 = x + 4$ aux racines, on tire $P_n = P_{n-1} + 4P_{n-2}$. Les deux facteurs du numérateur valent $4P_{14}$ et $4P_{13}$. Le quotient est donc 16. Les termes au dénominateur ne sont pas nuls, car $|\alpha| \neq |\beta|$.

B09 | Passer d'un pas à un pas de deux

Pour les racines de $x^2 - 7x - 1 = 0$, poser $A_n = \alpha^n + \beta^n$. Calculer $(A_{21} + A_{17})/A_{19}$.

Démarche et réponse. Chaque racine vérifie $x - 1/x = 7$, donc $x^2 + x^{-2} = 51$, puis $x^4 - 51x^2 + 1 = 0$. Multiplier par x^{17} et sommer donne $A_{21} + A_{17} = 51A_{19}$. Le quotient vaut 51.

B10 | Une racine déjà visible

Reconstitué

Pour $a \neq b$, le polynôme $(a-b)x^2 + (c-a)x + (b-c)$ a une racine double. Quelle relation lie a, b, c ?

Démarche et réponse. La somme des coefficients est nulle : 1 est une racine. Si elle est double, le produit des racines vaut 1, donc $(b-c)/(a-b) = 1$. Ainsi $a+c=2b$: les trois nombres sont en progression arithmétique. Réciproquement, sous cette relation, le polynôme vaut $(a-b)(x-1)^2$.

B11 | Composer un polynôme sans résoudre

Un polynôme réel P de degré deux possède deux racines purement imaginaires non nulles. Montrer que les racines de $P(P(z)) = 0$ ne sont ni réelles ni purement imaginaires.

Démarche et réponse. On peut écrire $P(z) = c(z^2 + a^2)$ avec $c \in \mathbb{R}^*$ et $a > 0$. Si z est réel ou purement imaginaire, alors z^2 est réel et $P(z)$ aussi. Or P n'a aucune racine réelle : $P(P(z)) \neq 0$. La conclusion suit sans calculer les quatre racines.

B12 | Transformer les racines par une fraction

Si α, β sont les racines de $x^2 - 3x + 4 = 0$, trouver une équation ayant pour racines $(\alpha-2)/(\alpha+2)$ et $(\beta-2)/(\beta+2)$.

Démarche et réponse. Le produit des nouveaux dénominateurs est $\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 = 14$. La somme des nouvelles racines vaut $(2\alpha\beta - 8)/14 = 0$ et leur produit $(\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4)/14 = 1/7$. L'équation est $7t^2 + 1 = 0$.

B13 | Une racine commune facile à identifier

Pour quelles valeurs réelles de m les équations $3x^2 + 4mx + 2 = 0$ et $2x^2 + 3x - 2 = 0$ ont-elles une racine commune ?

Démarche et réponse. La seconde se factorise : $(2x-1)(x+2) = 0$. Substituer $x = -2$ dans la première donne $14 - 8m = 0$; substituer $x = 1/2$ donne $11/4 + 2m = 0$. Ainsi $m = 7/4$ ou $-11/8$.

B14 | Soustraire deux équations

Les équations $ax^2 + 2cx + b = 0$ et $ax^2 + 2bx + c = 0$ ont une racine commune, avec $a \neq 0$ et $b \neq c$. Trouver cette racine et une relation entre les coefficients.

Démarche et réponse. La soustraction donne $(c-b)(2x-1) = 0$. Comme $b \neq c$, la racine commune est $x = 1/2$. En remplaçant dans l'une des équations, on obtient $a + 4b + 4c = 0$. Cette relation est aussi suffisante.

B15 | La condition « non nulle » compte

Reconstitué

$x^2 + 2x + 3\lambda = 0$ et $2x^2 + 3x + 5\lambda = 0$ ont une racine réelle commune non nulle. Trouver λ .

Démarche et réponse. Deux fois la première équation moins la seconde donne $x + \lambda = 0$. Substituer $x = -\lambda$ mène à $\lambda(\lambda + 1) = 0$. La valeur 0 donnerait la racine interdite $x = 0$. Donc $\lambda = -1$, avec racine commune 1.

B16 | Éliminer le terme quadratique

Pour $a > 0$, les équations $x^2 - 5ax + 1 = 0$ et $x^2 - ax - 5 = 0$ ont une racine commune. Trouver a , puis β si $a = 3/\sqrt{2\beta}$.

Démarche et réponse. La soustraction donne $-4ax + 6 = 0$, donc $x = 3/(2a)$. Dans la seconde équation : $9/(4a^2) - 3/2 - 5 = 0$. Ainsi $a^2 = 9/26$, d'où $a = 3/\sqrt{26}$, $\beta = 13$.

B17 | Positivité sur toute la droite

Trouver les entiers k pour lesquels $x^2 + 2(3k - 1)x + 8k^2 - 7 > 0$ pour tout réel x .

Démarche et réponse. Le coefficient dominant est positif. La stricte positivité équivaut à $\Delta < 0$. Or $\Delta = 4[(3k - 1)^2 - (8k^2 - 7)] = 4(k - 2)(k - 4)$. Donc $2 < k < 4$, et $k = 3$.

À retenir. Un discriminant nul donne une annulation : il ne convient pas à une inégalité stricte.

B18 | Deux contraintes valables pour tout réel

Partie exploitable

Trouver λ tel que $-4x^2 + (\lambda - 3)x - 1 < 0$ et $x^2 + (\lambda + 2)x + 4 > 0$ pour tout réel x .

Démarche et réponse. Les signes dominants sont déjà corrects ; il faut deux discriminants strictement négatifs. Le premier donne $(\lambda - 3)^2 < 16$, soit $-1 < \lambda < 7$. Le second donne $(\lambda + 2)^2 < 16$, soit $-6 < \lambda < 2$. L'intersection est $\lambda \in (-1, 2)$.

À retenir. Le texte d'origine présente une fraction non entièrement dictée ; seules ces deux conditions sont récupérables.

B19 | Situer les racines avec un paramètre

Soit $f_t(x) = x^2 + 2(t - 1)x + t + 5$. Déterminer les t pour lesquels : a) 2 est strictement entre les racines ; b) les racines sont de signes opposés ; c) 5 est strictement extérieur aux deux racines réelles, éventuellement confondues ; d) les deux racines sont strictement supérieures à 5.

Démarche et réponse. On a $\Delta = 4(t - 4)(t + 1)$, $f_t(2) = 5(t + 1)$ et $f_t(5) = 11t + 20$. a) $f_t(2) < 0$ donne $t < -1$. b) Le produit est négatif si $t < -5$. c) Il faut $\Delta \geq 0$ et $f_t(5) > 0$, soit $(-20/11, -1] \cup [4, +\infty)$. d) L'abscisse du sommet est $1 - t > 5$, donc $t < -4$, mais $f_t(5) > 0$ impose $t > -20/11$: $\emptyset$.

B20 | Deux racines déjà sous forme explicite

Quand les deux racines de $x^2 - 2kx + k^2 - 4 = 0$ appartiennent-elles à $(-3, 5)$?

Démarche et réponse. L'équation est $(x - k)^2 = 4$. Les racines sont $k - 2$ et $k + 2$. Il suffit de demander $-3 < k - 2$ et $k + 2 < 5$. D'où $-1 < k < 3$.

B21 | Un intervalle ouvert et une parabole convexe

Pour quels entiers a a-t-on $x^2 + ax + a^2 + 6a < 0$ pour tout $x \in (1, 2)$? Sommer leurs carrés.

Démarche et réponse. Par continuité, les valeurs aux bornes doivent être ≤ 0 . Ces conditions sont $a^2 + 7a + 1 \leq 0$ et $a^2 + 8a + 4 \leq 0$. Les entiers communs sont $-6, -5, -4, -3, -2, -1$. Réciproquement, la stricte convexité place chaque valeur intérieure strictement sous la corde reliant les bornes, donc sous zéro. La somme vaut 91.

B22 | Bornes ouvertes ou fermées**Bornes précisées**

Déterminer m pour que $x^2 - mx + 4 = 0$ ait deux racines réelles distinctes dans $[1, 5]$. Donner aussi la réponse pour $(1, 5)$.

Démarche et réponse. Les racines doivent être positives et distinctes, d'où $m > 4$. Leur produit vaut 4 ; si la petite racine est ≥ 1 , la grande est ≤ 4 . Le contrôle de la petite racine donne $f(1) = 5 - m \geq 0$, avec sommet $m/2 > 1$, donc $m \leq 5$. Ainsi $\boxed{4 < m \leq 5}$ pour l'intervalle fermé, et $\boxed{4 < m < 5}$ pour l'ouvert.

À retenir. Le fichier ne précise pas clairement les crochets ; les deux conventions sont distinguées.

B23 | Exactement une racine dans un intervalle**Bornes précisées**

Les racines de $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ sont $m - 1, m + 1$. Quand exactement une appartient-elle à $[-2, 4]$? Et à $(-2, 4)$?

Démarche et réponse. Dans le cas fermé, $m - 1 \in [-2, 4] \Leftrightarrow m \in [-1, 5]$ et $m + 1 \in [-2, 4] \Leftrightarrow m \in [-3, 3]$. On prend la différence symétrique : $\boxed{[-3, -1] \cup (3, 5]}$. Pour l'ouvert, on obtient de même $\boxed{(-3, -1] \cup [3, 5)}$.

B24 | Le piège de la racine double

Pour quels réels a l'équation $x^2 - (a+1)x + 2a = 0$ possède-t-elle exactement une solution distincte dans $(0, 3)$?

Démarche et réponse. Les signes opposés aux bornes donnent $f(0)f(3) = 2a(6-a) < 0$, soit $a < 0$ ou $a > 6$. Il faut aussi examiner les cas oubliés par ce test. Pour $a = 0$, les racines sont 0 et 1 : on garde ce cas. Pour $a = 6$, elles sont 3 et 4 : on l'exclut. Enfin $\Delta = a^2 - 6a + 1 = 0$ donne $a = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Seul $a = 3 - 2\sqrt{2}$ a sa racine double $2 - \sqrt{2}$ dans l'intervalle.

$$\boxed{(-\infty, 0] \cup \{3 - 2\sqrt{2}\} \cup (6, +\infty)}.$$

À retenir. Le test $f(u)f(v) < 0$ ne détecte ni une racine située à une borne ni une racine double intérieure.

B25 | Des racines imaginaires et de grands indices

Si α, β sont racines de $2z^2 - 3iz + 2 = 0$ et $T_n = \alpha^n + \beta^n$, calculer $(T_{2026} + T_{2018})/T_{2022}$.

Démarche et réponse. Les racines sont $2i$ et $-i/2$. Leurs quatrièmes puissances sont 16 et $1/16$, de somme $257/16$ et de produit 1. Elles vérifient $z^8 - (257/16)z^4 + 1 = 0$. Multiplier par z^{2018} puis sommer fournit le quotient $\boxed{257/16}$.

B26 | Trouver l'image d'une fraction

Combien de valeurs entières prend $y = (x^2 - 3x + 4)/(x^2 + 3x + 4)$ lorsque $x \in \mathbb{R}$?

Démarche et réponse. Le dénominateur est strictement positif. Pour $y \neq 1$, l'équation en x est $(y-1)x^2 + 3(y+1)x + 4(y-1) = 0$. Son discriminant est $-7y^2 + 50y - 7 = -7(y - 1/7)(y - 7)$. Il est positif ou nul pour $y \in [1/7, 7]$. La valeur $y = 1$ est atteinte en $x = 0$. L'image est donc $[1/7, 7]$; les entiers possibles sont 1 à 7, soit $\boxed{7}$ valeurs.



Suites, sommes et inégalités

Reconnaître une structure avant de calculer

LA BOÎTE À OUTILS

Arithmétique : $u_n = a + (n-1)d$, $S_n = n(u_1 + u_n)/2$. **Géométrie :** $u_n = ar^{n-1}$; si $r \neq 1$, $S_n = a(1 - r^n)/(1 - r)$.

Sommes : $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$, $\sum k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, $\sum k^3 = [n(n+1)/2]^2$.

Télescopage : chercher une forme $v_k - v_{k+1}$, ou son opposé. Écrire les premiers et derniers termes pour vérifier les indices.

Optimisation : pour des réels positifs, la moyenne arithmétique dépasse la moyenne géométrique. Toujours donner les conditions d'égalité et vérifier qu'elles satisfont les contraintes.

C01 | Retrouver une progression arithmétique

Une suite arithmétique vérifie $u_4 = 3u_1$ et $u_7 = 2u_3 + 1$. Calculer u_{11} .

Démarche et réponse. Écrire $u_n = a + (n-1)d$. La première condition donne $3d = 2a$; la seconde donne $a + 6d = 2a + 4d + 1$, donc $2d = a + 1$. On trouve $d = 2$, $a = 3$, puis $u_{11} = 23$.

C02 | Deux suites, deux produits imposés

Les suites (a_n) , (b_n) sont arithmétiques. On sait $a_1 = 2$, $a_{10} = 3$ et $a_1 b_1 = a_{10} b_{10} = 1$. Calculer $a_4 b_4$.

Démarche et réponse. La première suite a pour raison $1/9$, donc $a_4 = 7/3$. On a $b_1 = 1/2$, $b_{10} = 1/3$, d'où une raison $-1/54$ et $b_4 = 4/9$. Le produit vaut $28/27$.

C03 | Échanger les rangs et les valeurs

Une suite arithmétique vérifie $u_p = q$ et $u_q = p$, avec $p \neq q$. Exprimer u_r .

Démarche et réponse. La soustraction donne $(p-q)d = q-p$, donc $d = -1$. Puis $a - (p-1) = q$, d'où $a = p + q - 1$. Ainsi $u_r = p + q - r$.

C04 | Vérifier l'appartenance à une suite

Les nombres -43 et -500 appartiennent-ils à la suite $-3, -7, -11, \dots$?

Démarche et réponse. Le terme général est $u_n = -3 - 4(n-1) = 1 - 4n$. Pour -43 , on obtient $n = 11$: oui. Pour -500 , on obtient $n = 501/4$, qui n'est pas entier : non.

C05 | Exploiter deux sommes partielles

Pour une suite arithmétique, $S_{10} = 530$ et $S_5 = 140$. Calculer $S_{20} - S_6$.

Démarche et réponse. La formule $S_n = n[2a + (n-1)d]/2$ donne $2a + 9d = 106$ et $2a + 4d = 56$. Donc $d = 10$, $a = 8$. Ainsi $S_{20} = 2060$, $S_6 = 198$ et $S_{20} - S_6 = 1862$.

C06 | Le rang double moins un

Deux suites arithmétiques $(u_n), (v_n)$ ont des sommes partielles S_n, T_n vérifiant $S_n/T_n = (3n + 8)/(7n + 15)$. Calculer u_{12}/v_{12} .

Démarche et réponse. Pour une suite arithmétique, $S_{2k-1} = (2k-1)u_k$. Le même facteur se simplifie pour les deux suites : $u_k/v_k = S_{2k-1}/T_{2k-1}$. Au rang 12, on évalue le rapport des sommes en 23 : $\boxed{77/176 = 7/16}$.

À retenir. Cette astuce est spécifique aux suites arithmétiques.

C07 | Des termes entiers positifs

Une suite arithmétique à termes entiers strictement positifs vérifie $S_7/S_{11} = 6/11$ et $130 < u_7 < 140$. Déterminer u_7 .

Démarche et réponse. L'égalité des sommes donne $7(2a + 6d) = 6(2a + 10d)$, donc $a = 9d$. Ainsi $u_7 = 15d$. La seule valeur entière multiple de 15 dans $(130, 140)$ est $\boxed{135}$. On a $d = 9, a = 81$.

C08 | Retrouver le terme à partir de la somme

Si $S_n = 5n^2 + 3n$, déterminer u_n .

Démarche et réponse. Pour $n \geq 2, u_n = S_n - S_{n-1} = 10n - 2$. Pour $n = 1, u_1 = S_1 = 8$, conforme à la formule. Donc $\boxed{u_n = 10n - 2 \ (n \geq 1)}$.

C09 | Termes communs à deux progressions

Partie exploitable

Deux progressions arithmétiques d'entiers, de raisons 4 et 5, ont 11 pour premier terme commun. Trouver le dixième terme commun.

Démarche et réponse. Les termes communs sont espacés du PPCM des raisons, soit 20. Leur suite est $11 + 20k, k \geq 0$. Le dixième terme vaut $11 + 9 \times 20 = \boxed{191}$.

À retenir. Les premiers termes des deux suites ne sont pas dictés ; la question conserve les données sur leur intersection.

C10 | Trois congruences simultanées

Trouver l'intersection des ensembles $\{1 + 3n\}, \{2 + 5n\}$ et $\{3 + 7n\}$ pour $n \in \mathbb{N}_0$. Si elle s'écrit $A + d\mathbb{N}_0$, calculer $A + d$.

Démarche et réponse. Les deux dernières congruences donnent $x = 17 + 35k$. Modulo 3, $2 + 2k \equiv 1$, donc $k \equiv 1 \pmod{3}$. On obtient $x = 52 + 105j, j \geq 0$. Ainsi $\boxed{A = 52, d = 105, A + d = 157}$.

C11 | Un nombre et son renversé

Les chiffres d'un entier à trois chiffres sont en progression arithmétique et leur somme vaut 15. Le nombre dépasse son renversé de 594. Le trouver.

Démarche et réponse. Notons les chiffres a, b, c . On a $a + c = 2b$ et $a + b + c = 15$, donc $b = 5, a + c = 10$. La différence des deux nombres vaut $99(a - c) = 594$, donc $a - c = 6$. D'où $(a, b, c) = (8, 5, 2)$ et $\boxed{852}$.

C12 | Triangle rectangle et progression

Les côtés d'un triangle rectangle sont en progression arithmétique. Son aire vaut 24. Trouver le plus petit côté.

Démarche et réponse. Écrire les côtés $b-d, b, b+d$, avec $b > d > 0$. Pythagore donne $(b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2$, donc $b = 4d$. Les côtés sont $3d, 4d, 5d$ et l'aire $6d^2 = 24$. Ainsi $d = 2$ et le plus petit côté vaut $\boxed{6}$.

C13 | Deux lectures possibles d'un même passage

Ambiguïté conservée

Une suite géométrique a pour premier terme $u_1 = -3$. Déterminer u_7 selon que la condition est a) $u_2 = u_4$; b) $u_2^2 = u_4$.

Démarche et réponse. Écrire $u_n = -3r^{n-1}$. a) $r(r^2 - 1) = 0$, donc $r = 0, 1, -1$; les valeurs de u_7 sont 0 si $r = 0$, et -3 sinon. b) $9r^2 = -3r^3$, donc $r^2(r+3) = 0$; $u_7 = 0$ si $r = 0$, et $\boxed{-2187}$ si $r = -3$.

À retenir. La transcription ne permet pas de trancher entre ces deux énoncés ; les réponses restent explicitement conditionnelles.

C14 | Trois termes géométriques

Trois réels en progression géométrique ont une somme de 13 et une somme de carrés de 91. Les déterminer.

Démarche et réponse. Notons-les u, v, w , avec $v^2 = uw$. La somme des produits deux à deux vaut $(13^2 - 91)/2 = 39$. Or $uv + uw + vw = v(u + v + w) = 13v$, donc $v = 3$. Alors $u + w = 10$ et $uw = 9$: u, w valent 1 et 9. Les suites sont $\boxed{(1, 3, 9)}$ ou $\boxed{(9, 3, 1)}$.

C15 | Une série géométrique et ses carrés

Une suite géométrique réelle de premier terme a et de raison $|r| < 1$ a une somme infinie égale à 20. La somme des carrés de ses termes vaut 100. Trouver a, r .

Démarche et réponse. On a $a/(1-r) = 20$ et $a^2/(1-r^2) = 100$. Substituer $a = 20(1-r)$ donne $4(1-r)/(1+r) = 1$. Ainsi $\boxed{r = 3/5, a = 8}$.

C16 | Une somme de trois morceaux

Calculer $\sum_{k=1}^n (x^k + x^{-k})^2$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Démarche et réponse. Développer chaque carré : $x^{2k} + 2 + x^{-2k}$. Pour $x \neq \pm 1$, les deux morceaux géométriques donnent

$$\boxed{2n + \frac{x^2(1-x^{2n})}{1-x^2} + \frac{x^{-2}(1-x^{-2n})}{1-x^{-2}}}.$$

Pour $x = 1$ ou -1 , chaque carré vaut 4 : la somme vaut $4n$.

C17 | Arithmétique avant, géométrie après

$a < b < c$ sont en progression arithmétique, a^2, b^2, c^2 en progression géométrique, et $a + b + c = 3/2$. Trouver a, b, c .

Démarche et réponse. Écrire $(a, b, c) = (b - d, b, b + d)$, $d > 0$. La somme donne $b = 1/2$. La condition géométrique donne $b^4 = (b^2 - d^2)^2$, donc $b^2 - d^2 = \pm b^2$. Le signe plus conduirait à $d = 0$, interdit. Ainsi $d^2 = 2b^2 = 1/2$.

$$(a, b, c) = \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right).$$

C18 | Le terme central contrôle le produit

Le troisième terme d'une suite géométrique vaut 2. Calculer le produit des cinq premiers termes.

Démarche et réponse. Le produit vaut $a^5 r^{0+1+2+3+4} = (ar^2)^5 = u_3^5$. Il est donc égal à $\boxed{32}$.

C19 | Produit et somme des produits

Trois réels en progression géométrique ont un produit de 216 et une somme des produits deux à deux de 156. Les déterminer.

Démarche et réponse. Le terme central v vérifie $v^3 = 216$, donc $v = 6$. Comme $uw = v^2 = 36$, on a $6(u + w) + 36 = 156$, soit $u + w = 20$. Les extrêmes sont 2 et 18. Donc $\boxed{(2, 6, 18) \text{ ou } (18, 6, 2)}$.

C20 | Indices impairs et indices pairs

Une suite géométrique positive strictement croissante vérifie $u_1 u_3 u_5 u_7 = 1/1296$ et $u_2 + u_4 = 7/36$. Calculer $u_6 + u_8 + u_{10}$.

Démarche et réponse. Le produit vaut u_4^4 , donc $u_4 = 1/6$. On en déduit $u_2 = 1/36$, puis $r^2 = u_4/u_2 = 6$. Ainsi $u_6 = 1, u_8 = 6, u_{10} = 36$. La somme est $\boxed{43}$.

C21 | Multiplier puis soustraire

Calculer $S_n = 1 + 3x + 5x^2 + \dots + (2n - 1)x^{n-1}$.

Démarche et réponse. La différence $S_n - xS_n$ vaut $1 + 2(x + \dots + x^{n-1}) - (2n - 1)x^n$. Utiliser la somme géométrique puis réduire donne, pour $x \neq 1$,

$$S_n = \frac{1 + x - (2n + 1)x^n + (2n - 1)x^{n+1}}{(1 - x)^2}.$$

Pour $x = 1$, la somme des n premiers impairs vaut n^2 .

C22 | Une série arithmético-géométrique

Calculer la somme infinie $3 + 4 + 4 + 32/9 + \dots$, dont le terme général est $u_n = 3n(2/3)^{n-1}$.

Démarche et réponse. Pour $|r| < 1$, $\sum_{n \geq 1} nr^{n-1} = 1/(1 - r)^2$, obtenu en dérivant la série géométrique ou par soustraction. Ainsi la somme vaut $3/(1 - 2/3)^2 = \boxed{27}$.

C23 | Transformer un produit en une somme

Calculer le produit infini $2^{1/4} 2^{2/8} 2^{3/16} \dots$.

Démarche et réponse. Le logarithme en base 2 du produit partiel vaut $\sum_{n \geq 1} n/2^{n+1}$ à la limite. Cette série vaut $\frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} n(1/2)^{n-1} = 1$. Le produit converge donc vers $\boxed{2}$.

C24 | Passer aux inverses

Une progression harmonique vérifie $h_8 = 1/2$ et $h_{14} = 1/3$. Déterminer h_{20} .

Démarche et réponse. Les inverses forment une progression arithmétique : $1/h_8 = 2$ et $1/h_{14} = 3$. Sa raison est $1/6$. Au rang 20, l'inverse vaut 4, donc $\boxed{h_{20} = 1/4}$. Plus généralement $h_n = 6/(n+4)$.

C25 | Maximiser les inverses d'une progression

Une suite arithmétique vérifie $u_{20} = 1$, $u_{30} = -17$. Quel est le plus grand terme de la suite $(1/u_n)_{n \geq 1}$?

Démarche et réponse. La raison vaut $-18/10 = -9/5$, et $u_n = (185 - 9n)/5$. Le dernier terme positif est $u_{20} = 1$; $u_{21} = -4/5$ et tous les suivants sont négatifs. Parmi les positifs, l'inverse est maximal au plus petit dénominateur : $\boxed{\max 1/u_n = 1}$.

C26 | Insérer trois moyennes arithmétiques

Insérer trois nombres entre 3 et 19 pour former une progression arithmétique.

Démarche et réponse. Cinq termes créent quatre écarts égaux. La raison est $(19 - 3)/4 = 4$. Les nombres insérés sont $\boxed{7, 11, 15}$.

C27 | Nombre inconnu de moyennes

On insère n moyennes arithmétiques entre a et 100. La première vaut le septième de la dernière, et $a + n = 33$. Trouver a, n .

Démarche et réponse. La raison est $d = (100 - a)/(n + 1)$. La relation $7(a + d) = 100 - d$ donne $7a + 8d = 100$. Avec $n = 33 - a$, on obtient $7a^2 - 330a + 2600 = 0$. Les racines sont 10 et $260/7$; la seconde donne $n < 0$. Ainsi $\boxed{a = 10, n = 23}$.

C28 | Sommer les moyennes sans les trouver

On insère six moyennes arithmétiques entre 2 et 12. Calculer leur somme.

Démarche et réponse. La somme des huit termes vaut $8(2+12)/2 = 56$. Retirer les deux extrêmes donne $\boxed{42}$.

C29 | Insérer quatre moyennes géométriques

Insérer quatre nombres positifs entre 2 et 486 pour former une progression géométrique.

Démarche et réponse. Les six termes vérifient $2r^5 = 486$, donc $r = 3$. Les moyennes sont $\boxed{6, 18, 54, 162}$.

À retenir. 486 est le terme final donné, pas une moyenne à insérer.

C30 | Comparer deux types de moyennes

Entre 3 et 243, on insère m moyennes arithmétiques et trois moyennes géométriques positives. La quatrième moyenne arithmétique égale la deuxième géométrique. Trouver m .

Démarche et réponse. La deuxième moyenne géométrique est le terme central, donc $\sqrt{3 \times 243} = 27$. La quatrième moyenne arithmétique vaut $3 + 4 \times 240 / (m + 1)$. En l'égalant à 27, on obtient $m + 1 = 40$, donc $m = 39$.

C31 | Un minimum exponentiel

Trouver le minimum de $4^x + 4/4^x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Démarche et réponse. Posons $t = 4^x > 0$. L'inégalité arithmético-géométrique donne $t + 4/t \geq 2\sqrt{4} = 4$. L'égalité exige $t = 4/t$, soit $t = 2$ et $x = 1/2$. Le minimum est $\boxed{4}$.

C32 | Regrouper les termes réciproques

Pour $x, y, z > 0$, minimiser $x/y + y/x + y/z + z/y + z/x + x/z$.

Démarche et réponse. Chaque paire $t + 1/t$ vaut au moins 2. Les trois paires donnent donc $\boxed{6}$. L'égalité simultanée exige $x = y = z$, condition qui est réalisable.

C33 | Un produit qui cache neuf termes

Montrer que $(x + y + z)(1/x + 1/y + 1/z) \geq 9$ pour $x, y, z > 0$.

Démarche et réponse. Le développement donne 3 plus les six rapports de C32. Il est donc au moins $3 + 6 = 9$. L'égalité a lieu exactement lorsque $x = y = z$.

C34 | Une inégalité stricte

Pour $x, y, z > 0$ deux à deux distincts, montrer $(x + y)(y + z)(z + x) > 8xyz$.

Démarche et réponse. Appliquer $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, puis les deux inégalités cycliques. Leur produit donne $\geq 8xyz$. L'égalité imposerait simultanément $x = y = z$, impossible sous l'hypothèse. L'inégalité est donc stricte.

C35 | Optimiser une expression trigonométrique

Trouver le minimum de $25 \sec^2 \theta + 16 \csc^2 \theta$ lorsque l'expression est définie.

Démarche et réponse. Posons $u = \cos^2 \theta > 0, v = \sin^2 \theta > 0$, avec $u + v = 1$. Cauchy donne $25/u + 16/v \geq (5+4)^2/(u+v) = 81$. L'égalité exige $u/v = 5/4$, donc $u = 5/9, v = 4/9$. Le minimum est $\boxed{81}$.

C36 | Une moyenne arithmétique de fonctions

Les nombres $2 \cdot 2^x + 2/2^x, f(x)$ et $3^x + 3^{-x}$ sont en progression arithmétique. Trouver le minimum de f .

Démarche et réponse. Le terme central est la moyenne des extrêmes. Or $2 \cdot 2^x + 2/2^x \geq 4$ et $3^x + 3^{-x} \geq 2$. Donc $f(x) \geq 3$. Les deux égalités se produisent en $x = 0$, d'où $\boxed{\min f = 3}$.

À retenir. Pour additionner des minima, vérifier qu'ils sont atteints au même point.

C37 | Deux optimisations logarithmiques

Soit $m = \min \log_3(3^{y_1} + 3^{y_2} + 3^{y_3})$ sous $y_1 + y_2 + y_3 = 9$. Soit $M = \max \sum_{i=1}^3 \log_3 x_i$ sous $x_i > 0$ et $\sum x_i = 9$. Calculer $3 \log_2 m + 2 \log_3 M$.

Démarche et réponse. L'inégalité arithmético-géométrique donne $\sum 3^{y_i} \geq 3 \cdot 3^3 = 81$, donc $m = 4$, atteint pour $y_i = 3$. De même $x_1 x_2 x_3 \leq 27$, donc $M = \log_3 27 = 3$, atteint pour $x_i = 3$. Le résultat est $3 \times 2 + 2 \times 1 = \boxed{8}$.

C38 | Adapter les poids aux exposants

Pour $a, b, c > 0$ et $a + b + c = 3$, maximiser $a^2 b^3 c^2$.

Démarche et réponse. Appliquer l'inégalité arithmético-géométrique aux sept nombres $a/2, a/2, b/3, b/3, b/3, c/2, c/2$. Leur somme vaut 3. Ainsi $a^2 b^3 c^2 \leq 2^4 3^3 (3/7)^7$. L'égalité exige $a/2 = b/3 = c/2 = 3/7$. Le maximum est $\boxed{2^4 3^3 (3/7)^7}$, atteint en $(6/7, 9/7, 6/7)$.

C39 | Onze parts bien choisies

Sous $a, b, c, d > 0$ et $a + b + c + d = 11$, maximiser $a^5 b^3 c^2 d$. Si ce maximum vaut 3750β , calculer β .

Démarche et réponse. Découper a en cinq parts, b en trois et c en deux. Les onze parts ont moyenne 1 ; leur produit est au plus 1. Le maximum recherché vaut $5^5 3^3 2^2 = \boxed{337500}$, atteint en $(5, 3, 2, 1)$. Ainsi $\boxed{\beta = 90}$.

C40 | Relier les trois moyennes

Reconstitué

Deux nombres positifs ont pour moyenne arithmétique 27 et pour moyenne harmonique 12. Trouver leur moyenne géométrique.

Démarche et réponse. Pour deux nombres positifs, $A = (u + v)/2$, $H = 2uv/(u + v)$ et $G = \sqrt{uv}$. Ainsi $AH = G^2$. On obtient $\boxed{G = \sqrt{27 \times 12} = 18}$.

C41 | Une contrainte sur les inverses

Pour $a, b, c > 0$ tels que $1/a + 1/b + 1/c = 9$, trouver le minimum de $a + b + c$.

Démarche et réponse. Par C33, $(a + b + c) \times 9 \geq 9$. Donc $a + b + c \geq 1$. L'égalité est atteinte lorsque $a = b = c = 1/3$. Le minimum vaut $\boxed{1}$.

C42 | Développer avant de sommer

Calculer $\sum_{r=1}^n (2r - 1)(2r + 1)$.

Démarche et réponse. Le produit vaut $4r^2 - 1$. On utilise $\sum r^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$:

$$\boxed{\frac{2n(n + 1)(2n + 1)}{3} - n.}$$

C43 | Carrés des dix premiers impairs

Calculer $1^2 + 3^2 + \dots + 19^2$.

Démarche et réponse. Écrire $\sum_{r=1}^{10} (2r-1)^2 = 4 \sum r^2 - 4 \sum r + 10$. Comme $\sum r^2 = 385$ et $\sum r = 55$, on obtient $1540 - 220 + 10 = \boxed{1330}$.

C44 | Une somme de sommes

Calculer $1 + (1+2) + \dots + (1+2+\dots+20)$.

Démarche et réponse. Le k -ième bloc vaut $k(k+1)/2$. La somme devient $(\sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k)/2 = (2870 + 210)/2 = \boxed{1540}$.

C45 | Un quotient de sommes remarquables

Reconstitué

Calculer $\sum_{r=1}^{10} (2r+1) \frac{\sum_{k=1}^r k^3}{\sum_{k=1}^r k^2}$.

Démarche et réponse. Utiliser $\sum k^3 = r^2(r+1)^2/4$ et $\sum k^2 = r(r+1)(2r+1)/6$. Le terme se simplifie en $3r(r+1)/2$. La somme vaut $\frac{3}{2}(385 + 55) = \boxed{660}$.

C46 | Séparer une double somme

Calculer $\sum_{m=1}^{10} \sum_{n=1}^{10} mn$.

Démarche et réponse. Les indices varient indépendamment ; la somme se factorise en $(\sum_{m=1}^{10} m)(\sum_{n=1}^{10} n) = 55^2 = \boxed{3025}$.

C47 | Une formule pour tous les rangs

Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i k$.

Démarche et réponse. La somme intérieure vaut $i(i+1)/2$. En utilisant les sommes des entiers et de leurs carrés, on obtient

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}.$$

C48 | Compter des triplets ordonnés par leurs indices

Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j 1$.

Démarche et réponse. La somme intérieure vaut j . On retrouve exactement C47 : $\boxed{n(n+1)(n+2)/6}$. Autre lecture : on compte les triplets $1 \leq k \leq j \leq i \leq n$.

C49 | Créer une suite auxiliaire

$a_0 = a_1 = 0$ et $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 1$. Calculer $a_{25}a_{23} - 2a_{25}a_{22} - 2a_{23}a_{24} + 4a_{22}a_{24}$.

Démarche et réponse. Factoriser en $(a_{25} - 2a_{24})(a_{23} - 2a_{22})$. Posons $b_n = a_{n+1} - 2a_n$. La récurrence donne $b_{n+1} = b_n + 1$, et $b_0 = 0$, donc $b_n = n$. Les deux facteurs sont $b_{24} = 24$ et $b_{22} = 22$. Le résultat est $\boxed{528}$. On peut vérifier avec $a_n = 2^n - n - 1$.

À retenir. Le rang de $a_{n+1} - 2a_n$ est n , pas $n-1$.

C50 | Une décomposition télescopique

Calculer $\sum_{k=1}^n 1/[(4k-1)(4k+3)]$.

Démarche et réponse. On a $1/[(4k-1)(4k+3)] = \frac{1}{4}(1/(4k-1) - 1/(4k+3))$. Tous les termes intérieurs s'annulent. Il reste $\frac{1}{4}(1/3 - 1/(4n+3)) = \boxed{n/[3(4n+3)]}$.

C51 | Trois facteurs consécutifs

Partie exploitable

Calculer $\sum_{r=2}^{100} \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$.

Démarche et réponse. Utiliser $1/[r(r+1)(r+2)] = \frac{1}{2}(1/[r(r+1)] - 1/[(r+1)(r+2)])$. La somme vaut $\frac{1}{2}(1/6 - 1/(101 \times 102)) = \boxed{143/1717}$.

À retenir. La présentation finale demandée dans le fichier est incomplète ; la somme elle-même est résolue.

C52 | Une factorisation de degré quatre

Calculer $\sum_{r=1}^{10} \frac{r}{r^4 + r^2 + 1}$.

Démarche et réponse. Le dénominateur vaut $(r^2 - r + 1)(r^2 + r + 1)$. Le terme devient $\frac{1}{2}[1/(r^2 - r + 1) - 1/(r^2 + r + 1)]$. Or $r^2 + r + 1 = (r+1)^2 - (r+1) + 1$. Il reste $\frac{1}{2}(1 - 1/111) = \boxed{55/111}$.

C53 | Une somme de factorielles pondérées

Calculer $\sum_{r=1}^n r r!$.

Démarche et réponse. L'identité $r r! = (r+1)! - r!$ transforme la somme en une chaîne télescopique. Le résultat est $\boxed{(n+1)! - 1}$.

C54 | Un télescope moins visible

Calculer $\sum_{r=1}^{20} (r^2 + 1)r!$.

Démarche et réponse. Observer $(r^2 + 1)r! = r(r+1)! - (r-1)r!$. La somme se télescope donc en $\boxed{20 \times 21!}$. On peut aussi écrire ce résultat $22! - 2 \times 21!$.

D Binôme et arithmétique

Coefficients, puissances et congruences

LA BOÎTE À OUTILS

Terme général : $(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$. Le terme d'indice r est le $(r + 1)$ -ième terme.

Extraire un coefficient : résoudre d'abord l'équation portant sur l'exposant, puis calculer le coefficient.

Parité : si $P(x) = \sum a_k x^k$, la somme des coefficients pairs vaut $[P(1) + P(-1)]/2$; celle des impairs vaut $[P(1) - P(-1)]/2$.

Congruences : pour les derniers chiffres, travailler modulo 10 ou 100. Chercher une petite puissance congrue à 1 ou à -1 .

D01 | Symétrie des coefficients binomiaux

Pour $n \geq 4$, $\binom{2n}{5} = \binom{2n}{7}$. Trouver $\binom{10}{n}$.

Démarche et réponse. Dans une ligne du triangle de Pascal, deux coefficients de rangs différents sont égaux aux rangs symétriques. Donc $5 + 7 = 2n$, soit $n = 6$. Ainsi $\boxed{\binom{10}{6} = 210}$.

D02 | Simplifier un rapport de combinaisons

Pour $n \geq 3$, $\binom{2n}{3} / \binom{n}{3} = 10$. Calculer $(n^2 + 3n) / (n^2 - 3n + 4)$.

Démarche et réponse. En simplifiant les factorielles, on obtient $4(2n - 1) / (n - 2) = 10$. Donc $8n - 4 = 10n - 20$ et $n = 8$. L'expression vaut $88/44 = \boxed{2}$.

D03 | Le facteur qui disparaît

Reconstitué

Pour $n \geq 5$, résoudre $\binom{n}{5} / (n - 4) = 99$.

Démarche et réponse. Après simplification, $n(n - 1)(n - 2)(n - 3) = 11880$. Le membre gauche est strictement croissant pour les entiers $n \geq 5$. Or $12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$, donc $\boxed{n = 12}$.

D04 | Deux termes égaux, y compris zéro

Les vingt-et-unième et vingt-deuxième termes du développement de $(1 - x)^{44}$ sont égaux. Trouver x .

Démarche et réponse. Les termes sont $\binom{44}{20} x^{20}$ et $-\binom{44}{21} x^{21}$. Pour $x = 0$, ils sont tous deux nuls : c'est une solution. Pour $x \neq 0$, on divise et on trouve $x = -\binom{44}{20} / \binom{44}{21} = -21/24 = -7/8$. Donc $\boxed{x = 0 \text{ ou } -7/8}$.

À retenir. Si l'énoncé exige des termes non nuls, seule la seconde valeur convient.

D05 | Un logarithme au carré

Le troisième terme du développement de $(1 + x^{\log_2 x})^5$ vaut 2560, avec $x > 0$. Trouver x .

Démarche et réponse. Ce terme est $10x^{2\log_2 x}$. En posant $t = \log_2 x$, l'égalité devient $2^{2t^2} = 256 = 2^8$, donc $t^2 = 4$. Ainsi $x = 4$ ou $1/4$.

D06 | Viser un exposant précis

Trouver le coefficient de x^7 dans $(x^2 + 2/x)^{11}$.

Démarche et réponse. Le terme d'indice r est $\binom{11}{r} 2^r x^{22-3r}$. L'exposant 7 impose $22 - 3r = 7$, donc $r = 5$. Le coefficient vaut $\boxed{\binom{11}{5} 2^5 = 14784}$.

D07 | Le terme indépendant de la variable

Pour $x > 0$, le terme constant de $(\sqrt{x} + k/x^2)^{10}$ vaut 405. Trouver k .

Démarche et réponse. Le terme général contient $x^{5-5r/2}$. Le terme constant correspond à $r = 2$, donc à $\binom{10}{2} k^2 = 45k^2$. On a $k^2 = 9$ et $\boxed{k = \pm 3}$.

D08 | Reconnaître le binôme caché

Trouver le coefficient de x^{53} dans $\sum_{m=0}^{100} \binom{100}{m} (x-3)^{100-m} 2^m$.

Démarche et réponse. La somme est $(x-3+2)^{100} = (x-1)^{100}$. Le coefficient recherché est $\binom{100}{53} (-1)^{47} = \boxed{-\binom{100}{53}}$.

D09 | Quels termes sont entiers ?

Combien de termes du développement de $(\sqrt{5} + \sqrt[4]{11})^{124}$ sont entiers ?

Démarche et réponse. Le terme d'indice r est $\binom{124}{r} 5^{(124-r)/2} 11^{r/4}$. Par unicité de la factorisation en nombres premiers, les deux exposants doivent être entiers. Il faut et suffit que r soit multiple de 4. Les indices $0, 4, \dots, 124$ sont au nombre de $\boxed{32}$.

D10 | Compter depuis la fin

Trouver le quatrième terme à partir de la fin de $(x/2 - 2/x^2)^9$, pour $x \neq 0$.

Démarche et réponse. Le développement possède dix termes. Le quatrième depuis la fin est le septième depuis le début, donc correspond à $r = 6$. Il vaut $\binom{9}{6} (x/2)^3 (-2/x^2)^6 = \boxed{672/x^9}$.

D11 | Un ou deux termes centraux

Donner le terme central de $(x+y)^6$, puis les deux termes centraux de $(x+y)^{13}$.

Démarche et réponse. Le premier développement a sept termes, donc le terme central est le quatrième : $\boxed{20x^3y^3}$. Le second en a quatorze : les septième et huitième termes sont $\boxed{1716x^7y^6}$ et $\boxed{1716x^6y^7}$.

D12 | Un terme central trigonométrique

Le terme central de $(1/x + x \sin x)^{10}$ vaut $63/8$, avec $x \neq 0$. Trouver les x réels.

Démarche et réponse. Le terme central est $\binom{10}{5}(1/x)^5(x \sin x)^5 = 252 \sin^5 x$. L'égalité donne $\sin^5 x = 1/32$, donc $\sin x = 1/2$. Ainsi $x = k\pi + (-1)^k \pi/6$, $k \in \mathbb{Z}$.

D13 | Le coefficient linéaire

Le coefficient de x dans $(1+x)^m(1-x)^n$ vaut 3, où m, n sont entiers positifs ou nuls. Quelle relation les lie ?

Démarche et réponse. Pour obtenir un terme de degré 1, on prend mx dans le premier facteur et 1 dans le second, ou 1 puis $-nx$. Le coefficient est $m - n$, donc $m - n = 3$.

D14 | Factoriser avant d'extraire

Reconstitué

Trouver le coefficient de x^{18} dans $(1+x)(1-x)^{10}(1+x+x^2)^9$.

Démarche et réponse. Comme $(1-x)(1+x+x^2) = 1-x^3$, le produit devient $(1-x^2)(1-x^3)^9$. La contribution de $-x^2$ exigerait un exposant 16, non multiple de 3. Il reste le terme d'indice 6 de $(1-x^3)^9$, de coefficient $\binom{9}{6} = 84$.

D15 | Une équation diophantienne d'exposants

Trouver le coefficient de x^{11} dans $(1+x^2)^4(1+x^3)^7(1+x^4)^{12}$.

Démarche et réponse. On cherche $2a + 3b + 4c = 11$, avec $0 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 7, 0 \leq c \leq 12$. Les possibilités sont $(4, 1, 0), (1, 3, 0), (2, 1, 1), (0, 1, 2)$. Les contributions valent 7, 140, 504, 462. Leur somme est 1113.

À retenir. Compter les solutions en exposants, puis pondérer chacune par les trois coefficients binomiaux.

D16 | Le nombre de puissances distinctes

Combien de monômes non nuls contient le développement réduit de $(1+x+1/x)^n$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$?

Démarche et réponse. Les exposants vont de $-n$ à n . Chacun est atteint : pour un exposant $j \geq 0$, prendre j facteurs x et les autres égaux à 1 ; procéder de même avec x^{-1} si $j < 0$. Tous les coefficients sont positifs, donc aucune annulation. Il y a $2n+1$ monômes.

D17 | Deux familles d'exposants disjointes

Exposant ambigu

Pour un entier $n \geq 0$, compter les monômes de $(1-x)^{n+1}(1+x+x^2)^n$ après réduction.

Démarche et réponse. Le produit vaut $(1-x)(1-x^3)^n$. La multiplication par 1 donne les $n+1$ exposants $3k$; celle par $-x$ donne les $n+1$ exposants $3k+1$. Les deux familles ne se rencontrent pas. Le total vaut $2n+2$. Il serait 402 pour $n = 200$ et 4002 pour $n = 2000$.

À retenir. Le nombre dicté oscille entre 200 et 2000 ; la formule générale conserve la question sans imposer un chiffre incertain.

D18 | Somme des coefficients impairs, sauf le dernier

Posons $(1 + x + 2x^2)^{20} = \sum_{k=0}^{40} a_k x^k$. Calculer $a_1 + a_3 + \dots + a_{37}$.

Démarche et réponse. La somme de tous les coefficients impairs vaut $[P(1) - P(-1)]/2 = (4^{20} - 2^{20})/2$. Il faut retrancher a_{39} : prendre dix-neuf facteurs $2x^2$ et un facteur x donne $a_{39} = 20 \cdot 2^{19}$. Le résultat est $\boxed{2^{19}(2^{20} - 21)}$.

D19 | Une divisibilité modulo 64

Montrer que 64 divise $9^7 + 7^9$.

Démarche et réponse. Modulo 64, $(8 + 1)^7 \equiv 1 + 7 \times 8 = 57$ car les termes suivants contiennent 8^2 . De même $(8 - 1)^9 \equiv -1 + 9 \times 8 = 71 \equiv 7$. La somme est congrue à $57 + 7 = 64 \equiv 0$.

D20 | Une puissance impaire

Montrer que 14 divise $13^{2n+1} + 1$ pour tout entier $n \geq 0$.

Démarche et réponse. On a $13 \equiv -1 \pmod{14}$. Une puissance impaire conserve le signe : $13^{2n+1} + 1 \equiv -1 + 1 = 0 \pmod{14}$.

D21 | Réduire l'exposant grâce à un cycle

Quel est le reste de 3^{63} dans la division par 26 ?

Démarche et réponse. $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{26}$. Ainsi $3^{63} = (3^3)^{21} \equiv \boxed{1} \pmod{26}$.

D22 | Utiliser une puissance égale à moins un

Trouver le reste de 2^{2021} modulo 17.

Démarche et réponse. $2^4 = 16 \equiv -1$, donc $2^8 \equiv 1 \pmod{17}$. Comme $2021 = 8 \times 252 + 5$, on a $2^{2021} \equiv 2^5 = 32 \equiv \boxed{15}$.

D23 | Le dernier chiffre d'une différence

Trouver le reste de $53^{53} - 33^3$ modulo 10.

Démarche et réponse. Les bases sont toutes deux congrues à 3. Le cycle de 3^n modulo 10 est 3, 9, 7, 1, de période 4. Comme $53 \equiv 1 \pmod{4}$, la différence est congrue à $3 - 7 = -4 \equiv \boxed{6}$.

D24 | Le dernier chiffre d'une grande puissance

Trouver le dernier chiffre de 32^{32} .

Démarche et réponse. Il suffit de considérer 2^{32} modulo 10. Le cycle 2, 4, 8, 6 a période 4 ; 32 est multiple de 4. Le dernier chiffre est $\boxed{6}$.

D25 | Les deux derniers chiffres

Trouver les deux derniers chiffres de 27^{27} , puis leur somme.

Démarche et réponse. $27^{27} = 3^{81}$. Or $3^{10} \equiv 49 \pmod{100}$ et $3^{20} \equiv 49^2 = 2401 \equiv 1$. Donc $3^{81} \equiv 3 \pmod{100}$. Les deux derniers chiffres sont $\boxed{03}$; leur somme vaut $\boxed{3}$.

D26 | Le plus grand terme numérique

À $x = 3/2$, quel est le plus grand terme du développement de $(2 + 3x)^9$?

Démarche et réponse. Noter $T_r = \binom{9}{r} 2^{9-r} (3/2)^r$, pour $0 \leq r \leq 9$. Le rapport $T_{r+1}/T_r = 9(9-r)/[4(r+1)]$ est supérieur à 1 jusqu'à $r = 5$, puis inférieur à 1 dès $r = 6$. Le maximum est donc le septième terme : $T_6 = \binom{9}{6} 2^3 (3/2)^6$.

D27 | Quand le terme central est-il maximal ?

Pour $n > 1$ pair et $x > 0$, quand le terme central de $(1 + x)^n$ est-il un plus grand terme numérique ?

Démarche et réponse. Posons $n = 2m$. Comparer le terme central à ses voisins suffit, car les rapports consécutifs décroissent. On demande $T_m/T_{m-1} = ((m+1)/m)x \geq 1$ et $T_{m+1}/T_m = (m/(m+1))x \leq 1$. Donc $n/(n+2) \leq x \leq (n+2)/n$. Aux bornes, le maximum est partagé ; il est unique à l'intérieur.

D28 | La partie fractionnaire et le conjugué

Pour $n \geq 1$, écrire $(5 + 2\sqrt{6})^n = I + f$, avec I entier et $0 < f < 1$. Montrer que $(I + f)(1 - f) = 1$.

Démarche et réponse. Les nombres $u = 5 + 2\sqrt{6}$ et $v = 5 - 2\sqrt{6}$ vérifient $uv = 1$ et $0 < v < 1$. Le nombre $u^n + v^n$ est entier, car les termes irrationnels s'annulent dans les développements conjugués. Comme $0 < f + v^n < 2$, cet entier vaut 1 : $f + v^n = 1$. D'où $(I + f)(1 - f) = u^n v^n = 1$.

D29 | Une diagonale du triangle de Pascal

Calculer $\sum_{k=0}^{25} \binom{25+k}{k}$.

Démarche et réponse. Par symétrie, $\binom{25+k}{k} = \binom{25+k}{25}$. L'identité de la crosse de hockey, issue de Pascal, donne $\sum_{j=25}^{50} \binom{j}{25} = \binom{51}{26} = \binom{51}{25}$.

D30 | Extraire les indices pairs

Calculer $\sum_{k=0}^{11} \binom{23}{2k}$.

Démarche et réponse. Additionner les développements de $(1 + 1)^{23}$ et $(1 - 1)^{23}$. Les termes impairs s'annulent, les pairs doublent. La somme vaut 2^{22} .

D31 | Une somme alternée tronquée

Calculer $\sum_{r=0}^{10} (-1)^r \binom{20}{r}$.

Démarche et réponse. L'identité $\sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{n}{r} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$ se déduit de Pascal par télescopage. Ainsi la somme vaut $\binom{19}{10} = \frac{1}{2} \binom{20}{10} = 92378$.

D32 | Transformer un quotient de combinaisons

Calculer $\sum_{r=0}^7 \frac{\binom{7}{r}}{\binom{r+2}{2}}.$

Démarche et réponse. En écrivant les factorielles, $\binom{7}{r}/\binom{r+2}{2} = \binom{9}{r+2}/36$. La somme vaut donc $(2^9 - \binom{9}{0} - \binom{9}{1})/36 = 502/36 = \boxed{251/18}$.

À retenir. Conserver les facteurs 2 et 9×8 lors de la simplification.

D33 | Ce que deux évaluations permettent de connaître

Partie exploitable

Un polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{12} a_k x^k$ vérifie $P(1) = 0$ et $P(-1) = 64$. Calculer la somme de ses coefficients de degré pair.

Démarche et réponse. On a $P(1) + P(-1) = 2(a_0 + a_2 + \dots + a_{12})$. La somme recherchée vaut donc $\boxed{32}$.

À retenir. Le polynôme initial n'est pas entièrement dicté ; ses deux évaluations suffisent pour cette partie de la question.

E Matrices et déterminants

Calcul structuré et algèbre linéaire

LA BOÎTE À OUTILS

Dimensions : une matrice $m \times p$ multipliée par une matrice $p \times n$ donne une matrice $m \times n$.

Ordre des facteurs : $(AB)^T = B^T A^T$ et $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ si les inverses existent.

Déterminants : $\det(AB) = \det A \det B$; pour l'ordre n , $\det(tA) = t^n \det A$. Ajouter à une ligne un multiple d'une autre préserve le déterminant.

Puissances : chercher $A = I + N$ avec $N^k = 0$, ou une relation polynomiale de petit degré. En dimension deux : $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I = 0$.

E01 | Égalité matricielle : les conditions simultanées

Partie exploitable

Une égalité de matrices impose $2x + 1 = x + 3$, $(y - 1)(y - 2) = 0$ et $(y - 2)(y - 3) = 0$. Trouver x, y .

Démarche et réponse. La première équation donne $x = 2$. Les deux autres imposent à la fois $y \in \{1, 2\}$ et $y \in \{2, 3\}$. Leur intersection est $\{2\}$, donc $\boxed{x = y = 2}$.

À retenir. Les matrices ne sont pas dictées en entier ; les égalités entre leurs coefficients le sont.

E02 | Reconnaître une somme de carrés nulle

Partie exploitable

Pour $p, q, r \in \mathbb{R}$, on a $(2p)^2 + (4q)^2 + r^2 = (2p)(4q) + (4q)r + (2p)r$. Quelle relation en déduire ?

Démarche et réponse. Multiplier par 2 puis regrouper : $(2p - 4q)^2 + (4q - r)^2 + (r - 2p)^2 = 0$. Chaque carré étant positif ou nul, ils sont tous nuls. Ainsi $\boxed{2p = 4q = r}$.

E03 | Un produit rectangulaire

Reconstitué

Calculer AB pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démarche et réponse. Chaque coefficient est le produit scalaire d'une ligne de A avec une colonne de B . Par exemple $(AB)_{14} = 2 \times 2 + 3 \times 2 + 4 \times 3 = 22$. On obtient

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 & 22 \\ 5 & 5 & 0 & 15 \end{pmatrix}}.$$

À retenir. Les dimensions 2×3 et 3×4 donnent un produit 2×4 .

E04 | Associer sans permuter

Deux matrices carrées de même ordre vérifient $AB = A$ et $BA = B$. Montrer que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

Démarche et réponse. Par associativité, $A^2 = (AB)A = A(BA) = AB = A$. De même, $B^2 = (BA)B = B(AB) = BA = B$. Aucune commutation de A et B n'est nécessaire.

À retenir. En général $AB \neq BA$; seules les parenthèses peuvent être déplacées librement.

E05 | Une matrice idempotente

Si $A^2 = A$, calculer $(I + A)^3$.

Démarche et réponse. I commute avec A , donc le binôme s'applique : $(I+A)^3 = I+3A+3A^2+A^3$. Or toutes les puissances positives de A valent A . Ainsi $(I+A)^3 = I+7A$. Plus généralement, $(I+tA)^n = I + [(1+t)^n - 1]A$.

E06 | Une puissance 2022 sans calcul lourd

Calculer M^{2022} pour $M = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Démarche et réponse. Écrire $M = I + \frac{3}{2}N$, avec $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie $N^2 = 0$. Le binôme s'arrête donc au terme linéaire : $M^{2022} = I + 3033N$.

$$M^{2022} = \begin{pmatrix} 3034 & 3033 \\ -3033 & -3032 \end{pmatrix}.$$

À retenir. $N^2 = 0$ n'implique pas $N = 0$: une matrice non nulle peut être nilpotente.

E07 | Une récurrence de type Fibonacci

Si $P^2 = I - P$, exprimer P^6 sous la forme $aI + bP$.

Démarche et réponse. Multiplier successivement en remplaçant toujours P^2 : $P^3 = 2P - I$, $P^4 = 2I - 3P$, $P^5 = 5P - 3I$, puis $P^6 = 5I - 8P$. Les coefficients suivent une récurrence de Fibonacci avec alternance de signes.

E08 | Une nilpotence d'ordre trois

Reconstitué

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = P^{50} - I = (q_{ij})$. Calculer $(q_{31} + q_{32})/q_{21}$.

Démarche et réponse. Poser $N = P - I$. Seul le coefficient $(3, 1)$ de N^2 est non nul et vaut 16 ; $N^3 = 0$. Ainsi $Q = 50N + \binom{50}{2}N^2$. On a $q_{21} = q_{32} = 200$ et $q_{31} = 800 + 19600 = 20400$. Le quotient vaut $\boxed{103}$.

E09 | Décomposer une matrice

Propriété expliquée

Montrer que toute matrice réelle carrée est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Pourquoi une matrice antisymétrique d'ordre impair a-t-elle un déterminant nul ?

Démarche et réponse. Écrire $A = (A + A^T)/2 + (A - A^T)/2$. Les transposées montrent les deux propriétés. Si $K^T = -K$ et si l'ordre n est impair, alors $\det K = \det K^T = \det(-K) = (-1)^n \det K = -\det K$. Donc $\det K = 0$.

E10 | Transposer dans le bon ordre

X, Y sont antisymétriques et Z symétrique. Classer $YZ^4 - Z^4Y, X^4, X^4Z - ZX^4$ et $X^{23} + Y^{23}$.

Démarche et réponse. Utiliser $(AB)^T = B^T A^T$. Ainsi $(YZ^4 - Z^4Y)^T = -Z^4Y + YZ^4$: cette matrice est symétrique. X^4 est symétrique. Le commutateur $X^4Z - ZX^4$ est antisymétrique. Enfin les puissances impaires de X, Y sont antisymétriques, donc leur somme aussi.

E11 | Compter les matrices symétriques

Combien de matrices symétriques 3×3 peut-on former avec des coefficients pris dans un ensemble de dix nombres ?

Démarche et réponse. On choisit librement les trois coefficients diagonaux et les trois coefficients strictement au-dessus de la diagonale. Les autres sont imposés par symétrie. Le nombre vaut 10^6 .

E12 | Des lignes orthonormées

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2q & r \\ p & q & -r \\ p & -q & r \end{pmatrix}$, avec p, q, r réels. Si $AA^T = I$, trouver $|p|$.

Démarche et réponse. Le produit scalaire des deux premières lignes donne $2q^2 - r^2 = 0$. La norme de la première donne $4q^2 + r^2 = 1$, donc $q^2 = 1/6, r^2 = 1/3$. La norme de la deuxième impose $p^2 + q^2 + r^2 = 1$, d'où $p^2 = 1/2$. Ainsi $|p| = 1/\sqrt{2}$.

E13 | Matrices de rotation

Propriété expliquée

Pour $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, montrer $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$ et $R_\theta R_\theta^T = I$.

Démarche et réponse. Le produit utilise les formules d'addition du sinus et du cosinus. De plus $R_\theta^T = R_{-\theta}$. Le premier résultat donne alors $R_\theta R_{-\theta} = R_0 = I$.

E14 | Un déterminant de module un

Les trois lignes d'une matrice réelle 3×3 sont des vecteurs de norme 1 et deux à deux orthogonaux. Que vaut le carré de son déterminant ?

Démarche et réponse. Le produit AA^T contient les produits scalaires des lignes : c'est donc I . Prendre les déterminants donne $(\det A)^2 = 1$. Ainsi $|\det A| = 1$; le signe ne peut pas être décidé avec ces seules données.

E15 | Une conjugaison qui se simplifie

Partie exploitable

Soit P une matrice orthogonale 2×2 , $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = PAP^T$. Calculer $P^T Q^{2007} P$.

Démarche et réponse. Les facteurs centraux $P^T P = I$ se simplifient, donc $Q^n = P A^n P^T$. L'expression vaut A^{2007} . Avec $A = I + N$, $N^2 = 0$, elle vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 2007 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

À retenir. Une combinaison numérique supplémentaire des coefficients est mentionnée sans être dictée ; elle n'est pas inventée ici.

E16 | La matrice adjointe en dimension deux

Propriété expliquée

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, déterminer l'adjointe classique $\text{adj}(A)$, puis l'inverse lorsqu'il existe.

Démarche et réponse. La matrice des cofacteurs doit être transposée : $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On vérifie $A \text{adj}(A) = (ad - bc)I$. Si $ad - bc \neq 0$, alors $A^{-1} = \text{adj}(A)/(ad - bc)$.

À retenir. L'adjointe classique désigne ici la transposée des cofacteurs, pas la transposée conjuguée.

E17 | Cofacteurs en dimension trois

Reconstitué

Calculer l'adjointe classique de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Démarche et réponse. Calculer les mineurs avec le signe $(-1)^{i+j}$, puis transposer. Par exemple, $C_{11} = 6 - 5 = 1$, $C_{12} = -4$ et $C_{13} = 8$. On obtient

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 26 & -10 \\ -4 & 19 & -1 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le contrôle $A \text{adj}(A) = 41I$ confirme le calcul.

E18 | Déterminants d'adjointes

Une matrice A d'ordre 3 vérifie $\det A = 2$. Calculer les déterminants de $\text{adj } A$, $\text{adj}(\text{adj } A)$, $\text{adj}(A^T)$ et $\text{adj}(5A)$.

Démarche et réponse. Pour une matrice d'ordre n , $\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1}$. Les quatre résultats sont donc $4, 16, 4, 62500$. Pour le dernier : $\det(5A) = 5^3 \times 2 = 250$, puis $250^2 = 62500$.

E19 | Des déterminants emboîtés

Reconstitué

Si A est d'ordre 3 et $\det A = 2$, calculer $\det(3 \operatorname{adj}((\det(3A))A^2))$.

Démarche et réponse. On a $\det(3A) = 54$. Posons $B = 54A^2$; alors $\det B = 54^3 \times 4$. L'adjointe élève ce déterminant au carré, et le facteur extérieur 3 le multiplie par 3^3 . Le résultat est $3^3 \times 54^6 \times 16 = \boxed{2^{10}3^{21}}$.

À retenir. Un scalaire multipliant une matrice d'ordre 3 apparaît à la puissance 3 dans son déterminant.

E20 | Un signe global avant le binôme

Reconstitué

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer la somme des coefficients de $B = (I - \operatorname{adj} A)^5$.

Démarche et réponse. $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donc $I - \operatorname{adj} A = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La puissance vaut $B = -\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La somme est $\boxed{-7}$.

E21 | Quand une matrice symétrique est-elle inversible ?

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ à coefficients entiers, examiner : a) la première colonne est la transposée de la seconde ligne ; b) M est diagonale avec diagonale non nulle ; c) ac n'est pas un carré parfait.

Démarche et réponse. a) impose $a = b = c$, donc $\det M = 0$. La formulation réciproque ligne/colonne est équivalente. b) donne $\det M = ac \neq 0$. c) garantit $ac \neq b^2$, donc $\det M \neq 0$. Les critères b) et c) suffisent à l'inversibilité.

E22 | Un produit nul de matrices non nulles

A, B sont des matrices carrées non nulles de même ordre et $AB = 0$. Montrer qu'elles sont toutes deux singulières.

Démarche et réponse. Si A était inversible, multiplier à gauche par A^{-1} donnerait $B = 0$, contradiction. Si B était inversible, multiplier à droite par B^{-1} donnerait $A = 0$. Ainsi $\boxed{\det A = \det B = 0}$.

E23 | Fabriquer une matrice orthogonale

Une matrice réelle inversible A vérifie $AA^T = A^T A$. Montrer que $B = A^{-1}A^T$ est orthogonale.

Démarche et réponse. On a $BB^T = A^{-1}A^T A(A^{-1})^T$. Remplacer $A^T A$ par AA^T donne $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I$. Donc B est orthogonale.

E24 | L'inverse par Cayley-Hamilton

Partie exploitable

Une matrice A a pour polynôme caractéristique $t^3 - 6t^2 + 11t - 6$. Exprimer A^{-1} comme un polynôme en A .

Démarche et réponse. Le terme constant est non nul, donc A est inversible. Cayley-Hamilton donne $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = 0$. Multiplier par A^{-1} et isoler l'inverse : $A^{-1} = (A^2 - 6A + 11I)/6$.

À retenir. Les coefficients de la matrice initiale manquent ; le polynôme caractéristique est dicté après correction.

E25 | La trace suffit en dimension deux

Partie exploitable

Une matrice 2×2 vérifie $\text{tr } A = -4$ et $\det A = -1$. Trouver α, β tels que $\alpha A^2 + \beta A = 2I$.

Démarche et réponse. Cayley-Hamilton donne $A^2 - (\text{tr } A)A + (\det A)I = 0$, soit $A^2 + 4A = I$. Multiplier par 2 : $\alpha = 2, \beta = 8$ convient, et $\alpha + \beta = 10$.

E26 | Trace, déterminant et optimisation

Partie exploitable

Une matrice réelle 2×2 a pour trace $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ et pour déterminant $u^2 + u + 2$, où $u = \sin^2 \theta \cos^2 \theta$ et $0 \leq \theta \leq 2$. Dans $M = \alpha(\theta)I + \beta(\theta)M^{-1}$, déterminer les coefficients fournis par Cayley-Hamilton et la somme de leurs minima.

Démarche et réponse. On a $\alpha = 1 - 2u$ et $\beta = -(u^2 + u + 2)$. Sur l'intervalle donné, u atteint toutes les valeurs de $[0, 1/4]$. Ainsi $\min \alpha = 1/2$ et $\min \beta = -(1/16 + 1/4 + 2) = -37/16$. La somme vaut $-29/16$.

À retenir. Minimiser l'opposé d'une expression revient à maximiser cette expression.

E27 | Un coefficient constant se lit en zéro

Partie exploitable

Calculer $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Démarche et réponse. Développer selon la première ligne donne $-12 + 3(4 + 6) = -12 + 30 = 18$. Ce déterminant fournit aussi le terme constant de toute expression obtenue en ajoutant une variable sur la diagonale puis en évaluant en zéro.

E28 | Une équation issue d'un déterminant

Partie exploitable

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre $\frac{n(n+1)}{2} 4^n - n^2(n+1)2^{2n-3} = 0$.

Démarche et réponse. Factoriser le facteur strictement positif $n(n+1)4^n/8$. Il reste $4 - n = 0$, donc $n = 4$. Les sommes utilisées pour parvenir à cette équation sont $\sum r \binom{n}{r} = n2^{n-1}$ et $\sum r^2 \binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}$.

À retenir. Le déterminant d'origine n'est pas entièrement dicté.

E29 | Quatre termes en progression

Partie exploitable

a, b, c, d sont quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison λ , et $bc - ad = 2$. Trouver λ .

Démarche et réponse. Écrire $b = a + \lambda, c = a + 2\lambda, d = a + 3\lambda$. Alors $bc - ad = 2\lambda^2$, donc $\lambda^2 = 1$. Ainsi $\lambda = \pm 1$. Si la progression est croissante, seule $\lambda = 1$ reste.

À retenir. Le déterminant initial manque ; la relation réduite est conservée, sans supposer une raison positive.

E30 | Une équation trigonométrique après réduction

Partie exploitable

Résoudre $\sin(2x) = -1/2$ pour $0 < x < \pi$.

Démarche et réponse. Comme $0 < 2x < 2\pi$, les possibilités sont $2x = 7\pi/6$ et $11\pi/6$. Donc $x = 7\pi/12$ ou $11\pi/12$.

À retenir. Le déterminant trigonométrique dont provient cette équation n'est pas dicté en entier.

E31 | Un déterminant de factorielles

Reconstitué

Pour un entier $p \geq 0$, calculer $D = \det \begin{pmatrix} p! & (p+1)! & (p+2)! \\ (p+1)! & (p+2)! & (p+3)! \\ (p+2)! & (p+3)! & (p+4)! \end{pmatrix}$.

Démarche et réponse. Extraire $p!, (p+1)!, (p+2)!$ des colonnes. Les lignes restantes sont 1, t et $t(t+1)$ aux valeurs $t = p+1, p+2, p+3$. Retrancher la deuxième ligne à la troisième donne un déterminant de Vandermonde : $(1)(2)(1) = 2$. Ainsi $D = 2p!(p+1)!(p+2)!$.

À retenir. La question supplémentaire sur des puissances divisant ce nombre manque de conditions explicites.

E32 | Élimination de Gauss

Reconstitué

Résoudre $x + y + z = 2, 2x + y - z = 3, 3x + 2y + 4z = 4$.

Démarche et réponse. Effectuer $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$: on obtient $-y - 3z = -1$ et $-y + z = -2$. Leur différence donne $4z = -1$, puis $y = 7/4$ et $x = 1/2$. La solution unique est $(1/2, 7/4, -1/4)$.

E33 | Déceler une incompatibilité sans résoudre

Partie exploitable

Dans trois équations linéaires, le troisième membre de gauche est la somme des deux premiers. Les seconds membres sont 2, 5 et 11. Le système peut-il avoir une solution ?

Démarche et réponse. Les deux premières équations imposent que le troisième membre de gauche vaille $2 + 5 = 7$, alors que la troisième impose 11. Le système est incompatible. Remplacer 11 par 7 rendrait la troisième équation redondante ; le nombre de solutions dépendrait encore du rang des autres équations et du nombre d'inconnues.

À retenir. Une dépendance des lignes ne suffit pas, seule, à garantir une infinité de solutions.

E34 | Identifier une combinaison linéaire**Partie exploitable**

Des conditions de compatibilité se réduisent à $7u + 5v = 175$, $11u + 4v = 194$, $u\alpha + 7v = 57$ et $13u + v\beta = 361$. Trouver $\alpha + \beta + 2$.

Démarche et réponse. Les deux premières équations donnent $u = 10$, $v = 21$. Ensuite $10\alpha + 147 = 57$, donc $\alpha = -9$, et $130 + 21\beta = 361$, donc $\beta = 11$. Le résultat est $\boxed{4}$.

À retenir. Le système initial à paramètres n'est pas dicté en entier ; les relations récupérées sont résolues.

Synthèse : choisir le bon outil**Résoudre un système carré $AX = b$**

Si $\det A \neq 0$, il existe une unique solution.

Si $\det A = 0$, il faut examiner les équations après élimination : une ligne $0 = c$ avec $c \neq 0$ signifie qu'il n'y a aucune solution. En l'absence de contradiction, il reste au moins une variable libre et donc une infinité de solutions réelles.

Pour le système homogène $AX = 0$, la solution nulle existe toujours. Elle est unique si $\det A \neq 0$; sinon il existe une infinité de solutions.

Calculer une puissance

$A^2 = A$: toutes les puissances positives se réduisent à A .

$A = I + N$, avec $N^2 = 0$: $A^m = I + mN$.

$A = I + N$, avec $N^3 = 0$: $A^m = I + mN + \binom{m}{2}N^2$ pour $m \geq 2$.

Une relation de Cayley-Hamilton réduit les grandes puissances en une combinaison de petites puissances. Les coefficients peuvent ensuite se calculer par récurrence.

Trois contrôles avant de conclure

1. Les dimensions du résultat sont-elles correctes ?
2. Une inversion ou une simplification exige-t-elle un déterminant non nul ?
3. Une permutation des facteurs a-t-elle été justifiée ? L'associativité ne donne pas la commutativité.

F Statistiques

Moyenne, variance et transformations

LA BOÎTE À OUTILS

Pour N observations équipondérées : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i$ et $V = \frac{1}{N} \sum x_i^2 - \bar{x}^2$. L'écart-type est $\sqrt{V}$.

Changer d'origine : $\frac{1}{N} \sum (x_i - c)^2 = V + (\bar{x} - c)^2$.

Transformation affine : si $y_i = ax_i + b$, alors $\bar{y} = a\bar{x} + b$, $V_y = a^2 V_x$ et $\sigma_y = |a| \sigma_x$.

Progression arithmétique : la variance de N termes de raison d vaut $d^2(N^2 - 1)/12$. Les formules de ce chapitre utilisent la variance descriptive, avec division par N .

F01 | Médiane d'une série regroupée

Reconstitué

Les classes $[0, 4)$, $[4, 8)$, $[8, 12)$, $[12, 16)$, $[16, 20]$ ont pour effectifs 3, 9, 10, 8, 6. Estimer la médiane m par interpolation linéaire et calculer $20m$.

Démarche et réponse. Les effectifs cumulés sont 3, 12, 22, 30, 36. La classe médiane est $[8, 12)$, car $N/2 = 18$. L'interpolation donne $m = 8 + [(18 - 12)/10] \times 4 = 10,4$, donc $20m = 208$.

À retenir. Pour des données regroupées, cette valeur est une estimation fondée sur une répartition uniforme dans la classe.

F02 | Retrouver deux observations

Les six observations $a, b, 68, 48, 44, 60$ ont une moyenne de 55 et une variance de 194. Trouver a, b .

Démarche et réponse. La somme donne $a + b = 110$. Les écarts connus à 55 sont 13, -7 , -11 , 5, dont les carrés totalisent 364. Ainsi $(a - 55)^2 + (b - 55)^2 = 6 \times 194 - 364 = 800$. Comme ces deux écarts sont opposés, chacun a un carré égal à 400. D'où $\{a, b\} = \{35, 75\}$.

À retenir. Le nombre 60 est bien celui dicté. Son écart à 55 vaut 5, et non 15 : cette erreur modifie le résultat.

F03 | Translation et variance

Partie exploitable

Dix observations vérifient $\sum (x_i - 2) = 30$, une variance de $4/5$, et $\sum (x_i - \beta)^2 = 98$, avec $\beta > 2$. Trouver β et la moyenne des x_i .

Démarche et réponse. La première relation donne $\sum x_i = 50$, donc $\bar{x} = 5$. La décomposition des carrés donne $98/10 = 4/5 + (5 - \beta)^2$. Ainsi $(5 - \beta)^2 = 9$, donc $\beta = 2$ ou 8. La condition impose $\beta = 8$, $\bar{x} = 5$. Pour une transformation $y_i = ax_i + b$, on aurait $\bar{y} = 5a + b$ et $V_y = 4a^2/5$.

À retenir. La transformation finale du fichier est ambiguë ; son traitement figure dans l'annexe.

G Dénombrement

Choisir, ordonner, répartir

LA BOÎTE À OUTILS

Choix simultanés indépendants : multiplier. **Cas disjoints** : additionner.

Choisir sans ordonner : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. **Ordonner** : utiliser une factorielle ou un arrangement.

Contraintes de voisinage : regrouper les personnes qui doivent rester ensemble ; placer d'abord les autres pour utiliser les espaces si elles doivent être séparées.

Répartitions : distinguer objets identiques ou distincts, destinataires nommés ou non, cases vides autorisées ou non. Ces distinctions changent le décompte.

G01 | Vrai, faux ou sans réponse

Un questionnaire comporte trois questions vrai/faux. Combien de réponses possibles si a) toutes sont traitées ; b) on peut laisser des blancs ; c) au moins une est traitée ?

Démarche et réponse. a) Deux choix par question donnent $2^3 = 8$. b) Avec le blanc, il y a trois choix : $3^3 = 27$. c) Retirer l'unique copie entièrement blanche : 26 .

G02 | Un PPCM imposé

Combien de couples ordonnés d'entiers positifs (a, b) vérifient $\text{PPCM}(a, b) = 2^3 5^2$?

Démarche et réponse. Pour la puissance de 2, les exposants $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ doivent vérifier $\max(i, j) = 3$. Il y a $4^2 - 3^2 = 7$ choix. Pour la puissance de 5, il y en a $3^2 - 2^2 = 5$. Les choix sont indépendants, donc 35 couples.

À retenir. Le PPCM utilise le maximum des exposants, et non leur somme.

G03 | Les voyelles aux extrémités

Combien d'anagrammes de JUNGLE ont leurs deux voyelles aux extrémités ?

Démarche et réponse. Placer U et E aux extrémités de $2!$ façons, puis les quatre consonnes au milieu de $4!$ façons. Le total vaut 48 .

G04 | Des voyelles en positions impaires

Combien d'anagrammes de DELHI placent E et I uniquement à des positions impaires ?

Démarche et réponse. Les positions impaires sont 1, 3, 5. Choisir deux de ces trois places, y permuter E et I, puis permuter les trois consonnes restantes. Le total est $\binom{3}{2} 2! 3! = 36$.

G05 | Un mot de quatre lettres contenant G

Former des suites de quatre lettres avec les lettres de DAUGHTER, en imposant la présence de G. Compter a) sans répétition ; b) avec répétition.

Démarche et réponse. a) Choisir les trois autres lettres parmi sept, puis permuter les quatre :

$$\binom{7}{3} 4! = 840. \text{ b) Compter toutes les suites et retrancher celles sans G : } 8^4 - 7^4 = 1695.$$

À retenir. En présence de répétitions, imposer une place à G compterait plusieurs fois certains mots.

G06 | Éviter deux réponses identiques successives

Six questions ont chacune quatre options. Toutes sont traitées et deux questions consécutives ne doivent jamais recevoir la même option. Combien de grilles sont possibles ?

Démarche et réponse. La première réponse a quatre choix. Chacune des cinq suivantes a trois choix, car seule l'option immédiatement précédente est interdite. Le nombre vaut $4 \times 3^5 = 972$.

G07 | Trois chiffres disponibles

Combien d'entiers à quatre chiffres peut-on former avec 1,2,3, en autorisant les répétitions ?

Démarche et réponse. Chacune des quatre positions possède trois choix indépendants. Le résultat est $3^4 = 81$.

G08 | Un intervalle impose le premier chiffre

Combien d'entiers strictement entre 5000 et 10000 peut-on former avec 1,3,5,6,9, sans répétition ?

Démarche et réponse. Il faut quatre chiffres. Le premier est 5,6 ou 9 : trois choix. Les autres positions ont successivement quatre, trois et deux choix. Le total est $3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$.

G09 | Le zéro ne peut pas ouvrir le nombre

Combien d'entiers supérieurs à 10000 peut-on former avec les chiffres 0,2,4,6,8, sans répétition ?

Démarche et réponse. Il faut utiliser les cinq chiffres. Le premier a quatre choix non nuls. Les quatre restants peuvent être permutés librement : $4 \times 4! = 96$.

G10 | La divisibilité par quatre

Combien d'entiers à cinq chiffres, formés avec 1,2,3,4,5 avec répétition, sont divisibles par 4 ?

Démarche et réponse. Les deux derniers chiffres doivent former un multiple de 4. S'ils finissent par 2, les dizaines sont 1,3,5 ; s'ils finissent par 4, les dizaines sont 2,4. Cela donne cinq fins possibles : 12,32,52,24,44. Les trois premiers chiffres sont libres, donc $5^3 \times 5 = 625$.

G11 | Commencer par 3 ou finir par 8

Combien d'entiers à quatre chiffres commencent par 3 ou se terminent par 8, répétitions autorisées ?

Démarche et réponse. Il y en a 10^3 commençant par 3 et 9×10^2 finissant par 8. Ceux qui satisfont les deux conditions, au nombre de 10^2 , ont été comptés deux fois. Le total est $1000 + 900 - 100 = 1800$.

G12 | Ni multiple de 3 ni multiple de 7

Combien d'entiers à quatre chiffres ne sont multiples ni de 3 ni de 7 ?

Démarche et réponse. Entre 1000 et 9999, il y a 9000 entiers, 3000 multiples de 3, $1428 - 142 = 1286$ multiples de 7, et $476 - 47 = 429$ multiples de 21. L'inclusion-exclusion donne $9000 - 3000 - 1286 + 429 = 5143$.

G13 | Une commission avec une contrainte de composition

Parmi six hommes et quatre femmes, former une commission de cinq personnes. Compter les commissions ayant a) au moins deux femmes ; b) au plus deux femmes.

Démarche et réponse. a) Retirer les cas zéro et une femme : $\binom{10}{5} - \binom{6}{5} - 4\binom{6}{4} = 186$. b) Additionner les cas zéro, une et deux femmes : $\binom{6}{5} + 4\binom{6}{4} + \binom{4}{2}\binom{6}{3} = 186$ également.

À retenir. Les deux réponses sont ici égales ; « au moins » et « au plus » ne désignent pourtant pas les mêmes commissions.

G14 | Aucun couple complet dans une commission

Quatre couples souhaitent former une commission de quatre personnes sans y réunir les deux membres d'un même couple. Combien de choix ?

Démarche et réponse. Il faut choisir exactement une personne de chaque couple. Chaque couple fournit deux choix, d'où $2^4 = 16$.

G15 | Un tournoi en double mixte

Interprétation explicitée

m couples participent à un tournoi. Un match réunit deux hommes et deux femmes en deux équipes mixtes ; aucun couple initial ne peut être présent dans le même match, même dans des équipes opposées. Il existe 840 matchs différents. Combien de personnes participent ?

Démarche et réponse. Choisir les deux hommes : $\binom{m}{2}$. Leurs partenaires sont exclues, donc choisir les deux femmes parmi $m - 2$: $\binom{m-2}{2}$. Deux appariements homme-femme sont possibles. Ainsi $2\binom{m}{2}\binom{m-2}{2} = 840$. Pour $m = 8$, $2 \times 28 \times 15 = 840$; le membre gauche est strictement croissant pour $m \geq 4$. Il y a 16 personnes.

À retenir. Il faut respecter « mixte » : choisir arbitrairement une personne dans chacun de quatre couples ne le garantit pas.

G16 | Choisir des cours

Parmi douze cours, cinq sont des cours de langue. Combien de choix de cinq cours contiennent au plus deux cours de langue ?

Démarche et réponse. Compter les cas zéro, un et deux cours de langue : $\binom{7}{5} + \binom{5}{1}\binom{7}{4} + \binom{5}{2}\binom{7}{3} = 21 + 175 + 350 = 546$.

G17 | Deux personnes ne doivent pas être réunies

Une classe comprend dix garçons et cinq filles. Former un groupe de trois garçons et trois filles, sans y réunir deux garçons désignés B_1, B_2 . Combien de groupes ?

Démarche et réponse. Le nombre total vaut $\binom{10}{3}\binom{5}{3}$. Si les deux garçons désignés sont présents, le troisième se choisit parmi huit. Retirer ces cas : $(\binom{10}{3} - 8)\binom{5}{3} = 1120$.

G18 | Deux sous-ensembles avec intersection imposée

Pour $A = \{1, 2, 3, 4\}$, compter a) ses sous-ensembles ; b) les couples ordonnés (P, Q) de sous-ensembles disjoints ; c) ceux dont l'intersection contient exactement un élément.

Démarche et réponse. a) Chaque élément est pris ou non : $\boxed{16}$. b) Chaque élément va dans P seulement, dans Q seulement, ou dans aucun : $\boxed{3^4 = 81}$. c) Choisir l'unique élément commun de quatre façons ; chacun des trois autres garde trois choix. Le total vaut $\boxed{4 \times 3^3 = 108}$.

G19 | Choisir quatre lettres avec des répétitions

Combien de sélections non ordonnées de quatre lettres sont possibles dans ASSASSINATION, sans dépasser les répétitions du mot ?

Démarche et réponse. Les multiplicités sont A:3, S:4, I:2, N:2, T:1, O:1. Classer selon les répétitions : quatre distinctes $\binom{6}{4} = 15$; une paire et deux simples $4\binom{5}{2} = 40$; deux paires $\binom{4}{2} = 6$; un triple et un simple $2 \times 5 = 10$; un quadruple 1. Le total est $\boxed{72}$.

G20 | Points sur un cercle

$n \geq 3$ points distincts sont sur un cercle. Combien de droites, de triangles et de diagonales du polygone convexe déterminent-ils ?

Démarche et réponse. Aucune droite ne contient trois de ces points. Les droites sont donc au nombre de $\boxed{\binom{n}{2}}$, les triangles de $\boxed{\binom{n}{3}}$. Retirer les n côtés de la liste des segments donne

$\boxed{\binom{n}{2} - n = n(n-3)/2}$ diagonales.

G21 | Six points alignés

Parmi quinze points du plan, six sont sur une même droite et aucun autre triplet n'est aligné. Compter les droites distinctes puis les triangles.

Démarche et réponse. Les $\binom{6}{2}$ paires de la droite produisent une seule droite. Le nombre de droites vaut $\binom{15}{2} - \binom{6}{2} + 1 = \boxed{91}$. Pour les triangles, retirer les triplets des six points alignés : $\binom{15}{3} - \binom{6}{3} = \boxed{435}$.

G22 | Rectangles et carrés d'une grille

Six droites horizontales et cinq verticales, espacées d'un même pas, forment une grille. Compter ses rectangles puis ses carrés dont les côtés suivent la grille.

Démarche et réponse. Un rectangle est déterminé par deux horizontales et deux verticales : $\binom{6}{2}\binom{5}{2} = \boxed{150}$. Pour un carré de côté k pas, il y a $(6-k)(5-k)$ positions, avec $1 \leq k \leq 4$. La somme est $20 + 12 + 6 + 2 = \boxed{40}$.

À retenir. Le même espacement horizontal et vertical est indispensable au décompte des carrés.

G23 | Trois contraintes de voisinage

Aligner sept garçons et quatre filles, tous distincts. Compter a) aucune fille voisine d'une autre ; b) les quatre filles ensemble ; c) les quatre filles non toutes ensemble.

Démarche et réponse. a) Placer les garçons de $7!$ façons, choisir quatre des huit espaces, puis y permuter les filles : $7! \binom{8}{4} 4!$. b) Les filles forment un bloc interne de $4!$ ordres, puis on permute huit unités : $4!8!$. c) Prendre le complément dans les $11!$ ordres : $11! - 4!8!$.

G24 | Trois familles en blocs

Deux familles comptent trois personnes chacune, une troisième en compte quatre. Combien d'alignements gardent chaque famille groupée ?

Démarche et réponse. Les trois blocs familiaux se permutent de $3!$ façons. Les ordres internes donnent $3!, 3!, 4!$. Le total vaut $(3!)^3 4! = 5184$.

G25 | Exactement quatre filles consécutives

Cinq garçons et cinq filles distincts se placent en ligne. Soit n le nombre d'ordres où les cinq filles sont groupées, et m celui où exactement quatre sont consécutives. Calculer m/n .

Démarche et réponse. Pour le bloc de cinq, $n = 5!6!$. Pour exactement quatre, choisir la fille isolée de cinq façons, ordonner le bloc de $4!$ façons et les garçons de $5!$ façons. Placer le bloc et la fille isolée dans deux espaces distincts parmi six, de 6×5 façons. Ainsi $m = 5 \times 4! \times 5! \times 30$, et $m/n = 5$.

G26 | Toutes les voyelles ensemble

Combien d'anagrammes de INDEPENDENCE gardent toutes les voyelles groupées ?

Démarche et réponse. Les voyelles sont I et quatre E : leur bloc possède $5!/4! = 5$ ordres. Les consonnes sont trois N, deux D, P et C. Avec le bloc, on permute huit unités, donc $8!/(3!2!)$ ordres. Le total est 16800 .

G27 | Sept chiffres de somme dix

Combien d'entiers à sept chiffres utilisent seulement 1,2,3 et ont une somme des chiffres égale à 10 ?

Démarche et réponse. Partir de sept chiffres 1, de somme 7. Il reste trois unités à distribuer, au plus deux par position. Soit on ajoute 1 à trois positions : $\binom{7}{3} = 35$; soit on ajoute 2 à une position et 1 à une autre : $7 \times 6 = 42$. Le total est 77 .

G28 | Lettres mal distribuées

Quatre lettres sont mises dans quatre enveloppes, une par enveloppe. Compter a) les distributions sans aucune lettre à la bonne adresse ; b) celles avec exactement une lettre bien adressée.

Démarche et réponse. Le nombre de dérangements de n objets est $D_n = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k / k!$. Ainsi $D_4 = 24(1/2 - 1/6 + 1/24) = 9$. Avec exactement une lettre bien placée, choisir laquelle puis dé ranger les trois autres : $4D_3 = 4 \times 2 = 8$.

G29 | Un dérangement avec une position fixée

Six cartes et six enveloppes sont numérotées de 1 à 6. Aucune carte ne doit aller dans l'enveloppe de même numéro et la carte 1 doit aller dans l'enveloppe 2. Compter les distributions.

Démarche et réponse. Les $D_6 = 265$ dérangements se répartissent également selon les cinq enveloppes possibles pour la carte 1. On obtient $265/5 = 53$. Autre méthode : selon que la carte 2 va ou non dans l'enveloppe 1, le total est $D_4 + D_5 = 9 + 44 = 53$.

G30 | Le rang dans le dictionnaire

Classer les anagrammes distinctes de SMALL par ordre alphabétique. Quel est le rang de SMALL, le premier rang étant 1 ?

Démarche et réponse. Les lettres sont A,L,L,M,S. Avant celles commençant par S : $4!/2! + 4! + 4!/2! = 48$. Après avoir fixé S, les préfixes SA et SL donnent $3!/2! + 3! = 9$ mots. Après SM, A est déjà le plus petit choix restant, suivi de LL. Le rang vaut $48 + 9 + 1 = 58$.

G31 | Compter les diviseurs

Reconstitué

Pour $N = 2^4 3^2 5^3$, compter les diviseurs positifs, les diviseurs propres, les diviseurs pairs et les impairs.

Démarche et réponse. Un diviseur est $2^a 3^b 5^c$ avec $0 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 2, 0 \leq c \leq 3$. Il y en a $5 \times 3 \times 4 = 60$. En excluant seulement N , les diviseurs propres sont 59. Pour les impairs, $a = 0$: 12 ; pour les pairs, $a \geq 1$: 48.

À retenir. La convention « propre » utilisée ici exclut le nombre lui-même, mais inclut 1.

G32 | Sommer les diviseurs

Calculer la somme des diviseurs positifs de $2^5 3^4 5^2$.

Démarche et réponse. Chaque diviseur apparaît une fois dans le produit $(1 + 2 + \dots + 2^5)(1 + 3 + \dots + 3^4)(1 + 5 + 5^2)$. Les trois facteurs valent 63, 121, 31. La somme vaut $63 \times 121 \times 31 = 236313$.

G33 | Puissances divisant une factorielle

Trouver les plus grands exposants a, b, c tels que $2^a, 3^b, 6^c$ divisent $50!$.

Démarche et réponse. La formule de Legendre donne $a = 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47$ et $b = 16 + 5 + 1 = 22$. Comme $6^c = 2^c 3^c$, il faut satisfaire les deux contraintes : $c = \min(47, 22) = 22$.

G34 | Table ronde et collier

Combien de dispositions de cinq objets distincts existe-t-il a) sur un cercle, à rotation près ; b) en collier, à rotation et retournement près ?

Démarche et réponse. a) Fixer un objet pour éliminer les rotations : $4! = 24$. b) Un retournement identifie deux ordres circulaires différents, car les cinq objets sont distincts : $4!/2 = 12$.

G35 | Une guirlande de quatre fleurs

Parmi huit fleurs de couleurs distinctes, choisir quatre fleurs et former une guirlande fermée, les retournements étant identifiés. Combien de guirlandes ?

Démarche et réponse. Choisir les fleurs de $\binom{8}{4}$ façons, puis les disposer en collier de $(4-1)!/2$

façons. Le total vaut $\boxed{\binom{8}{4} \times 3 = 210}$.

G36 | Espaces sur une table ronde

Combien de dispositions de sept garçons et cinq filles distincts autour d'une table ronde évitent deux filles voisines ? Les rotations sont identifiées, les retournements non.

Démarche et réponse. Placer les garçons de $6!$ façons. Ils créent sept espaces, dont on choisit cinq,

puis on y permute les filles. Le résultat vaut $\boxed{6! \binom{7}{5} 5! = 1814400}$.

À retenir. Après placement des garçons, les places des filles sont repérées : on utilise $5!$, pas $4!$.

G37 | Des objets distincts à distribuer

Compter les distributions a) de six jouets distincts à quatre enfants ; b) de trois jouets distincts à cinq enfants. Un enfant peut ne rien recevoir.

Démarche et réponse. Chaque objet choisit indépendamment son destinataire. Les nombres sont donc $\boxed{4^6 = 4096}$ et $\boxed{5^3 = 125}$.

À retenir. La méthode des séparateurs concerne les objets identiques ; elle ne compte pas directement les jouets distincts.

G38 | Distribuer six livres

Six livres distincts sont distribués à trois personnes nommées A,B,C. Compter a) A reçoit 1 livre, B 2, C 3 ; b) les effectifs sont 1,2,3 sans attribution préalable ; c) A reçoit 4 livres, B et C un chacun.

Démarche et réponse. a) $\binom{6}{1} \binom{5}{2} = 6!/(1!2!3!) = \boxed{60}$. b) Les trois effectifs distincts s'attribuent de $3!$ façons : $\boxed{360}$. c) Choisir les quatre livres de A puis celui de B : $\binom{6}{4} \times 2 = \boxed{30}$.

G39 | Six voyageurs, quatre chambres

Répartir six personnes distinctes dans quatre chambres distinctes, avec une ou deux personnes par chambre. Combien de répartitions ?

Démarche et réponse. Il y a nécessairement deux chambres doubles et deux simples. Choisir les chambres doubles : $\binom{4}{2}$. Pour ces chambres désignées, répartir les six personnes en effectifs 2, 2, 1, 1 de $6!/(2!2!)$ façons. Le total vaut $\boxed{1080}$.

G40 | Solutions entières d'une somme

Contraintes explicitées

Compter les triplets entiers $x + y + z = 10$ sous les contraintes successives : a) $x, y, z \geq 0$; b) $x \geq 1, y, z \geq 0$; c) $x \geq 2, y \geq 1, z \geq 0$; d) $x \geq -2, y, z \geq 1$; e) $1 \leq x \leq 3, y, z \geq 0$.

Démarche et réponse. Pour $u + v + w = N$ avec trois inconnues positives ou nulles, le nombre est $\binom{N+2}{2}$. a) $\boxed{66}$. b) Remplacer x par $x - 1$: $\boxed{55}$. c) Retirer les minima 2 et 1 : $\boxed{\binom{9}{2} = 36}$. d) Poser $u = x + 2, v = y - 1, w = z - 1$: la somme reste 10, donc $\boxed{66}$. e) Fixer $x = 1, 2, 3$: $10 + 9 + 8 = \boxed{27}$.

G41 | Un coefficient devant une inconnue

Compter les solutions entières positives ou nulles de $2x + y + z = 6$.

Démarche et réponse. Les valeurs de x sont 0,1,2,3. Les sommes $y + z$ correspondantes sont 6,4,2,0, qui donnent 7,5,3,1 couples. Le nombre total est $\boxed{16}$.

G42 | Trois chiffres de somme dix

Combien d'entiers à trois chiffres ont une somme des chiffres égale à 10 ?

Démarche et réponse. Poser $u = a - 1$, où a est le chiffre des centaines. On compte d'abord $u + b + c = 9$ avec variables positives ou nulles : $\binom{11}{2} = 55$. Un seul triplet est interdit, $(9, 0, 0)$, car il donnerait $a = 10$. Les deux autres chiffres ne peuvent pas dépasser 9 puisque leur somme ne dépasse pas 9. Le total vaut $\boxed{54}$.

G43 | Distribuer les exposants premiers

Combien de triplets ordonnés d'entiers strictement positifs vérifient $xyz = 24$?

Démarche et réponse. Comme $24 = 2^3 \times 3$, distribuer les trois facteurs 2 entre x, y, z donne $\binom{5}{2} = 10$ possibilités d'exposants. Distribuer le facteur 3 donne $\binom{3}{2} = 3$ possibilités. Les choix sont indépendants : $\boxed{30}$ triplets.

H Probabilités

Conditionnement, indépendance et Bayes

LA BOÎTE À OUTILS

Équiprobabilité : $P(A) = \text{cas favorables/cas possibles}$ seulement si les issues comptées ont la même probabilité.

Conditionnement : $P(A | B) = P(A \cap B)/P(B)$, si $P(B) > 0$.

Indépendance : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Ne pas confondre indépendance et incompatibilité.

Probabilités totales : si les B_i forment une partition, $P(A) = \sum_i P(B_i)P(A | B_i)$.

Bayes : $P(B_j | A) = P(B_j)P(A | B_j)/P(A)$. Contrôler enfin que toutes les régions d'un diagramme ont une probabilité positive ou nulle.

H01 | Une commission choisie au hasard

Parmi dix hommes et huit femmes, trois personnes sont choisies uniformément. Quelle est la probabilité d'obtenir deux hommes et une femme ?

Démarche et réponse. Les $\binom{18}{3}$ groupes sont équiprobables. Les groupes favorables sont $\binom{10}{2}\binom{8}{1}$. Ainsi $P = 360/816 = 15/34$.

H02 | Détecter un événement impossible

Énoncé incohérent

Une urne contient six boules rouges et cinq noires. On tire quatre boules sans remise. Quelle est la probabilité d'en obtenir trois rouges et deux noires ?

Démarche et réponse. Trois rouges et deux noires représentent cinq boules, alors que le tirage n'en contient que quatre. L'événement est impossible : $P = 0$. Si le tirage portait sur cinq boules, ce serait une autre question, de réponse $\binom{6}{3}\binom{5}{2}/\binom{11}{5} = 100/231$.

À retenir. Le fichier contient cette incohérence ; on ne corrige pas silencieusement le nombre de boules tirées.

H03 | Au moins une boule verte

Une urne contient huit boules blanches et deux vertes. Trois boules sont tirées uniformément sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une verte ?

Démarche et réponse. Passer au complément : aucune verte signifie trois blanches. Donc $P = 1 - \binom{8}{3}/\binom{10}{3} = 1 - 56/120 = 8/15$.

À retenir. Les compositions par couleur ne sont pas équiprobables. On compte les sous-ensembles de boules, même si leurs couleurs sont identiques.

H04 | Quatre lettres entre R et S

On permute uniformément les lettres de REGULATIONS. Quelle est la probabilité d'avoir exactement quatre lettres entre R et S ?

Démarche et réponse. Les onze lettres sont distinctes. Les positions de R et S doivent être éloignées de cinq places. Il y a six paires de positions non ordonnées admissibles, sur $\binom{11}{2} = 55$. La probabilité est $\boxed{6/55}$. On peut aussi compter $12 \times 9!$ permutations favorables sur $11!$.

H05 | Aucune boule noire voisine

On place au hasard sept boules blanches et trois noires en ligne. Quelle est la probabilité que deux noires ne soient jamais voisines ?

Démarche et réponse. Les positions des trois noires forment un sous-ensemble uniforme de trois places parmi dix. Les sept blanches créent huit espaces : choisir trois espaces donne $\binom{8}{3}$ cas favorables. Ainsi $\boxed{P = \binom{8}{3} / \binom{10}{3} = 7/15}$.

H06 | Trois entiers en progression arithmétique

On choisit uniformément trois nombres distincts parmi onze entiers consécutifs. Quelle est la probabilité qu'ils puissent être rangés en progression arithmétique de raison positive ?

Démarche et réponse. Pour une raison $d = 1, 2, 3, 4, 5$, il y a respectivement $11 - 2d = 9, 7, 5, 3, 1$ premiers termes possibles. Cela donne 25 triplets favorables. Le nombre total est $\binom{11}{3} = 165$, d'où $\boxed{P = 5/33}$.

H07 | Une somme divisible par trois

Trois nombres distincts sont choisis uniformément dans $\{1, \dots, 300\}$. Quelle est la probabilité que leur somme soit divisible par 3 ?

Démarche et réponse. Les trois classes modulo 3 ont chacune 100 éléments. Les restes favorables sont $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$ ou un reste de chaque type. Donc

$$\boxed{P = \frac{3\binom{100}{3} + 100^3}{\binom{300}{3}} = \frac{14851}{44551}}.$$

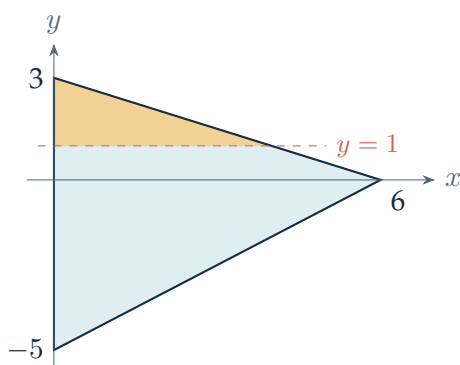
À retenir. On choisit des ensembles de trois nombres : les permutations des restes 0, 1, 2 ne créent pas six groupes nouveaux.

H08 | Une probabilité géométrique

Un point est choisi uniformément dans le triangle borné par l'axe des ordonnées et les droites $x + 2y = 6$ et $5x - 6y = 30$. Calculer $P(y < 1)$.

Démarche et réponse. Les sommets sont $(0, 3)$, $(0, -5)$, $(6, 0)$; l'aire totale vaut $8 \times 6/2 = 24$. La région $y \geq 1$ est un triangle de sommets $(0, 1)$, $(0, 3)$, $(4, 1)$, d'aire 4. Ainsi $\boxed{P(y < 1) = (24 - 4)/24 = 5/6}$.

À retenir. Le quotient des aires exige un choix uniforme sur le triangle.



H08 : lecture par les aires.

La partie dorée a une aire de 4. La région favorable, en bleu, a une aire de 20 sur un total de 24.

H09 | Probabilité et cote favorable

On lance un dé équilibré. Donner la probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 3 et la cote favorable correspondante.

Démarche et réponse. Trois des six issues conviennent : $P = 1/2$. La cote favorable compare les issues favorables aux défavorables, soit $3 : 3 = \boxed{1 : 1}$. Elle est différente de l'écriture $1/2$ de la probabilité.

H10 | Une carte : pique ou as

Une carte est tirée uniformément d'un jeu de 52 cartes. Donner la cote défavorable à l'événement « pique ou as ».

Démarche et réponse. Il y a 13 piques, quatre as et un as de pique commun. Les cas favorables sont donc $13 + 4 - 1 = 16$; les défavorables sont 36. La cote défavorable vaut $36 : 16 = \boxed{9 : 4}$.

H11 | Deux probabilités liées par leurs cotes

Pour deux événements de probabilités $p_1, p_2 > 0$, on a $p_1 = p_2^2$ et la cote défavorable du premier est le cube de celle du second. Trouver p_1, p_2 .

Démarche et réponse. On a $(1 - p_1)/p_1 = [(1 - p_2)/p_2]^3$. Poser $t = p_2$ et remplacer $p_1 = t^2$ donne $t(1 - t^2) = (1 - t)^3$, donc $3t^2 - 4t + 1 = 0$. Ainsi $\boxed{(p_1, p_2) = (1/9, 1/3) \text{ ou } (1, 1)}$. Si les événements ne peuvent pas être certains, seule la première paire reste.

H12 | Des données de probabilité incompatibles

Énoncé incohérent

Peut-on avoir $P(A \cap B) = 1/2$, $P(A^c \cap B^c) = 1/3$, $P(A) = p$ et $P(B) = 2p$?

Démarche et réponse. L'inclusion-exclusion imposerait $3p - 1/2 = 2/3$, donc $p = 7/18$. Mais alors $P(A) = 7/18 < 1/2 = P(A \cap B)$, ce qui est impossible puisque $A \cap B \subset A$. Donc $\boxed{\text{aucun modèle de probabilité ne convient}}$.

À retenir. Une solution algébrique n'est pas forcément une probabilité admissible.

H13 | Multiple de trois ou de sept

Un entier est choisi uniformément parmi 1 à 2000. Soit p la probabilité qu'il soit multiple de 3 ou de 7. Calculer $500p$.

Démarche et réponse. Les effectifs sont $\lfloor 2000/3 \rfloor = 666$, $\lfloor 2000/7 \rfloor = 285$ et $\lfloor 2000/21 \rfloor = 95$. Donc $p = (666 + 285 - 95)/2000 = 856/2000$. Ainsi $\boxed{500p = 214}$.

H14 | Remplir les régions d'un diagramme

On sait $P(A \cup B) = 3/4$, $P(A \cap B) = 1/4$ et $P(A^c) = 2/3$. Trouver $P(A^c \cap B)$.

Démarche et réponse. On a $P(A) = 1/3$. La réunion se décompose en A et en B sans A , deux parties disjointes. Ainsi $P(A^c \cap B) = 3/4 - 1/3 = \boxed{5/12}$. Les autres régions valent $1/12$ pour A seul, $1/4$ pour l'intersection et $1/4$ pour l'extérieur.

H15 | Retrouver les probabilités marginales

$P(A | B) = 1/2$, $P(B | A) = 1/3$ et $P(A \cap B) = 1/6$. Calculer $P(A \cup B)$.

Démarche et réponse. La définition conditionnelle donne $P(B) = (1/6)/(1/2) = 1/3$ et $P(A) = (1/6)/(1/3) = 1/2$. La réunion vaut donc $1/2 + 1/3 - 1/6 = \boxed{2/3}$.

H16 | Le premier dé est connu

Deux dés équilibrés indépendants sont lancés. Sachant que le premier montre 5, quelle est la probabilité que la somme soit 9 ?

Démarche et réponse. Il faut et suffit que le second dé montre 4. Ce dé reste uniforme sur six faces, donc $\boxed{P = 1/6}$. Par la formule conditionnelle : $(1/36)/(1/6) = 1/6$.

H17 | Deux affirmations à vérifier

$P(B | A) = 2/5$, $P(A | B) = 1/7$ et $P(A \cap B) = 1/9$. Calculer $P(A^c \cup B)$ et $P(A^c \cap B^c)$.

Démarche et réponse. On trouve $P(A) = 5/18$ et $P(B) = 7/9$. La région A seul vaut $5/18 - 1/9 = 1/6$, donc $\boxed{P(A^c \cup B) = 5/6}$. La réunion $A \cup B$ vaut $5/18 + 7/9 - 1/9 = 17/18$, donc $\boxed{P(A^c \cap B^c) = 1/18}$.

H18 | Trois tirages sans remise

Un sac contient huit boules rouges et douze bleues. On en tire trois successivement sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir, dans l'ordre, bleue, bleue, rouge ?

Démarche et réponse. Les probabilités conditionnelles successives sont $12/20$, $11/19$ et $8/18$. Leur produit donne $\boxed{44/285}$. Le nombre de boules rouges reste 8 après les deux premières sorties bleues, tandis que l'effectif total diminue.

H19 | Former une suite de lettres

Dix cartes portent cinq lettres I et cinq lettres T. On tire trois cartes sans remise en conservant leur ordre. Quelle est la probabilité d'obtenir I, I, T ?

Démarche et réponse. Le produit des probabilités successives est $\frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \boxed{5/36}$.

À retenir. L'ordre est imposé ; il ne faut pas multiplier par trois.

H20 | Au moins une réussite indépendante

Donnée manquante

Quatre personnes résolvent un problème indépendamment, avec probabilités $1/2, 3/4, 1/4, p$. Exprimer la probabilité qu'au moins une réussisse.

Démarche et réponse. Le seul événement contraire est l'échec des quatre. Par indépendance, sa probabilité vaut $(1/2)(1/4)(3/4)(1-p) = 3(1-p)/32$. La réponse est

$$1 - 3(1-p)/32 = (29+3p)/32.$$

À retenir. La quatrième probabilité est tronquée dans le fichier ; elle est laissée sous la forme p et non devinée.

H21 | Deux étapes avant une réussite

Dans un modèle de tir, un projectile est intercepté avec probabilité $1/3$. S'il ne l'est pas, il atteint sa cible avec probabilité $3/4$; s'il est intercepté, il ne l'atteint pas. Trois essais sont indépendants. Quelle est la probabilité des trois réussites ?

Démarche et réponse. Pour un essai, la réussite a probabilité $(1 - 1/3) \times 3/4 = 1/2$. Par indépendance des essais, la probabilité recherchée vaut $(1/2)^3 = 1/8$.

H22 | Indépendants, mais pas équiprobables

On sait $P((A \cup B)^c) = 1/6$, $P(A \cap B) = 1/4$ et $P(A^c) = 1/4$. Les événements sont-ils indépendants ? Équiprobables ?

Démarche et réponse. $P(A) = 3/4$ et $P(A \cup B) = 5/6$. Donc $P(B) = 5/6 - 3/4 + 1/4 = 1/3$. Leur produit vaut $(3/4)(1/3) = 1/4 = P(A \cap B)$: ils sont indépendants. Leurs probabilités diffèrent : ils ne sont pas équiprobables.

H23 | Exactement un événement se réalise

A, B sont indépendants, avec $P(A) = p$, $P(B) = 2p$. La probabilité que exactement un des deux se réalise vaut $5/9$. Trouver le plus grand p .

Démarche et réponse. L'intersection vaut $2p^2$. La probabilité de l'événement exclusif vaut $p + 2p - 2(2p^2) = 3p - 4p^2$. L'équation donne $36p^2 - 27p + 5 = (12p - 5)(3p - 1) = 0$. Les deux valeurs $1/3, 5/12$ respectent $0 \leq p \leq 1/2$. La plus grande est $5/12$.

H24 | Trois sacs inégalement choisis

Trois sacs contiennent respectivement 3 blanches et 2 noires, 4 blanches et 2 noires, 2 blanches et 5 noires. On choisit les sacs avec probabilités $2/10, 3/10, 5/10$, puis une boule uniformément. Probabilité d'une blanche ?

Démarche et réponse. La formule des probabilités totales donne $\frac{2}{10} \frac{3}{5} + \frac{3}{10} \frac{4}{6} + \frac{5}{10} \frac{2}{7} = \frac{81}{175}$.

À retenir. Une moyenne simple des trois probabilités serait fautive : les sacs n'ont pas les mêmes chances d'être choisis.

H25 | Un dé choisit le sac

Un sac contient 3 boules noires et 4 blanches ; un second en contient 4 noires et 3 blanches. Un dé équilibré choisit le premier sac si le résultat est 1 ou 3, sinon le second. Quelle est la probabilité de tirer une noire ?

Démarche et réponse. Les probabilités de choix sont $2/6$ et $4/6$. Ainsi $P(\text{noire}) = (2/6)(3/7) + (4/6)(4/7) = \boxed{11/21}$.

H26 | Une urne dont la composition change

Une urne contient 5 rouges et 2 vertes. Une boule est retirée sans être remise, puis on ajoute une boule de la couleur opposée. Quelle est la probabilité que le deuxième tirage donne une rouge ?

Démarche et réponse. Si la première était verte, probabilité $2/7$, l'urne contient 6 rouges et 1 verte. Si elle était rouge, probabilité $5/7$, l'urne contient 4 rouges et 3 vertes. Ainsi $P = (2/7)(6/7) + (5/7)(4/7) = \boxed{32/49}$.

H27 | Bayes avec trois chemins

Partie exploitable

Trois sacs sont choisis avec probabilités $2/10$, $3/10$, $5/10$. Leurs probabilités respectives de donner une blanche sont $2/5$, $4/6$, $1/4$. Sachant qu'une blanche a été tirée, quelle est la probabilité qu'elle provienne du premier sac ?

Démarche et réponse. Le chemin « premier sac et blanche » a probabilité $(2/10)(2/5) = 2/25$. La probabilité totale d'une blanche est $2/25 + 1/5 + 1/8 = 81/200$. Bayes donne $(2/25)/(81/200) = \boxed{16/81}$.

À retenir. Ces probabilités de couleur sont celles de ce second exemple ; elles diffèrent de celles de H24.

H28 | Retrouver la couleur d'une boule transférée

Le sac 1 contient 3 rouges, 4 noires, 3 blanches ; le sac 2 contient 2 rouges, 5 noires, 2 blanches. On transfère une boule du premier au second, puis on tire une boule du second. Sachant que celle-ci est noire, quelle est la probabilité que la boule transférée ait été rouge ?

Démarche et réponse. Après transfert, le second sac contient dix boules. La probabilité d'une noire vaut $(3/10)(5/10) + (4/10)(6/10) + (3/10)(5/10) = 54/100$. Le chemin « transfert rouge, puis noire » vaut $15/100$. Le quotient donne $\boxed{5/18}$.

H29 | Un modèle hypothétique de risque relatif

Dans un exercice hypothétique, 25% d'une population appartient au groupe des fumeurs. La probabilité d'une maladie est 27 fois celle du groupe non-fumeur. Sachant qu'une personne est malade, trouver la probabilité qu'elle soit fumeuse, sous ce modèle.

Démarche et réponse. Noter $q > 0$ la probabilité de maladie d'un non-fumeur, avec $27q \leq 1$. Bayes donne $[(1/4)27q]/[(1/4)27q + (3/4)q] = 27/30 = \boxed{9/10}$. Si cette réponse est notée $k/10$, alors $k = 9$.

À retenir. Les nombres sont les hypothèses de l'exercice ; ils ne constituent pas des statistiques médicales établies.

H30 | Un témoignage dont le modèle doit être précisé

Modèle incomplet

Une personne dit la vérité avec probabilité $3/4$. Après un lancer de dé équilibré, elle annonce « six ». Quelle est la probabilité que le résultat soit réellement six ?

Démarche et réponse. Les données seules ne précisent pas comment un mensonge est choisi. Si le message est binaire « six / pas six », avec inversion en cas de mensonge indépendamment du résultat, Bayes donne $[(1/6)(3/4)]/[(1/6)(3/4) + (5/6)(1/4)] = \boxed{3/8}$. Si elle annonce une face et, en cas de mensonge, choisit uniformément l'une des cinq fausses faces, le dénominateur devient $(1/6)(3/4) + (5/6)(1/4)(1/5)$, et la réponse est $\boxed{3/4}$.

À retenir. La fiabilité globale ne détermine pas à elle seule la probabilité du message observé.

H31 | Normaliser une loi discrète

Une variable X prend les valeurs 0,1,2,3 avec probabilités $k, k/2, k/4, k/8$. Trouver $k, P(X \leq 2)$ et $P(X > 2)$.

Démarche et réponse. La somme des probabilités vaut 1, donc $k(1 + 1/2 + 1/4 + 1/8) = 1$. Ainsi $k = \boxed{8/15}$. Comme $X > 2$ signifie $X = 3$, on obtient $P(X > 2) = \boxed{1/15}$ et $P(X \leq 2) = \boxed{14/15}$.

H32 | Un conditionnement dans un tableau

Bornes explicitées

X prend les valeurs 0,1,2,3,4 avec probabilités $k, 2k, 4k, 6k, 8k$. Calculer $P(1 < X < 4 \mid X \leq 2)$.

Démarche et réponse. La normalisation donne $k = 1/21$. L'intersection de $1 < X < 4$ et $X \leq 2$ est l'événement $X = 2$, de probabilité $4k$. La condition a probabilité $k + 2k + 4k = 7k$. Donc $P = \boxed{4/7}$, sans même devoir utiliser la valeur de k .



Points de vigilance

Vérifier le sens, pas seulement le calcul

Cette sélection réunit les contrôles qui changent réellement une réponse. Elle sert de grille de relecture pour vos propres solutions.

B02 Un carré de somme laisse deux signes possibles : les nombres négatifs ne disparaissent pas sans hypothèse de positivité.

B24 Une racine double intérieure et une racine à la borne demandent un traitement séparé.

C49 La suite auxiliaire donne les facteurs 24 et 22 : le résultat vérifié est 528.

D04 La simplification par x^{20} exige d'examiner $x = 0$ avant de diviser.

D32 Le quotient de coefficients binomiaux donne $251/18$, et non le résultat oral annoncé.

E29 La condition $\lambda^2 = 1$ donne deux signes si la croissance n'est pas imposée.

F02 L'écart de 60 à 55 vaut 5 ; les observations inconnues sont 35 et 75.

G13 Le cas « au plus deux femmes » compte aussi les commissions avec exactement deux femmes : il donne 186.

G15 Un double mixte exige deux hommes, deux femmes et deux appariements possibles.

H12 Il faut toujours avoir $P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$; ici cette condition échoue.

H30 Une réponse bayésienne dépend du mécanisme de production du message, pas seulement d'un taux global de vérité.

Passages incomplets

Registre des informations manquantes ou ambiguës

Cette annexe évite de perdre les questions évoquées dans le fichier, tout en distinguant ce qui est résoluble de ce qui ne l'est pas. Les repères U identifient des passages, parfois des groupes d'exercices ; ils ne constituent pas un décompte des questions du support absent. Les renvois aux fiches du livret ne sont pas de nouveaux exercices.

U01–U02 Équations à valeur absolue

Deux exercices à faire seul sont annoncés sans que leurs équations soient lues. Impossible de restituer les énoncés ou leurs solutions.

U03 Deux ensembles à réunir

La partie trigonométrique est traitée en A08. L'autre ensemble fait intervenir $\sqrt{x}$ et $|x - 4|$, mais l'équation n'est pas lisible dans le texte. Les valeurs annoncées 0,1,9,16 ne suffisent pas à la reconstituer. La cardinalité de la réunion ne peut donc pas être certifiée.

U04–U05 Exercices quadratiques affichés

Deux passages renvoient à des exercices sans dicter leurs polynômes. Ils ne peuvent pas être ajoutés comme des énoncés complets.

U06 Sommes de Newton

Une combinaison $T_{10} - 2T_8$ et un résultat 3 sont évoqués. Le polynôme initial et la définition complète de la question manquent ; le résultat n'est pas certifiable.

U07–U08 Racines et progressions

Une somme de racines annoncée nulle, puis des exercices sur des racines et coefficients en progression sont évoqués sans formules complètes. Les seuls fragments $a - b$, $a + b$ ne suffisent pas.

U09 Carré parfait et discriminant

Le discriminant récupéré est $k^2 - 8k + 6$. Son annulation donne $k = 4 \pm \sqrt{10}$. Sans le polynôme, on ne peut vérifier ni son degré ni le signe dominant nécessaire à un carré réel.

U10 Une équation rationnelle à paramètre

La réduction dictée est $x^2 - ax + 1 = 0$. Cette équation réduite a deux racines réelles distinctes si $|a| > 2$. Les dénominateurs de l'équation initiale manquent : on ne peut pas exclure d'éventuelles valeurs interdites.

U11 Une condition de discriminant

La condition récupérée est $m(2m - 1)^2 > 0$. Pour un entier m , elle équivaut à $m \geq 1$, donc donne une infinité de valeurs. Les coefficients de l'équation initiale manquent.

U12 Un discriminant carré

Pour a entier positif, le discriminant annoncé est $121 - 24a$. Exiger un carré parfait positif ou nul donne $a \leq 5$; les valeurs $a = 3, 4, 5$ donnent 49,25,1. Le polynôme initial est absent, donc son degré et les hypothèses de rationalité ne sont pas contrôlables.

U13 Polynômes réciproques

Pour $ax^2 + bx + c$ et $cx^2 + bx + a$, avec $a \neq c$, une racine commune vérifie $(a - c)(x^2 - 1) = 0$. Elle vaut donc 1 ou -1 . Les conditions sont respectivement $a + b + c = 0$ ou $a - b + c = 0$. Le fichier ne permet pas de savoir si une hypothèse excluait l'une des deux.

U14 Racine commune non réelle

Les coefficients des deux quadratiques ne sont pas entièrement dictés. Le principe utilisable est le suivant : à coefficients réels, une racine non réelle commune entraîne aussi sa conjuguée, donc deux polynômes de degré deux sont proportionnels.

U15–U16 Deux racines communes

Une factorisation $(x-1)(x^2-x+1)$ est donnée, mais l'autre polynôme et ses paramètres manquent. Un autre exercice est seulement annoncé. Le résultat numérique évoqué ne peut pas être justifié.

U17–U18 Paramètres et localisation

La double inégalité réduite est résolue en B18 ; la fraction initiale est absente. Un autre exercice impose exactement une racine dans $(0, 7)$, mais sans donner l'équation.

U19–U20 Suites partiellement dictées

Les données sur l'intersection de deux progressions sont exploitées en C09. La condition géométrique ambiguë est traitée sous ses deux lectures en C13. Les suites initiales ne peuvent pas être rétablies au-delà de ces informations.

U21 Développement décimal

Une série à coefficients 2,4,6 est évoquée sans base numérique complète. La formule disponible est $\sum_{n \geq 1} 2nr^n = 2r/(1-r)^2$ pour $|r| < 1$. Le nombre décimal initial n'est pas récupérable.

U22 Une somme cyclique à trois termes

Le produit des trois termes positifs vaut 1 et une borne 3 est annoncée. On peut justifier la borne par la moyenne arithmético-géométrique. Sans l'expression des termes, on ne peut pas garantir qu'ils puissent être égaux, ni que la borne soit atteinte.

U23 Une série à borne inconnue

Le terme récupéré est $\frac{3r}{2r+1} \sum_{k=1}^r k^2 = \frac{r^2(r+1)}{2}$. La borne supérieure n'est pas dictée ; aucune somme numérique unique ne peut être fournie.

U24–U25 Sommes télescopiques

Un premier exemple n'est pas dicté. La somme à trois facteurs est calculée en C51 ; le coefficient demandé dans sa présentation finale reste incertain.

U26 Sommes partielles et pondération

Le passage rappelle $T_r = S_r - S_{r-1}$ mais ne lit pas la formule de S_r ni la somme pondérée demandée.

U27 Différence de puissances cinquièmes

Des nombres 3 et 5 sont cités, sans que les radicaux éventuels soient audibles. Le principe est de soustraire les développements conjugués pour isoler les termes impairs ; les valeurs numériques ne sont pas déterminées.

U28 Égalité de coefficients

Les degrés 5 et -5 sont mentionnés dans deux développements. La place d'un paramètre dans un dénominateur ou un exposant est incertaine. On ne peut certifier ni le système d'équations ni le résultat.

U29–U30 Supports d'exercices complémentaires

Plusieurs exercices sur les parties entières et sur le binôme sont annoncés sans énoncés. Le texte ne permet pas d'en déterminer le nombre exact.

U31 Deux évaluations d'un polynôme

Le polynôme complet n'est pas dicté. Ses valeurs en 1 et -1 permettent néanmoins la fiche D33. L'exposant numérique ambigu du produit précédent est traité en D17.

U32 Égalités et produits de matrices

Plusieurs matrices d'exercices à faire seul ne sont pas lues. Les calculs intermédiaires exploitables ont donné E01 à E03 ; la présence de carrés dans E02 est retenue selon l'identité explicitement invoquée.

U33 Questions supplémentaires sur les adjointes

Un exemple numérique 2×2 , un problème avec un paramètre α et une preuve concernant $B = \text{adj } A$ sont mentionnés sans toutes les données ou sans conclusion à démontrer. Ils ne sont pas reconstruits arbitrairement.

U34 Inverses et transformations élémentaires

Plusieurs exercices sont seulement montrés ou laissés à faire. Le principe conservé est $A^{-1} = \text{adj}(A) / \det A$ lorsque $\det A \neq 0$. La formule générale $\text{adj}(\text{adj } A) = (\det A)^{n-2} A$ est valable pour les matrices inversibles d'ordre $n \geq 2$.

U35 Puissance de matrice conjuguée

La matrice demandée est calculée en E15. La combinaison finale des quatre coefficients, annoncée comme valant 2005, n'est pas formulée et ne peut pas être certifiée.

U36 Cayley-Hamilton et trigonométrie

Les matrices initiales des exemples E24 à E26 ne sont pas entièrement lues. Les fiches utilisent uniquement les traces, déterminants ou polynômes récupérés et explicitement énoncés.

U37 Déterminants nuls sans développement

Plusieurs exemples utilisent des lignes ou colonnes en progression arithmétique, une ligne combinaison des autres, ou des lignes proportionnelles, sans dicter les matrices. Le critère est la dépendance linéaire des lignes ou colonnes, et non la seule présence de quelques termes en progression.

U38 Sommes de déterminants

Dans un exemple, une seule colonne dépend de r , et la somme de $r = 1$ à 10 donne la colonne $(55, 385, 3025)^T$, égale à une autre : la somme vaut alors zéro. Les colonnes fixes manquent. Dans un autre, les sommes de $1, 2k, 2k - 1$ donnent $n, n(n + 1), n^2$, mais les autres coefficients ne sont pas lus.

U39 Un déterminant annoncé égal à un

Une décomposition élimine plusieurs termes à lignes proportionnelles et laisse un déterminant annoncé égal à 1. Les coefficients du dernier déterminant ne sont pas dictés ; le résultat ne peut pas être contrôlé.

U40 Déterminants spéciaux

Des formules à mémoriser sont affichées, dont un fragment $3abc - a^3 - b^3 - c^3$ possible, mais ni l'ordre des coefficients ni les puissances ne sont suffisamment lisibles. Elles ne sont pas présentées comme des identités certifiées du fichier.

U41 Déterminants réduits

Les équations réduites sont conservées en E28, E29 et E30. Leurs déterminants initiaux ne peuvent pas être restitués. Pour E31, la demande sur les puissances maximales de nombres premiers manque de conditions ; seule la formule du déterminant est donnée.

U42 Systèmes et applications géométriques

Les relations exploitables sont en E33 et E34. D'autres systèmes, calculs d'aires et conditions de compatibilité sont seulement annoncés comme exercices à faire seul.

U43 Une correction de données statistiques

Dix observations ont une moyenne annoncée de 5,5 et une somme de carrés de 371. Une valeur mal notée doit être corrigée, mais l'ancienne valeur et la nouvelle ne sont pas dictées. Sans elles, la correction de moyenne ou de variance n'est pas calculable.

U44 Une transformation statistique ambiguë

Dans F03, si les nouvelles données sont $y_i = 2(x_i - 1) + 4\beta$, alors $\bar{y} = 40$, $V_y = 16/5$ et $\beta\bar{y}/V_y = 100$. Si elles sont $y_i = 2x_i - 1 + 4\beta$, alors $\bar{y} = 41$ et le quotient vaut $205/2$. La position des parenthèses n'est pas certaine dans le texte.

U45 Exercices de dénombrement non dictés

D'autres exercices sur les nombres, les arrangements et les répartitions sont renvoyés à un support extérieur. Un cas de six dés est évoqué, mais la somme des faces demandée manque. Aucune valeur numérique n'est déductible.

U46 Données probabilistes incomplètes

La quatrième probabilité de réussite manque en H20 ; le résultat est donc exprimé en fonction de p . Le mécanisme de mensonge manque en H30 ; deux modèles explicités montrent pourquoi la réponse n'est pas unique.

U47 Autres problèmes de probabilités

Plusieurs questions sont seulement laissées à faire dans un document extérieur. Les passages effectivement dictés sont traités au chapitre H, y compris les deux énoncés incompatibles H02 et H12.

Index des fiches

Retrouver un exercice par son idée principale

A — Outils de départ

A01 Un changement de variable décisif	4
A02 Deux valeurs absolues, trois zones	4
A03 Trois ensembles dans une enquête	5
A04 Centrer avant de développer	5
A05 Somme des chiffres égale à 14	5
A06 Sommer des carrés sans tout calculer	5
A07 Compter les fractions distinctes	5
A08 Logarithmes et trigonométrie	6
A09 Changer de base intelligemment	6

B — Équations du second degré

B01 Viète et puissances des racines	7
B02 Ne pas perdre le signe d'une somme	7
B03 Un paramètre et des racines complexes	7
B04 Utiliser le rapport des racines	8
B05 Factoriser une somme à quatre termes	8
B06 Ordre des racines et signes trigonométriques	8
B07 Une suite gouvernée par un polynôme	8
B08 Réduire des puissances de rang élevé	8
B09 Passer d'un pas à un pas de deux	8
B10 Une racine déjà visible	9
B11 Composer un polynôme sans résoudre	9
B12 Transformer les racines par une fraction	9
B13 Une racine commune facile à identifier	9
B14 Soustraire deux équations	9
B15 La condition « non nulle » compte	9
B16 Éliminer le terme quadratique	10
B17 Positivité sur toute la droite	10
B18 Deux contraintes valables pour tout réel	10
B19 Situer les racines avec un paramètre	10
B20 Deux racines déjà sous forme explicite	10
B21 Un intervalle ouvert et une parabole convexe ...	10
B22 Bornes ouvertes ou fermées	11
B23 Exactement une racine dans un intervalle	11
B24 Le piège de la racine double	11
B25 Des racines imaginaires et de grands indices	11
B26 Trouver l'image d'une fraction	11

C — Suites, sommes et inégalités

C01 Retrouver une progression arithmétique	12
C02 Deux suites, deux produits imposés	12
C03 Échanger les rangs et les valeurs	12
C04 Vérifier l'appartenance à une suite	12

C05 Exploiter deux sommes partielles	12
C06 Le rang double moins un	13
C07 Des termes entiers positifs	13
C08 Retrouver le terme à partir de la somme	13
C09 Termes communs à deux progressions	13
C10 Trois congruences simultanées	13
C11 Un nombre et son renversé	13
C12 Triangle rectangle et progression	14
C13 Deux lectures possibles d'un même passage	14
C14 Trois termes géométriques	14
C15 Une série géométrique et ses carrés	14
C16 Une somme de trois morceaux	14
C17 Arithmétique avant, géométrie après	15
C18 Le terme central contrôle le produit	15
C19 Produit et somme des produits	15
C20 Indices impairs et indices pairs	15
C21 Multiplier puis soustraire	15
C22 Une série arithmético-géométrique	15
C23 Transformer un produit en une somme	16
C24 Passer aux inverses	16
C25 Maximiser les inverses d'une progression	16
C26 Insérer trois moyennes arithmétiques	16
C27 Nombre inconnu de moyennes	16
C28 Sommer les moyennes sans les trouver	16
C29 Insérer quatre moyennes géométriques	16
C30 Comparer deux types de moyennes	17
C31 Un minimum exponentiel	17
C32 Regrouper les termes réciproques	17
C33 Un produit qui cache neuf termes	17
C34 Une inégalité stricte	17
C35 Optimiser une expression trigonométrique	17
C36 Une moyenne arithmétique de fonctions	17
C37 Deux optimisations logarithmiques	18
C38 Adapter les poids aux exposants	18
C39 Onze parts bien choisies	18
C40 Relier les trois moyennes	18
C41 Une contrainte sur les inverses	18
C42 Développer avant de sommer	18
C43 Carrés des dix premiers impairs	19
C44 Une somme de sommes	19
C45 Un quotient de sommes remarquables	19
C46 Séparer une double somme	19
C47 Une formule pour tous les rangs	19

C48 Compter des triplets ordonnés par leurs indices	19	E06 Une puissance 2022 sans calcul lourd	28
C49 Créer une suite auxiliaire	19	E07 Une récurrence de type Fibonacci	28
C50 Une décomposition télescopique	20	E08 Une nilpotence d'ordre trois	28
C51 Trois facteurs consécutifs	20	E09 Décomposer une matrice	29
C52 Une factorisation de degré quatre	20	E10 Transposer dans le bon ordre	29
C53 Une somme de factorielles pondérées	20	E11 Compter les matrices symétriques	29
C54 Un télescopage moins visible	20	E12 Des lignes orthonormées	29

D — Binôme et arithmétique

D01 Symétrie des coefficients binomiaux	21	E13 Matrices de rotation	29
D02 Simplifier un rapport de combinaisons	21	E14 Un déterminant de module un	29
D03 Le facteur qui disparaît	21	E15 Une conjugaison qui se simplifie	30
D04 Deux termes égaux, y compris zéro	21	E16 La matrice adjointe en dimension deux	30
D05 Un logarithme au carré	22	E17 Cofacteurs en dimension trois	30
D06 Viser un exposant précis	22	E18 Déterminants d'adjointes	30
D07 Le terme indépendant de la variable	22	E19 Des déterminants emboîtés	31
D08 Reconnaître le binôme caché	22	E20 Un signe global avant le binôme	31
D09 Quels termes sont entiers ?	22	E21 Quand une matrice symétrique est-elle inversible ?	31
D10 Compter depuis la fin	22	E22 Un produit nul de matrices non nulles	31
D11 Un ou deux termes centraux	22	E23 Fabriquer une matrice orthogonale	31
D12 Un terme central trigonométrique	23	E24 L'inverse par Cayley-Hamilton	32
D13 Le coefficient linéaire	23	E25 La trace suffit en dimension deux	32
D14 Factoriser avant d'extraire	23	E26 Trace, déterminant et optimisation	32
D15 Une équation diophantienne d'exposants	23	E27 Un coefficient constant se lit en zéro	32
D16 Le nombre de puissances distinctes	23	E28 Une équation issue d'un déterminant	32
D17 Deux familles d'exposants disjointes	23	E29 Quatre termes en progression	33
D18 Somme des coefficients impairs, sauf le dernier	24	E30 Une équation trigonométrique après réduction	33
D19 Une divisibilité modulo 64	24	E31 Un déterminant de factorielles	33
D20 Une puissance impaire	24	E32 Élimination de Gauss	33
D21 Réduire l'exposant grâce à un cycle	24	E33 Déceler une incompatibilité sans résoudre	33
D22 Utiliser une puissance égale à moins un	24	E34 Identifier une combinaison linéaire	34
D23 Le dernier chiffre d'une différence	24		
D24 Le dernier chiffre d'une grande puissance	24		
D25 Les deux derniers chiffres	24		
D26 Le plus grand terme numérique	25		
D27 Quand le terme central est-il maximal ?	25		
D28 La partie fractionnaire et le conjugué	25		
D29 Une diagonale du triangle de Pascal	25		
D30 Extraire les indices pairs	25		
D31 Une somme alternée tronquée	25		
D32 Transformer un quotient de combinaisons	26		
D33 Ce que deux évaluations permettent de connaître	26		

E — Matrices et déterminants

E01 Égalité matricielle : les conditions simultanées	27	F01 Médiane d'une série regroupée	35
E02 Reconnaître une somme de carrés nulle	27	F02 Retrouver deux observations	35
E03 Un produit rectangulaire	27	F03 Translation et variance	35
E04 Associer sans permuter	28		
E05 Une matrice idempotente	28		

F — Statistiques

G — Dénombrement

G01 Vrai, faux ou sans réponse	36
G02 Un PPCM imposé	36
G03 Les voyelles aux extrémités	36
G04 Des voyelles en positions impaires	36
G05 Un mot de quatre lettres contenant G	37
G06 Éviter deux réponses identiques successives	37
G07 Trois chiffres disponibles	37
G08 Un intervalle impose le premier chiffre	37
G09 Le zéro ne peut pas ouvrir le nombre	37
G10 La divisibilité par quatre	37
G11 Commencer par 3 ou finir par 8	37
G12 Ni multiple de 3 ni multiple de 7	38
G13 Une commission avec une contrainte de composition	38

G14 Aucun couple complet dans une commission . . .	38	H01 Une commission choisie au hasard	44
G15 Un tournoi en double mixte	38	H02 Détecter un événement impossible	44
G16 Choisir des cours	38	H03 Au moins une boule verte	44
G17 Deux personnes ne doivent pas être réunies . . .	38	H04 Quatre lettres entre R et S	45
G18 Deux sous-ensembles avec intersection imposée	39	H05 Aucune boule noire voisine	45
G19 Choisir quatre lettres avec des répétitions	39	H06 Trois entiers en progression arithmétique	45
G20 Points sur un cercle	39	H07 Une somme divisible par trois	45
G21 Six points alignés	39	H08 Une probabilité géométrique	45
G22 Rectangles et carrés d'une grille	39	H09 Probabilité et cote favorable	46
G23 Trois contraintes de voisinage	40	H10 Une carte : pique ou as	46
G24 Trois familles en blocs	40	H11 Deux probabilités liées par leurs cotes	46
G25 Exactement quatre filles consécutives	40	H12 Des données de probabilité incompatibles	46
G26 Toutes les voyelles ensemble	40	H13 Multiple de trois ou de sept	46
G27 Sept chiffres de somme dix	40	H14 Remplir les régions d'un diagramme	47
G28 Lettres mal distribuées	40	H15 Retrouver les probabilités marginales	47
G29 Un dérangement avec une position fixée	41	H16 Le premier dé est connu	47
G30 Le rang dans le dictionnaire	41	H17 Deux affirmations à vérifier	47
G31 Compter les diviseurs	41	H18 Trois tirages sans remise	47
G32 Sommer les diviseurs	41	H19 Former une suite de lettres	47
G33 Puissances divisant une factorielle	41	H20 Au moins une réussite indépendante	48
G34 Table ronde et collier	41	H21 Deux étapes avant une réussite	48
G35 Une guirlande de quatre fleurs	42	H22 Indépendants, mais pas équiprobables	48
G36 Espaces sur une table ronde	42	H23 Exactement un événement se réalise	48
G37 Des objets distincts à distribuer	42	H24 Trois sacs inégalement choisis	48
G38 Distribuer six livres	42	H25 Un dé choisit le sac	49
G39 Six voyageurs, quatre chambres	42	H26 Une urne dont la composition change	49
G40 Solutions entières d'une somme	43	H27 Bayes avec trois chemins	49
G41 Un coefficient devant une inconnue	43	H28 Retrouver la couleur d'une boule transférée . . .	49
G42 Trois chiffres de somme dix	43	H29 Un modèle hypothétique de risque relatif	49
G43 Distribuer les exposants premiers	43	H30 Un témoignage dont le modèle doit être précisé	50
		H31 Normaliser une loi discrète	50
		H32 Un conditionnement dans un tableau	50

H — Probabilités