

COLLECTION ENTRAÎNEMENT • MATHÉMATIQUES

Binôme de Newton

Méthodes, exercices et corrections guidées

252

problèmes pour approfondir et progresser

Coefficients, termes particuliers et identités combinatoires : calculer avec précision sans tout développer.

Méthodes 2-3 Exercices 4-34

Réponses 35 Corrections guidées 37-40

NIVEAU LYCÉE AVANCÉ • APPROFONDISSEMENT

Édition française • Énoncés conservés et reformulés

FICHE MÉTHODE / 01

Trouver directement le bon terme

Formule du binôme

Pour $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Le terme d'indice k est le $(k+1)$ -ième terme du développement.

Une puissance composée

Dans $(Ax^p + Bx^q)^n$, le terme général est

$$\binom{n}{k} A^{n-k} B^k x^{p(n-k)+qk}.$$

Pour obtenir le coefficient de x^m , résoudre d'abord $p(n-k) + qk = m$, puis vérifier que k est un entier entre 0 et n .

Exemple : un terme constant

Dans $(x^2 + 1/x)^6$, l'exposant vaut $12 - 3k$. Le terme constant correspond à $k = 4$; son coefficient est $\binom{6}{4} = 15$.

Sommes et symétrie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (n \geq 1).$$

Les deux dernières identités s'obtiennent en prenant $x = 1$ et $x = -1$ dans $(1+x)^n$.

FICHE MÉTHODE / 02

Les identités qui font gagner du temps

Pascal et Vandermonde

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

$$\sum_k \binom{a}{k} \binom{b}{r-k} = \binom{a+b}{r}.$$

On convient que $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$. La deuxième formule vient du coefficient de x^r dans $(1+x)^a(1+x)^b$.

Sommes pondérées

En dérivant le polynôme $(1+x)^n$, puis en prenant $x = 1$:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Une deuxième dérivation donne $\sum k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$ pour $n \geq 2$.

Rapport de deux coefficients voisins

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}.$$

Ce rapport localise les coefficients maximaux sans calculer toutes les factorielles.

Pièges à éviter

Un indice obtenu par une équation n'est admissible que s'il est entier et dans $[0, n]$.
Un exposant fractionnaire de x impose de vérifier le domaine réel de l'expression.

Conventions et réponses

Dans ce livret, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ et $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$. La grille reprend la source, sauf l'exercice 40 dont l'incohérence est expliquée dans les analyses.

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

001 EXERCICE

Si $26 \left(\frac{2^3}{3} \binom{12}{2} + \frac{2^5}{5} \binom{12}{4} + \frac{2^7}{7} \binom{12}{6} + \dots + \frac{2^{13}}{13} \binom{12}{12} \right) = 3^{13} - \alpha$, alors α vaut :

- (A) 45 (B) 48 (C) 51 (D) 54

002 EXERCICE

Si les coefficients des termes centraux des développements binomiaux de $(1 + \alpha x)^{26}$ et $(1 - \alpha x)^{28}$, $\alpha \neq 0$, sont égaux, alors la valeur de α est :

- (A) 1 (B) $\frac{14}{13}$ (C) $\frac{27}{7}$ (D) $\frac{7}{27}$

003 EXERCICE

Le coefficient de x^2 dans le développement de $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10}$, $x \neq 0$, vaut :

- (A) 3240 (B) 3360 (C) 3480 (D) 3600

004 EXERCICE

Dans le développement de $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$, $x > 0$, si le terme indépendant de x est $(221)k$, alors k vaut :

- (A) 84 (B) 78 (C) 168 (D) 198

005 EXERCICE

On note la plus petite valeur de $k \in \mathbb{N}$, pour laquelle le coefficient de x^3 dans $(1+x)^3 + (1+x)^4 + (1+x)^5 + \dots + (1+x)^{99} + (1+kx)^{100}$, $x \neq 0$, est $\left(43n + \frac{101}{4}\right) \binom{100}{3}$ pour certains $n \in \mathbb{N}$, soit p . La valeur de $p + n$ vaut :

- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

006 EXERCICE

Si, pour $3 \leq r \leq 30$, $\binom{30}{30-r} + 3 \binom{30}{31-r} + 3 \binom{30}{32-r} + \binom{30}{33-r} = {}^m C_r$, alors m vaut :

- (A) 31 (B) 32 (C) 33 (D) 34

007 EXERCICE

Voici deux affirmations :

affirmation I :

$25^{13} + 20^{13} + 8^{13} + 3^{13}$ est divisible par 7.

Affirmation II :

La partie entière de $(7 + 4\sqrt{3})^{25}$ est un nombre impair.

À partir de ces affirmations, choisir la réponse correcte parmi les propositions suivantes :

- (A) L'affirmation I est fausse, mais l'affirmation II est vraie
 (B) L'affirmation I et l'affirmation II sont fausses
 (C) L'affirmation I et l'affirmation II sont vraies
 (D) L'affirmation I est vraie, mais l'affirmation II est fausse

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

008 EXERCICE

La somme des coefficients de x^{499} et x^{500} dans $(1+x)^{1000} + x(1+x)^{999} + x^2(1+x)^{998} + \dots + x^{1000}$ vaut :

- (A) $^{1002}C_{501}$ (B) $^{1001}C_{501}$ (C) $^{1000}C_{501}$ (D) $^{1002}C_{500}$

009 EXERCICE

Soit $S = \frac{1}{25!} + \frac{1}{3!23!} + \frac{1}{5!21!} + \dots$ jusqu'à 13 termes. Si $13S = \frac{2^k}{n!}$, $k \in \mathbb{N}$, alors $n + k$ vaut

- (A) 50 (B) 52 (C) 49 (D) 51

010 EXERCICE

La somme des valeurs possibles de $n \in \mathbb{N}$, pour que les coefficients de x , x^2 et x^3 dans le développement de $(1+x^2)^2(1+x)^n$, sont en S.A., vaut :

- (A) 12 (B) 9 (C) 3 (D) 7

011 EXERCICE

La valeur de $\frac{^{100}C_{50}}{51} + \frac{^{100}C_{51}}{52} + \dots + \frac{^{100}C_{100}}{101}$ est :

- (A) $\frac{2^{101}}{101}$ (B) $\frac{2^{100}}{101}$ (C) $\frac{2^{100}}{100}$ (D) $\frac{2^{101}}{100}$

012 EXERCICE

Soit C_r désigne le coefficient de x^r dans le développement binomial de $(1+x)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq n$. Si

$P_n = C_0 - C_1 + \frac{2^2}{3}C_2 - \frac{2^3}{4}C_3 + \dots + \frac{(-2)^n}{n+1}C_n$, alors la valeur de $\sum_{n=1}^{25} \frac{1}{P_{2n}}$ vaut.

- (A) 675 (B) 580 (C) 525 (D) 650

013 EXERCICE

Le coefficient de x^{48} dans $(1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \dots + 100(1+x)^{100}$ vaut

- (A) $100 \cdot ^{100}C_{49} - ^{100}C_{48}$ (B) $100 \cdot ^{101}C_{49} - ^{101}C_{50}$
(C) $^{100}C_{50} + ^{101}C_{49}$ (D) $100 \cdot ^{100}C_{49} - ^{100}C_{50}$

014 EXERCICE

Si le coefficient de x dans le développement de $(ax^2 + bx + c)(1-2x)^{26}$ est -56 et les coefficients de x^2 et x^3 sont tous deux nuls, alors $a + b + c$ vaut :

- (A) 1483 (B) 1300 (C) 1500 (D) 1403

015 EXERCICE

Le nombre de termes entiers dans le développement de $\left(5^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{8}}\right)^{1016}$ est :

- (A) 127 (B) 128 (C) 130 (D) 129

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

016 EXERCICE

Le reste de la division de $((64)^{(64)})^{(64)}$ par 7 vaut

- (A) 4 (B) 6 (C) 3 (D) 1

017 EXERCICE

Si $1^2 \cdot \binom{15}{1} + 2^2 \cdot \binom{15}{2} + 3^2 \cdot \binom{15}{3} + \dots + 15^2 \cdot \binom{15}{15} = 2^m \cdot 3^n \cdot 5^k$, où $m, n, k \in \mathbb{N}$, alors $m + n + k$ vaut :

- (A) 20 (B) 19 (C) 18 (D) 21

018 EXERCICE

Pour un entier $n \geq 2$, si la moyenne arithmétique de tous les coefficients du développement binomial de $(x + y)^{2n-3}$ est 16, alors la distance du point $P(2n - 1, n^2 - 4n)$ à la droite $x + y = 8$ est

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $5\sqrt{2}$ (D) $3\sqrt{2}$

019 EXERCICE

Dans le développement de $(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}})^n$, $n \in \mathbb{N}$, si le quotient du 15^{e} terme depuis le début par le 15^{e} terme depuis la fin vaut $\frac{1}{6}$, alors la valeur de ${}^nC_3$ est

- (A) 4960 (B) 2300 (C) 1040 (D) 4060

020 EXERCICE

La somme des termes rationnels du développement de $(2 + \sqrt{3})^8$ vaut :

- (A) 16923 (B) 18817 (C) 3763 (D) 33845

021 EXERCICE

Si $\sum_{r=1}^9 \binom{r+3}{2^r} \cdot {}^9C_r = \alpha \left(\frac{3}{2}\right)^9 - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, alors $(\alpha + \beta)^2$ vaut

- (A) 27 (B) 81 (C) 18 (D) 9

022 EXERCICE

If $\sum_{r=0}^{10} \left(\frac{10^{r+1}-1}{10^r}\right) \cdot {}^{11}C_{r+1} = \frac{\alpha^{11}-11^{11}}{10^{10}}$, then α is equal to :

- (A) 11 (B) 20 (C) 24 (D) 15

023 EXERCICE

Le plus grand $n \in \mathbb{N}$ tels que 3^n divise $50!$ vaut :

- (A) 22 (B) 20 (C) 21 (D) 23

024 EXERCICE

Le terme indépendant de x dans le développement de $\left(\frac{(x+1)}{(x^{2/3}+1-x^{1/3})} - \frac{(x-1)}{(x-x^{1/2})}\right)^{10}$, $x > 1$, vaut :

- (A) 240 (B) 120 (C) 150 (D) 210

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

025 EXERCICE

Le reste de la division de 7^{103} par 23, vaut :

- (A) 9 (B) 6 (C) 14 (D) 17

026 EXERCICE

La plus petite valeur de n pour laquelle le nombre de termes entiers du développement binomial de $(\sqrt[3]{7} + \sqrt[12]{11})^n$ est 183, vaut :

- (A) 2184 (B) 2172 (C) 2196 (D) 2148

027 EXERCICE

Supposons que les coefficients de trois termes consécutifs T_r, T_{r+1} et T_{r+2} dans le développement binomial de $(a+b)^{12}$ sont en S.G. et que p soit le nombre de valeurs possibles de r . On note q la somme de tous les termes rationnels du développement binomial de $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^{12}$. Alors $p+q$ vaut :

- (A) 295 (B) 283 (C) 299 (D) 287

028 EXERCICE

Supposons que A et B sont les coefficients des 30^{e} et 12^{e} termes respectifs du développement binomial de $(1+x)^{2n-1}$. Si $2A = 5B$, alors n vaut :

- (A) 20 (B) 19 (C) 22 (D) 21

029 EXERCICE

Pour certains $n \neq 10$, les coefficients des 5^{e} , 6^{e} et 7^{e} termes du développement binomial de $(1+x)^{n+4}$ sont en S.A.. Le plus grand coefficient du développement de $(1+x)^{n+4}$ est :

- (A) 10 (B) 35 (C) 70 (D) 20

030 EXERCICE

Si, dans le développement de $(1+x)^p(1-x)^q$, les coefficients de x et x^2 sont 1 et -2 , respectivement, alors p^2+q^2 vaut :

- (A) 8 (B) 20 (C) 13 (D) 18

031 EXERCICE

Soit α, β, γ et δ les coefficients de x^7, x^5, x^3 et x respectivement dans le développement de $(x + \sqrt{x^3 - 1})^5 + (x - \sqrt{x^3 - 1})^5, x > 1$. Si u et v vérifient les équations

$$\alpha u + \beta v = 18,$$

$$\gamma u + \delta v = 20,$$

alors $u+v$ vaut :

- (A) 4 (B) 3 (C) 5 (D) 8

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

032 EXERCICE

La somme des coefficients de $x^{2/3}$ et $x^{-2/5}$ dans le développement binomial de $(x^{2/3} + \frac{1}{2}x^{-2/5})^9$ est

- (A) 19/4 (B) 69/16 (C) 63/16 (D) 21/4

033 EXERCICE

Le coefficient de x^{70} dans $x^2(1+x)^{98} + x^3(1+x)^{97} + x^4(1+x)^{96} + \dots + x^{54}(1+x)^{46}$ est ${}^{99}C_p - {}^{46}C_q$. Alors a valeur possible de $p + q$ vaut :

- (A) 61 (B) 83 (C) 55 (D) 68

034 EXERCICE

Si le terme indépendant de x dans le développement de $(\sqrt{a}x^2 + \frac{1}{2x^3})^{10}$ est 105, alors a^2 vaut :

- (A) 6 (B) 4 (C) 2 (D) 9

035 EXERCICE

Si le terme constant du développement de $(\frac{\sqrt[5]{3}}{x} + \frac{2x}{\sqrt[3]{5}})^{12}$, $x \neq 0$, est $\alpha \times 2^8 \times \sqrt[5]{3}$, alors 25α vaut :

- (A) 724 (B) 742 (C) 693 (D) 639

036 EXERCICE

Si les coefficients de x^4 , x^5 et x^6 dans le développement de $(1+x)^n$ sont en S.A., alors la valeur maximale de n est :

- (A) 28 (B) 21 (C) 7 (D) 14

037 EXERCICE

La somme des termes rationnels du développement de $(2^{\frac{1}{5}} + 5^{\frac{1}{3}})^{15}$ vaut :

- (A) 633 (B) 6131 (C) 3133 (D) 931

038 EXERCICE

Soit m et n les coefficients des septième et treizième termes respectivement

dans le développement de $(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}})^{18}$. Alors $(\frac{n}{m})^{\frac{1}{3}}$ vaut :

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{9}{4}$

039 EXERCICE

Soit a la somme des coefficients du développement de $(1 - 2x + 2x^2)^{2023}(3 - 4x^2 + 2x^3)^{2024}$ et $b = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\int_0^x \frac{\log(1+t)}{t^{2024}+1} dt}{x^2} \right)$. Si l'équation $cx^2 + dx + e = 0$ et $2bx^2 + ax + 4 = 0$ ont une racine commune, où $c, d, e \in \mathbb{R}$, alors $d : c : e$ vaut

- (A) 2 : 1 : 4 (B) 1 : 1 : 4 (C) 1 : 2 : 4 (D) 4 : 1 : 4

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

040 EXERCICE

Supposons que $2 - p, p, 2 - \alpha, \alpha$ sont les coefficients de quatre termes consécutifs du développement de $(1 + x)^n$. La valeur de $p^2 - \alpha^2 + 6\alpha + 2p$ vaut

- (A) 8 (B) 4 (C) 6 (D) 10

041 EXERCICE

${}^{n-1}C_r = (k^2 - 8)^n C_{r+1}$ si et seulement si :

- (A) $2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{2} < k \leq 3$
 (C) $2\sqrt{3} < k < 3\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3} < k \leq 3\sqrt{2}$

042 EXERCICE

Si A désigne la somme des coefficients du développement de $(1 - 3x + 10x^2)^n$ et B désigne la somme des coefficients du développement de $(1 + x^2)^n$, alors :

- (A) $B = A^3$ (B) $3A = B$ (C) $A = 3B$ (D) $A = B^3$

043 EXERCICE

Soit $(a + bx + cx^2)^{10} = \sum_{i=0}^{20} p_i x^i, a, b, c \in \mathbb{N}$.

Si $p_1 = 20$ et $p_2 = 210$, alors $2(a + b + c)$ vaut :

- (A) 15 (B) 8 (C) 6 (D) 12

044 EXERCICE

Le coefficient de x^5 dans le développement de $(2x^3 - \frac{1}{3x^2})^5$ vaut :

- (A) $\frac{26}{3}$ (B) $\frac{80}{9}$ (C) 9 (D) 8

045 EXERCICE

La partie fractionnaire du nombre $\frac{4^{2022}}{15}$ vaut

- (A) $\frac{8}{15}$ (B) $\frac{4}{15}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) $\frac{14}{15}$

046 EXERCICE

La somme des coefficients de trois termes consécutifs du développement binomial de $(1 + x)^{n+2}$, dont le rapport est $1 : 3 : 5$, vaut :

- (A) 63 (B) 92 (C) 25 (D) 41

047 EXERCICE

Si le 1011^{e} terme depuis la fin du développement binomial de $(\frac{4x}{5} - \frac{5}{2x})^{2022}$ est 1024 fois 1011^{e} terme depuis le début, alors $|x|$ vaut

- (A) $\frac{5}{16}$ (B) 8 (C) 12 (D) 15

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

048

EXERCICE

Supposons que le nombre $(22)^{2022} + (2022)^{22}$ donne le reste α lors de la division par 3 et β lors de la division par 7. Alors $(\alpha^2 + \beta^2)$ vaut :

- (A) 13 (B) 10 (C) 20 (D) 5

049

EXERCICE

Si les coefficients de x et x^2 dans $(1+x)^p(1-x)^q$ sont 4 et -5 respectivement, alors $2p+3q$ vaut :

- (A) 66 (B) 60 (C) 69 (D) 63

050

EXERCICE

Si le coefficient de x^7 dans $(ax - \frac{1}{bx^2})^{13}$ et le coefficient de x^{-5} dans $(ax + \frac{1}{bx^2})^{13}$ sont égaux, alors a^4b^4 vaut :

- (A) 22 (B) 33 (C) 44 (D) 11

051

EXERCICE

$25^{190} - 19^{190} - 8^{190} + 2^{190}$ est divisible par :

- (A) 14 mais pas par 34 (B) ni 14 ni 34
(C) les deux 14 et 34 (D) 34 mais pas par 14

052

EXERCICE

La valeur absolue de la différence des coefficients de x^{10} et x^7 dans le développement de $(2x^2 + \frac{1}{2x})^{11}$ vaut :

- (A) $11^3 - 11$ (B) $13^3 - 13$ (C) $12^3 - 12$ (D) $10^3 - 10$

053

EXERCICE

Si le coefficient de x^7 dans $(ax^2 + \frac{1}{2bx})^{11}$ et x^{-7} dans $(ax - \frac{1}{3bx^2})^{11}$ sont égaux, alors :

- (A) $243ab = 64$ (B) $32ab = 729$ (C) $64ab = 243$ (D) $729ab = 32$

054

EXERCICE

Parmi les affirmations :

(S1) : $2023^{2022} - 1999^{2022}$ est divisible par 8

(S2) : $13(13)^n - 12n - 13$ est divisible par 144 pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$

- (A) les deux (S1) et (S2) sont fausses (B) seule (S1) est vraie
(C) seule (S2) est vraie (D) les deux (S1) et (S2) sont vraies

055

EXERCICE

Si le quotient du cinquième terme depuis le début par le cinquième depuis la fin du développement de $(\sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}})^n$ est $\sqrt{6} : 1$, alors le troisième terme depuis le début vaut :

- (A) $30\sqrt{2}$ (B) $60\sqrt{3}$ (C) $60\sqrt{2}$ (D) $30\sqrt{3}$

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

056 EXERCICE

Soit $x = (8\sqrt{3} + 13)^{13}$ et $y = (7\sqrt{2} + 9)^9$. Si $[t]$ désigne le plus grand entier $\leq t$, alors :

- (A) $[x]$ est impair, mais $[y]$ est pair
 (B) $[x]$ et $[y]$ sont tous deux impairs
 (C) $[x] + [y]$ est pair
 (D) $[x]$ est pair, mais $[y]$ est impair

057 EXERCICE

Si le coefficient de x^{15} dans le développement de $\left(ax^3 + \frac{1}{bx^{1/3}}\right)^{15}$ est égal au coefficient de x^{-15} dans le développement de $\left(ax^{1/3} - \frac{1}{bx^3}\right)^{15}$, où a et b sont des réels positifs, alors pour chacun de ces couples (a, b) :

- (A) $a = 3b$ (B) $ab = 1$ (C) $ab = 3$ (D) $a = b$

058 EXERCICE

Soit K la somme des coefficients des puissances impaires de x dans le développement de $(1+x)^{99}$. On note a soit le terme central du développement de $\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{200}$. Si $\frac{{}^{200}C_{99}K}{a} = \frac{2^l m}{n}$, où m et n sont des nombres impairs, alors le couple (l, n) vaut

- (A) (50, 101) (B) (50, 51) (C) (51, 101) (D) (51, 99)

059 EXERCICE

Le reste de la division de $7^{2022} + 3^{2022}$ par 5 vaut :

- (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

060 EXERCICE

Le reste de la division de $(2021)^{2022} + (2022)^{2021}$ par 7 est

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 6

061 EXERCICE

Le reste de la division de $(11)^{1011} + (1011)^{11}$ par 9 est

- (A) 1 (B) 4 (C) 6 (D) 8

062 EXERCICE

Pour deux réels positifs a et b tels que $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^3} = 4$, alors la valeur minimale du terme constant dans le développement de $\left(ax^{\frac{1}{8}} + bx^{-\frac{1}{12}}\right)^{10}$ vaut :

- (A) $\frac{105}{2}$ (B) $\frac{105}{4}$ (C) $\frac{105}{8}$ (D) $\frac{105}{16}$

063 EXERCICE

Si le terme constant du développement de

$\left(3x^3 - 2x^2 + \frac{5}{x^5}\right)^{10}$ est 2^k , où k est un entier impair, alors la valeur de k vaut :

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

064 EXERCICE

Le terme indépendant de x dans le développement de

$$(1 - x^2 + 3x^3)\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{5x^2}\right)^{11}, x \neq 0 \text{ vaut :}$$

- (A) $\frac{7}{40}$ (B) $\frac{33}{200}$ (C) $\frac{39}{200}$ (D) $\frac{11}{50}$

065 EXERCICE

Le reste de la division de $(2021)^{2023}$ par 7 vaut :

- (A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 6

066 EXERCICE

Le coefficient de x^{101} dans l'expression $(5+x)^{500} + x(5+x)^{499} + x^2(5+x)^{498} + \dots + x^{500}$, $x > 0$, est

- (A) ${}^{501}C_{101} (5)^{399}$ (B) ${}^{501}C_{101} (5)^{400}$ (C) ${}^{501}C_{100} (5)^{400}$ (D) ${}^{500}C_{101} (5)^{399}$

067 EXERCICE

Si $\frac{1}{2 \cdot 3^{10}} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^9} + \dots + \frac{1}{2^{10} \cdot 3} = \frac{K}{2^{10} \cdot 3^{10}}$, alors le reste de la division de K par 6 vaut :

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5

068 EXERCICE

Le reste de la division de 3^{2022} par 5 vaut :

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

069 EXERCICE

A valeur possible de ' x ', pour laquelle le neuvième terme du développement de

$$\left\{ 3^{\log_3 \sqrt{25^{x-1}+7}} + 3^{\left(-\frac{1}{8}\right)\log_3(5^{x-1}+1)} \right\}^{10} \text{ suivant les puissances croissantes de } 3^{\left(-\frac{1}{8}\right)\log_3(5^{x-1}+1)} \text{ vaut } 180, \text{ vaut :}$$

- (A) 0 (B) -1 (C) 2 (D) 1

070 EXERCICE

Si les coefficients de x^7 dans $\left(x^2 + \frac{1}{bx}\right)^{11}$ et x^{-7} dans $\left(x - \frac{1}{bx^2}\right)^{11}$, $b \neq 0$, sont égaux, alors la valeur de b est égal à :

- (A) 2 (B) -1 (C) 1 (D) -2

071 EXERCICE

La somme de tous les termes rationnels du

développement de $(2^{1/3} + 3^{1/4})^{12}$ vaut :

- (A) 89 (B) 27 (C) 35 (D) 43

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

072 EXERCICE

Si la valeur maximale du terme indépendant de 'x' dans le

développement de $\left(x \sin \alpha + a \frac{\cos \alpha}{x}\right)^{10}$ est $\frac{10!}{(5!)^2}$, alors la valeur de 'a' vaut :

- (A) -1 (B) 1 (C) -2 (D) 2

073 EXERCICE

Le plus petit entier strictement supérieur

à $\left(1 + \frac{1}{10^{100}}\right)^{10^{100}}$ est _____.

- (A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

074 EXERCICE

Si b est très petit par rapport à a , de sorte que le cube et les puissances supérieures de $\frac{b}{a}$ peuvent être négligés dans l'identité $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-2b} + \frac{1}{a-3b} + \dots + \frac{1}{a-nb} = \alpha n + \beta n^2 + \gamma n^3$, alors la valeur de γ vaut :

- (A) $\frac{a^2+b}{3a^3}$ (B) $\frac{a+b}{3a^2}$ (C) $\frac{b^2}{3a^3}$ (D) $\frac{a+b^2}{3a^3}$

075 EXERCICE

Si le quatrième terme du développement de $(x + x^{\log_2 x})^7$ est 4480, alors la valeur de x où $x \in \mathbb{N}$ vaut :

- (A) 3 (B) 1 (C) 4 (D) 2

076 EXERCICE

Si n est le nombre de termes irrationnels du développement de $(3^{1/4} + 5^{1/8})^{60}$, alors $(n - 1)$ est divisible par :

- (A) 30 (B) 8 (C) 7 (D) 26

077 EXERCICE

La valeur maximale du terme indépendant de 't' dans le développement de $\left(tx^{\frac{1}{5}} + \frac{(1-x)^{\frac{1}{10}}}{t}\right)^{10}$ où $x \in (0, 1)$ vaut :

- (A) $\frac{10!}{\sqrt{3(5!)^2}}$ (B) $\frac{2 \cdot 10!}{3\sqrt{3(5!)^2}}$
(C) $\frac{10!}{3(5!)^2}$ (D) $\frac{2 \cdot 10!}{3(5!)^2}$

078 EXERCICE

Si le terme constant du développement binomial de $\left(\sqrt{x} - \frac{k}{x^2}\right)^{10}$ est 405, alors $|k|$ vaut :

- (A) 3 (B) 9 (C) 1 (D) 2

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

079 EXERCICE

Si $\{p\}$ désigne la partie fractionnaire du nombre p , alors

$\left\{\frac{3^{200}}{8}\right\}$, vaut :

- (A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{3}{8}$

080 EXERCICE

Si le terme indépendant de x dans le développement de

$\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$ est k , alors $18k$ vaut :

- (A) 5 (B) 9 (C) 7 (D) 11

081 EXERCICE

Si le nombre de termes entiers du développement

de $(3^{1/2} + 5^{1/8})^n$ vaut exactement 33, alors la plus petite valeur de n vaut :

- (A) 264 (B) 256 (C) 128 (D) 248

082 EXERCICE

Soit $\alpha > 0, \beta > 0$ tel que

$\alpha^3 + \beta^2 = 4$. Si la valeur maximale du terme indépendant de x dans

le développement binomial de $\left(\alpha x^{\frac{1}{9}} + \beta x^{-\frac{1}{6}}\right)^{10}$ est $10k$,

alors k vaut :

- (A) 176 (B) 336 (C) 352 (D) 84

083 EXERCICE

Dans le développement de $\left(\frac{x}{\cos \theta} + \frac{1}{x \sin \theta}\right)^{16}$, si ℓ_1 est la plus petite valeur du terme indépendant de x lorsque

$\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ et ℓ_2 est la plus petite valeur du terme indépendant de x lorsque $\frac{\pi}{16} \leq \theta \leq \frac{\pi}{8}$, alors le quotient ℓ_2 :

- (A) 8 : 1 (B) 16 : 1 (C) 1 : 8 (D) 1 : 16

084 EXERCICE

§ α et β les coefficients de x^4 et x^2 respectivement dans le développement de

$\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^6 + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^6$, alors

- (A) $\alpha + \beta = 60$ (B) $\alpha - \beta = 60$ (C) $\alpha + \beta = -30$ (D) $\alpha - \beta = -132$

085 EXERCICE

Le coefficient de x^7 dans l'expression

$(1+x)^{10} + x(1+x)^9 + x^2(1+x)^8 + \dots + x^{10}$ est :

- (A) 120 (B) 330 (C) 420 (D) 210

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

086 EXERCICE

Le plus grand entier positif k , pour laquelle $49^k + 1$ est un diviseur de la somme $49^{125} + 49^{124} + \dots + 49^2 + 49 + 1$, est :

- (A) 32 (B) 60 (C) 63 (D) 65

087 EXERCICE

Le terme indépendant de x dans le développement de $\left(\frac{1}{60} - \frac{x^8}{81}\right) \cdot (2x^2 - \frac{3}{x^2})^6$ vaut :

- (A) 36 (B) - 108 (C) - 36 (D) - 72

088 EXERCICE

Le coefficient de x^{18} dans le produit $(1+x)(1-x)^{10}(1+x+x^2)^9$ vaut :

- (A) 126 (B) - 84 (C) - 126 (D) 84

089 EXERCICE

Le plus petit entier naturel n , tel que le coefficient de x dans le développement de $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n$ est ${}^nC_{23}$, vaut :

- (A) 23 (B) 58 (C) 38 (D) 35

090 EXERCICE

Si le quatrième terme du développement binomial de $\left(\frac{2}{x} + x^{\log_8 x}\right)^6$ ($x > 0$) est 20×8^7 , alors a valeur de x vaut :

- (A) 8^{-2} (B) 8^2 (C) 8^3 (D) 8

091 EXERCICE

Si le quatrième terme du développement binomial de

$\left(\sqrt{x^{\left(\frac{1}{1+\log_{10} x}\right)}} + x^{\frac{1}{12}}\right)^6$ vaut 200, et $x > 1$, alors la valeur de x vaut :

- (A) 100 (B) 10^3 (C) 10 (D) 10^4

092 EXERCICE

Le nombre total de termes irrationnels du développement binomial de $(7^{1/5} - 3^{1/10})^{60}$ vaut :

- (A) 54 (B) 55 (C) 49 (D) 48

093 EXERCICE

A quotient du 5^e terme depuis le début par le 5^e terme depuis la fin du développement binomial de

$\left(2^{1/3} + \frac{1}{2(3)^{1/3}}\right)^{10}$ vaut :

- (A) $1 : 2(6)^{1/3}$ (B) $1 : 4(6)^{1/3}$ (C) $2(36)^{1/3} : 1$ (D) $4(36)^{1/3} : 1$

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

094 EXERCICE

La somme des valeurs réelles de x pour lesquelles le terme central du développement binomial de $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{x}\right)^8$ vaut 5670 vaut :

- (A) 0 (B) 8 (C) 6 (D) 4

095 EXERCICE

La valeur positive de λ pour laquelle le coefficient de x^2 dans l'expression $x^2 \left(\sqrt{x} + \frac{\lambda}{x^2}\right)^{10}$ est 720, est -

- (A) 4 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 3 (D) $\sqrt{5}$

096 EXERCICE

Si le troisième terme du développement binomial de $(1 + x^{\log_2 x})^5$ vaut 2560, alors a valeur possible de x est -

- (A) $2\sqrt{2}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{4}$

097 EXERCICE

Si la partie fractionnaire du nombre $\left\{\frac{2^{403}}{15}\right\}$ est $\frac{k}{15}$, alors k vaut :

- (A) 8 (B) 14 (C) 6 (D) 1

098 EXERCICE

Le coefficient de x^{-5} dans le développement binomial de

$$\left(\frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1} - \frac{x-1}{x-x^{\frac{1}{2}}}\right)^{10}, \text{ où } x \neq 0, 1, \text{ vaut :}$$

- (A) 1 (B) 4 (C) -4 (D) -1

099 EXERCICE

Si $(27)^{999}$ par 7, alors le reste vaut :

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6

100 EXERCICE

Si les coefficients de x^{-2} et x^{-4} dans le développement de $\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2x^{\frac{1}{3}}}\right)^{18}$, ($x > 0$), sont m et n respectivement, alors $\frac{m}{n}$ vaut :

- (A) 182 (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) 27

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

101 EXERCICE

Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$,

$$\text{si } (1+x)^{2016} + x(1+x)^{2015} + x^2(1+x)^{2014} + \dots + x^{2016} =$$

$\sum_{i=0}^{2016} a_i x^i$, alors a_{17} vaut :

- (A) $\frac{2017!}{17! 2000!}$ (B) $\frac{2016!}{17! 1999!}$ (C) $\frac{2017!}{2000!}$ (D) $\frac{2016!}{16!}$

102 EXERCICE

Le terme indépendant de x dans le développement de

$$\left(\frac{x+1}{x^{2/3}-x^{1/3}+1} - \frac{x-1}{x-x^{1/2}} \right)^{10} \text{ est}$$

- (A) 4 (B) 120 (C) 210 (D) 310

103 EXERCICE

Si n est un entier positif, alors $(\sqrt{3}+1)^{2n} - (\sqrt{3}-1)^{2n}$ vaut :

- (A) un nombre irrationnel
(B) un entier positif impair
(C) un entier positif pair
(D) a un rationnel qui n'est pas un entier positif

104 EXERCICE

Le reste de la division de $8^{2n} - (62)^{2n+1}$ par 9 vaut :

- (A) 2 (B) 7 (C) 8 (D) 0

105 EXERCICE

Dans le développement binomial de $(a-b)^n$, $n \geq 5$, la somme des 5th et 6th termes est nulle, alors a/b vaut

- (A) $\frac{n-5}{6}$ (B) $\frac{n-4}{5}$ (C) $\frac{5}{n-4}$ (D) $\frac{6}{n-5}$

106 EXERCICE

Si le développement en puissances de x de la fonction $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$ est $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ alors a_n est

- (A) $\frac{b^n - a^n}{b-a}$ (B) $\frac{a^n - b^n}{b-a}$
(C) $\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{b-a}$ (D) $\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$

107 EXERCICE

Si le coefficient de x^7 dans $\left[ax^2 + \left(\frac{1}{bx} \right) \right]^{11}$ est égal au coefficient de x^{-7} dans $\left[ax - \left(\frac{1}{bx^2} \right) \right]^{11}$, alors a et b vérifient la relation

- (A) $a - b = 1$ (B) $a + b = 1$ (C) $\frac{a}{b} = 1$ (D) $ab = 1$

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

108

EXERCICE

§ x est assez petit pour que x^3 et les puissances supérieures de x peuvent être négligées, alors $\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}} - (1+\frac{1}{2}x)^3}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ peut être soit une approximation est

- (A) $1 - \frac{3}{8}x^2$ (B) $3x + \frac{3}{8}x^2$ (C) $-\frac{3}{8}x^2$ (D) $\frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2$

109

EXERCICE

Si les coefficients de r^e , $(r+1)^e$, et $(r+2)^e$ termes du développement binomial de $(1+y)^m$ forment une A.P., alors m et r vérifient l'équation

- (A) $m^2 - m(4r-1) + 4r^2 - 2 = 0$ (B) $m^2 - m(4r+1) + 4r^2 + 2 = 0$
 (C) $m^2 - m(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$ (D) $m^2 - m(4r-1) + 4r^2 + 2 = 0$

110

EXERCICE

Le coefficient du terme central du développement binomial en puissances de x de $(1+\alpha x)^4$ et $(1-\alpha x)^6$ est le même si α vaut

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{10}{3}$ (C) $\frac{-3}{10}$ (D) $\frac{-5}{3}$

111

EXERCICE

Le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)(1-x)^n$ est

- (A) $(-1)^{n-1}n$ (B) $(-1)^n(1-n)$
 (C) $(-1)^{n-1}(n-1)^2$ (D) $(n-1)$

112

EXERCICE

§ x est positif, le premier terme négatif du développement de $(1+x)^{27/5}$ est

- (A) 6e terme (B) 7e terme (C) 5e terme (D) 8e terme.

113

EXERCICE

Le nombre de termes entiers dans le développement de $(\sqrt{3} + \sqrt[8]{5})^{256}$ est

- (A) 35 (B) 32 (C) 33 (D) 34

114

EXERCICE

Les coefficients de x^p et x^q dans le développement de $(1+x)^{p+q}$ sont

- (A) égaux (B) opposés
 (C) inverses l'un de l'autre (D) aucune de ces réponses

115

EXERCICE

Le plus petit entier positif strictement supérieur à $(1+0.0001)^{10000}$ est

- (A) 4 (B) 5 (C) 2 (D) 3

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

116 EXERCICE

Si $(1 - x^3)^{10} = \sum_{r=0}^{10} a_r x^r (1 - x)^{30-2r}$, alors $\frac{9a_9}{a_{10}}$ vaut _____.

117 EXERCICE

Si la somme des coefficients de x^7 et x^{14} dans le développement de $(\frac{1}{x^3} - x^4)^n$, $x \neq 0$, est nulle, alors le valeur de n est _____.

118 EXERCICE

Si $(\frac{1}{^{15}C_0} + \frac{1}{^{15}C_1}) (\frac{1}{^{15}C_1} + \frac{1}{^{15}C_2}) \dots (\frac{1}{^{15}C_{12}} + \frac{1}{^{15}C_{13}}) = \frac{\alpha^{13}}{^{14}C_0 ^{14}C_1 \dots ^{14}C_{12}}$, alors 30α vaut _____.

119 EXERCICE

Le produit des deux derniers chiffres de $(1919)^{1919}$ est _____.

120 EXERCICE

La somme de la série

$2 \times 1 \times ^{20}C_4 - 3 \times 2 \times ^{20}C_5 + 4 \times 3 \times ^{20}C_6 - 5 \times 4 \times ^{20}C_7 + \dots + 18 \times 17 \times ^{20}C_{20}$, vaut _____.

121 EXERCICE

Soit $(1 + x + x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$. Si $(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}) - 11a_2 = 121k$, alors k vaut _____.

122 EXERCICE

Si $\alpha = 1 + \sum_{r=1}^6 (-3)^{r-1} ^{112}C_{2r-1}$, alors la distance du point $(12, \sqrt{3})$ à la droite $\alpha x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ est _____.

123 EXERCICE

La somme des termes rationnels du développement de $(1 + 2^{1/3} + 3^{1/2})^6$ vaut _____.

124 EXERCICE

Si $\sum_{r=1}^{30} \frac{r^2 (^{30}C_r)^2}{^{30}C_{r-1}} = \alpha \times 2^{29}$, alors α vaut _____.

125 EXERCICE

Si $\sum_{r=0}^5 \frac{^{11}C_{2r+1}}{2r+2} = \frac{m}{n}$, $\gcd(m, n) = 1$, alors $m - n$ vaut _____.

126 EXERCICE

Le reste de la division de 428^{2024} par 21 est _____.

127 EXERCICE

Si les deuxième, troisième et quatrième termes du développement de $(x + y)^n$ sont 135, 30 et $\frac{10}{3}$, respectivement, alors $6(n^3 + x^2 + y)$ vaut _____.

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

128 EXERCICE

Si le terme constant du développement de $(1 + 2x - 3x^3)\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$ est p , alors $108p$ vaut

_____.

129 EXERCICE

Soit $a = 1 + \frac{2C_2}{3!} + \frac{3C_2}{4!} + \frac{4C_2}{5!} + \dots$, $b = 1 + \frac{1C_0+1C_1}{1!} + \frac{2C_0+2C_1+2C_2}{2!} + \frac{3C_0+3C_1+3C_2+3C_3}{3!} + \dots$. Alors $\frac{2b}{a^2}$ est égal à _____.

130 EXERCICE

Si le coefficient de x^{30} dans le développement de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^6 (1 + x^2)^7 (1 - x^3)^8$; $x \neq 0$ est α , alors $|\alpha|$ vaut

_____.

131 EXERCICE

On note le coefficient de x^r dans le développement de

$$(x+3)^{n-1} + (x+3)^{n-2}(x+2) + (x+3)^{n-3}(x+2)^2 + \dots + (x+2)^{n-1} \text{ soit } \alpha_r. \text{ Si}$$

$$\sum_{r=0}^n \alpha_r = \beta^n - \gamma^n, \beta, \gamma \in \mathbb{N}, \text{ alors la valeur de } \beta^2 + \gamma^2 \text{ vaut } \underline{\hspace{2cm}}.$$

132 EXERCICE

Dans le développement de $(1+x)(1-x^2)\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^5$, $x \neq 0$, la somme des coefficients de x^3 et x^{-13} vaut _____.

133 EXERCICE

Soit $\alpha = \sum_{k=0}^n \left(\frac{{}^nC_k}{k+1}\right)$ et $\beta = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{{}^nC_k {}^nC_{k+1}}{k+2}\right)$ Si $5\alpha = 6\beta$, alors n vaut _____.

134 EXERCICE

Le nombre de termes entiers du développement de $\left\{7^{\left(\frac{1}{2}\right)} + 11^{\left(\frac{1}{6}\right)}\right\}^{824}$ vaut _____.

135 EXERCICE

Le reste de la division de $64^{32^{32}}$ par 9 vaut _____.

136 EXERCICE

Si $\frac{{}^{11}C_1}{2} + \frac{{}^{11}C_2}{3} + \dots + \frac{{}^{11}C_9}{10} = \frac{n}{m}$ avec $\gcd(n, m) = 1$, alors $n + m$ vaut _____.

137 EXERCICE

Le coefficient de x^{2012} dans le développement de $(1-x)^{2008}(1+x+x^2)^{2007}$ vaut _____.

138 EXERCICE

Le reste de la division de 7^{103} par 17, est _____

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

139 EXERCICE

Soit α le terme constant du développement binomial de $\left(\sqrt{x} - \frac{6}{x^{\frac{3}{2}}}\right)^n$, $n \leq 15$. Si la somme des coefficients des autres termes du développement vaut 649 et le coefficient de x^{-n} est $\lambda\alpha$, alors λ est égal à _____.

140 EXERCICE

La moyenne des coefficients de $x, x^2, \dots, x^7$ dans le développement binomial de $(2+x)^9$ est _____.

141 EXERCICE

Le nombre de termes entiers dans le développement de $\left(3^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{4}}\right)^{680}$ vaut _____.

142 EXERCICE

Le coefficient de x^7 dans $(1-x+2x^3)^{10}$ est _____.

143 EXERCICE

Soit $[t]$ désigne le plus grand entier $\leq t$. Si le terme constant du développement de $\left(3x^2 - \frac{1}{2x^5}\right)^7$ est α , alors $[\alpha]$ vaut _____.

144 EXERCICE

Le plus grand entier naturel n tels que 3^n divise $66!$ est _____.

145 EXERCICE

On suppose que le sixième terme du développement binomial de $\left(\sqrt{2^{\log_2(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\log_2 3}}\right)^m$ suivant les puissances croissantes de $2^{(x-2)\log_2 3}$, soit 21. Si les coefficients binomiaux des deuxième, troisième et quatrième termes du développement sont les premier, troisième et cinquième termes d'une A.P., alors la somme des carrés de toutes les valeurs possibles de x est _____.

146 EXERCICE

Si le terme sans x dans le développement de $\left(x^{\frac{2}{3}} + \frac{\alpha}{x^3}\right)^{22}$ est 7315, alors $|\alpha|$ vaut _____.

147 EXERCICE

Le reste de la division de $19^{200} + 23^{200}$ par 49, est _____.

148 EXERCICE

Le coefficient de x^{-6} , dans le

développement de $\left(\frac{4x}{5} + \frac{5}{2x^2}\right)^9$, est

149 EXERCICE

Si le terme constant du développement binomial de $\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2} - \frac{4}{x^l}\right)^9$ est -84 et le coefficient de x^{-3l} est $2^\alpha \beta$, où $\beta < 0$ est un nombre impair, alors $|\alpha l - \beta|$ vaut _____.

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

150 EXERCICE

Le reste de la division de 5^{99} par 11 est _____.

151 EXERCICE

Soit $\alpha > 0$, la plus petite valeur telle que le développement de $\left(x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{x^3}\right)^{30}$ contienne un terme $\beta x^{-\alpha}$, $\beta \in \mathbb{N}$.
Alors α vaut _____.

152 EXERCICE

50^e racine d'un nombre x est 12 et 50^e racine d'un autre nombre y est 18. Alors le reste obtenu en divisant $(x + y)$ par 25 est _____.

153 EXERCICE

Les coefficients de trois termes consécutifs du développement binomial de $(1 + 2x)^n$ ont pour rapport 2 : 5 : 8. Alors le coefficient du terme central de ces trois termes vaut _____.

154 EXERCICE

Si le coefficient de x^9 dans $\left(\alpha x^3 + \frac{1}{\beta x}\right)^{11}$ et le coefficient de x^{-9} dans $\left(\alpha x - \frac{1}{\beta x^3}\right)^{11}$ sont égaux, alors $(\alpha\beta)^2$ vaut _____.

155 EXERCICE

Le reste de la division de $(2023)^{2023}$ par 35 est _____.

156 EXERCICE

Le terme constant du développement de $\left(2x + \frac{1}{x^7} + 3x^2\right)^5$ est _____.

157 EXERCICE

La somme des coefficients des trois premiers termes du développement de $\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^n$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, soit 376. Alors le coefficient de x^4 est _____.

158 EXERCICE

Le quotient du cinquième terme depuis le début par le cinquième depuis la fin du développement développement de $\left(\sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$, suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ soit $\sqrt[4]{6} : 1$. Si le sixième terme depuis le début vaut $\frac{\alpha}{\sqrt[4]{3}}$, alors α vaut _____.

159 EXERCICE

On suppose que les coefficients des termes centraux des développements de $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \beta x\right)^4$, $(1 - 3\beta x)^2$ et $\left(1 - \frac{\beta}{2}x\right)^6$, $\beta > 0$, forment les trois premiers termes d'une S.A.. Si d est la raison de cette suite, alors $50 - \frac{2d}{\beta^2}$ vaut _____.

160 EXERCICE

Pour que le 9^e terme du développement binomial de $(3 + 6x)^n$, suivant les puissances croissantes de $6x$, soit le plus grand pour $x = \frac{3}{2}$, la plus petite valeur de n est n_0 . Si k est le quotient du coefficient de x^6 par le coefficient de x^3 , alors $k + n_0$ vaut :

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

161 EXERCICE

Si la valeur maximale du terme indépendant de t dans le développement de $\left(t^2 x^{\frac{1}{5}} + \frac{(1-x)^{\frac{1}{10}}}{t}\right)^{15}$, $x \geq 0$, est K , alors $8K$ vaut _____.

162 EXERCICE

On note les coefficients de x^{-1} et x^{-3} dans le développement de $\left(2x^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\right)^{15}$, $x > 0$, soit m et n respectivement. Si r est un entier positif tel que $mn^2 = {}^{15}C_r \cdot 2^r$, alors la valeur de r vaut _____.

163 EXERCICE

Le nombre d'entiers positifs k tels que le terme constant du développement binomial de $\left(2x^3 + \frac{3}{x^k}\right)^{12}$, $x \neq 0$ est $2^8 \cdot l$, où l soit un entier impair, vaut _____.

164 EXERCICE

Si le coefficient de x^{10} dans le développement binomial de $\left(\frac{\sqrt{x}}{5^{\frac{1}{4}}} + \frac{\sqrt{5}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^{60}$ est $5^k \cdot l$, où $l, k \in \mathbb{N}$ et l est premier avec 5 , alors k vaut _____.

165 EXERCICE

Si la somme des coefficients des puissances paires strictement positives de x dans le développement binomial de $\left(2x^3 + \frac{3}{x}\right)^{10}$ est $5^{10} - \beta \cdot 3^9$, alors β vaut _____.

166 EXERCICE

Le reste de la division de $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2021}$ par 50 est _____.

167 EXERCICE

Si le coefficient de $a^7 b^8$ dans le développement de $(a + 2b + 4ab)^{10}$ est $K \cdot 2^{16}$, alors K vaut _____.

168 EXERCICE

Si $\left(\frac{3^6}{4^4}\right)^k$ est le terme indépendant de x , dans le développement binomial de $\left(\frac{x}{4} - \frac{12}{x^2}\right)^{12}$, alors k vaut _____.

169 EXERCICE

$3 \times 7^{22} + 2 \times 10^{22} - 44$ lors de la division par 18 donne le reste _____.

170 EXERCICE

Si le coefficient de x^7 et x^8 dans le développement de $\left(2 + \frac{x}{3}\right)^n$ sont égaux, alors la valeur de n vaut _____.

171 EXERCICE

Le quotient du coefficient du terme central du développement de $(1+x)^{20}$ et celle des coefficients des deux termes centraux du développement de $(1+x)^{19}$ est _____.

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

172 EXERCICE

Le terme indépendant de 'x' dans le développement de

$$\left(\frac{x+1}{x^{2/3}-x^{1/3}+1} - \frac{x-1}{x-x^{1/2}} \right)^{10}, \text{ où } x \neq 0, 1 \text{ vaut } \underline{\hspace{2cm}}.$$

173 EXERCICE

Si le terme constant du développement binomial de $\left(2x^r + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ est 180, alors r vaut .

174 EXERCICE

Le nombre de termes rationnels du développement binomial de $\left(4^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{6}}\right)^{120}$ est .

175 EXERCICE

Le terme indépendant de x dans le développement de

$$\left[\frac{x+1}{x^{2/3}-x^{1/3}+1} - \frac{x-1}{x-x^{1/2}} \right]^{10}, x \neq 1, \text{ vaut } \underline{\hspace{2cm}}.$$

176 EXERCICE

Les coefficients des troisième, quatrième et cinquième termes du développement de $\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^n, x \neq 0$, ont pour rapport 12 : 8 : 3. Alors le terme indépendant de x dans le développement vaut .

177 EXERCICE

Si $(2021)^{3762}$ par 17, alors le reste vaut .

178 EXERCICE

Si le reste de la division de x par 4 est 3, alors le reste de la division de $(2020 + x)^{2022}$ par 8 est .

179 EXERCICE

Le nombre total d'entiers à deux chiffres 'n', tels que $3^n + 7^n$ est un multiple de 10, est .

180 EXERCICE

L'entier naturel m, pour lequel le coefficient de x dans le développement binomial de

$$\left(x^m + \frac{1}{x^2}\right)^{22} \text{ est } 1540, \text{ vaut } \dots\dots\dots$$

181 EXERCICE

$$\text{Soit } (2x^2 + 3x + 4)^{10} = \sum_{r=0}^{20} a_r x^r$$

Alors $\frac{a_7}{a_{13}}$ vaut .

182 EXERCICE

Le coefficient de x^4 est le développement de $(1 + x + x^2)^{10}$ est .

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

183 EXERCICE

Si $\frac{1}{n+1} {}^nC_n + \frac{1}{n} {}^nC_{n-1} + \dots + \frac{1}{2} {}^nC_1 + {}^nC_0 = \frac{1023}{10}$ alors n vaut :

- (A) 9 (B) 6 (C) 7 (D) 8

184 EXERCICE

La somme des coefficients des 50 termes du développement binomial de $(1-x)^{100}$, vaut

- (A) ${}^{99}C_{49}$ (B) ${}^{101}C_{50}$ (C) $-{}^{99}C_{49}$ (D) $-{}^{101}C_{50}$

185 EXERCICE

Si les coefficients de trois termes consécutifs du développement de $(1+x)^n$ ont pour rapport 1 : 5 : 20, alors le coefficient du quatrième terme vaut

- (A) 3654 (B) 1827 (C) 5481 (D) 2436

186 EXERCICE

Si ${}^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 10 : 1$, alors le quotient $(n^2 + 3n) : (n^2 - 3n + 4)$ vaut :

- (A) 27 : 11 (B) 2 : 1 (C) 35 : 16 (D) 65 : 37

187 EXERCICE

Le coefficient de x^{301} dans $(1+x)^{500} + x(1+x)^{499} + x^2(1+x)^{498} + \dots + x^{500}$ vaut :

- (A) ${}^{500}C_{300}$ (B) ${}^{501}C_{200}$ (C) ${}^{500}C_{301}$ (D) ${}^{501}C_{302}$

188 EXERCICE

Si a_r est le coefficient de x^{10-r} dans le développement binomial de $(1+x)^{10}$, alors $\sum_{r=1}^{10} r^3 \left(\frac{a_r}{a_{r-1}} \right)^2$ vaut

- (A) 3025 (B) 4895 (C) 5445 (D) 1210

189 EXERCICE

Si $({}^{30}C_1)^2 + 2({}^{30}C_2)^2 + 3({}^{30}C_3)^2 + \dots + 30({}^{30}C_{30})^2 = \frac{\alpha 60!}{(30!)^2}$ alors α vaut :

- (A) 30 (B) 10 (C) 15 (D) 60

190 EXERCICE

La valeur de $\sum_{r=0}^{22} {}^{22}C_r {}^{23}C_r$ est

- (A) ${}^{44}C_{23}$ (B) ${}^{45}C_{23}$ (C) ${}^{44}C_{22}$ (D) ${}^{45}C_{24}$

191 EXERCICE

$\sum_{r=1}^{20} (r^2 + 1)(r!)$ vaut

- (A) $22! - 21!$ (B) $22! - 2(21!)$ (C) $21! - 2(20!)$ (D) $21! - 20!$

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

192 EXERCICE

$\sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^n {}^nC_i {}^nC_j$ vaut

- (A) $2^{2n} - 2^n C_n$ (B) $2^{2n-1} - 2^{n-1} C_{n-1}$
 (C) $2^{2n} - \frac{1}{2} 2^n C_n$ (D) $2^{2n-1} + 2^{n-1} C_n$

193 EXERCICE

Soit $n \geq 5$ un entier. Si $9^n - 8n - 1 = 64\alpha$ et $6^n - 5n - 1 = 25\beta$, alors $\alpha - \beta$ vaut

- (A) $1 + {}^nC_2 (8 - 5) + {}^nC_3 (8^2 - 5^2) + \dots + {}^nC_n (8^{n-1} - 5^{n-1})$
 (B) $1 + {}^nC_3 (8 - 5) + {}^nC_4 (8^2 - 5^2) + \dots + {}^nC_n (8^{n-2} - 5^{n-2})$
 (C) ${}^nC_3 (8 - 5) + {}^nC_4 (8^2 - 5^2) + \dots + {}^nC_n (8^{n-2} - 5^{n-2})$
 (D) ${}^nC_4 (8 - 5) + {}^nC_5 (8^2 - 5^2) + \dots + {}^nC_n (8^{n-3} - 5^{n-3})$

194 EXERCICE

§

$$\sum_{k=1}^{31} ({}^{31}C_k) ({}^{31}C_{k-1}) - \sum_{k=1}^{30} ({}^{30}C_k) ({}^{30}C_{k-1}) = \frac{\alpha(60!)}{(30!)(31!)},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la valeur de 16α vaut

- (A) 1411 (B) 1320 (C) 1615 (D) 1855

195 EXERCICE

$\sum_{k=0}^{20} ({}^{20}C_k)^2$ vaut :

- (A) ${}^{40}C_{21}$ (B) ${}^{40}C_{19}$ (C) ${}^{40}C_{20}$ (D) ${}^{41}C_{20}$

196 EXERCICE

Si ${}^{20}C_r$ est le coefficient de x^r dans le développement de $(1+x)^{20}$, alors la valeur de $\sum_{r=0}^{20} r^2 \cdot {}^{20}C_r$ vaut :

- (A) 420×2^{19} (B) 380×2^{19} (C) 380×2^{18} (D) 420×2^{18}

197 EXERCICE

Pour les entiers naturels m, n , si $(1-y)^m (1+y)^n = 1 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{m+n} y^{m+n}$ et $a_1 = a_2 = 10$, alors la valeur de $(m+n)$ vaut :

- (A) 88 (B) 64 (C) 100 (D) 80

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

198 EXERCICE

Le coefficient de x^{256} dans le développement de

$$(1 - x)^{101} (x^2 + x + 1)^{100} \text{ vaut :}$$

- (A) $^{100}C_{16}$ (B) $^{100}C_{15}$ (C) $-^{100}C_{16}$ (D) $-^{100}C_{15}$

199 EXERCICE

Soit $(1 + x + 2x^2)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{40}x^{40}$. Alors $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{37}$ vaut

- (A) $2^{20}(2^{20} - 21)$ (B) $2^{19}(2^{20} - 21)$ (C) $2^{19}(2^{20} + 21)$ (D) $2^{20}(2^{20} + 21)$

200 EXERCICE

La valeur de $\sum_{r=0}^6 ({}^6C_r \cdot {}^6C_{6-r})$ vaut :

- (A) 924 (B) 1024 (C) 1124 (D) 1324

201 EXERCICE

Soit $[x]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x . Si, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 - x + x^3)^n = \sum_{j=0}^{3n} a_j x^j,$$

$$\text{alors } \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor} a_{2j} + 4 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{3n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} \text{ vaut :}$$

- (A) $2^n - 1$ (B) n (C) 2 (D) 1

202 EXERCICE

Si $n \geq 2$ est un entier positif, alors la somme de la série ${}^{n+1}C_2 + 2({}^2C_2 + {}^3C_2 + {}^4C_2 + \dots + {}^nC_2)$ vaut :

- (A) $\frac{n(2n+1)(3n+1)}{6}$ (B) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(C) $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ (D) $\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$

203 EXERCICE

La valeur de

$$-{}^{15}C_1 + 2 \cdot {}^{15}C_2 - 3 \cdot {}^{15}C_3 + \dots - 15 \cdot {}^{15}C_{15} + {}^{14}C_1 + {}^{14}C_3 + {}^{14}C_5 + \dots + {}^{14}C_{11} \text{ vaut :}$$

- (A) $2^{13} - 13$ (B) $2^{16} - 1$ (C) 2^{14} (D) $2^{13} - 14$

204 EXERCICE

Si, pour un entier positif n , les coefficients

de trois termes consécutifs du développement binomial

développement de $(1 + x)^{n+5}$ ont pour rapport

5 : 10 : 14, alors le plus grand coefficient de ce développement vaut :

- (A) 330 (B) 792 (C) 252 (D) 462

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

205 EXERCICE

La valeur de $\sum_{r=0}^{20} {}^{50-r}C_6$ vaut :

- (A) ${}^{50}C_6 - {}^{30}C_6$ (B) ${}^{51}C_7 - {}^{30}C_7$ (C) ${}^{50}C_7 - {}^{30}C_7$ (D) ${}^{51}C_7 + {}^{30}C_7$

206 EXERCICE

Si ${}^{20}C_1 + (2^2) {}^{20}C_2 + (3^2) {}^{20}C_3 + \dots + (20^2) {}^{20}C_{20} = A(2^\beta)$, alors le couple (A, β) vaut :

- (A) (420, 19) (B) (420, 18) (C) (380, 18) (D) (380, 19)

207 EXERCICE

Si les coefficients de x^2 et x^3 sont tous deux nuls, dans le développement de l'expression $(1 + ax + bx^2)(1 - 3x)^{15}$ en puissances de x , alors le couple (a, b) vaut :

- (A) (28, 861) (B) (28, 315) (C) (-21, 714) (D) (-54, 315)

208 EXERCICE

Si trois coefficients consécutifs du développement binomial de $(x + 1)^n$ en puissances de x ont pour rapport 2 : 15 : 70, alors la moyenne de ces trois coefficients vaut :-

- (A) 625 (B) 227 (C) 964 (D) 232

209 EXERCICE

La somme de la série

$2 \cdot {}^{20}C_0 + 5 \cdot {}^{20}C_1 + 8 \cdot {}^{20}C_2 + 11 \cdot {}^{20}C_3 + \dots + 62 \cdot {}^{20}C_{20}$ vaut :

- (A) 2^{25} (B) 2^{24} (C) 2^{26} (D) 2^{23}

210 EXERCICE

La somme des coefficients des termes de degré pair de x dans le développement de $\left(x + \sqrt{x^3 - 1}\right)^6 + \left(x - \sqrt{x^3 - 1}\right)^6$, ($x > 1$) vaut :

- (A) 32 (B) 26 (C) 29 (D) 24

211 EXERCICE

Soit $(x + 10)^{50} + (x - 10)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{50}x^{50}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$; alors $\frac{a_2}{a_0}$ vaut

- (A) 12.25 (B) 12.75 (C) 12.00 (D) 12.50

212 EXERCICE

Soit $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ et $T_n = 1 + \left(\frac{q+1}{2}\right) + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q+1}{2}\right)^n$ où q est un réel et $q \neq 1$. Si ${}^{101}C_1 + {}^{101}C_2 \cdot S_1 + \dots + {}^{101}C_{101} \cdot S_{100} = \alpha T_{100}$ alors α vaut

- (A) 202 (B) 200 (C) 2^{100} (D) 2^{99}

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

213 EXERCICE

La valeur de r pour laquelle ${}^{20}C_r {}^{20}C_0 + {}^{20}C_{r-1} {}^{20}C_1 + {}^{20}C_{r-2} {}^{20}C_2 + \dots + {}^{20}C_0 {}^{20}C_r$ est maximale, vaut

- (A) 20 (B) 15 (C) 10 (D) 11

214 EXERCICE

§ $\sum_{i=1}^{20} \left(\frac{{}^{20}C_{i-1}}{{}^{20}C_i + {}^{20}C_{i-1}} \right)^3 = \frac{k}{21}$ alors k vaut

- (A) 100 (B) 200 (C) 50 (D) 400

215 EXERCICE

Le coefficient de t^4 dans le développement de $\left(\frac{1-t^6}{1-t} \right)^3$ vaut :

- (A) 14 (B) 15 (C) 10 (D) 12

216 EXERCICE

Le coefficient de x^2 dans le développement du produit $(2-x^2) \cdot ((1+2x+3x^2)^6 + (1-4x^2)^6)$ vaut :

- (A) 107 (B) 106 (C) 108 (D) 155

217 EXERCICE

La somme des coefficients des termes de degré impair du développement de

$$\left(x + \sqrt{x^3 - 1} \right)^5 + \left(x - \sqrt{x^3 - 1} \right)^5, (x > 1) \text{ est}$$

- (A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

218 EXERCICE

Le coefficient de x^{10} dans le développement de $(1+x)^2(1+x^2)^3(1+x^3)^4$ vaut :

- (A) 52 (B) 56 (C) 50 (D) 44

219 EXERCICE

Si n est le degré du polynôme,

$$\left[\frac{2}{\sqrt{5x^3+1} - \sqrt{5x^3-1}} \right]^8 + \left[\frac{2}{\sqrt{5x^3+1} + \sqrt{5x^3-1}} \right]^8$$

et m est le coefficient de x^n dans ce polynôme, alors le couple (n, m) vaut :

- (A) $(24, (10)^8)$ (B) $(8, 5(10)^4)$ (C) $(12, (20)^4)$ (D) $(12, 8(10)^4)$

220 EXERCICE

La valeur de $({}^{21}C_1 - {}^{10}C_1) + ({}^{21}C_2 - {}^{10}C_2) + ({}^{21}C_3 - {}^{10}C_3) + ({}^{21}C_4 - {}^{10}C_4) + \dots + ({}^{21}C_{10} - {}^{10}C_{10})$ est

- (A) $2^{21} - 2^{10}$ (B) $2^{20} - 2^9$ (C) $2^{20} - 2^{10}$ (D) $2^{21} - 2^{11}$

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

221 EXERCICE

Si le nombre de termes du développement de $\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right)^n$, $x \neq 0$, est 28, alors la somme des coefficients de tous les termes de ce développement vaut :

- (A) 243 (B) 729 (C) 64 (D) 2187

222 EXERCICE

La somme des coefficients des puissances entières de x dans le développement binomial $(1 - 2\sqrt{x})^{50}$ vaut :

- (A) $\frac{1}{2} (3^{50} - 1)$ (B) $\frac{1}{2} (2^{50} + 1)$
 (C) $\frac{1}{2} (3^{50} + 1)$ (D) $\frac{1}{2} (3^{50})$

223 EXERCICE

Si les coefficients de x^3 et x^4 dans le développement de $(1 + ax + bx^2)(1 - 2x)^{18}$ en puissances de x sont tous deux nulle, alors (a, b) vaut :

- (A) $(14, \frac{272}{3})$ (B) $(16, \frac{272}{3})$
 (C) $(16, \frac{251}{3})$ (D) $(14, \frac{251}{3})$

224 EXERCICE

Le coefficient de x^7 dans le développement de $(1 - x - x^2 + x^3)^6$ est

- (A) -132 (B) -144 (C) 132 (D) 144

225 EXERCICE

Soit $s_1 = \sum_{j=1}^{10} j(j-1)^{10} C_j$,

$s_2 = \sum_{j=1}^{10} j \cdot {}^{10}C_j$ et

$s_3 = \sum_{j=1}^{10} j^2 \cdot {}^{10}C_j$.

Affirmation 1 : $S_3 = 55 \times 2^9$.

Affirmation 2 : $S_1 = 90 \times 2^8$ et $S_2 = 10 \times 2^8$.

- (A) L'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation- 2 est vraie ; l'affirmation - 2 n'est pas une justification correcte de l'affirmation - 1.
 (B) L'affirmation - 1 est vraie, Affirmation 2 est fausse.
 (C) L'affirmation - 1 est fausse, Affirmation 2 est vraie.
 (D) L'affirmation - 1 est vraie, Affirmation 2 est vraie ; l'affirmation - 2 explique correctement l'affirmation - 1.

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

226 EXERCICE

affirmation - 1 : $\sum_{r=0}^n (r+1)^n C_r = (n+2)2^{n-1}$.

affirmation - 2 : $\sum_{r=0}^n (r+1)^n C_r x^r = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1}$.

- (A) L'affirmation - 1 est fausse, l'affirmation - 2 est vraie
 (B) L'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est vraie ; l'affirmation - 2 explique correctement l'affirmation - 1
 (C) L'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est vraie ; l'affirmation - 2 n'est pas une justification correcte de l'affirmation - 1
 (D) L'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est fausse

227 EXERCICE

La somme de la série ${}^{20}C_0 - {}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 - {}^{20}C_3 + \dots - \dots + {}^{20}C_{10}$ est

- (A) 0 (B) ${}^{20}C_{10}$ (C) $-{}^{20}C_{10}$ (D) $\frac{1}{2} {}^{20}C_{10}$

228 EXERCICE

Pour des entiers naturels m, n , si $(1-y)^m(1+y)^n = 1 + a_1y + a_2y^2 + \dots$ et $a_1 = a_2 = 10$, alors (m, n) est

- (A) (20, 45) (B) (35, 20) (C) (45, 35) (D) (35, 45)

229 EXERCICE

La valeur de ${}^{50}C_4 + \sum_{r=1}^6 {}^{56-r}C_3$ est

- (A) ${}^{55}C_4$ (B) ${}^{55}C_3$ (C) ${}^{56}C_3$ (D) ${}^{56}C_4$

230 EXERCICE

Si $S_n = \sum_{r=0}^n \frac{1}{nC_r}$ and $t_n = \sum_{r=0}^n \frac{r}{nC_r}$, alors $\frac{t_n}{S_n}$ vaut

- (A) $\frac{2n-1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}n - 1$ (C) $n - 1$ (D) $\frac{1}{2}n$

231 EXERCICE

Si la somme des coefficients du développement de $(a+b)^n$ est 4096, alors le plus grand coefficient du développement vaut

- (A) 1594 (B) 792 (C) 924 (D) 2924

232 EXERCICE

r et n sont des entiers positifs $r > 1$, $n > 2$ et le coefficient du $(r+2)^{th}$ terme et $3r^{th}$ terme dans le développement de $(1+x)^{2n}$ sont égaux, alors n vaut

- (A) $3r$ (B) $3r + 1$ (C) $2r$ (D) $2r + 1$

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

233 EXERCICE

Le coefficient de x^{18} dans le développement de $(x^4 - \frac{1}{x^3})^{15}$ est _____.

234 EXERCICE

Supposons que $\sum_{r=0}^{2023} r^2 {}^{2023}C_r = 2023 \times \alpha \times 2^{2022}$. La valeur de α est _____.

235 EXERCICE

Si $\sum_{k=1}^{10} k^2 ({}^{10}C_k)^2 = 22000L$, alors L vaut _____.

236 EXERCICE

Si $1 + (2 + {}^{49}C_1 + {}^{49}C_2 + \dots + {}^{49}C_{49})({}^{50}C_2 + {}^{50}C_4 + \dots + {}^{50}C_{50})$ vaut $2^n \cdot m$, où m est impair, alors $n + m$ vaut _____.

237 EXERCICE

Si les coefficients de x et x^2 dans le développement de $(1+x)^p(1-x)^q$, $p, q \leq 15$, valent -3 et -5 respectivement, alors le coefficient de x^3 vaut _____.

238 EXERCICE

Si la somme des coefficients des puissances strictement positives de X , dans le développement binomial de $(x^n + \frac{2}{x^5})^7$ est 939, alors la somme des valeurs entières possibles de n est _____.

239 EXERCICE

Si $({}^{40}C_0) + ({}^{41}C_1) + ({}^{42}C_2) + \dots + ({}^{60}C_{20}) = \frac{m}{n} {}^{60}C_{20}$ et m et n sont premiers entre eux, alors $m + n$ est égal à _____.

240 EXERCICE

Soit C_r désigne le coefficient binomial de x^r dans le développement de $(1+x)^{10}$. Si, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $C_1 + 3.2C_2 + 5.3C_3 + \dots$ jusqu'à 10 termes $= \frac{\alpha \times 2^{11}}{2^\beta - 1} (C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \dots \text{ upto 10 terms})$ alors l'équation a valeur de $\alpha + \beta$ vaut _____.

241 EXERCICE

Si la somme des coefficients du développement de $(x+y)^n$ est 4096, alors le plus grand coefficient du développement vaut _____.

242 EXERCICE

Soit $\binom{n}{k}$ désigne ${}^nC_k$ et $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \begin{cases} \binom{n}{k}, & \text{if } 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

Si $A_k = \sum_{i=0}^9 \binom{9}{i} \left[\begin{matrix} 12 \\ 12-k+i \end{matrix} \right] + \sum_{i=0}^8 \binom{8}{i} \left[\begin{matrix} 13 \\ 13-k+i \end{matrix} \right]$ et $A_4 - A_3 = 190$ p, alors p vaut :

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

243 EXERCICE

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $[x]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x . Si la somme de $(n+1)$ termes ${}^nC_0, 3 \cdot {}^nC_1, 5 \cdot {}^nC_2, 7 \cdot {}^nC_3, \dots$ vaut $2^{100} \cdot 101$, alors $2 \left[\frac{n-1}{2} \right]$ vaut _____.

244 EXERCICE

Le nombre d'éléments de l'ensemble $\{n \in \{1, 2, 3, \dots, 100\} \mid (11)^n > (10)^n + (9)^n\}$ est _____.

245 EXERCICE

Soit ${}^nC_r$ désigne le coefficient binomial de x^r dans le développement de $(1+x)^n$. Si $\sum_{k=0}^{10} (2^2 + 3k)^{10} C_k = \alpha \cdot 3^{10} + \beta \cdot 2^{10}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha + \beta$ vaut _____.

246 EXERCICE

Soit n un entier positif. On note

$$A = \sum_{k=0}^n (-1)^k {}^nC_k \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{3}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{8}\right)^k + \left(\frac{15}{16}\right)^k + \left(\frac{31}{32}\right)^k \right].$$
 Si

$$63A = 1 - \frac{1}{2^{30}}, \text{ alors } n \text{ vaut } \underline{\hspace{2cm}}.$$

247 EXERCICE

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ et $\text{pgcd}(2, n) = 1$. Si $30 \binom{30}{0} + 29 \binom{30}{1} + \dots + 2 \binom{30}{28} + 1 \binom{30}{29} = n \cdot 2^m$, alors $n + m$ vaut _____.

(Ici $\binom{n}{k} = {}^nC_k$)

248 EXERCICE

Pour des entiers n et r , on note $\binom{n}{r} = \begin{cases} {}^nC_r, & \text{if } n \geq r \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$. La valeur maximale de k pour lesquelles la somme $\sum_{i=0}^k \binom{10}{i} \binom{15}{k-i} + \sum_{i=0}^{k+1} \binom{12}{i} \binom{13}{k+1-i}$ existe, vaut _____.

249 EXERCICE

Le coefficient de x^4 dans le développement de $(1+x+x^2+x^3)^6$ en puissances de x , est _____.

250 EXERCICE

Pour n entier positif, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$ est développé suivant les puissances croissantes de x . Si trois coefficients consécutifs de ce développement ont pour rapport, $2 : 5 : 12$, alors n vaut _____.

Binôme de Newton

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

251**EXERCICE**Si $C_r \equiv {}^{25}C_r$ et $C_0 + 5.C_1 + 9.C_2 + \dots + (101).C_{25} = 2^{25}.k$, alors k vaut _____.**252****EXERCICE**

Si la somme des coefficients des puissances paires de x dans le produit

 $(1 + x + x^2 + \dots + x^{2n})(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2n})$ vaut 61, alors n vaut _____.

Binôme de Newton

GRILLE DES RÉPONSES

Les réponses courtes de la source sont regroupées ci-dessous.

Les corrections détaillées concernent les exercices sélectionnés dans la dernière partie.

001	C	029	B	057	B	085	B	113	C
002	D	030	C	058	A	086	C	114	A
003	B	031	C	059	C	087	C	115	D
004	A	032	D	060	A	088	D	116	30
005	B	033	B	061	D	089	C	117	21
006	C	034	B	062	C	090	B	118	32
007	C	035	C	063	D	091	C	119	63
008	D	036	D	064	B	092	A	120	34
009	C	037	C	065	C	093	D	121	239
010	B	038	D	066	A	094	A	122	5
011	B	039	B	067	D	095	A	123	612
012	A	040	À revoir*	068	D	096	D	124	465
013	B	041	B	069	D	097	A	125	2035
014	D	042	D	070	C	098	A	126	1
015	B	043	D	071	D	099	D	127	806
016	D	044	B	072	D	100	A	128	54
017	B	045	C	073	A	101	A	129	8
018	D	046	A	074	C	102	C	130	678
019	B	047	A	075	D	103	A	131	25
020	B	048	D	076	D	104	A	132	118
021	B	049	D	077	B	105	B	133	10
022	B	050	A	078	A	106	D	134	138
023	A	051	D	079	C	107	D	135	1
024	D	052	C	080	C	108	C	136	2041
025	C	053	D	081	B	109	C	137	0
026	A	054	D	082	B	110	C	138	12
027	B	055	B	083	B	111	B	139	36
028	D	056	C	084	D	112	D	140	2736

* Exercice 40 : données incompatibles dans l'énoncé. Voir l'analyse.

Binôme de Newton

GRILLE DES RÉPONSES

Les réponses courtes de la source sont regroupées ci-dessous.

Les corrections détaillées concernent les exercices sélectionnés dans la dernière partie.

141 171	169 15	197 D	225 B
142 960	170 55	198 B	226 B
143 1275	171 1	199 B	227 D
144 31	172 210	200 A	228 D
145 4	173 8	201 D	229 D
146 1	174 21	202 B	230 D
147 29	175 210	203 D	231 C
148 5040	176 4	204 D	232 C
149 98	177 4	205 B	233 5005
150 9	178 1	206 B	234 1012
151 2	179 45	207 B	235 221
152 23	180 13	208 D	236 99
153 1120	181 8	209 A	237 23
154 1	182 615	210 D	238 57
155 7	183 A	211 A	239 102
156 1080	184 C	212 C	240 286
157 405	185 A	213 A	241 924
158 84	186 B	214 A	242 49
159 57	187 B	215 B	243 98
160 24	188 D	216 B	244 96
161 6006	189 C	217 A	245 19
162 5	190 B	218 A	246 6
163 2	191 B	219 C	247 45
164 5	192 A	220 C	248 12
165 83	193 C	221 B	249 120
166 4	194 A	222 C	250 118
167 315	195 C	223 B	251 51
168 55	196 D	224 B	252 30

* Exercice 40 : données incompatibles dans l'énoncé. Voir l'analyse.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 1

Reconnaître la somme des indices impairs

Utilisons $\binom{12}{k}/(k+1) = \binom{13}{k+1}/13$. La somme multipliée par 26 devient

$$2 \sum_{\substack{3 \leq j \leq 13 \\ j \text{ impair}}} \binom{13}{j} 2^j.$$

Or la somme incluant $j = 1$ vaut $((1+2)^{13} - (1-2)^{13})/2 = (3^{13} + 1)/2$. On retire le terme $\binom{13}{1}2 = 26$, puis on multiplie par 2 : le résultat est $3^{13} - 51$.

Réponse : $\alpha = 51$ (C).

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 2

Comparer les deux termes centraux

Les coefficients centraux sont $\binom{26}{13}\alpha^{13}$ et $\binom{28}{14}\alpha^{14}$. Puisque $\alpha \neq 0$, leur égalité donne

$$\alpha = \frac{\binom{26}{13}}{\binom{28}{14}} = \frac{14^2}{28 \times 27} = \boxed{\frac{7}{27}}.$$

Réponse : proposition D. Le signe du deuxième développement ne change pas le résultat, car l'exposant central 14 est pair.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 3

Résoudre l'équation sur l'exposant

Le terme général de $(2x^2 + 1/x)^{10}$ est

$$\binom{10}{k} 2^{10-k} x^{20-3k}.$$

Pour obtenir x^2 , il faut $20 - 3k = 2$, donc $k = 6$. Cet indice est bien entier et compris entre 0 et 10. Le coefficient recherché vaut

$$\binom{10}{6} 2^4 = 210 \times 16 = \boxed{3360}.$$

Réponse : proposition B.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 4

Chercher le terme constant

Dans $(9x - 1/(3\sqrt{x}))^{18}$, l'exposant de x est $18 - 3k/2$. Il est nul pour $k = 12$. Le terme constant est

$$\binom{18}{12} 9^6 \left(-\frac{1}{3}\right)^{12} = \binom{18}{6} = 18564.$$

L'énoncé l'écrit $221k$. Ainsi $k = 18564/221 = 84$.

Réponse : $\boxed{84}$ (A).

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 5

Sommer les coefficients par Pascal

Le coefficient de x^3 dans les développements de $(1+x)^3$ à $(1+x)^{99}$ vaut $\sum_{j=3}^{99} \binom{j}{3} = \binom{100}{4}$. Le dernier polynôme ajoute $k^3 \binom{100}{3}$. Après division par $\binom{100}{3}$, l'égalité devient

$$\frac{97}{4} + k^3 = 43n + \frac{101}{4}, \quad k^3 = 43n + 1.$$

Avec $n \geq 1$, $k = 1$ est exclu. Les valeurs $k = 2, 3, 4, 5$ ne conviennent pas ; $6^3 = 43 \times 5 + 1$.

Réponse : $p = 6$, $n = 5$, donc $\boxed{p + n = 11}$ (B).

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 6

Multiplier par un petit binôme

Par symétrie, $\binom{30}{30-r} = \binom{30}{r}$. La somme de l'énoncé devient

$$\binom{30}{r} + 3\binom{30}{r-1} + 3\binom{30}{r-2} + \binom{30}{r-3}.$$

C'est le coefficient de x^r dans $(1+x)^{30}(1+x)^3 = (1+x)^{33}$. Ce coefficient est $\binom{33}{r}$.

Réponse : $\boxed{m = 33}$ (C).

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 40

Une incohérence dans les données

L'énoncé demande quatre coefficients consécutifs de $(1+x)^n$ égaux à $2-p$, p , $2-\alpha$ et α . La somme des deux premiers devrait donc valoir 2.

Mais si les indices de ces quatre coefficients sont $r, r+1, r+2, r+3$, on a $n \geq 3$ et $0 \leq r \leq n-3$. Par Pascal :

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1} \geq n+1 \geq 4.$$

Cette somme ne peut pas valoir 2.

Conclusion : dans sa formulation fournie, ce problème est incompatible avec les coefficients du binôme. La grille le signale « À revoir » ; aucune option n'est validée artificiellement.