
COURS ET PROBLÈMES GUIDÉS

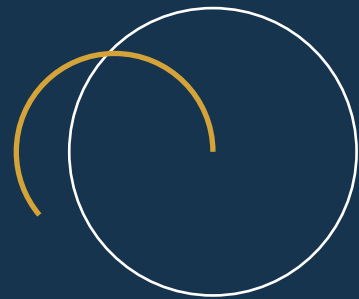
DERNIERS CHIFFRES

Trouver la fin d'un nombre
sans le calculer entièrement.

COLLÈGE AVANCÉ / LYCÉE

Préparation aux olympiades de mathématiques

Cycles · Tours de puissances
Restes chinois · Exposants minimaux



Comprendre. Puis résoudre.

22 pages · 8 exercices supplémentaires corrigés

Explications courtes · Raisonnements complets

LE PARCOURS

Sommaire et mode d'emploi

L'objectif

Passer des cycles du chiffre des unités à des calculs modulo 100, 1000 ou 10000, en justifiant chaque réduction d'exposant.

Partie	Pages
Un chiffre : bases et cycles	3–6
Deux chiffres : cycles et congruences	7–11
Trois et quatre chiffres	12–14
Tours et exposants minimaux	15–17
Exercices, corrigés et synthèse	18–22

Comment travailler ?

Lire une fiche, puis cacher le corrigé d'un exemple et refaire le raisonnement. Pour les exercices, écrire les étapes sur une copie avant de vérifier les réponses.

Le niveau

Les premiers exemples installent les bases. Les problèmes suivants demandent de combiner plusieurs idées. Les résultats restent justifiés, même lorsque la solution est courte.

Note d'édition. Adaptation française du fichier *Last digits.txt*. Les méthodes mathématiques lisibles sont reprises. Plusieurs formules affichées ne figurent pas dans la transcription : les exemples concernés sont signalés comme adaptés. Les exercices d'entraînement et les compléments sont ajoutés.

COURS • 1

Les chiffres finaux sont des restes

La traduction

Pour trouver les k derniers chiffres d'un entier positif N , on calcule son reste modulo 10^k .

Chiffres demandés	Modulo
1	10
2	100
3	1000
4	10000

Exemples

$34789 = 100 \times 347 + 89$: ses deux derniers chiffres sont 89. Si $N \equiv 7 \pmod{1000}$, ses trois derniers chiffres s'écrivent **007**.

Réduire la base

Pour tout exposant entier $n \geq 1$:

$$23478^n \equiv 78^n \pmod{100}, \quad 23478^n \equiv 478^n \pmod{1000}.$$

On ne garde que les chiffres utiles de la base.

Attention à l'exposant

Il ne se réduit pas avec la même règle. Pour l'exposant, il faut connaître la période des puissances de la base.

Idée clé. Une fois le modulo choisi, réduire après chaque opération. On évite ainsi de manipuler des nombres énormes.

COURS · 2

Les cycles du chiffre des unités

Table pour un exposant $n \geq 1$

Les chiffres sont donnés dans l'ordre $n = 1, 2, \dots$; le cycle se répète ensuite.

Dernier chiffre de la base	Cycle	Période
0	0	1
1	1	1
2	2, 4, 8, 6	4
3	3, 9, 7, 1	4
4	4, 6	2
5	5	1
6	6	1
7	7, 9, 3, 1	4
8	8, 4, 2, 6	4
9	9, 1	2

Lire un cycle

Pour 7^{2026} , on a $2026 \equiv 2 \pmod{4}$: prendre le deuxième chiffre du cycle, soit 9. Pour 8^{100} , l'exposant est multiple de 4 : prendre le **quatrième** chiffre, soit 6.

Attention. Un reste nul dans un cycle de longueur 4 correspond à sa quatrième position. Il ne signifie pas que le dernier chiffre est zéro.

EXEMPLE GUIDÉ · 1

Réduire une expression entière

Exemple adapté : l'énoncé de la transcription est incomplet.

Posons

$$N = (9^{2017} + 6^{2017} + 6^{2018})^{2018}.$$

Trouver le chiffre des unités de N , puis celui de 2^N .

1. Réduire l'intérieur modulo 10

L'exposant 2017 est impair, donc 9^{2017} finit par 9. Toute puissance positive de 6 finit par 6.

$$9^{2017} + 6^{2017} + 6^{2018} \equiv 9 + 6 + 6 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Donc $N \equiv 1^{2018} \equiv 1 \pmod{10}$.

2. Pour 2^N , travailler modulo 4

La période des unités de 2 est 4. Il faut donc connaître N modulo 4, et non son seul dernier chiffre. La somme entre parenthèses est impaire. Tout carré impair vaut 1 modulo 4. Comme 2018 est pair :

$$N \equiv 1 \pmod{4}.$$

Résultat

N finit par $\boxed{1}$ et 2^N finit par $\boxed{2}$.

Idée clé. Pour calculer le chiffre final d'une puissance, le bon modulo pour l'exposant est celui de la période.

EXEMPLE GUIDÉ · 2

Un exposant donné par une somme

Exemple adapté : l'énoncé de la transcription est incomplet.

Trouver le chiffre des unités de

$$3^E, \quad E = \sum_{r=1}^{100} (r^4 - r^2 + 3).$$

1. Choisir le bon modulo

Les unités des puissances de 3 ont une période de 4. On cherche donc E modulo 4.

2. Étudier un terme

Pour tout entier r , $r^4 - r^2$ est divisible par 4 :

- si r est pair, r^2 et r^4 sont divisibles par 4 ;
- si r est impair, $r^2 \equiv r^4 \equiv 1 \pmod{4}$.

Chaque terme $r^4 - r^2 + 3$ vaut donc 3 modulo 4.

3. Additionner puis lire le cycle

$$E \equiv 100 \times 3 = 300 \equiv 0 \pmod{4}.$$

L'exposant est positif et multiple de 4. La quatrième position du cycle 3, 9, 7, 1 est 1.

Résultat

Le chiffre des unités est 1.

Idée clé. Il n'est pas nécessaire de connaître la valeur d'une somme pour connaître son reste. Réduire terme par terme suffit.

COURS · 3

Les cycles de deux chiffres

Les puissances de 5

Pour $n \geq 2$, 5^n se termine par 25 : $5^2 = 25$ et $25 \times 5 \equiv 25 \pmod{100}$. Pour $n = 1$, les deux chiffres sont 05.

Les puissances de 7

$n \bmod 4$	1	2	3	0
$7^n \bmod 100$	07	49	43	01

En effet, $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$.

Les puissances de 6 : un début particulier

$$6^1 \equiv 06, \quad 6^2 \equiv 36, \quad 6^3 \equiv 16, \quad 6^4 \equiv 96, \quad 6^5 \equiv 76, \quad 6^6 \equiv 56.$$

À partir de $n = 2$, le cycle 36, 16, 96, 76, 56 se répète avec période 5 : multiplier successivement par 6 ramène 56 à 36.

Application

Comme $100 \equiv 0 \pmod{5}$, on a

$$6^{100} \equiv 76 \pmod{100}.$$

Attention. Une période peut commencer après les premières puissances. Ici 6^1 finit par 06 et 6^6 par 56 : le début ne suit pas encore le cycle de longueur 5.

COURS · 4

Les nombres 24 et 76

Deux calculs à retenir

$$76^2 \equiv 76 \pmod{100}, \quad 24^2 \equiv 76 \pmod{100}.$$

Comme $76 \times 24 \equiv 24 \pmod{100}$, les puissances de 24 alternent entre 24 et 76.

Conséquences

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$76^n \equiv 76 \pmod{100}, \quad 24^n \equiv \begin{cases} 24 & n \text{ impair,} \\ 76 & n \text{ pair.} \end{cases}$$

Lien avec les puissances de 2

$$2^{10} \equiv 24 \pmod{100}, \quad 2^{20} \equiv 76 \pmod{100}.$$

Donc $2^{20k} \equiv 76 \pmod{100}$ pour tout $k \geq 1$.

Exemple complémentaire

$$2^{2020} = (2^{20})^{101} \equiv 76^{101} \equiv 76 \pmod{100}.$$

Idée clé. Certains restes sont stables par multiplication. Les repérer peut être plus utile que chercher une puissance égale à 1.

MÉTHODE · 1

Séparer 100 en 4 et 25

Le principe des restes chinois

Comme $\text{PGCD}(4, 25) = 1$, connaître un nombre modulo 4 et modulo 25 détermine une seule classe modulo 100.

Exemple complémentaire

On sait que $N \equiv 11 \pmod{25}$ et $N \equiv 0 \pmod{4}$. Les quatre restes entre 0 et 99 congrus à 11 modulo 25 sont

$$11, \quad 36, \quad 61, \quad 86.$$

Le seul divisible par 4 est 36. Donc $N \equiv 36 \pmod{100}$.

Version algébrique

Écrire $N = 25k + 11$. Modulo 4 :

$$0 \equiv k + 3 \pmod{4}, \quad k \equiv 1 \pmod{4}.$$

En posant $k = 4t + 1$, on trouve $N = 100t + 36$.

Pourquoi la classe est unique

Si deux nombres ont les mêmes restes modulo 4 et modulo 25, leur différence est divisible par 4 et par 25. Ces diviseurs étant premiers entre eux, leur différence est divisible par 100.

Idée clé. Pour retrouver le reste final, écrire d'abord la condition ayant le plus grand modulo, puis calculer le paramètre avec le petit modulo.

PROBLÈME GUIDÉ · 1

Une tour de puissances de 14

Énoncé

Trouver les deux derniers chiffres de $N = 14^{(14^{14})}$. On pose $E = 14^{14}$, donc $N = 14^E$.

1. Modulo 4

Comme $E \geq 2$ et 14^2 est divisible par 4 :

$$N \equiv 0 \pmod{4}.$$

2. Modulo 25

$$14^2 \equiv -4, \quad 14^4 \equiv 16, \quad 14^5 \equiv 16 \times 14 \equiv -1 \pmod{25}.$$

Ainsi $14^{10} \equiv 1 \pmod{25}$. Il suffit de connaître E modulo 10. Or les unités de 14^{14} sont celles de 4^{14} , soit 6. Donc

$$N \equiv 14^6 \equiv (-1) \times 14 \equiv 11 \pmod{25}.$$

3. Réunir les deux informations

Par le calcul de la page précédente, le nombre congru à 11 modulo 25 et à 0 modulo 4 vaut 36 modulo 100.

Résultat

Les deux derniers chiffres sont 36.

MÉTHODE • 2

Lire correctement une tour

Les parenthèses changent tout

Une tour a^{b^c} désigne habituellement $a^{(b^c)}$. Ce n'est pas $(a^b)^c = a^{bc}$.

$$2^{3^2} = 2^9 = 512, \quad (2^3)^2 = 2^6 = 64.$$

La chaîne de questions

Pour calculer a^E modulo m , chercher une période t adaptée aux puissances de a . Il faut ensuite calculer E modulo t . Si E est lui-même une puissance, on recommence avec ce nouveau modulo.

Exemple complémentaire

Trouver l'unité de $3^{(2^{100})}$. Les puissances de 3 ont une période de 4. Or $2^{100} \equiv 0 \pmod{4}$, et cet exposant est positif. Donc la réponse est la quatrième valeur du cycle : 1.

Dans le problème de 14

On n'a pas réduit 14^{14} modulo 25. On l'a réduit modulo 10, car la relation utile était $14^{10} \equiv 1 \pmod{25}$.

Attention. Réduire la base et réduire l'exposant sont deux étapes différentes. Écrire le modulo à chaque ligne évite de les confondre.

MÉTHODE · 3

Séparer 1000 en 8 et 125

Trois derniers chiffres

Comme $1000 = 8 \times 125$ et $\text{PGCD}(8, 125) = 1$, on peut calculer séparément modulo 8 et modulo 125, puis réunir les résultats.

Exemple complémentaire

Trouver le reste R entre 0 et 999 tel que

$$R \equiv 0 \pmod{125}, \quad R \equiv 1 \pmod{8}.$$

Écrire $R = 125k$, avec $k \in \{0, 1, \dots, 7\}$. Modulo 8 :

$$5k \equiv 1 \pmod{8}.$$

Comme $5^2 = 25 \equiv 1 \pmod{8}$, on multiplie par 5 :

$$k \equiv 5 \pmod{8}.$$

Le choix dans l'intervalle demandé est $k = 5$, donc $R = 625$.

Une vérification directe

Les multiples de 125 dans cet intervalle sont

$$0, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875.$$

Le seul congru à 1 modulo 8 est 625.

Idée clé. La méthode reste la même qu'avec 4 et 25. Le petit modulo permet de choisir un candidat dans une liste courte.

PROBLÈME GUIDÉ · 2

Un long produit de nombres impairs

Énoncé

Trouver les trois derniers chiffres de

$$P = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2017.$$

1. Modulo 125

Le facteur 125 figure dans le produit. Donc $P \equiv 0 \pmod{125}$.

2. Modulo 8

Un bloc de quatre impairs consécutifs, commençant par un nombre congru à 1 modulo 8, donne

$$1 \times 3 \times 5 \times 7 \equiv 1 \pmod{8}.$$

Le produit contient $(2017 + 1)/2 = 1009$ facteurs. Les 1008 premiers se regroupent en 252 blocs de quatre, et le dernier facteur vaut $2017 \equiv 1 \pmod{8}$.

$$P \equiv 1^{252} \times 1 \equiv 1 \pmod{8}.$$

3. Recoller

On a donc $P \equiv 0 \pmod{125}$ et $P \equiv 1 \pmod{8}$. La page précédente donne

Résultat

Les trois derniers chiffres sont 625.

Attention. Le nombre de facteurs de $1 \times 3 \times \cdots \times 2017$ est 1009, et non 2017. Le dernier bloc incomplet doit être traité.

PROBLÈME GUIDÉ · 3

Quatre chiffres avec un petit binôme

Énoncé

Trouver les quatre derniers chiffres de 7^{128} .

1. Une puissance très pratique

$$7^4 = 2401 = 1 + 2400.$$

Comme $128 = 4 \times 32$, on a $7^{128} = (1 + 2400)^{32}$.

2. Développer seulement ce qui compte

Dans la formule du binôme, tous les termes à partir de 2400^2 sont divisibles par 10000, car $2400^2 = 5760000$ l'est déjà. Il reste donc

$$(1 + 2400)^{32} \equiv 1 + 32 \times 2400 = 76801 \equiv 6801 \pmod{10000}.$$

Résultat

Les quatre derniers chiffres sont 6801.

Le même calcul par carrés successifs

Exposant	4	8	16	32	64	128
Reste	2401	4801	9601	9201	8401	6801

Idée clé. Si M^2 est divisible par le modulo, alors $(1 + M)^n \equiv 1 + nM$. Les termes suivants du binôme disparaissent.

PROBLÈME GUIDÉ · 4

Une grande tour modulo 90

Énoncé

Calculer le reste de

$$N = 12^{(34^{(56^{78})})}$$

dans la division par 90.

Écrivons $E = 34^{(56^{78})}$. Comme $90 = 9 \times 10$ et $\text{PGCD}(9, 10) = 1$, on calcule avec ces deux modulus.

1. Modulo 9

On a $E \geq 2$. Les deux premiers facteurs 12 apportent déjà deux facteurs 3. Donc $N \equiv 0 \pmod{9}$.

2. Modulo 10

Les unités de 12 sont celles de 2, de période 4. Il faut E modulo 4. Or $34 \equiv 2 \pmod{4}$ et $56^{78} \geq 2$, donc

$$E = 34^{(56^{78})} \equiv 0 \pmod{4}.$$

Ainsi N finit par 6.

3. Retrouver le reste

Écrire $N = 10k + 6$. Modulo 9, $k + 6 \equiv 0$, donc $k \equiv 3 \pmod{9}$. D'où $N \equiv 36 \pmod{90}$.

Résultat

Le reste est 36.

PROBLÈME GUIDÉ · 5A

Une puissance qui se termine par 003

Énoncé

Trouver le plus petit entier $n > 1$ tel que

$$3^n \equiv 3 \pmod{1000}.$$

On cherche la première puissance après 3^1 ayant les trois derniers chiffres 003.

1. Simplifier correctement

Comme 3 est premier avec 1000 :

$$3^n \equiv 3 \pmod{1000} \iff 3^{n-1} \equiv 1 \pmod{1000}.$$

2. Commencer par les unités

Le cycle 3, 9, 7, 1 montre que $n - 1$ doit être multiple de 4. Posons

$$n - 1 = 4m, \quad m \geq 1.$$

Il faut alors $81^m \equiv 1 \pmod{1000}$.

3. Obtenir une première contrainte sur m

Modulo 25, on a $81 = 1 + 80 \equiv 1 + 5$. Le binôme donne

$$81^m \equiv 1 + 5m \pmod{25},$$

car 5^2 est divisible par 25. La condition impose $5m \equiv 0 \pmod{25}$, donc $m = 5t$ avec $t \geq 1$.

Idée clé. Pour prouver un minimum, on cherche des conditions nécessaires de plus en plus fortes sur l'exposant. La dernière étape est page suivante.

PROBLÈME GUIDÉ · 5B

Prouver la minimalité

4. Calculer 81^5 modulo 1000

Les carrés successifs donnent

$$81^2 \equiv 561, \quad 81^4 \equiv 561^2 \equiv 721 \pmod{1000}.$$

Donc

$$81^5 \equiv 721 \times 81 = 58401 \equiv 401 \pmod{1000}.$$

5. Utiliser $m = 5t$

$$81^m = (81^5)^t \equiv 401^t = (1 + 400)^t \equiv 1 + 400t \pmod{1000}.$$

Les termes contenant 400^2 sont multiples de 1000. La condition devient

$$1000 \mid 400t \iff 5 \mid t.$$

Donc $t = 5s$, $m = 25s$ et $n = 100s + 1$ avec $s \geq 1$.

6. Atteindre le plus petit exposant

Pour $s = 1$, les calculs montrent bien $81^{25} \equiv 1 \pmod{1000}$, puis $3^{101} \equiv 3 \pmod{1000}$.

Résultat

Le plus petit exposant $n > 1$ est 101. Les trois derniers chiffres sont 003.

Attention. Sans la condition $n > 1$, le cas $n = 1$ satisferait aussi la congruence. Il faut préciser ce qu'on cherche.

ENTRAÎNEMENT

Huit exercices supplémentaires

Chercher les réponses sans calculatrice. Écrire les puissances entre parenthèses pour éviter toute ambiguïté. Corrigés pages 19 et 20.

1 • Une unité

Trouver le chiffre des unités de 7^{2026} .

2 • Deux chiffres

Trouver les deux derniers chiffres de 7^{2024} .

3 • Un cycle stable

Trouver les deux derniers chiffres de $76^{123} + 24^{124}$.

4 • Une petite tour

Trouver le chiffre des unités de $3^{(2^{100})}$.

5 • Deux conditions

Trouver le reste entre 0 et 99 d'un entier N tel que $N \equiv 7 \pmod{25}$ et $N \equiv 2 \pmod{4}$.

6 • Un binôme court

Trouver les quatre derniers chiffres de 101^{37} .

7 • Un produit

Trouver les trois derniers chiffres de $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 99$.

8 • Un minimum

Trouver le plus petit entier $n > 0$ tel que $7^n \equiv 1 \pmod{100}$.

Idée clé. Choisir la méthode avant de calculer : cycle, séparation du modulo ou binôme court.

CORRIGÉS · 1/2

Les cycles suffisent

1. Une unité

Le cycle des unités de 7 est 7, 9, 3, 1. Comme $2026 \equiv 2 \pmod{4}$, le chiffre demandé est $\boxed{9}$.

2. Deux chiffres

On a $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$. Comme $2024 = 4 \times 506$:

$$7^{2024} \equiv 1 \pmod{100}.$$

Les deux derniers chiffres s'écrivent $\boxed{01}$.

3. Un cycle stable

$76^{123} \equiv 76 \pmod{100}$. Comme 124 est pair, $24^{124} \equiv 76 \pmod{100}$.

$$76^{123} + 24^{124} \equiv 152 \equiv 52 \pmod{100}.$$

Les deux derniers chiffres sont $\boxed{52}$.

4. Une petite tour

Pour les unités de 3, il faut connaître l'exposant modulo 4. Comme $100 \geq 2$, 2^{100} est un multiple positif de 4. Le dernier chiffre est donc $\boxed{1}$.

Attention. Dans l'exercice 2, le reste 1 s'écrit 01 lorsque l'on demande deux chiffres. Le zéro fait partie de la réponse.

CORRIGÉS · 2/2

Assembler les restes

5. Deux conditions

Les candidats modulo 100 sont 7, 32, 57, 82. Le seul qui vaut 2 modulo 4 est $\boxed{82}$.

6. Un binôme court

$$101^{37} = (1 + 100)^{37} \equiv 1 + 37 \times 100 = 3701 \pmod{10000}.$$

Tous les termes contenant 100^2 disparaissent. Réponse : $\boxed{3701}$.

7. Un produit

Il y a 50 facteurs impairs. Le produit contient les facteurs 5 et 25, donc il est divisible par 125. Modulo 8, les 48 premiers facteurs forment douze blocs de quatre, chacun de produit 1. Les deux derniers sont 97 et 99 :

$$P \equiv 1^{12} \times 1 \times 3 \equiv 3 \pmod{8}.$$

Écrire $P = 125k$. On a $5k \equiv 3 \pmod{8}$, donc $k \equiv 15 \equiv 7 \pmod{8}$. Ainsi

$$P \equiv 125 \times 7 = \boxed{875} \pmod{1000}.$$

8. Un minimum

Les premières puissances de 7 modulo 100 valent 07, 49, 43, 01. La première occurrence de 1 est pour $\boxed{n = 4}$.

POINTS DE VIGILANCE

Quatre erreurs à éviter

1. Réduire l'exposant avec le mauvais modulo

Pour les unités de 3^E , on utilise $E \bmod 4$. Les unités de E ne suffisent pas toujours : 12 et 22 ont le même dernier chiffre, mais des restes différents modulo 4.

2. Oublier le début d'un cycle

Modulo 100, les puissances de 6 ont une période de 5 à partir de l'exposant 2. L'exposant 1 demande un traitement séparé.

3. Mélanger deux tours

$$a^{(b^c)} \neq (a^b)^c \quad \text{en général.}$$

Le premier exposant est b^c ; le second est bc . Ajouter les parenthèses dès le début.

4. Donner un candidat sans prouver le minimum

Trouver $3^{101} \equiv 3 \pmod{1000}$ prouve seulement que 101 convient. Les contraintes successives $n - 1 = 4m$, $m = 5t$ et $5 \mid t$ prouvent qu'aucun $1 < n < 101$ ne convient.

Le test final

Le reste est-il dans l'intervalle demandé ? A-t-on conservé les zéros initiaux ? La période utilisée est-elle prouvée et valable pour l'exposant concerné ?

FICHE DE SYNTHÈSE

Une question, une méthode

Un chiffre

Réduire la base modulo 10. Utiliser son cycle, de longueur 1, 2 ou 4.

Deux chiffres

Essayer un cycle modulo 100. Sinon, calculer séparément modulo 4 et 25.

Trois chiffres

Le découpage $1000 = 8 \times 125$ est souvent utile, surtout pour un produit comportant de nombreux facteurs 5.

Quatre chiffres

Chercher une puissance proche de 1 modulo 10000. Si le carré de l'écart est divisible par 10000, le binôme se réduit à ses deux premiers termes.

Une tour de puissances

Commencer par la période de la base extérieure. Réduire ensuite l'exposant avec le modulo correspondant, en remontant dans la tour.

Un exposant minimal

Transformer le problème en $a^t \equiv 1 \pmod{m}$. Établir des contraintes nécessaires sur t , puis vérifier le premier candidat.

Les décompositions utiles

$$100 = 4 \times 25, \quad 1000 = 8 \times 125, \quad 10000 = 16 \times 625.$$

Dans chaque produit, les deux facteurs sont premiers entre eux.