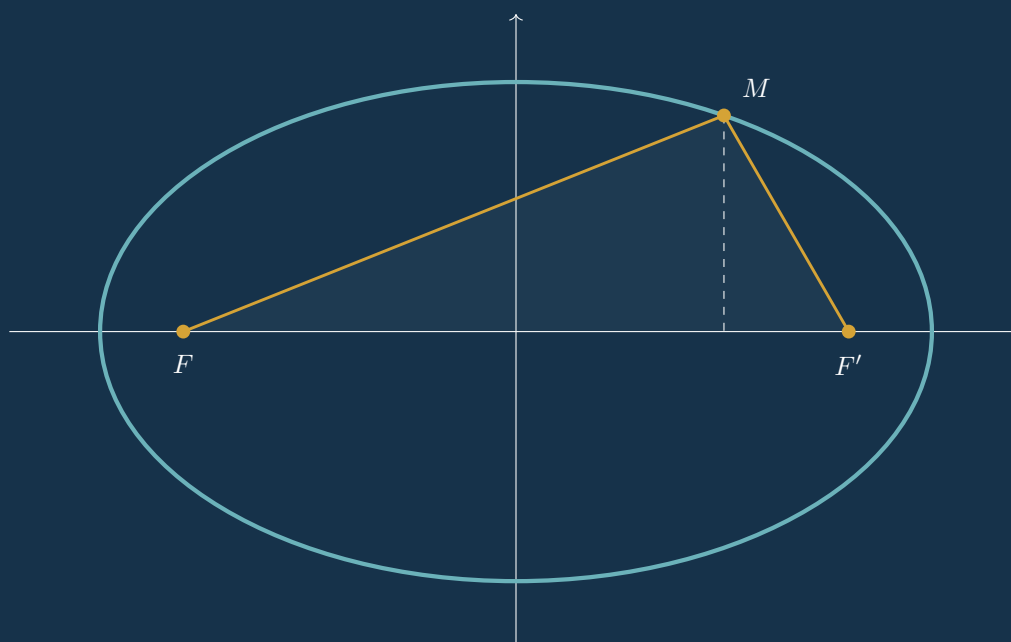


Géométrie analytique

Cours, méthodes et problèmes corrigés



$$MF + MF' = 2a$$

5 chapitres • 30 problèmes guidés
10 exercices supplémentaires avec corrigés

Maths Olympiad

Observer une figure, choisir un repère, démontrer

PARCOURS DE LECTURE

Sommaire

Du dessin à la preuve

Une équation décrit un objet géométrique ; une figure suggère comment l'étudier. Ce livret fait travailler les deux points de vue : repérer les symétries, traduire les distances, puis contrôler les solutions obtenues.

Partie	Contenu	Page
Mode d'emploi	Les étapes d'un raisonnement géométrique	3
1. Droites et triangles	Distances, symétries, lieux, aires • 7 problèmes	4
2. Cercles	Tangence, cordes et arcs • 5 problèmes	13
3. Paraboles	Foyer, directrice, paramètres • 10 problèmes	20
4. Ellipses	Cordes, foyers et homothéties • 5 problèmes	33
5. Hyperboles	Axes, excentricité et intersections • 3 problèmes	40
Entraînement	10 exercices complémentaires	45
Corrigés	Des solutions expliquées	47
Fiche de synthèse	Formules et contrôles essentiels	50

Niveau et prérequis

Lycée avancé et approfondissement : coordonnées, vecteurs, produit scalaire, équations du second degré et suites géométriques. Les coniques sont introduites progressivement ; les propriétés utilisées sont expliquées ou démontrées.

Note sur les énoncés

Les problèmes sont adaptés des données exploitables du texte fourni. Les énoncés sont rendus autonomes et les calculs sont vérifiés. Les questions incomplètes ne sont pas reproduites arbitrairement. Deux reformulations sont signalées dans les problèmes 16 et 27 ; les dix exercices finaux sont des compléments originaux.

ASTUCE / Un travail en deux temps

Chercher d'abord avec la figure et les données de l'énoncé. Lire ensuite la solution, puis la refaire en justifiant chaque passage. Une réponse exacte sans contrôle des conditions n'est pas encore une solution complète.

AVANT DE COMMENCER

Construire une solution

1. Choisir ce que l'on cherche

Une longueur, une aire, une équation de lieu ou une coordonnée ne demandent pas toujours de calculer tous les points. Pour une corde, la différence des abscisses peut suffire ; pour un centre de gravité, la somme des coordonnées est souvent plus utile.

2. Tracer une figure cohérente

Placer les axes, les points fixes, les foyers et les projections. Les figures de ce livret sont tracées à partir des équations ; les légendes sont parfois décalées pour rester lisibles. Une propriété doit toutefois être prouvée, même si elle semble évidente sur le dessin.

3. Traduire une contrainte à la fois

Condition géométrique	Traduction utile
Deux directions perpendiculaires	$u \cdot v = 0$
Un point sur une droite	Substituer ses coordonnées
Une longueur imposée	Égaler les carrés des distances
Un milieu de corde connu	Écrire les extrémités $M + v$ et $M - v$
Une symétrie orthogonale	Projeter sur l'axe, puis doubler le déplacement
Un lieu de points	Éliminer un paramètre, puis vérifier la réciproque

THÉORÈME / Différence des racines

Si u_1, u_2 sont les racines réelles de $Au^2 + Bu + C = 0$, avec $A \neq 0$, alors

$$|u_1 - u_2| = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{|A|}.$$

En effet, $(u_1 - u_2)^2 = (u_1 + u_2)^2 - 4u_1u_2 = B^2/A^2 - 4C/A$.

4. Contrôler les solutions

Vérifier les signes, l'appartenance à un segment, l'existence réelle des ordonnées et l'ordre des sommets d'un polygone. Une racine de l'équation éliminée peut ne correspondre à aucun point réel de la figure.

PIÈGE / Passer au carré

L'égalité $u^2 = v^2$ donne $u = v$ ou $u = -v$. Une distance vaut $|u|$, pas systématiquement u . Noter les conditions de signe avant de simplifier évite de perdre une branche ou d'en ajouter une fausse.

CHAPITRE 1 / COURS

Droites, distances et aires

Dans tout le livret, le repère est orthonormé. Les formules de distance et d'angle dépendent de cette hypothèse.

THÉORÈME / Les outils du repère

Pour $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$,

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A), \quad AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Le milieu est $((x_A + x_B)/2, (y_A + y_B)/2)$. Si $AP : PB = m : n$ avec $m, n > 0$ et $P \in [AB]$, alors

$$P = \frac{nA + mB}{m + n}.$$

Le centre de gravité d'un triangle est $G = (A + B + C)/3$.

Une droite et ses directions

Pour $d : ax + by + c = 0$, où $(a, b) \neq (0, 0)$, le vecteur $\mathbf{n} = (a, b)$ est normal à la droite et $\mathbf{u} = (-b, a)$ est directeur. Deux droites sont parallèles lorsque leurs vecteurs directeurs sont colinéaires ; elles sont perpendiculaires lorsque leur produit scalaire est nul.

THÉORÈME / Distance d'un point à une droite

Pour $P(x_0, y_0)$ et $d : ax + by + c = 0$,

$$d(P, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Si H est le projeté orthogonal de P , alors $P - H = \lambda(a, b)$. En substituant $H = P - \lambda(a, b)$ dans l'équation de d , on trouve

$$\lambda = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2},$$

puis $PH = |\lambda|\sqrt{a^2 + b^2}$.

Aire et angle sans calculer les pentes

Avec $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$,

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})|, \quad \cos \widehat{BAC} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Si l'angle est aigu, $\tan \widehat{BAC} = |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})| / (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

ASTUCE / La forme normale reste valable partout

L'équation $ax + by + c = 0$ traite aussi les droites verticales. La forme $y = mx + p$ ne le peut pas : ne pas introduire une pente lorsqu'elle risque de ne pas exister.

CHAPITRE 1 / COURS

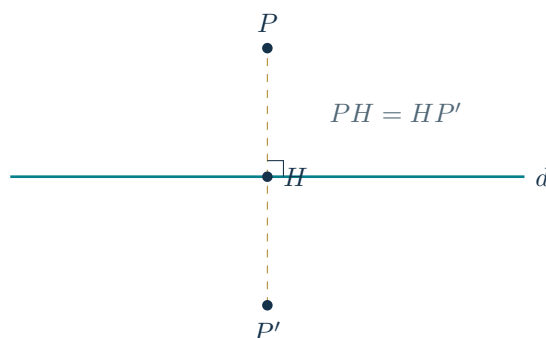
Symétrie et bissectrices

THÉORÈME / Image d'un point par une symétrie orthogonale

Pour $d : ax + by + c = 0$, l'image de $P(x_0, y_0)$ est

$$P' = P - 2 \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} (a, b).$$

En effet, le pied H de la perpendiculaire est le milieu de $[PP']$, donc $P' = 2H - P$; on utilise ensuite la projection calculée à la page précédente.



Pourquoi peut-on réfléchir directement le centre de gravité ?

La formule précédente s'écrit $s(P) = MP + v$, avec une matrice fixe M et un vecteur fixe v . Ainsi,

$$s\left(\frac{A + B + C}{3}\right) = \frac{s(A) + s(B) + s(C)}{3}.$$

Le centre de gravité du triangle image est donc l'image du centre de gravité. La même propriété vaut pour les milieux et les barycentres dont les poids ont une somme non nulle.

THÉORÈME / Les deux bissectrices de deux droites sécantes

Pour $d_i : a_i x + b_i y + c_i = 0$, les points équidistants des deux droites vérifient

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Ces deux droites sont les bissectrices ; elles sont perpendiculaires.

PIÈGE / Ne pas supprimer les normalisations

Comparer directement $a_1 x + b_1 y + c_1$ et $a_2 x + b_2 y + c_2$ n'a de sens pour les distances que si les normales ont la même norme. Les dénominateurs sont indispensables.

CHAPITRE 1 / PROBLÈME 1

Réfléchir un triangle

PROBLÈME 1 / Le bon point à transformer

On considère $A(1, 3)$, $B(3, 1)$, $C(2, 4)$ et la droite $d : x + 2y - 2 = 0$. Le centre de gravité du triangle symétrique de ABC par rapport à d est $G'(\alpha, \beta)$. Calculer $15(\alpha - \beta)$.

Solution

1. Réduire le nombre de transformations. Le centre de gravité de ABC est

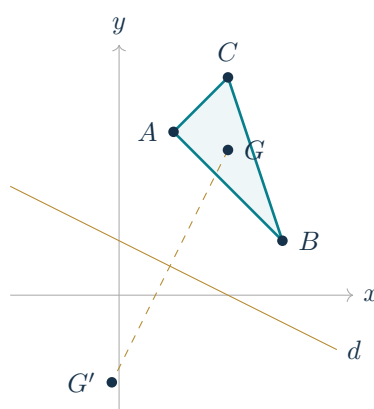
$$G = \left(\frac{1+3+2}{3}, \frac{3+1+4}{3} \right) = \left(2, \frac{8}{3} \right).$$

La symétrie conserve les barycentres : il suffit de calculer l'image de G .

2. Projeter et réfléchir. Le vecteur normal de d est $(1, 2)$, de norme au carré 5. La valeur de son équation en G est $2 + 16/3 - 2 = 16/3$. Ainsi,

$$G' = \left(2, \frac{8}{3} \right) - \frac{32}{15}(1, 2) = \left(-\frac{2}{15}, -\frac{8}{5} \right).$$

$$15(\alpha - \beta) = 15 \left(-\frac{2}{15} + \frac{8}{5} \right) = 22.$$



ASTUCE / Contrôle rapide

Le milieu de $[GG']$ est $(14/15, 8/15)$; il vérifie $x + 2y - 2 = 0$. De plus, $\overrightarrow{GG'}$ est colinéaire à $(1, 2)$. Les deux conditions caractérisent la réflexion.

CHAPITRE 1 / PROBLÈME 2

Une tige et un lieu elliptique

PROBLÈME 2 / Éliminer deux paramètres

Une tige AB a une longueur constante 8. Son extrémité A appartient à $x - y + 2 = 0$ et B à $y + 2 = 0$. Le point P partage $[AB]$ dans le rapport $AP : PB = 2 : 1$. Déterminer le lieu de P .

Solution

1. Paramétrer les extrémités. Écrivons $A = (t, t + 2)$ et $B = (u, -2)$. Si $P = (x, y)$, la formule de partage donne

$$x = \frac{t + 2u}{3}, \quad y = \frac{t - 2}{3}.$$

On en déduit $t = 3y + 2$ et $u = (3x - 3y - 2)/2$.

2. Utiliser la longueur constante. Les différences de coordonnées valent

$$t - u = \frac{9y + 6 - 3x}{2}, \quad t + 2 - (-2) = 3y + 6.$$

La condition $AB^2 = 64$ devient donc

$$9(x - 3y - 2)^2 + 36(y + 2)^2 = 256.$$

En développant, on obtient aussi

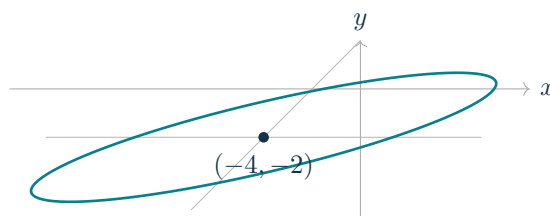
$$9x^2 + 117y^2 - 54xy - 36x + 252y - 76 = 0.$$

3. Identifier la courbe. Posons $X = x + 4$, $Y = y + 2$. L'équation s'écrit

$$9(X - 3Y)^2 + 36Y^2 = 256.$$

La forme quadratique est strictement positive hors de l'origine. Il s'agit d'une ellipse de centre $(-4, -2)$, dont les axes ne sont pas les axes du repère initial.

4. Vérifier la réciproque. Pour tout (x, y) satisfaisant l'équation encadrée, les valeurs $t = 3y + 2$ et $u = (3x - 3y - 2)/2$ reconstruisent deux points sur les droites prescrites, avec $AB = 8$. Leur point de partage est exactement (x, y) : toute l'ellipse est atteinte.



PIÈGE / Une équation nécessaire ne suffit pas

L'élimination prouve que chaque position de P appartient à la courbe. La reconstruction des points A et B prouve la réciproque, indispensable pour conclure sur le lieu complet.

CHAPITRE 1 / PROBLÈME 3

Symétrie et concurrence

PROBLÈME 3 / Retrouver deux paramètres

Les droites $3x - 4y - \alpha = 0$, $8x - 11y - 33 = 0$ et $2x - 3y + \lambda = 0$ sont concourantes. L'image de $(1, 2)$ par la symétrie d'axe $2x - 3y + \lambda = 0$ a pour abscisse $57/13$. Calculer $|\alpha\lambda|$.

Solution

1. Exploiter l'abscisse réfléchi. La normale de la troisième droite est $(2, -3)$, de norme au carré 13. En $(1, 2)$, l'expression $2x - 3y + \lambda$ vaut $\lambda - 4$. Donc

$$\frac{57}{13} = 1 - \frac{4(\lambda - 4)}{13}.$$

Après multiplication par 13, $57 = 13 - 4(\lambda - 4)$, d'où $\lambda = -7$.

2. Trouver le point de concours. Il vérifie

$$\begin{cases} 8x - 11y = 33, \\ 2x - 3y = 7. \end{cases}$$

Soustraire quatre fois la seconde équation à la première donne $y = 5$, puis $x = 11$.

3. Revenir à la première droite. Le point $(11, 5)$ appartient aussi à $3x - 4y - \alpha = 0$. Ainsi $\alpha = 33 - 20 = 13$.

$$|\alpha\lambda| = |13 \times (-7)| = 91.$$

Une vérification indépendante de la réflexion

L'ordonnée de l'image est

$$y' = 2 - 2 \frac{-11}{13}(-3) = -\frac{40}{13}.$$

Le milieu de $(1, 2)$ et $(57/13, -40/13)$ vaut $(35/13, -7/13)$; il appartient bien à $2x - 3y - 7 = 0$. Le segment joignant les deux points est perpendiculaire à cette droite.

ASTUCE / Commencer par la donnée la plus directe

La réflexion détermine λ à elle seule. Utiliser immédiatement la concurrence aurait introduit davantage d'inconnues sans information supplémentaire.

CHAPITRE 1 / PROBLÈME 4

Une verticale dans un triangle

PROBLÈME 4 / Bornes d'un paramètre

Un triangle est délimité par $x + y = 11$, $x + 2y = 16$ et $2x + 3y = 29$. Pour quelles valeurs de α le point $(11/2, \alpha)$ appartient-il au triangle, bord compris ?

Solution

Les intersections deux à deux donnent les sommets $A(6, 5)$, $B(10, 3)$ et $C(4, 7)$. Pour choisir le bon côté de chaque droite, on teste le sommet opposé. On obtient

$$x + y \geq 11, \quad x + 2y \geq 16, \quad 2x + 3y \leq 29.$$

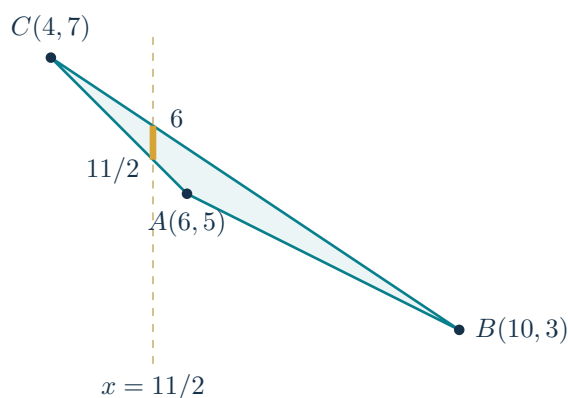
À l'abscisse $x = 11/2$, ces trois inégalités deviennent

$$\alpha \geq \frac{11}{2}, \quad \alpha \geq \frac{21}{4}, \quad \alpha \leq 6.$$

La première borne inférieure est la plus forte puisque $11/2 > 21/4$.

$$\alpha \in \left[\frac{11}{2}, 6 \right].$$

Le produit des valeurs extrêmes est donc $(11/2) \times 6 = 33$.



PIÈGE / Le signe n'est pas dicté par l'équation

Une droite sépare le plan en deux demi-plans. Pour savoir lequel contient le triangle, tester un point dont la position est connue, ici le sommet opposé. Le bord étant autorisé, les inégalités sont larges.

CHAPITRE 1 / PROBLÈME 5

Les bases d'un triangle isocèle

PROBLÈME 5 / Deux directions possibles

Les deux côtés égaux d'un triangle isocèle sont portés par $-x + 2y - 4 = 0$ et $x + y - 4 = 0$. Déterminer les pentes possibles de sa base.

Solution

1. Utiliser l'axe de symétrie. L'axe d'un triangle isocèle est une bissectrice des deux droites portant les côtés égaux. Sa base est perpendiculaire à cet axe. Comme les deux bissectrices sont perpendiculaires entre elles, les deux directions possibles pour la base sont celles des bissectrices.

2. Calculer ces directions. Les normales des droites ont pour normes $\sqrt{5}$ et $\sqrt{2}$. Les bissectrices sont donc

$$\frac{-x + 2y - 4}{\sqrt{5}} = \pm \frac{x + y - 4}{\sqrt{2}}.$$

Un vecteur directeur $(1, m)$ de l'une de ces droites vérifie

$$\frac{-1 + 2m}{\sqrt{5}} = \pm \frac{1 + m}{\sqrt{2}}.$$

En élevant au carré et en regroupant,

$$2(-1 + 2m)^2 = 5(1 + m)^2 \iff m^2 - 6m - 1 = 0.$$

$$m_1 = 3 + \sqrt{10}, \quad m_2 = 3 - \sqrt{10}.$$

On trouve $m_1 + m_2 = 6$ et $m_1 m_2 = -1$, ce qui confirme l'orthogonalité des deux directions.

Pourquoi les deux possibilités sont-elles réalisables ?

Le sommet commun est l'intersection des deux droites. Sur deux demi-droites formant l'un des angles, on choisit deux points à une même distance positive du sommet. Le segment qui les joint est une base possible. En choisissant l'angle adjacent, on obtient l'autre direction.

ASTUCE / Direction et position sont différentes

La question détermine la pente de la base, pas son équation complète. On peut obtenir une infinité de triangles isocèles en faisant varier leur taille. Une base passant par le sommet donnerait un triangle dégénéré et doit être exclue.

CHAPITRE 1 / PROBLÈME 6

Une racine hors du segment

PROBLÈME 6 / Aire et angle droit

Soient $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$. On choisit $M \in [OB]$ et $N \in [AB]$ de sorte que AMN soit rectangle en N et que $\mathcal{A}_{AMN} = \frac{4}{9}\mathcal{A}_{OAB}$. Déterminer $\lambda = AN/NB$.

Solution

Écrivons $M = (0, h)$, avec $0 \leq h \leq 1$. L'aire est positive, donc N est distinct de A ; $N = B$ imposerait $M = B$ et une aire nulle. Ainsi $\lambda > 0$ est bien défini et

$$N = \left(\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda} \right).$$

La droite AB a pour pente -1 . La droite MN , qui lui est perpendiculaire, a donc pour pente 1 , d'où

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} - h = \frac{1}{1+\lambda}, \quad h = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}.$$

Comme $h \geq 0$, on doit avoir $\lambda \geq 1$.

Un déterminant, ou le produit des deux côtés perpendiculaires, donne

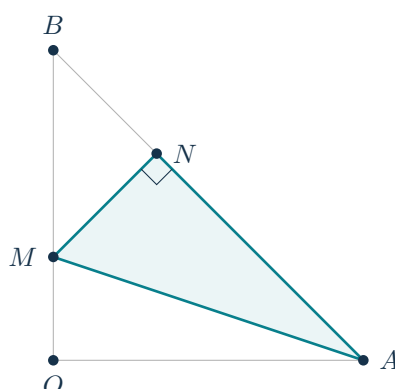
$$\mathcal{A}_{AMN} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}.$$

Or $\mathcal{A}_{OAB} = 1/2$. L'équation recherchée est donc

$$\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} = \frac{2}{9} \iff 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0.$$

Ses racines sont 2 et $1/2$. La seconde donne $h = -1/3$, hors du segment autorisé.

$$\lambda = 2, \quad N = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \quad M = \left(0, \frac{1}{3} \right).$$



PIÈGE / L'équation oublie parfois la figure

La racine $1/2$ vérifie l'égalité d'aires et l'orthogonalité, mais pas $M \in [OB]$. Les contraintes géométriques font partie de la résolution.

CHAPITRE 1 / PROBLÈME 7

Un triangle entre deux parallèles

PROBLÈME 7 / La rotation de 60°

Deux droites parallèles sont distantes de 5. Le point P , situé entre elles, est à distance 1 de la première et 4 de la seconde. Un triangle équilatéral PQR a Q sur la première droite et R sur la seconde. Calculer QR^2 .

Solution

On choisit les droites $y = 0$ et $y = 5$, puis $P = (0, 1)$ et $Q = (q, 0)$. Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est $(q, -1)$.

Dans l'une des deux orientations possibles, $\overrightarrow{PR}$ est obtenu par une rotation de 60° de $\overrightarrow{PQ}$. La formule de rotation donne

$$\overrightarrow{PR} = \left(\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}q}{2} - \frac{1}{2} \right).$$

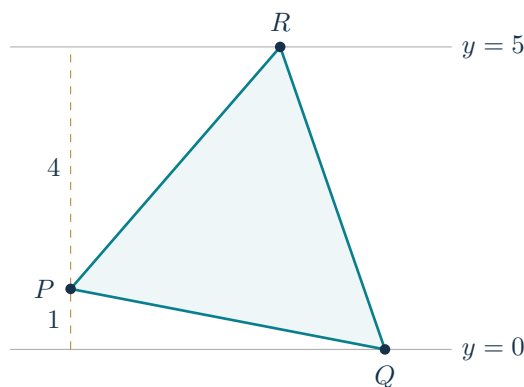
L'ordonnée de R vaut 5, donc la seconde composante de $\overrightarrow{PR}$ vaut 4. Ainsi

$$\frac{\sqrt{3}q}{2} - \frac{1}{2} = 4 \implies q = 3\sqrt{3}.$$

On obtient $R = (2\sqrt{3}, 5)$, puis

$$QR^2 = PQ^2 = (3\sqrt{3})^2 + (-1)^2 = 28.$$

La rotation de -60° produit la configuration réfléchiée par rapport à l'axe vertical ; la longueur reste la même.


ASTUCE / Une rotation exprime deux conditions à la fois

Transformer $\overrightarrow{PQ}$ par une rotation de 60° impose simultanément $PQ = PR$ et $\widehat{QPR} = 60^\circ$. Cela évite de résoudre trois égalités de longueurs.

CHAPITRE 2 / COURS

Reconnaître un cercle

THÉORÈME / Équation cartésienne

Le cercle de centre $\Omega(h, k)$ et de rayon $r > 0$ a pour équation

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Une équation $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ se réécrit

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2}{4} - F.$$

Elle définit un cercle si le membre de droite est strictement positif, un point s'il est nul, et aucun point réel s'il est négatif.

Retrouver le centre à partir d'une corde

Si A et B sont deux points distincts du cercle, alors $\Omega A = \Omega B$. Le centre appartient à la médiatrice de $[AB]$. Si l'on connaît aussi une droite contenant le centre, l'intersection avec cette médiatrice suffit souvent à le déterminer.

THÉORÈME / Cercle de diamètre $[AB]$

Un point X appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si

$$(X - A) \cdot (X - B) = 0.$$

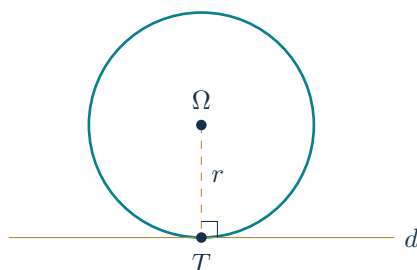
En posant $M = (A + B)/2$ et $v = (B - A)/2$, le produit vaut

$$(X - M + v) \cdot (X - M - v) = \|X - M\|^2 - \|v\|^2.$$

On retrouve bien le cercle de centre M et de rayon $AB/2$.

Tangence avec une droite

Une droite est tangente à un cercle si la distance du centre à la droite est égale au rayon. Le point de contact est le pied de la perpendiculaire issue du centre.



PIÈGE / Normaliser avant de lire le centre

Pour $Kx^2 + Ky^2 + Dx + Ey + F = 0$, avec $K \neq 0$, diviser d'abord par K . Le centre est $(-D/(2K), -E/(2K))$.

CHAPITRE 2 / COURS

Cordes, intersections et arcs

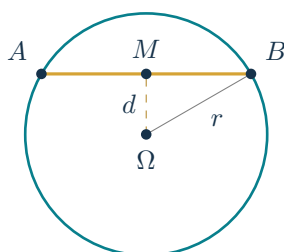
THÉORÈME / Longueur d'une corde

Une droite située à distance $d < r$ du centre coupe le cercle suivant une corde de longueur

$$L = 2\sqrt{r^2 - d^2}.$$

La perpendiculaire du centre à la corde la coupe en son milieu. Le théorème de Pythagore dans l'un des deux triangles rectangles donne $(L/2)^2 + d^2 = r^2$.

Si le milieu M est connu, la droite de la corde est perpendiculaire à ΩM et passe par M , à condition que $M \neq \Omega$. Pour $M = \Omega$, toute droite passant par le centre porte un diamètre.



THÉORÈME / Deux cercles sécants

Deux cercles de rayons $r_1, r_2 > 0$, dont les centres sont distants de D , ont exactement deux points communs si et seulement si

$$|r_1 - r_2| < D < r_1 + r_2.$$

Ces inégalités sont les inégalités triangulaires strictes du triangle formé par les centres et un point d'intersection. Aux égalités, les cercles sont tangents, sauf le cas de deux cercles confondus lorsque $D = 0$ et $r_1 = r_2$.

Longueur d'arc et angle au centre

Pour un angle au centre θ exprimé en radians, la longueur d'arc vaut $r\theta$. Une fraction q de la circonférence correspond donc à $\theta = 2\pi q$. Si un point de départ a pour angle 0, les deux orientations donnent les angles θ et $-\theta$.

ASTUCE / Le bon outil selon la donnée

Une corde se traite par Pythagore ; un arc se traite par l'angle au centre. Les deux longueurs sont différentes, même lorsqu'elles ont les mêmes extrémités.

CHAPITRE 2 / PROBLÈME 8

Deux intersections, strictement

PROBLÈME 8 / Un intervalle de rayons

Un cercle de rayon 2, situé dans le deuxième quadrant, est tangent aux deux axes. Un second cercle a pour centre $(2, 5)$ et pour rayon $r > 0$. Pour quelles valeurs de r les cercles ont-ils deux points communs distincts ?

Solution

1. Localiser le premier centre. La tangence aux axes impose des coordonnées de valeurs absolues égales à 2. Le deuxième quadrant impose les signes : le centre est $(-2, 2)$.

2. Mesurer la distance entre les centres. On trouve

$$D = \sqrt{(2+2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

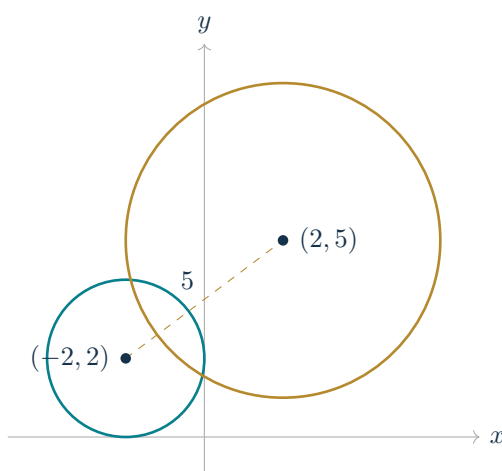
3. Appliquer les deux conditions. Les cercles sont sécants en deux points si et seulement si

$$|r - 2| < 5 \quad \text{et} \quad 5 < r + 2.$$

La première équivaut à $-3 < r < 7$; la seconde à $r > 3$. Leur intersection donne

$$3 < r < 7.$$

Si l'on note $\alpha = 3$ et $\beta = 7$ les bornes, alors $3\beta - 2\alpha = 15$.



Une configuration sécante : le second rayon vaut ici 4.

PIÈGE / Les bornes ne sont pas admises

Pour $r = 3$, les cercles sont tangents extérieurement. Pour $r = 7$, ils sont tangents intérieurement. Dans les deux cas, il n'y a qu'un point commun.

CHAPITRE 2 / PROBLÈME 9

Réfléchir un cercle, puis un arc

PROBLÈME 9 / Centre, rayon et angle

On réfléchit le cercle $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ par rapport à $2x - 3y + 5 = 0$. Sur le cercle image, A est le point le plus à droite. Le petit arc AB mesure un sixième de la circonférence et l'ordonnée de B est inférieure à 4. Déterminer le cercle image et B .

Solution

Le cercle initial s'écrit $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Son centre est $(1, -2)$ et son rayon 3.

En appliquant la formule de réflexion, on trouve le centre image

$$\Omega = (1, -2) - 2 \frac{2 + 6 + 5}{13} (2, -3) = (-3, 4).$$

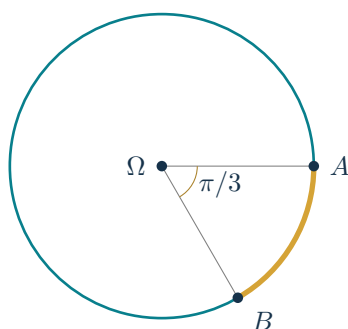
La symétrie est une isométrie : le rayon reste 3. Le cercle image est donc

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9.$$

Le point le plus à droite est $A = (0, 4)$. Un sixième de la circonférence correspond à un angle au centre de $2\pi/6 = \pi/3$. La condition $y_B < 4$ sélectionne la rotation de $-\pi/3$ à partir de $\overrightarrow{\Omega A} = (3, 0)$. Ainsi,

$$B = \Omega + 3(\cos(-\pi/3), \sin(-\pi/3)).$$

$$B = \left(-\frac{3}{2}, 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$



ASTUCE / Transformer le centre suffit

L'image d'un cercle par une isométrie est un cercle de même rayon. Réfléchir trois points du cercle fonctionne aussi, mais introduit des calculs inutiles.

CHAPITRE 2 / PROBLÈME 10

Une tangence et une corde

PROBLÈME 10 / Relations entre coefficients

Un cercle est tangent à l'axe des abscisses au point $(a, 0)$, avec $a > 0$, et situé sous cet axe. Il découpe sur l'axe des ordonnées une corde de longueur $b > 0$. Écrire son équation sous la forme $x^2 + y^2 - \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et relier α, β, γ, b .

Solution

1. Position du centre. Le rayon au point de tangence est vertical. Le centre a donc pour coordonnées $(a, -r)$, où $r > 0$ est le rayon. L'équation est

$$(x - a)^2 + (y + r)^2 = r^2 \iff x^2 + y^2 - 2ax + 2ry + a^2 = 0.$$

Par identification, $\alpha = 2a$, $\beta = 2r$ et $\gamma = a^2$.

2. Existence et longueur de la corde. La distance du centre à l'axe des ordonnées vaut a . Pour une corde de longueur strictement positive, il faut $r > a$. Sa longueur vérifie

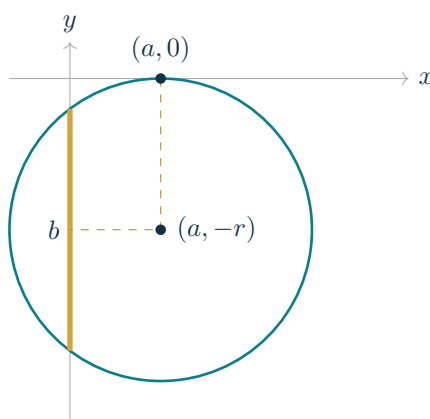
$$b = 2\sqrt{r^2 - a^2}.$$

Les relations cherchées sont donc

$$\alpha^2 = 4\gamma, \quad b^2 = \beta^2 - 4\gamma, \quad \beta > \alpha > 0.$$

Vérification par les intersections

Sur l'axe des ordonnées, $x = 0$ et $y^2 + \beta y + \gamma = 0$. La distance entre les deux racines est $\sqrt{\beta^2 - 4\gamma}$, qui redonne exactement la longueur b .



CHAPITRE 2 / PROBLÈME 11

Deux diagonales perpendiculaires

PROBLÈME 11 / L'aire d'un quadrilatère

La droite $x + y = 1$ coupe le cercle $x^2 + y^2 = 4$ en A et B . La médiatrice de $[AB]$ coupe ce cercle en C et D . Calculer l'aire du quadrilatère convexe formé par ces quatre points.

Solution

1. Identifier les diagonales. La médiatrice passe par le centre $O(0, 0)$ et est perpendiculaire à AB ; c'est la droite $y = x$. La corde CD est donc un diamètre de longueur 4.

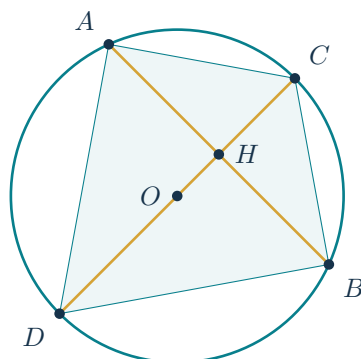
La distance de O à $x + y = 1$ est $1/\sqrt{2}$. Par la formule de la corde,

$$AB = 2\sqrt{4 - \frac{1}{2}} = \sqrt{14}.$$

2. Découper en triangles rectangles. Les segments AB et CD sont les diagonales perpendiculaires du quadrilatère convexe. Si elles se coupent en H , la somme des quatre aires vaut

$$\frac{1}{2}(AH + HB)(CH + HD) = \frac{1}{2}AB \cdot CD.$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times 4 = 2\sqrt{14}.$$



PIÈGE / Respecter l'ordre des sommets

Sur le bord, les sommets sont dans l'ordre A, C, B, D (ou l'ordre inverse). Les segments AB et CD sont des diagonales, pas deux côtés consécutifs. Un ordre incorrect peut produire un quadrilatère croisé.

CHAPITRE 2 / PROBLÈME 12

Le milieu révèle la corde

PROBLÈME 12 / Centre et longueur

Un cercle passe par $(0, 2)$ et $(4, 2)$; son centre appartient à $3x + 2y + 2 = 0$. Déterminer la longueur de sa corde dont le milieu est $M(1, 2)$.

Solution

1. Trouver le centre. Le segment joignant les deux points donnés est horizontal, de milieu $(2, 2)$. Sa médiatrice est $x = 2$. Le centre vérifie donc

$$3 \times 2 + 2y + 2 = 0, \quad \text{soit} \quad \Omega = (2, -4).$$

2. Calculer le rayon et la distance à la corde. En utilisant $(0, 2)$,

$$r^2 = (0 - 2)^2 + (2 + 4)^2 = 40.$$

La droite de la corde est perpendiculaire à ΩM . La distance du centre à cette droite est donc ΩM , avec

$$\Omega M^2 = (1 - 2)^2 + (2 + 4)^2 = 37.$$

La formule de la corde donne immédiatement

$$L = 2\sqrt{40 - 37} = 2\sqrt{3}.$$

Pour aller jusqu'aux extrémités

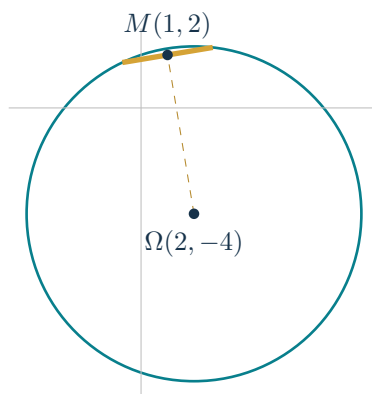
Un vecteur normal à la corde est $(-1, 6)$; son équation est

$$-(x - 1) + 6(y - 2) = 0, \quad \text{soit} \quad -x + 6y - 11 = 0.$$

Un vecteur directeur unitaire est $(6, 1)/\sqrt{37}$. Les extrémités sont donc

$$M \pm \sqrt{\frac{3}{37}}(6, 1).$$

Leur milieu est M et leur distance mutuelle est bien $2\sqrt{3}$.



ASTUCE / La donnée du milieu est plus forte qu'un point de passage

Une corde passant par M n'est pas déterminée. Une corde ayant M pour milieu l'est, dès que M est distinct du centre et intérieur au cercle.

CHAPITRE 3 / COURS

Foyer et directrice

THÉORÈME / Définition d'une parabole

Soient un point F et une droite d ne passant pas par F . La parabole de foyer F et de directrice d est l'ensemble des points M tels que

$$MF = d(M, d).$$

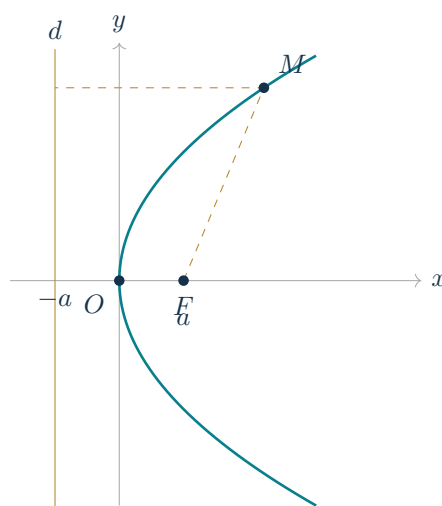
Son axe est la perpendiculaire à d passant par F . Son sommet est le milieu du segment joignant F à son projeté orthogonal sur d .

La forme canonique horizontale

Prenons $F = (a, 0)$ et $d : x = -a$, avec $a > 0$. Pour $M = (x, y)$, la définition donne

$$(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2 \iff y^2 = 4ax.$$

Cette équation impose $x \geq 0$, donc $d(M, d) = x + a$. Son sommet est O , son axe l'axe des abscisses, et son ouverture est vers la droite.



Autres orientations

La parabole $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ a pour sommet (h, k) , foyer $(h + a, k)$ et directrice $x = h - a$. Pour $a < 0$, elle s'ouvre vers la gauche. De même, $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ s'ouvre vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.

PIÈGE / Le paramètre n'est pas le coefficient entier

Dans $y^2 = 12x$, on lit $4a = 12$, donc $a = 3$. Le foyer est $(3, 0)$, et non $(12, 0)$.

CHAPITRE 3 / COURS

Paramètres et cordes focales

THÉORÈME / Paramétrage de $y^2 = 4ax$

Pour $a > 0$, tout point de la parabole s'écrit de manière unique

$$P(t) = (at^2, 2at), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En effet, $t = y/(2a)$ entraîne $x = y^2/(4a) = at^2$.

Équation d'une corde

Pour deux paramètres distincts t, u , la droite passant par $P(t)$ et $P(u)$ a pour équation

$$(t + u)y = 2x + 2atu.$$

Il suffit de substituer chacun des deux points pour vérifier cette équation ; son coefficient en x étant non nul, elle définit bien une droite.

THÉORÈME / Condition de corde focale

La corde passe par le foyer $F(a, 0)$ si et seulement si

$$tu = -1.$$

Cela résulte de $0 = 2a + 2atu$. Les paramètres des deux extrémités sont donc t et $-1/t$, avec $t \neq 0$.

Distances au foyer et longueur de la corde

Par définition de la parabole, $FP(t) = at^2 + a = a(1 + t^2)$. Pour $Q = P(-1/t)$,

$$FQ = a(1 + t^{-2}).$$

Les ordonnées des deux points sont de signes opposés et leur droite passe par F : le foyer est entre eux. Ainsi

$$PQ = FP + FQ = a \left(t + \frac{1}{t} \right)^2.$$

De plus,

$$FP \cdot FQ = a^2 \left(2 + t^2 + \frac{1}{t^2} \right) = a PQ.$$

$$\boxed{\frac{1}{FP} + \frac{1}{FQ} = \frac{1}{a}.$$

ASTUCE / La corde focale la plus courte

Puisque $t^2 + t^{-2} \geq 2$, on a $PQ \geq 4a$. L'égalité se produit pour $t = \pm 1$, sur la corde perpendiculaire à l'axe, d'extrémités $(a, \pm 2a)$. Sa longueur $4a$ est appelée *corde focale perpendiculaire à l'axe*.

CHAPITRE 3 / COURS

Intersections et transformations

Une droite et une parabole

Substituer l'équation de la droite dans celle de la parabole conduit généralement à une équation du second degré. Son discriminant indique le nombre d'intersections réelles : deux, une ou aucune. Le cas d'une droite parallèle à l'axe peut conduire à une équation du premier degré.

THÉORÈME / Longueur d'une corde portée par $y = mx + p$

Si les abscisses des deux intersections sont x_1, x_2 , alors

$$AB = \sqrt{1 + m^2} |x_1 - x_2|.$$

En effet, $y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$; la formule de distance donne le résultat. Si x_1, x_2 sont les racines de $Ax^2 + Bx + C = 0$, on obtient

$$AB = \frac{\sqrt{(1 + m^2)(B^2 - 4AC)}}{|A|}.$$

Réfléchir une parabole

Une symétrie conserve les distances. Elle transforme donc une parabole en une parabole dont le foyer et la directrice sont les images des éléments initiaux. On peut aussi transformer l'équation par substitution, ce qui est souvent plus rapide lorsque l'axe de symétrie a une équation simple.

Exemple : réflexion par rapport à $x + y + c = 0$

La formule générale de réflexion se simplifie en

$$(x, y) \mapsto (-y - c, -x - c).$$

Cette transformation est sa propre réciproque. Pour trouver l'équation image d'une courbe $f(x, y) = 0$, on remplace donc les coordonnées initiales par $(-y - c, -x - c)$ dans f .

Étudier une distance minimale

La racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$. Minimiser une distance revient donc à minimiser son carré. Sur $y^2 = 4x$, poser $u = x = y^2/4$ introduit la contrainte $u \geq 0$; une expression quadratique en u peut alors se traiter par complétion du carré.

PIÈGE / Un minimum sous contrainte

Le sommet d'une expression quadratique peut se situer hors de $[0, +\infty[$. Dans ce cas, le minimum admissible n'est pas celui sur $\mathbb{R}$, mais celui à la frontière $u = 0$.

CHAPITRE 3 / PROBLÈME 13

Une parabole, trois points, un cercle

PROBLÈME 13 / Retrouver un coefficient

La parabole $y = x^2 + px - 3$ coupe les axes en trois points distincts. Ces points appartiennent à un cercle de centre $(-1, -1)$. Déterminer p et l'aire du triangle formé par les trois points.

Solution

1. Utiliser l'intersection avec l'axe vertical. En posant $x = 0$, on trouve $R = (0, -3)$. Le rayon du cercle vérifie donc

$$r^2 = (0 + 1)^2 + (-3 + 1)^2 = 5.$$

Le cercle a pour équation $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

2. Trouver ses intersections avec l'axe horizontal. Pour $y = 0$,

$$(x + 1)^2 + 1 = 5 \implies x = -3 \text{ ou } x = 1.$$

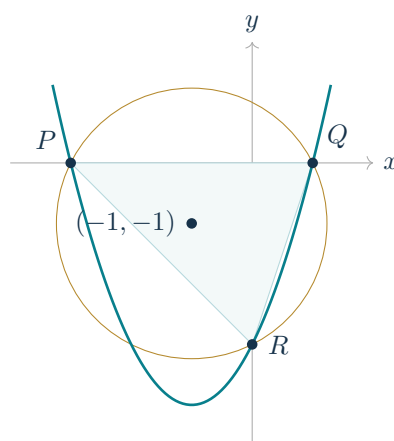
Les deux intersections de la parabole avec cet axe sont donc $P = (-3, 0)$ et $Q = (1, 0)$. Le polynôme monique qui s'annule en -3 et 1 est

$$(x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3.$$

Par identification, $p = 2$.

3. Calculer l'aire. La base PQ mesure 4 et la hauteur issue de R mesure 3.

$$p = 2, \quad \mathcal{A}_{PQR} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6.$$


ASTUCE / Un point fixe détermine déjà le rayon

Le terme constant de la parabole donne un point indépendant de p . C'est ce point qui permet de reconstruire le cercle avant de chercher les deux racines du polynôme.

CHAPITRE 3 / PROBLÈME 14

Une corde focale et sa directrice

PROBLÈME 14 / L'aire d'un trapèze

Le point $P = (4, 4\sqrt{3})$ appartient à $y^2 = 4ax$, avec $a > 0$. La corde PQ passe par le foyer. On projette P et Q sur la directrice en M et N . Calculer l'aire du quadrilatère convexe $PQNM$.

Solution

Le point P vérifie $48 = 16a$, donc $a = 3$. La parabole est $y^2 = 12x$, son foyer $F = (3, 0)$ et sa directrice $x = -3$.

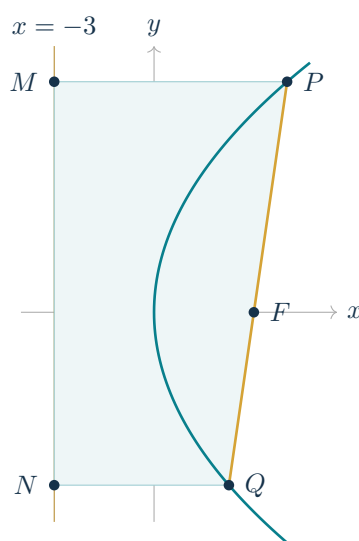
Le paramètre de P est $t = y/(2a) = 2/\sqrt{3}$. Le paramètre de l'autre extrémité de la corde focale est $-1/t = -\sqrt{3}/2$, d'où

$$Q = \left(\frac{9}{4}, -3\sqrt{3}\right).$$

Les projections sur la directrice sont $M = (-3, 4\sqrt{3})$ et $N = (-3, -3\sqrt{3})$.

Les côtés PM et QN sont horizontaux, de longueurs respectives 7 et $21/4$. La distance entre leurs droites est la différence des ordonnées, soit $7\sqrt{3}$.

$$\mathcal{A}_{PQNM} = \frac{1}{2} \left(7 + \frac{21}{4}\right) 7\sqrt{3} = \frac{343\sqrt{3}}{8}.$$



PIÈGE / Choisir les côtés parallèles de la formule d'aire

Ici, les bases du trapèze sont PM et QN , et sa hauteur est verticale. La longueur de la corde oblique PQ n'intervient pas dans cette formule.

CHAPITRE 3 / PROBLÈME 15

L'angle vu du sommet

PROBLÈME 15 / Un produit scalaire décisif

La droite $3x - 2y + 12 = 0$ coupe la parabole $y = 3x^2/4$ en A et B . Si O est le sommet de la parabole, déterminer $\tan \widehat{AOB}$.

Solution

La droite s'écrit $y = 3x/2 + 6$. Les abscisses des intersections vérifient

$$\frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{2}x + 6 \iff x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Les racines sont 4 et -2 , d'où $A = (4, 12)$ et $B = (-2, 3)$.

Le sommet est $O = (0, 0)$. On calcule

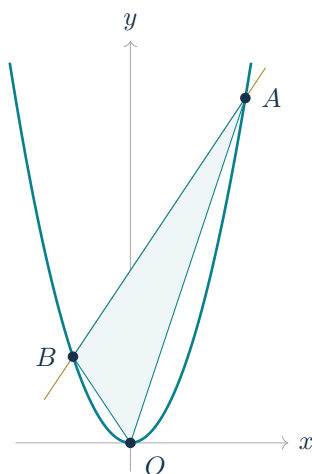
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 4(-2) + 12 \times 3 = 28 > 0.$$

L'angle $\widehat{AOB}$ est donc aigu. Le déterminant vaut

$$\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 4 \times 3 - 12(-2) = 36.$$

On peut alors utiliser le quotient du déterminant en valeur absolue par le produit scalaire :

$$\tan \widehat{AOB} = \frac{36}{28} = \frac{9}{7}.$$


PIÈGE / Angle entre droites ou entre demi-droites ?

La formule des pentes donne souvent la tangente de l'angle aigu entre deux droites. Pour l'angle du triangle, le signe du produit scalaire indique si l'angle recherché est aigu ou obtus. Ici, ce contrôle justifie la valeur positive $9/7$.

CHAPITRE 3 / PROBLÈME 16

La distance minimale à une parabole

PROBLÈME 16 / Reformulation explicite de la distance

La distance minimale entre $A = (a, 0)$, avec $a > 0$, et la parabole $y^2 = 4x$ vaut 4. Déterminer a , puis le cercle passant par A et par le foyer, dont le centre appartient à l'axe des abscisses.

La distance est ici fixée à 4 ; son carré vaut 16. Cette précision lève une ambiguïté du texte initial.

Solution

Tout point de la parabole a une abscisse $u \geq 0$ et une ordonnée dont le carré vaut $4u$. Le carré de sa distance à A est

$$D^2(u) = (u - a)^2 + 4u = (u - (a - 2))^2 + 4a - 4.$$

Si $0 < a \leq 2$, le sommet de cette expression est à $u = a - 2 \leq 0$: le minimum sur $u \geq 0$ est atteint en $u = 0$ et vaut a^2 .

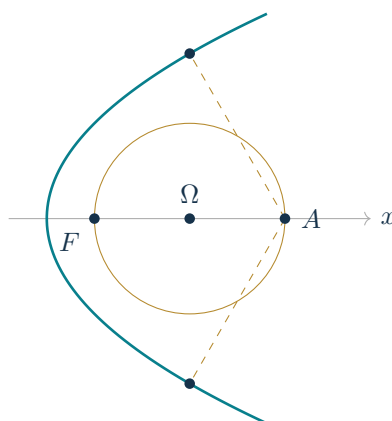
Si $a \geq 2$, le sommet est admissible et le minimum vaut $4a - 4$. Par conséquent,

$$\min D^2 = \begin{cases} a^2, & 0 < a \leq 2, \\ 4a - 4, & a \geq 2. \end{cases}$$

L'égalité $\min D^2 = 16$ n'a pas de solution dans la première branche. Dans la seconde, $4a - 4 = 16$, donc $a = 5$. Les points les plus proches sont $(3, \pm 2\sqrt{3})$.

Le foyer est $F = (1, 0)$. Un centre situé sur l'axe et équidistant de $A = (5, 0)$ et F est nécessairement leur milieu $(3, 0)$. Le rayon vaut 2.

$$a = 5, \quad (x - 3)^2 + y^2 = 4.$$



CHAPITRE 3 / PROBLÈME 17

Un cercle centré au foyer

PROBLÈME 17 / Deux valeurs d'un paramètre

On considère la parabole $y^2 = 4x + 16$ et le cercle de rayon 5 centré en son foyer. Le point d'intersection des droites $y = 3x$ et $x + \lambda y = 4$ appartient à ce cercle. Déterminer les deux valeurs $\lambda_1 < \lambda_2$, puis $12\lambda_1 + 29\lambda_2$.

Solution

La parabole s'écrit $y^2 = 4(x + 4)$. Son sommet est $(-4, 0)$, son paramètre vaut 1 et son foyer est $F = (-3, 0)$. Le cercle a donc pour équation

$$(x + 3)^2 + y^2 = 25.$$

Sur $y = 3x$, cette équation devient

$$(x + 3)^2 + 9x^2 = 25 \iff 5x^2 + 3x - 8 = 0.$$

La factorisation $(x - 1)(5x + 8) = 0$ donne les deux points

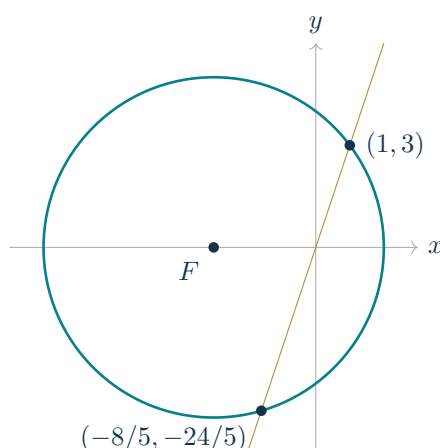
$$(1, 3) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{8}{5}, -\frac{24}{5}\right).$$

Pour le premier, $1 + 3\lambda = 4$, donc $\lambda = 1$. Pour le second,

$$-\frac{8}{5} - \frac{24}{5}\lambda = 4 \implies \lambda = -\frac{7}{6}.$$

Ces deux valeurs définissent bien une intersection unique des droites, puisque $1 + 3\lambda \neq 0$ dans les deux cas.

$$\lambda_1 = -\frac{7}{6}, \quad \lambda_2 = 1, \quad 12\lambda_1 + 29\lambda_2 = 15.$$



ASTUCE / Lire la translation avant de calculer

Le terme $+16$ ne change pas le paramètre $a = 1$: il translate la parabole de quatre unités vers la gauche. Il faut déplacer à la fois le sommet, le foyer et la directrice.

CHAPITRE 3 / PROBLÈME 18

Une parabole d'axe oblique

PROBLÈME 18 / Repartir de la définition

Une parabole a pour sommet $V = (3/2, 3)$ et pour directrice $x + 2y = 0$. Déterminer son foyer et son équation cartésienne.

Solution

1. Reconstituer le foyer. L'axe est perpendiculaire à la directrice et passe par V . La projection orthogonale de V sur $x + 2y = 0$ est

$$H = \left(\frac{3}{2}, 3\right) - \frac{3/2 + 6}{5}(1, 2) = (0, 0).$$

Le sommet est le milieu de $[HF]$, d'où

$$F = 2V - H = (3, 6).$$

2. Égaler les deux distances. Un point (x, y) de la parabole vérifie

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = \frac{|x+2y|}{\sqrt{5}}.$$

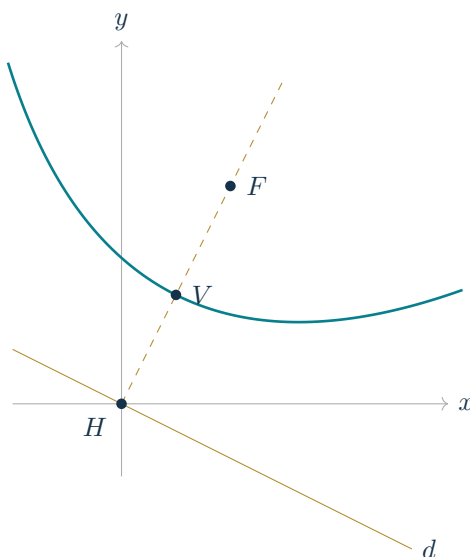
Les deux membres sont positifs ou nuls ; passer au carré est donc une équivalence. Après multiplication par 5 et développement,

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 30x - 60y + 225 = 0.$$

Retrouver une forme canonique

Les coordonnées orthonormées $u = (x+2y)/\sqrt{5}$ et $v = (2x-y)/\sqrt{5}$ sont respectivement dirigées selon l'axe et selon la directrice. La distance du sommet à la directrice vaut $p = 3\sqrt{5}/2$; l'équation devient

$$v^2 = 4p(u-p) = 6\sqrt{5} \left(u - \frac{3\sqrt{5}}{2}\right).$$



CHAPITRE 3 / PROBLÈME 19

Un trapèze inscrit

PROBLÈME 19 / Une diagonale focale

Les quatre sommets d'un trapèze $ABCD$ appartiennent à $y^2 = 4x$, avec AD et BC parallèles à l'axe des ordonnées. La diagonale AC passe par le foyer et mesure $25/4$. Calculer l'aire du trapèze.

Solution

Chaque côté vertical joint deux points de même abscisse et d'ordonnées opposées. Le trapèze est donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

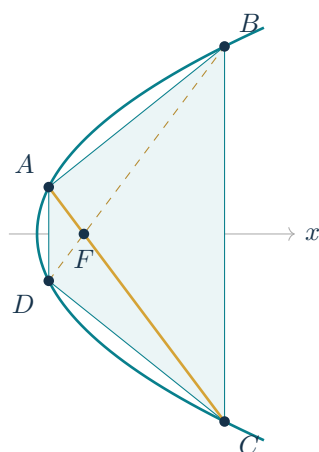
Le paramètre de la parabole vaut $a = 1$. En choisissant l'extrémité de la diagonale située au-dessus de l'axe, son paramètre t est positif et l'autre vaut $-1/t$. La longueur de la corde focale donne

$$\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

Puisque $t > 0$, on a $t + 1/t = 5/2$. Ainsi $2t^2 - 5t + 2 = 0$, donc $t = 2$ ou $t = 1/2$.

Ces deux valeurs donnent les deux mêmes abscisses 4 et $1/4$. Les valeurs absolues des ordonnées sont respectivement 4 et 1. Les côtés parallèles mesurent donc 8 et 2, et leur distance est $4 - 1/4 = 15/4$.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(8 + 2) \frac{15}{4} = \frac{75}{4}.$$



ASTUCE / Deux paramètres, une même figure

Les solutions $t = 2$ et $t = 1/2$ échangent le rôle des extrémités supérieures et des diagonales. Elles ne donnent pas deux aires différentes.

CHAPITRE 3 / PROBLÈME 20

Une parabole réfléchie

PROBLÈME 20 / Un changement de coordonnées simple

On réfléchit la parabole $y^2 = 4x$ par rapport à $x + y + 4 = 0$. La droite $y = -5$ coupe la parabole image en A et B . On note $d = AB$ et $\mathcal{A}$ l'aire du triangle SAB , avec $S = (1, 0)$. Calculer $\mathcal{A} + d$.

Solution

1. Transformer l'équation. La réflexion par rapport à $x + y + 4 = 0$ est

$$(x, y) \mapsto (-y - 4, -x - 4).$$

Comme cette transformation est sa propre réciproque, l'équation de la parabole image s'obtient en remplaçant les anciennes coordonnées par $(-y - 4, -x - 4)$:

$$(-x - 4)^2 = 4(-y - 4) \iff (x + 4)^2 = -4(y + 4).$$

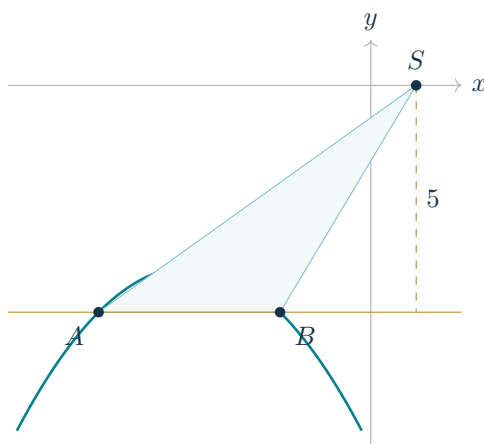
Son sommet est $(-4, -4)$ et elle s'ouvre vers le bas.

2. Couper par la droite horizontale. Pour $y = -5$, on trouve $(x + 4)^2 = 4$, donc

$$A = (-6, -5), \quad B = (-2, -5), \quad d = 4.$$

3. Choisir la bonne hauteur. La distance de $S = (1, 0)$ à la droite $y = -5$ vaut 5, quelle que soit son abscisse. Ainsi $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$.

$\mathcal{A} + d = 10 + 4 = 14.$



CHAPITRE 3 / PROBLÈME 21

Deux directrices, un même foyer

PROBLÈME 21 / La corde commune

Deux paraboles ont le même foyer $F = (4, 3)$. Leurs directrices sont respectivement l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Elles se coupent en A et B . Calculer AB^2 .

Solution

En appliquant deux fois la définition, on obtient

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = y^2, \quad (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = x^2.$$

Aux intersections, la soustraction donne $x^2 = y^2$. Il faut donc étudier les deux possibilités $y = x$ et $y = -x$.

Pour $y = -x$, la première équation devient

$$x^2 - 2x + 25 = 0.$$

Son discriminant vaut $4 - 100 = -96 < 0$: il n'y a aucun point réel sur cette droite.

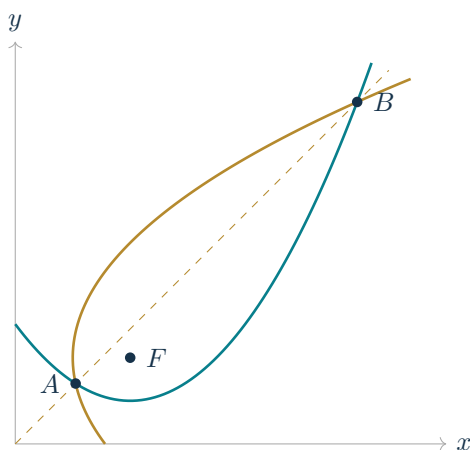
Pour $y = x$, elle devient $x^2 - 14x + 25 = 0$, de discriminant 96. Les deux points sont (x_1, x_1) et (x_2, x_2) , avec

$$(x_1 - x_2)^2 = 96.$$

Les différences d'abscisses et d'ordonnées sont égales ; par la formule de distance,

$$AB^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 192.$$

On peut également écrire $x_1 = 7 - 2\sqrt{6}$ et $x_2 = 7 + 2\sqrt{6}$, mais ces valeurs ne sont pas nécessaires au calcul de la longueur.



CHAPITRE 3 / PROBLÈME 22

Le cercle d'une corde focale

PROBLÈME 22 / Un produit de distances

Sur la parabole $y^2 = 12x$, une corde PQ passe par le foyer F et vérifie $FP \cdot FQ = 147/4$. Déterminer les cercles possibles de diamètre $[PQ]$.

Solution

Le paramètre vaut $a = 3$. La relation $FP \cdot FQ = a PQ$ donne

$$PQ = \frac{147/4}{3} = \frac{49}{4}, \quad r = \frac{PQ}{2} = \frac{49}{8}.$$

Écrivons $P = (3t^2, 6t)$ et $Q = (3/t^2, -6/t)$, avec $t \neq 0$. L'égalité sur le produit donne

$$9 \left(2 + t^2 + \frac{1}{t^2} \right) = \frac{147}{4} \implies t^2 + \frac{1}{t^2} = \frac{25}{12}.$$

Le milieu Ω de $[PQ]$ a donc pour coordonnées

$$x_\Omega = \frac{3}{2} \left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right) = \frac{25}{8}, \quad y_\Omega = 3 \left(t - \frac{1}{t} \right).$$

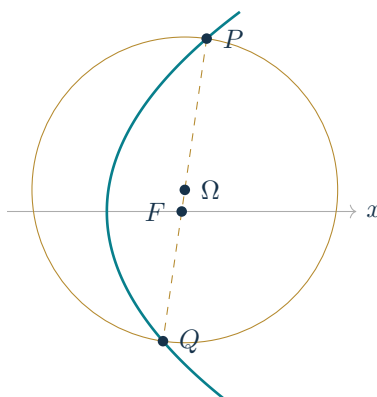
Or $(t - 1/t)^2 = 25/12 - 2 = 1/12$, d'où $y_\Omega = \pm\sqrt{3}/2$. Les deux possibilités sont réalisées, par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

$$\left(x - \frac{25}{8} \right)^2 + \left(y \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{2401}{64}.$$

En développant puis en multipliant par 64, on peut aussi écrire

$$64x^2 + 64y^2 - 400x \mp 64\sqrt{3}y - 1728 = 0.$$

Ainsi, dans une écriture avec coefficients $-\alpha x$ et $-\beta$, on aurait $\alpha = 400$, $\beta = 1728$ et $\beta - \alpha = 1328$.



Le cercle dont le centre est au-dessus de l'axe ; l'autre est son symétrique.

CHAPITRE 4 / COURS

L'ellipse et ses foyers

THÉORÈME / Équation et éléments géométriques

Pour $a > b > 0$, l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a pour centre O , demi-grand axe a , demi-petit axe b et foyers $F_{\pm} = (\pm c, 0)$, où $c^2 = a^2 - b^2$. Son excentricité est $e = c/a$, donc $0 < e < 1$ et $b^2 = a^2(1 - e^2)$.

Démontrer la propriété focale

Pour un point $M = (x, y)$ de l'ellipse, $y^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$. En remplaçant dans $MF_+^2 = (x - c)^2 + y^2$, on obtient

$$MF_+^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2} = (a - ex)^2.$$

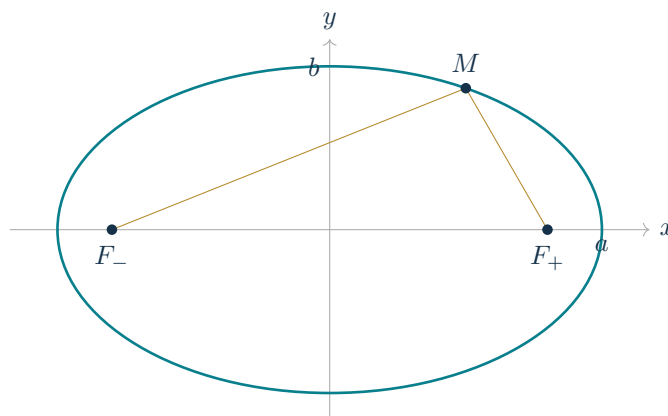
Comme $|x| \leq a$ et $e < 1$, on a $a - ex > 0$. Ainsi

$$MF_+ = a - ex, \quad MF_- = a + ex.$$

On en déduit les deux relations fondamentales

$$MF_+ + MF_- = 2a, \quad MF_+ MF_- = a^2 - e^2 x^2.$$

Réciproquement, le lieu défini par la somme constante $MF_+ + MF_- = 2a$, avec $a > c$, conduit à la même équation cartésienne par deux élévations au carré et vérification des signes.



PIÈGE / Le plus grand dénominateur porte le grand axe

Dans $x^2/p^2 + y^2/q^2 = 1$, si $q > p$, le grand axe est vertical. Sa demi-longueur est q et les foyers sont $(0, \pm \sqrt{q^2 - p^2})$.

CHAPITRE 4 / COURS

Cordes et changements d'échelle

THÉORÈME / Corde de milieu connu

Sur $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, la corde de milieu $M = (h, k) \neq (0, 0)$, intérieur à l'ellipse, est portée par

$$\frac{hx}{a^2} + \frac{ky}{b^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}.$$

Preuve. Écrivons ses extrémités $M + v$ et $M - v$, où $v = (u, w) \neq 0$. En soustrayant les deux équations de l'ellipse, on obtient

$$\frac{hu}{a^2} + \frac{kw}{b^2} = 0.$$

Ainsi la direction de la corde est orthogonale à $(h/a^2, k/b^2)$. L'équation de la droite passant par M dans cette direction est celle annoncée. En substituant $M + tv$, le terme linéaire s'annule : les deux paramètres d'intersection sont opposés, ce qui prouve aussi la réciproque.

PIÈGE / Un milieu particulier

Si $M = (0, 0)$, la formule devient $0 = 0$ et ne détermine pas une droite. Toutes les cordes passant par le centre sont des diamètres et ont ce même milieu.

La corde focale perpendiculaire au grand axe

Pour la corde située sur $x = c$, l'équation donne

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}, \quad y = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Sa longueur est donc $\ell = 2b^2/a$. Cette corde est parfois appelée *latus rectum* ; la formule concerne sa longueur entière.

THÉORÈME / Aire et homothétie

L'aire de l'ellipse de demi-axes a, b est πab . Elle résulte du disque unité par une multiplication des coordonnées par a et b , qui multiplie les aires par ab .

Lors d'une homothétie de rapport $q > 0$, les longueurs sont multipliées par q , les aires par q^2 , et l'excentricité reste inchangée.

ASTUCE / Reconnaître une suite géométrique d'aires

Si des ellipses semblables ont leurs demi-axes multipliés par un même nombre q à chaque étape, leurs aires ont pour raison q^2 . Il faut démontrer cette relation, pas seulement la deviner à partir de deux valeurs.

CHAPITRE 4 / PROBLÈME 23

Deux coniques confocales

PROBLÈME 23 / Ellipse et hyperbole

L'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ et l'hyperbole $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ ont les mêmes foyers $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Le rapport de leurs excentricités est $e_E/e_H = 1/3$, et $a = A + 2$. Déterminer les deux équations et la somme des longueurs de leurs cordes focales perpendiculaires à l'axe.

Solution

Pour des foyers à distance c du centre, les excentricités sont $e_E = c/a$ et $e_H = c/A$. Ici $c = \sqrt{3}$, donc

$$\frac{e_E}{e_H} = \frac{A}{a} = \frac{1}{3}.$$

Avec $a = A + 2$, cela donne $a = 3A$ et $3A = A + 2$, d'où $A = 1$ et $a = 3$.

Les relations entre demi-axes et foyers sont différentes pour les deux coniques :

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \text{pour l'ellipse,} \quad c^2 = A^2 + B^2 \quad \text{pour l'hyperbole.}$$

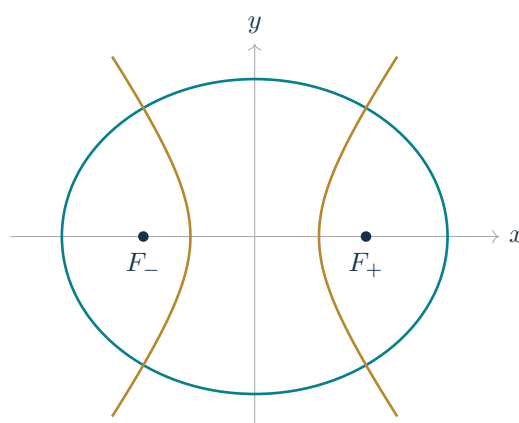
Ainsi $b^2 = 9 - 3 = 6$ et $B^2 = 3 - 1 = 2$. Les équations sont

$$\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1, \quad x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.}$$

Dans les deux cas, une substitution de l'abscisse du foyer donne une corde focale perpendiculaire de longueur $2 \times (\text{demi-axe secondaire})^2 / (\text{demi-axe principal})$. Donc

$$\ell_E = \frac{2 \times 6}{3} = 4, \quad \ell_H = \frac{2 \times 2}{1} = 4.$$

$$\boxed{\ell_E + \ell_H = 8.}$$



CHAPITRE 4 / PROBLÈME 24

Une corde sans chercher son centre

PROBLÈME 24 / Milieu imposé

Déterminer la longueur de la corde de l'ellipse $x^2/4 + y^2/2 = 1$ dont le milieu est $M = (1, 1/2)$.

Solution

Le point M est intérieur à l'ellipse, car $1/4 + (1/2)^2/2 = 3/8 < 1$, et il est distinct du centre. Sa corde est donc bien définie.

La formule de la corde de milieu connu donne

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}, \quad \text{soit} \quad x + y = \frac{3}{2}.$$

En substituant $y = 3/2 - x$ dans l'ellipse,

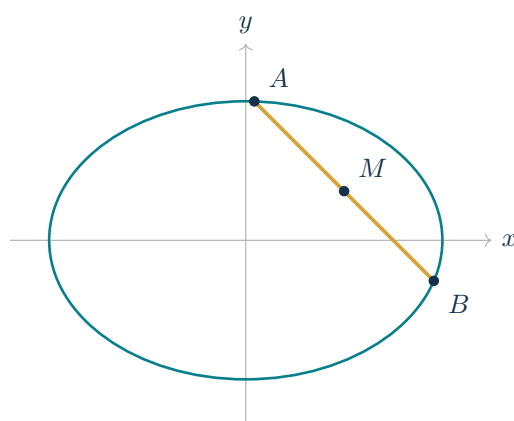
$$\frac{x^2}{4} + \frac{(3/2 - x)^2}{2} = 1 \iff 6x^2 - 12x + 1 = 0.$$

Le discriminant vaut 120. Les abscisses sont donc

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{30}}{6}, \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Les ordonnées associées sont $1/2 + \sqrt{30}/6$ et $1/2 - \sqrt{30}/6$. Comme la pente vaut -1 , la longueur est $\sqrt{2}$ fois la différence des abscisses :

$$L = \sqrt{2} \frac{\sqrt{30}}{3} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$


PIÈGE / La normale n'est pas le rayon OM

Pour un cercle, le rayon passant par le milieu d'une corde lui est perpendiculaire. Pour une ellipse, le vecteur normal est $(h/a^2, k/b^2)$, généralement différent de la direction (h, k) .

CHAPITRE 4 / PROBLÈME 25

Deux excentricités possibles

PROBLÈME 25 / Un produit de distances focales

Le point $M = (\sqrt{3}, 1/2)$ appartient à une ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, avec $a > b > 0$. Le produit de ses distances aux foyers vaut $7/4$. Déterminer les excentricités possibles et leur différence positive.

Solution

Posons $u = e^2$ et $A = a^2$. On doit avoir $0 < u < 1$ et $b^2 = A(1 - u)$.

La formule $MF_+MF_- = a^2 - e^2x_M^2$ donne $A - 3u = 7/4$, donc $A = 3u + 7/4$. L'appartenance de M à l'ellipse donne

$$\frac{3}{A} + \frac{1}{4A(1-u)} = 1.$$

En multipliant par A , puis par $4(1-u) > 0$, on obtient

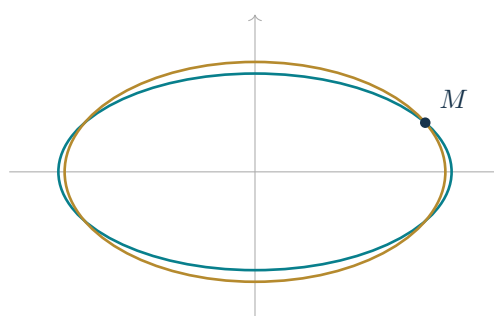
$$3 + \frac{1}{4(1-u)} = 3u + \frac{7}{4}, \quad 12u^2 - 17u + 6 = 0.$$

Cette équation se factorise en $(3u - 2)(4u - 3) = 0$. Les deux valeurs $u = 2/3$ et $u = 3/4$ appartiennent bien à $]0, 1[$.

u	e	a^2	b^2
$\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	4	1

Les deux couples de demi-axes sont positifs, avec $a > b$, et vérifient les données. Comme $3/4 > 2/3$, la différence positive des excentricités est

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}}{6}.$$

ASTUCE / Travailler d'abord avec e^2

Les relations entre demi-axes contiennent e^2 . Poser $u = e^2$ évite des racines carrées prématurées ; on revient à $e = \sqrt{u} > 0$ seulement à la fin.

CHAPITRE 4 / PROBLÈME 26

Une infinité d'ellipses emboîtées

PROBLÈME 26 / Une série d'aires

L'ellipse E_1 a pour demi-axes $a_1 = 3$ et $b_1 = 2$. Les ellipses suivantes ont le même centre, les mêmes directions d'axes et la même excentricité ; le demi-grand axe de E_{n+1} est le demi-petit axe de E_n . Déterminer la somme de toutes leurs aires.

Solution

Une excentricité constante impose un rapport b_n/a_n constant. Comme ce rapport vaut $2/3$ pour E_1 , on a

$$b_n = \frac{2}{3}a_n, \quad a_{n+1} = b_n = \frac{2}{3}a_n.$$

Par récurrence,

$$a_n = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \quad b_n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

L'aire S_n de E_n est donc

$$S_n = \pi a_n b_n = 6\pi \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

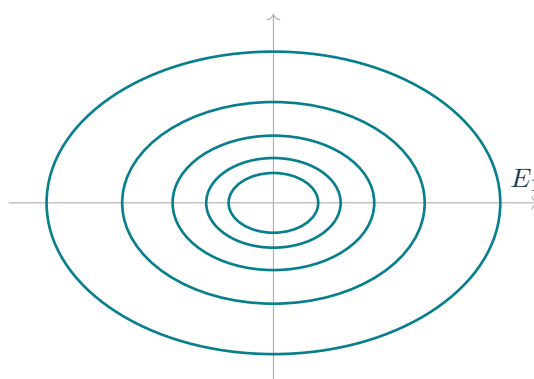
Pour tout entier $N \geq 1$, la somme partielle vaut

$$\sum_{n=1}^N S_n = \frac{54\pi}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^N\right).$$

Puisque $0 < 4/9 < 1$, la puissance tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} S_n = \frac{54\pi}{5}.$$

Ainsi, la quantité $(5/\pi) \sum S_n$ vaut 54.



PIÈGE / Somme des aires et aire de la réunion

La somme demandée compte chaque ellipse séparément, même si elles se recouvrent. L'aire de leur réunion est simplement celle de la plus grande, soit 6π ; ce n'est pas la série calculée ici.

CHAPITRE 4 / PROBLÈME 27

Deux ellipses et un rectangle

PROBLÈME 27 / Reformulation avec données explicites

Les ellipses $E_1 : x^2/12 + y^2/8 = 1$ et $E_2 : x^2/6 + y^2/9 = 1$ se coupent en quatre points. Déterminer leur excentricité commune et l'aire du quadrilatère formé par ces intersections.

Les équations sont données directement pour éviter une ambiguïté sur les radicaux dans les données intermédiaires du texte initial.

Solution

Pour E_1 , le grand axe est horizontal et $e_1^2 = 1 - 8/12 = 1/3$. Pour E_2 , le grand axe est vertical et $e_2^2 = 1 - 6/9 = 1/3$. Donc

$$e_1 = e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Posons $X = x^2$ et $Y = y^2$. Le système d'intersection devient

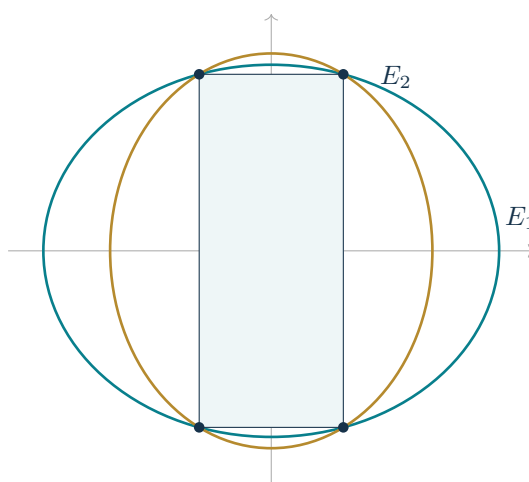
$$\begin{cases} 2X + 3Y = 24, \\ 3X + 2Y = 18. \end{cases}$$

En éliminant, on obtient $Y = 36/5$, puis $X = 6/5$. Les deux valeurs sont strictement positives : il y a bien quatre points, de coordonnées

$$\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}, \pm\frac{6}{\sqrt{5}} \right),$$

avec tous les choix indépendants de signes. Ils sont les sommets d'un rectangle de côtés $2\sqrt{6/5}$ et $12/\sqrt{5}$.

$$\mathcal{A} = 4\sqrt{\frac{6}{5} \frac{6}{\sqrt{5}}} = \frac{24\sqrt{6}}{5}.$$



CHAPITRE 5 / COURS

L'hyperbole et ses axes

THÉORÈME / Équation et foyers

Pour $a, b > 0$, l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a pour centre O , sommets $(\pm a, 0)$ et foyers $(\pm c, 0)$, où $c^2 = a^2 + b^2$. Son excentricité est $e = c/a > 1$. L'axe transverse, qui contient les sommets et les foyers, est horizontal.

Une différence constante de distances

Sur la branche droite, $x \geq a$. En utilisant $y^2 = b^2(x^2/a^2 - 1)$, on trouve

$$MF_+^2 = (ex - a)^2, \quad MF_-^2 = (ex + a)^2.$$

Comme $ex - a > 0$, on a $MF_+ = ex - a$ et $MF_- = ex + a$, donc $MF_- - MF_+ = 2a$. Sur la branche gauche, les rôles sont inversés. Ainsi

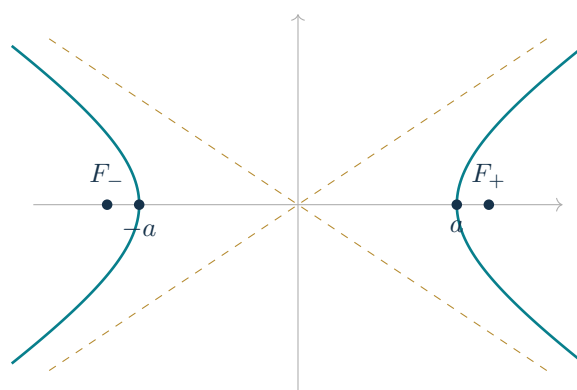
$$|MF_- - MF_+| = 2a.$$

Asymptotes

L'équation donne $y = \pm(b/a)\sqrt{x^2 - a^2}$. À grande distance du centre, les branches se rapprochent des droites

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{et} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Par exemple, pour $x \rightarrow +\infty$, la différence entre $\sqrt{x^2 - a^2}$ et x vaut $-a^2/(\sqrt{x^2 - a^2} + x)$ et tend vers zéro.



PIÈGE / Le demi-axe transverse n'est pas forcément le plus grand

Pour une hyperbole, a et b sont tous deux positifs, sans condition $a > b$. Le terme positif de l'équation indique l'axe transverse.

CHAPITRE 5 / COURS

Orientation et cordes focales

Déplacer le centre et changer l'orientation

Pour un centre (h, k) , on remplace x, y par $x - h, y - k$. Les deux orientations principales sont

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1.$$

Dans la seconde, l'axe transverse est vertical, les sommets sont $(h, k \pm a)$ et les foyers $(h, k \pm c)$, avec toujours $c^2 = a^2 + b^2$.

THÉORÈME / Corde focale perpendiculaire à l'axe

Pour l'hyperbole horizontale, la droite $x = c$ coupe la courbe en deux points dont les ordonnées vérifient

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{b^2}{a^2}.$$

La corde mesure donc $\ell = 2b^2/a$. Pour l'hyperbole verticale, on fixe l'ordonnée du foyer et on obtient la même formule.

Comparer les trois coniques

	Ellipse	Parabole	Hyperbole
Excentricité	$0 < e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
Forme de référence	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$	$y^2 = 4ax$	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
Distance focale	$c^2 = a^2 - b^2$	$VF = a$	$c^2 = a^2 + b^2$
Corde focale normale	$2b^2/a$	$4a$	$2b^2/a$

Pourquoi la parabole a-t-elle une excentricité 1 ?

La définition unifiée utilise $MF = e d(M, d)$. Pour la parabole, les deux distances sont égales, donc $e = 1$. Pour l'ellipse et l'hyperbole horizontales, on peut choisir un foyer $(c, 0)$ et la directrice correspondante $x = a/e$; les formules focales donnent bien ce même rapport.

ASTUCE / Avant de remplacer dans une formule

Identifier le centre, l'orientation et le demi-axe transverse. Une notation différente dans l'énoncé ne change pas le rôle géométrique des quantités : pour une hyperbole verticale $y^2/B^2 - x^2/A^2 = 1$, la corde focale normale mesure $2A^2/B$.

CHAPITRE 5 / PROBLÈME 28

Une hyperbole verticale

PROBLÈME 28 / Deux foyers et un point

Une hyperbole a pour foyers $(1, 14)$ et $(1, -12)$ et passe par $(1, 6)$. Déterminer son équation et la longueur de sa corde focale perpendiculaire à l'axe.

Solution

1. Déterminer le centre et l'orientation. Le milieu des foyers est $\Omega = (1, 1)$. Leur distance vaut 26, donc $c = 13$. L'axe transverse est vertical, d'équation $x = 1$.

2. Identifier le sommet donné. Un point de l'hyperbole situé sur son axe transverse est un sommet. Comme $(1, 6)$ est à distance 5 du centre, on a $a = 5$.

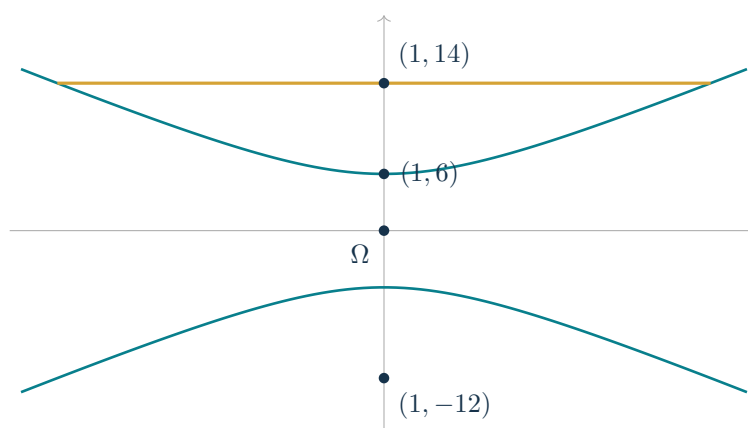
La relation $c^2 = a^2 + b^2$ donne $b^2 = 169 - 25 = 144$. L'équation est donc

$$\frac{(y - 1)^2}{25} - \frac{(x - 1)^2}{144} = 1.$$

3. Calculer la corde demandée. Elle est horizontale, à l'ordonnée d'un foyer. Sa longueur vaut

$$\ell = \frac{2b^2}{a} = \frac{288}{5}.$$

Par exemple, pour $y = 14$, on trouve $(x - 1)^2/144 = 169/25 - 1 = 144/25$, donc $x = 1 \pm 144/5$. La différence des deux abscisses est bien $288/5$.


PIÈGE / Ne pas permuter les dénominateurs

Le terme positif porte $(y - 1)^2$, car les foyers sont alignés verticalement. Le nombre 25 est associé à l'axe transverse, même s'il est plus petit que 144.

CHAPITRE 5 / PROBLÈME 29

Deux orientations, deux excentricités

PROBLÈME 29 / Relier des longueurs d'axes

L'hyperbole $H_1 : x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ a pour excentricité $\sqrt{5/2}$ et pour corde focale normale une longueur $15\sqrt{2}$. L'hyperbole $H_2 : y^2/B^2 - x^2/A^2 = 1$ a pour corde focale normale une longueur $12\sqrt{5}$. Le produit des longueurs de leurs axes transverses vaut $100\sqrt{10}$. Calculer $25e_2^2$.

Solution

1. Déterminer les paramètres de H_1 . Puisque $e_1^2 = 1 + b^2/a^2 = 5/2$, on a $b^2 = 3a^2/2$. Sa corde focale normale vérifie

$$\frac{2b^2}{a} = 3a = 15\sqrt{2},$$

d'où $a = 5\sqrt{2}$ et $b^2 = 75$.

2. Exploiter les axes transverses. Leurs longueurs entières sont $2a$ et $2B$. La donnée devient

$$4aB = 100\sqrt{10}, \quad B = \frac{100\sqrt{10}}{20\sqrt{2}} = 5\sqrt{5}.$$

Ainsi $B^2 = 125$.

3. Utiliser la seconde corde focale. Pour l'hyperbole verticale, cette longueur est $2A^2/B$. Donc

$$\frac{2A^2}{5\sqrt{5}} = 12\sqrt{5} \implies A^2 = 150.$$

Enfin, $e_2^2 = 1 + A^2/B^2 = 1 + 150/125 = 11/5$.

$$25e_2^2 = 55.$$

Les équations obtenues

$$H_1 : \frac{x^2}{50} - \frac{y^2}{75} = 1, \quad H_2 : \frac{y^2}{125} - \frac{x^2}{150} = 1.$$

Les deux hyperboles ont des orientations différentes, mais leurs coefficients ne sont pas simplement échangés : il ne faut leur attribuer aucune relation supplémentaire non donnée dans l'énoncé.

PIÈGE / Axe entier et demi-axe

Le produit des longueurs d'axes est $(2a)(2B) = 4aB$, et non aB . Ce facteur 4 modifie toute la suite du calcul s'il est oublié.

CHAPITRE 5 / PROBLÈME 30

Un centre de gravité mobile

PROBLÈME 30 / Une intersection à filtrer

Le cercle $x^2 + y^2 - 8x = 0$ et l'hyperbole $x^2/9 - y^2/4 = 1$ se coupent en A et B . Un point P parcourt la droite $2x - 3y + 4 = 0$. Déterminer le lieu du barycentre $G = (P + A + B)/3$, y compris en position alignée.

Solution

1. Trouver les intersections réelles. L'hyperbole donne $y^2 = 4x^2/9 - 4$. En substituant dans le cercle,

$$\frac{13x^2}{9} - 8x - 4 = 0 \iff 13x^2 - 72x - 36 = 0.$$

Les racines sont 6 et $-6/13$. Mais l'hyperbole impose $|x| \geq 3$: la seconde racine est inadmissible. Pour $x = 6$, on obtient $y^2 = 12$, d'où

$$A = (6, 2\sqrt{3}), \quad B = (6, -2\sqrt{3}).$$

2. Traduire la moyenne des coordonnées. Si $P = (p, q)$ et $G = (h, k)$, alors

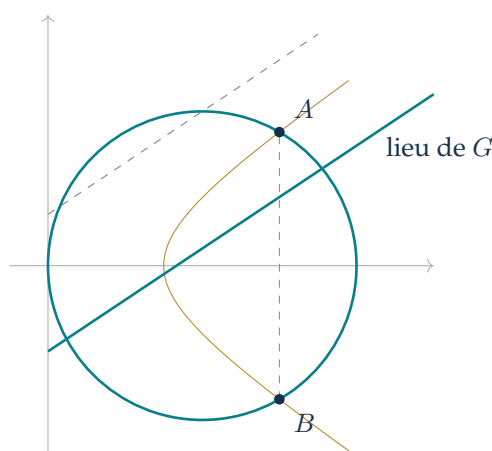
$$h = \frac{p + 12}{3}, \quad k = \frac{q}{3}, \quad p = 3h - 12, \quad q = 3k.$$

La condition $2p - 3q + 4 = 0$ devient

$$2(3h - 12) - 9k + 4 = 0.$$

Le lieu de G est la droite $6x - 9y - 20 = 0$.

Réciproquement, tout point de cette droite reconstruit par $p = 3h - 12$, $q = 3k$ un point P de la droite initiale. Le lieu entier est obtenu si le centre de gravité est défini comme moyenne des trois points, y compris lorsqu'ils sont alignés. Si l'on exige un triangle non dégénéré, il faut retirer $G = (6, 16/9)$, correspondant à $P = (6, 16/3)$ sur la droite (AB) .



POUR CHERCHER SEUL / 1

Dix exercices complémentaires

Ces exercices originaux reprennent les méthodes du cours avec des données nouvelles. Faire une figure, écrire les conditions d'existence, puis chercher sans consulter les corrigés.

EXERCICE 1 / Symétrie et aire

Soient $A = (2, 1)$, $B = (-2, 3)$ et $C = (4, 5)$. On réfléchit le triangle par rapport à $y = x$. Déterminer le centre de gravité du triangle image et son aire.

EXERCICE 2 / Une tranche de triangle

Le triangle a pour sommets $O = (0, 0)$, $A = (4, 0)$ et $B = (0, 3)$. Pour quelles valeurs de t le point $(1, t)$ appartient-il au triangle, bord compris ?

EXERCICE 3 / Centre et corde

Un cercle passe par $(1, 1)$ et $(5, 1)$; son centre appartient à $x + y = 2$. Déterminer son équation et la longueur de la corde portée par $x = 2$.

EXERCICE 4 / Deux cercles symétriques

On réfléchit le cercle $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ par rapport à $x = 1$. Déterminer l'équation du cercle image, les coordonnées des deux points communs aux cercles et la longueur de leur corde commune.

EXERCICE 5 / Une nouvelle corde focale

Le point $P = (8, 8)$ appartient à la parabole $y^2 = 8x$. La droite passant par P et par le foyer recoupe la parabole en Q . Déterminer Q et la longueur PQ .

ASTUCE / Des indices gradués

1. Une symétrie échange ici les deux coordonnées.
2. Commencer par l'équation du côté oblique.
3. Le centre est sur une médiatrice.
4. Soustraire les équations des cercles.
5. Les paramètres d'une corde focale ont pour produit -1 .

Barème de travail personnel

Pour chaque exercice : un point pour la traduction géométrique, un point pour le calcul, un point pour la justification et un point pour le contrôle final. L'objectif est de pouvoir expliquer la méthode, pas seulement de retrouver un nombre.

POUR CHERCHER SEUL / 2

Coniques et problèmes mixtes

EXERCICE 6 / Foyer et directrice

Une parabole a pour foyer $(2, 3)$ et pour directrice $y = -1$. Déterminer son sommet et son équation. Quelle longueur de corde découpe la droite $y = 3$?

EXERCICE 7 / Milieu de corde elliptique

Pour l'ellipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$, déterminer les foyers et l'excentricité, puis l'équation de la corde dont le milieu est $(1, 1)$. Vérifier que cette corde existe.

EXERCICE 8 / Une série d'aires

Une ellipse a pour demi-axes 4 et 2. On construit une suite d'ellipses concentriques de mêmes directions d'axes, chacune image de la précédente par l'homothétie de rapport $1/2$. Calculer la somme de leurs aires, en incluant l'ellipse initiale. Comparer avec l'aire de leur réunion.

EXERCICE 9 / Foyers d'une hyperbole

Une hyperbole a pour foyers $(5, 0)$ et $(-5, 0)$ et passe par $(3, 0)$. Déterminer son équation, son excentricité et la longueur de sa corde focale perpendiculaire à l'axe transverse.

EXERCICE 10 / Du cercle à l'hyperbole

Un cercle de centre $(a, 0)$, avec $a > 0$, est tangent à $x - y + 1 = 0$. Il découpe sur la droite $x = 1$ une corde de longueur 4. Déterminer a et son rayon r . Une hyperbole centrée à l'origine a pour foyers $(\pm a, 0)$ et pour demi-axe transverse r . Déterminer son équation et son excentricité.

ASTUCE / Des indices gradués

6. Le sommet est à mi-distance du foyer et de la directrice.
7. Employer la normale $(h/25, k/9)$ de la corde.
8. Une aire est multipliée par le carré du rapport d'homothétie.
9. Le point donné est un sommet.
10. Combiner une distance à une droite et la formule de la corde.

PIÈGE / La dernière question change le rôle des lettres

Dans l'exercice 10, la lettre a désigne la distance du centre de l'hyperbole à un foyer. Elle ne désigne pas son demi-axe transverse, qui est ici r . Suivre les rôles géométriques avant d'utiliser les formules.

CORRIGÉS / EXERCICES 1 À 4

Droites et cercles

1. Centre de gravité et aire

Le centre de gravité initial est $G = ((2 - 2 + 4)/3, (1 + 3 + 5)/3) = (4/3, 3)$. La réflexion par rapport à $y = x$ échange les coordonnées, donc $G' = (3, 4/3)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (-4, 2)$ et $\overrightarrow{AC} = (2, 4)$ ont pour déterminant -20 . L'aire initiale vaut 10 ; une symétrie orthogonale conserve les aires.

$$G' = \left(3, \frac{4}{3}\right), \quad \mathcal{A} = 10.$$

2. Un intervalle vertical

Les trois côtés délimitent la région $x \geq 0, y \geq 0, x/4 + y/3 \leq 1$. Avec $x = 1$, la dernière condition donne $1/4 + t/3 \leq 1$, soit $t \leq 9/4$. On doit aussi avoir $t \geq 0$.

$$t \in [0, 9/4].$$

3. Une médiatrice suffit

La médiatrice du segment donné est $x = 3$. En l'intersectant avec $x + y = 2$, on obtient le centre $(3, -1)$. Le carré du rayon vaut $(1 - 3)^2 + (1 + 1)^2 = 8$, d'où

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 8.$$

La droite $x = 2$ est à distance 1 du centre : sa corde mesure

$$L = 2\sqrt{8 - 1} = 2\sqrt{7}.$$

4. Une corde commune sur l'axe de symétrie

L'image du centre $(2, -1)$ est $(0, -1)$, et le rayon reste 3. Le cercle image a donc pour équation $x^2 + (y + 1)^2 = 9$.

La soustraction des deux équations donne $(x - 2)^2 - x^2 = 0$, soit $x = 1$. On remplace dans le cercle image : $(y + 1)^2 = 8$, d'où

$$(1, -1 + 2\sqrt{2}), \quad (1, -1 - 2\sqrt{2}), \quad L = 4\sqrt{2}.$$

Le milieu $(1, -1)$ est bien sur l'axe de symétrie et sur la droite des centres.

CORRIGÉS / EXERCICES 5 À 7

Paraboles et corde elliptique

5. Le paramètre réciproque opposé

La parabole $y^2 = 8x$ a pour paramètre $a = 2$ et pour foyer $(2, 0)$. Le paramètre de $P = (8, 8)$ vaut $t = 8/(2a) = 2$. Celui de Q vaut $-1/2$, donc

$$Q = \left(2 \times \frac{1}{4}, 4 \times \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \left(\frac{1}{2}, -2 \right).$$

La formule de la corde focale donne $PQ = 2(2 + 1/2)^2 = 25/2$.

$$Q = \left(\frac{1}{2}, -2 \right), \quad PQ = \frac{25}{2}.$$

Vérification par les coordonnées : $(8 - 1/2)^2 + (8 + 2)^2 = 225/4 + 100 = 625/4$, dont la racine carrée est $25/2$.

6. Une parabole verticale

Le projeté du foyer $(2, 3)$ sur la directrice $y = -1$ est $(2, -1)$. Leur milieu est le sommet $V = (2, 1)$. La distance sommet-foyer vaut 2 et l'ouverture est vers le haut, donc

$$(x - 2)^2 = 8(y - 1).$$

Pour $y = 3$, on obtient $(x - 2)^2 = 16$, soit $x = -2$ ou $x = 6$. La corde est horizontale et mesure 8.

$$V = (2, 1), \quad (x - 2)^2 = 8(y - 1), \quad L = 8.$$

7. Une normale pondérée

Les demi-axes sont 5 et 3, donc $c = \sqrt{25 - 9} = 4$. Les foyers sont $(\pm 4, 0)$ et $e = 4/5$.

Le point $M = (1, 1)$ est intérieur puisque $1/25 + 1/9 = 34/225 < 1$. Il est distinct du centre ; la corde existe et elle est unique. Son équation est

$$\frac{x}{25} + \frac{y}{9} = \frac{1}{25} + \frac{1}{9} = \frac{34}{225}.$$

Après multiplication par 225,

$$9x + 25y = 34.$$

Le point M vérifie bien cette équation. Le vecteur normal $(9, 25)$ est proportionnel à $(1/25, 1/9)$, comme l'exige la formule générale.

CORRIGÉS / EXERCICES 8 À 10

Aires et hyperboles

8. Un facteur $1/4$ sur les aires

L'aire initiale est 8π . Le rapport d'homothétie $1/2$ donne une raison $1/4$ pour la suite des aires, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 8\pi \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{8\pi}{1 - 1/4} = \frac{32\pi}{3}.$$

Les ellipses sont emboîtées ; leur réunion est la première ellipse, d'aire 8π .

Somme des aires : $\frac{32\pi}{3}$; aire de la réunion : 8π .
--

9. Un sommet sur l'axe des foyers

Le centre est l'origine et $c = 5$. Le point $(3, 0)$ est un sommet, donc le demi-axe transverse vaut $a = 3$. Alors $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$.

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1, \quad e = \frac{5}{3}, \quad \ell = \frac{32}{3}.$

10. Relier les deux figures

La distance du centre $(a, 0)$ à $x - y + 1 = 0$ vaut $(a + 1)/\sqrt{2}$, car $a > 0$. La tangence impose

$$r^2 = \frac{(a + 1)^2}{2}.$$

La droite $x = 1$ est à distance $|a - 1|$ du centre. Une corde de longueur 4 a une demi-longueur 2, donc

$$r^2 - (a - 1)^2 = 4.$$

En combinant les deux équations,

$$\frac{(a + 1)^2}{2} - (a - 1)^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad (a - 3)^2 = 0.$$

Ainsi $a = 3$ et $r = 2\sqrt{2}$. La corde existe bien puisque $|a - 1| = 2 < 2\sqrt{2}$.

Pour l'hyperbole, la distance focale est $c = 3$ et le demi-axe transverse vaut $r = 2\sqrt{2}$. Le carré du demi-axe secondaire vaut $c^2 - r^2 = 9 - 8 = 1 > 0$. Finalement,

$\frac{x^2}{8} - y^2 = 1, \quad e = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$

À CONSERVER

La fiche des bons réflexes

THÉORÈME / Distances, aires et symétrie

$$d((x_0, y_0), ax + by + c = 0) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$P' = P - 2 \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} (a, b), \quad \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|.$$

THÉORÈME / Cordes

- Cercle : $L = 2\sqrt{r^2 - d^2}$, où d est la distance du centre à la corde.
- Parabole $y^2 = 4ax$: $P(t) = (at^2, 2at)$; une corde focale a pour paramètres t et $-1/t$; sa longueur est $a(t + 1/t)^2$.
- Ellipse : la corde de milieu $(h, k) \neq (0, 0)$ est portée par $hx/a^2 + ky/b^2 = h^2/a^2 + k^2/b^2$.
- Ellipse ou hyperbole : la corde focale perpendiculaire à l'axe principal mesure $2b^2/a$, dans la notation canonique du cours.

ASTUCE / Six décisions qui simplifient une recherche

1. Réfléchir le centre ou le centre de gravité avant les sommets.
2. Exploiter une médiatrice lorsqu'une corde est connue.
3. Choisir un paramètre adapté aux points d'une parabole.
4. Poser $X = x^2$, $Y = y^2$ pour des coniques à axes communs.
5. Calculer la différence des racines plutôt que les deux racines lorsqu'on cherche une longueur.
6. Vérifier la réciproque lorsqu'on détermine un lieu complet.

PIÈGE / Les contrôles avant de conclure

Une racine algébrique doit correspondre à un point réel et admissible. Vérifier les segments, les signes, les rayons positifs, les triangles non dégénérés et les dénominateurs non nuls. Distinguer une distance de son carré, un axe de son demi-axe, un arc d'une corde, et une somme d'aires de l'aire d'une réunion.

Maths Olympiad

Comprendre la géométrie donne du sens au calcul ; vérifier le calcul rend la géométrie rigoureuse.