

Identités algébriques et factorisation

Niveau lycée

Théorème | L'idée directrice

Factoriser, c'est reconnaître une structure pour transformer une somme en produit. Une bonne transformation réduit le calcul et rend visibles les zéros, les signes ou les symétries d'une expression.

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Les lettres A et B peuvent représenter des nombres, des polynômes ou des expressions beaucoup plus longues.

Ce que tu apprendras

- Retrouver les identités usuelles grâce à des démonstrations.
- Choisir entre facteur commun, regroupement, carré complété et changement de variable.
- Utiliser les puissances, les expressions symétriques et les identités à trois variables.
- Simplifier une fraction sans perdre ses restrictions et résoudre des problèmes par factorisation.

Parcours de lecture

Fondations	Sens de la factorisation, carrés et cubes	2-4
Méthodes	Carré complété, regroupements, puissances	5-7
Approfondir	Trois variables, symétries, applications	8-10
Réviser	Stratégie de choix et formulaire raisonné	11-12
S'entraîner	24 exercices en trois niveaux	13-15
Se corriger	Solutions expliquées et vérifiables	16-21

Astuce | Une première réussite, sans grand développement

Pour factoriser $(x + 5)^2 - (x - 1)^2$, repère les deux blocs :

$$[(x + 5) - (x - 1)][(x + 5) + (x - 1)] = 6(2x + 4) = 12(x + 2).$$

Le premier travail consiste à lire la forme de l'expression.

CHAPITRE 1

Comprendre avant de calculer

Une identité est une égalité vraie pour toutes les valeurs autorisées des variables. Une équation cherche les valeurs pour lesquelles une égalité est vraie. Ainsi, $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ est une identité, tandis que $(x + 1)^2 = 9$ est une équation.

Développer et factoriser : deux sens de lecture

Théorème | La distributivité, point de départ

Pour tous réels a, b, c :

$$a(b + c) = ab + ac, \quad a(b - c) = ab - ac.$$

Lecture de gauche à droite : développer. Lecture de droite à gauche : factoriser.

Démonstration d'une méthode. Dans $12x^3 - 18x^2$, les deux termes contiennent $6x^2$. On les réécrit comme des produits :

$$12x^3 - 18x^2 = 6x^2 \cdot 2x - 6x^2 \cdot 3 = 6x^2(2x - 3).$$

La factorisation n'exige pas de diviser l'égalité par x : elle reste donc valable pour $x = 0$.

Un facteur commun peut être un bloc

$$\begin{aligned} (2x - 1)(x + 4) - 3(2x - 1) &= (2x - 1)[(x + 4) - 3] \\ &= (2x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

Le bloc répété est $2x - 1$. Le reconnaître est plus rapide que développer les deux produits puis refactoriser.

Astuce | Changer un signe pour révéler un facteur

$b - a = -(a - b)$. Par exemple :

$$x(a - b) + y(b - a) = x(a - b) - y(a - b) = (a - b)(x - y).$$

Quand deux parenthèses sont opposées, transforme l'une d'elles avant de regrouper.

Que signifie « factoriser complètement » ?

Cela dépend de l'ensemble des coefficients autorisés. Sur $\mathbb{R}$,

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}),$$

alors que $x^2 + 1$ n'a pas de facteur linéaire réel : il est strictement positif pour tout réel x . Dans ce cours, une factorisation est poursuivie sur $\mathbb{R}$ lorsqu'une décomposition supplémentaire utile existe.

Piège | Une simplification porte sur des facteurs

On ne « barre » jamais un terme isolé dans une somme. Pour $x \neq 0$, $(x + 2)/x = 1 + 2/x$ et non 2. Il faut d'abord transformer les sommes en produits si l'on veut simplifier des facteurs.

CHAPITRE 2

Carrés et différence de carrés

Théorème | Les trois identités fondamentales

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

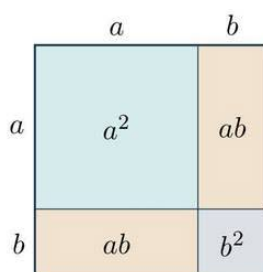
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Démonstrations. Par distributivité,

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Remplacer b par $-b$ donne la deuxième identité. Enfin,

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Voir pourquoi il y a deux termes ab 

Pour $a, b > 0$, le carré de côté $a + b$ se découpe en deux carrés et deux rectangles.

Son aire est donc $a^2 + ab + ab + b^2$. Cette image explique le terme $2ab$; la preuve algébrique reste valable même lorsque a ou b est négatif.

Reconnaître un carré parfait

Pour $9x^2 - 30x + 25$, on identifie $A = 3x$ et $B = 5$. Puis on vérifie le terme central : $-2AB = -30x$. Ainsi,

$$9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2.$$

Pour $(2x + 1)^2 - (x - 4)^2$, les « lettres » sont des expressions :

$$[(2x + 1) - (x - 4)][(2x + 1) + (x - 4)] = (x + 5)(3x - 3).$$

Piège | Contrôler le terme central et les signes

$a^2 + b^2$ n'est généralement pas $(a + b)^2$. Et dans $A - B$, si $B = x - 4$, alors $-B = -x + 4$: le signe moins change tous les signes du bloc.

CHAPITRE 3

Cubes : développer et factoriser

Théorème | Quatre formules à distinguer

$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\
 (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \\
 a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2), \\
 a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2).
 \end{aligned}$$

Démontrer au lieu de mémoriser les signes au hasard

En multipliant $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ par $a+b$, on obtient

$$a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3,$$

soit la première formule. Le remplacement $b \mapsto -b$ donne le cube d'une différence.

Pour la différence de cubes, on développe le produit annoncé :

$$\begin{aligned}
 (a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\
 &= a^3 - b^3.
 \end{aligned}$$

Les termes intermédiaires s'annulent. Remplacer b par $-b$ donne la somme de cubes.

Astuce | Un repère pour les signes

Le premier facteur porte le signe de départ : $a+b$ ou $a-b$. Dans le second facteur, le terme ab prend le signe opposé, et b^2 reste positif.

Exemples guidés

1. Reconnaître les cubes. Comme $8x^3 = (2x)^3$ et $125 = 5^3$,

$$8x^3 - 125 = (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25).$$

2. Simplifier avec une restriction. Pour $x \neq -2$,

$$\frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} = x^2 - 2x + 4.$$

3. Calculer par la somme et le produit. L'identité du cube donne

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b).$$

Si $a+b=6$ et $ab=5$, la somme des cubes vaut $216 - 90 = 126$, sans déterminer a et b .

Piège | Cube d'une somme ou somme de cubes ?

$(a+b)^3$ et $a^3 + b^3$ sont différents en général. Leur différence est $3ab(a+b)$. Cette différence s'annule seulement lorsque $ab(a+b) = 0$.

CHAPITRE 4

Ajouter ce qui manque

Lorsqu'une expression ressemble à un carré parfait, on peut ajouter puis retrancher le même terme. L'expression reste inchangée, mais sa structure devient visible.

Compléter un carré du second degré

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 9 + 5 = (x + 3)^2 - 4 = (x + 1)(x + 5).$$

La démarche est : repérer $2 \cdot x \cdot 3$, compléter par 3^2 , puis utiliser une différence de carrés.

Théorème | Forme générale, pour $a \neq 0$

Si $\Delta = b^2 - 4ac$, alors

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

Pour $\Delta > 0$, cela donne deux facteurs linéaires réels. Pour $\Delta = 0$, un carré multiplié par a . Pour $\Delta < 0$, aucun facteur linéaire réel.

Pourquoi ? Développer le membre de droite donne $ax^2 + bx + (b^2 - \Delta)/(4a) = ax^2 + bx + c$.

Une puissance quatrième cachant un carré

Pour $x^4 + x^2 + 1$, le carré $(x^2 + 1)^2$ contient $2x^2$. On ajoute et retranche x^2 :

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Les deux facteurs sont strictement positifs sur $\mathbb{R}$, car $x^2 \pm x + 1 = (x \pm 1/2)^2 + 3/4$.

Théorème | Identité de Sophie Germain

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2).$$

Preuve :

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2.$$

Une simple différence de carrés termine la factorisation.

Application arithmétique. Avec $a = 3$, $b = 1$, $3^4 + 4 = 85 = (9 - 6 + 2)(9 + 6 + 2) = 5 \cdot 17$.

Astuce | Le bon terme à insérer

Dans $A^2 + C^2$, le carré $(A + C)^2$ manque de $2AC$. Écrire $A^2 + C^2 = (A + C)^2 - 2AC$ est utile si $2AC$ devient lui-même un carré.

CHAPITRE 5

Regrouper et changer de variable

Regrouper pour fabriquer un facteur commun

Considérons $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$. Les deux premiers termes contiennent x^2 ; les deux derniers contiennent -4 :

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= x^2(x + 3) - 4(x + 3) \\ &= (x + 3)(x^2 - 4) \\ &= (x + 3)(x - 2)(x + 2). \end{aligned}$$

On choisit le regroupement qui fait apparaître la même parenthèse.

Traiter x^2 comme une seule quantité

Dans $x^4 - 13x^2 + 36$, posons $t = x^2$. On cherche deux nombres dont la somme est 13 et le produit 36 : 4 et 9.

$$\begin{aligned} t^2 - 13t + 36 &= (t - 4)(t - 9), \\ x^4 - 13x^2 + 36 &= (x^2 - 4)(x^2 - 9) \\ &= (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3). \end{aligned}$$

Piège | Revenir à la variable initiale

Résoudre une équation en $t = x^2$ ne termine pas le problème. Il faut imposer $t \geq 0$, puis résoudre $x^2 = t$. Si $t > 0$, il y a deux solutions réelles ; si $t = 0$, une seule ; si $t < 0$, aucune.

Une substitution peut être une expression entière

Pour factoriser $(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6$, posons $u = x + 1$:

$$u^2 - 5u + 6 = (u - 2)(u - 3).$$

En revenant à x , on trouve $(x - 1)(x - 2)$. Développer d'abord aurait fonctionné, mais aurait masqué la structure.

Théorème | Reconnaître un facteur grâce à une racine

Pour un polynôme P et un réel r , $P(r) = 0$ si et seulement si $x - r$ divise $P(x)$.

Justification. La division de $P(x)$ par $x - r$ donne $P(x) = (x - r)Q(x) + k$, avec k constant. En remplaçant x par r , on obtient $k = P(r)$.

Exemple. Pour $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, on trouve $P(1) = 0$. La division donne

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x - 3)(x + 2).$$

Astuce | Tester quelques valeurs simples

Si aucune identité ne saute aux yeux, calculer $P(0)$, $P(1)$ et $P(-1)$ peut révéler un facteur. Une valeur nulle suffit pour commencer ; l'absence de zéro parmi ces trois essais ne prouve rien de général.

CHAPITRE 6

Différences et sommes de puissances

Théorème | Différence de deux puissances

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Pour $n \geq 2$, le second facteur commence par a^{n-1} , puis les puissances de a diminuent et celles de b augmentent, jusqu'à b^{n-1} .

Démonstration par annulation des termes

Notons $S = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$. Alors

$$\begin{aligned} (a - b)S &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^k \\ &= a^n - b^n. \end{aligned}$$

Tous les termes d'indices 1 à $n - 1$ se compensent : c'est un télescopage.

Une somme se factorise ainsi pour un exposant impair

Théorème | Somme de puissances impaires

Pour tout entier impair $n \geq 1$,

$$a^n + b^n = (a + b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k.$$

Pour $n \geq 3$, les signes du second facteur alternent : $+$, $-$, $+$, $\dots$

Preuve. Appliquer la différence de puissances à $a^n - (-b)^n$. Comme n est impair, $(-b)^n = -b^n$ et $a - (-b) = a + b$. Exemples.

$$\begin{aligned} x^5 + 1 &= (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1), \\ x^4 - 16 &= (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\ &= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4). \end{aligned}$$

Piège | Ne pas oublier la parité

Pour n pair, $a^n + b^n$ n'est pas en général divisible par $a + b$. Exemple : en prenant $a = 1$ et $b = -1$, on obtient $a + b = 0$ mais $a^2 + b^2 = 2$.

Lien avec une somme géométrique

Pour $q \neq 1$, l'identité précédente avec $a = q$, $b = 1$ donne

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Pour $q = 1$, la somme vaut n . La formule polynomiale est valable en $q = 1$; c'est la division par $q - 1$ qui impose la restriction.

CHAPITRE 7

L'identité à trois variables

Théorème | Une factorisation particulièrement puissante

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Et puisque

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2],$$

le second facteur est toujours positif ou nul pour des réels.

Démonstration guidée

Posons $s = a + b$. Grâce à la somme de cubes,

$$a^3 + b^3 = s^3 - 3abs.$$

Donc

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= s^3 + c^3 - 3ab(s + c) \\ &= (s + c)(s^2 - sc + c^2 - 3ab). \end{aligned}$$

Or $s^2 - sc + c^2 - 3ab = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$. On retrouve le facteur annoncé. La forme en somme de carrés s'obtient en développant les trois carrés.

Conséquence 1 : quand $a+b+c=0$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Par exemple, pour $a = 2$, $b = 3$, $c = -5$: $8 + 27 - 125 = -90 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-5)$.

Conséquence 2 : résoudre une égalité de cubes

Sur $\mathbb{R}$,

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \iff (a + b + c = 0) \text{ ou } (a = b = c).$$

En effet, le produit des deux facteurs est nul. Le second facteur est nul exactement lorsque les trois carrés sont nuls, donc lorsque $a = b = c$.

Conséquence 3 : une inégalité

Si $a + b + c \geq 0$, alors $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. En particulier, c'est vrai si a, b, c sont tous positifs ou nuls.

Piège | L'hypothèse sur le signe est essentielle

Pour des réels quelconques, on ne peut pas affirmer cette inégalité. Si $a + b + c < 0$ et que les trois nombres ne sont pas tous égaux, le produit factorisé est strictement négatif.

CHAPITRE 8

Exploiter les symétries

Somme et produit : deux informations suffisent souvent

Si une expression ne change pas en échangeant a et b , chercher à l'écrire avec $s = a+b$ et $p = ab$ peut éviter de déterminer les deux nombres.

Théorème | Les premières puissances symétriques

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= s^2 - 2p, \\a^3 + b^3 &= s^3 - 3ps, \\a^4 + b^4 &= (s^2 - 2p)^2 - 2p^2 \\&= s^4 - 4ps^2 + 2p^2.\end{aligned}$$

La première formule vient du carré de $a + b$. La deuxième vient de son cube. Pour la troisième, on écrit $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$. Exemple. Si $a + b = 5$ et $ab = 3$, alors

$$a^2 + b^2 = 19, \quad a^3 + b^3 = 80, \quad a^4 + b^4 = 343.$$

Astuce | Une récurrence utile

En posant $U_n = a^n + b^n$, on a $U_0 = 2$, $U_1 = s$ et, pour $n \geq 2$,

$$U_n = sU_{n-1} - pU_{n-2}.$$

Pour le vérifier, développer $(a + b)(a^{n-1} + b^{n-1})$ puis retrancher $ab(a^{n-2} + b^{n-2})$: les deux termes croisés disparaissent.

Quand x et $1/x$ apparaissent ensemble

Pour $x \neq 0$, posons $t = x + 1/x$. Alors

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t.$$

Pour des x réels non nuls, on doit avoir $t \leq -2$ ou $t \geq 2$. En effet, $t^2 - 4 = (x - 1/x)^2 \geq 0$.

Exemple : une équation réciproque

Résolvons $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$. La valeur $x = 0$ ne convient pas. Après division par x^2 ,

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0,$$

donc $t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2) = 0$. La valeur $t = 1$ est impossible pour x réel. Pour $t = 2$, on obtient $x^2 - 2x + 1 = 0$, donc $x = 1$ seulement.

CHAPITRE 9

Simplifier, résoudre et étudier un signe

1. Écrire le domaine avant de simplifier

Considérons $F(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - x)}{x(x - 1)}$. Le dénominateur est $x(x - 1)$; l'expression est donc définie pour $x \notin \{0, 1\}$.

Sur ce domaine,

$$F(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x(x - 1)} = \frac{x + 1}{x}.$$

L'expression simplifiée a un sens en $x = 1$, mais la fraction de départ n'en a pas. Le domaine initial doit rester attaché au résultat.

2. Ramener une équation à un produit nul

Théorème | Produit nul dans $\mathbb{R}$

$AB = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$.

Réolvons $x^3 = 4x$. En regroupant tout dans un même membre,

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2) = 0.$$

Les solutions sont $\{-2, 0, 2\}$. Diviser directement par x aurait perdu la solution 0.

3. Lire un signe grâce aux facteurs

Réolvons $(x - 2)(x + 1) \leq 0$. Les changements de signe possibles sont -1 et 2 .

x	$] -\infty, -1[$	-1	$] -1, 2[$	2	$] 2, +\infty[$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Produit	$+$	0	$-$	0	$+$

La solution est $[-1, 2]$. Pour une fraction, on procède de même, mais les zéros du dénominateur sont toujours exclus.

4. Utiliser le conjugué d'une expression

Pour $x \geq 0$,

$$\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}}.$$

Le numérateur devient $(x + 1) - x = 1$. La nouvelle forme montre immédiatement que la différence est positive.

Piège | Une transformation doit conserver les conditions

Avant une division, vérifier que le diviseur n'est pas nul. Avant une racine carrée réelle, vérifier que son contenu est positif ou nul. Après les calculs, contrôler les solutions dans le domaine de départ.

CHAPITRE 10

Choisir la bonne méthode

La bonne technique dépend de ce que tu veux faire : factoriser, calculer, simplifier ou résoudre. Avant de développer, observe pendant quelques secondes.

Ce que tu observes	Premier essai	Exemple
Un facteur répété	Le mettre en évidence	$AB + AC = A(B+C)$
Deux carrés soustraits	Différence de carrés	$u^2 - 9 = (u - 3)(u + 3)$
Trois termes dont deux carrés	Vérifier le double produit	$u^2 + 6u + 9 = (u + 3)^2$
Deux cubes	Somme ou différence de cubes	$u^3 + 8 = (u + 2)(u^2 - 2u + 4)$
Quatre termes	Regrouper deux par deux	$x^3 + x^2 - 4x - 4$
Seulement x^4 , x^2 , 1	Poser $t = x^2$ ou compléter un carré	$x^4 + 4$
x et $1/x$ de façon symétrique	Poser $t = x + 1/x$	$x^2 + 1/x^2 = t^2 - 2$
Trois cubes et un produit triple	Tester l'identité à trois variables	$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

Un exemple qui combine plusieurs réflexes

Factoriser $P(x) = 2x^5 - 8x^3 + 2x^2 - 8$.

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 2[x^3(x^2 - 4) + (x^2 - 4)] \\
 &= 2(x^2 - 4)(x^3 + 1) \\
 &= 2(x - 2)(x + 2)(x + 1)(x^2 - x + 1).
 \end{aligned}$$

On a successivement utilisé le facteur commun 2, le regroupement, la différence de carrés et la somme de cubes. Le dernier facteur est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Une vérification courte, mais sérieuse

1. Vérifier le degré : ici, $1+1+1+2=5$.
2. Vérifier le coefficient dominant : ici, 2.
3. Vérifier la constante : ici, $2(-2)(2)(1)(1) = -8$.
4. Si nécessaire, redévelopper pour établir l'égalité exacte.

Piège | Des essais numériques ne constituent pas une preuve

Tester $x = 0$ et $x = 1$ peut détecter une erreur, mais une fausse identité peut être vraie pour quelques valeurs. La validation définitive utilise une transformation algébrique ou un développement exact.

CHAPITRE 11

Formulaire raisonné

Théorème | Carrés, cubes et puissances

$$\begin{aligned}
 (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2, \\
 a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\
 (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \\
 a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2), \\
 a^n - b^n &= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \quad (n \geq 1).
 \end{aligned}$$

Les signes superposés se lisent ensemble : soit toute la ligne supérieure, soit toute la ligne inférieure.

Théorème | Structures utiles pour les problèmes

$$\begin{aligned}
 a^4 + 4b^4 &= (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2), \\
 x^4 + x^2 + 1 &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1), \\
 a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b), \\
 a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].
 \end{aligned}$$

Cinq erreurs à éliminer

1. Oublier le double produit : $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ en général.
2. Confondre deux cubes : $a^3 + b^3 \neq (a + b)^3$ en général.
3. Simplifier dans une somme : factoriser d'abord le numérateur et le dénominateur.
4. Diviser par une expression qui peut être nulle : traiter ce cas séparément ou utiliser un produit nul.
5. Oublier le retour à x : après $t = x^2$ ou $t = x + 1/x$, résoudre la relation et vérifier son domaine.

Astuce | Comment travailler les 24 exercices

Niveau 1 (1 à 8) : reconnaître une identité et surveiller les signes.

Niveau 2 (9 à 16) : enchaîner deux techniques et justifier les restrictions.

Niveau 3 (17 à 24) : choisir une transformation dans un problème moins direct.

Essaie chaque question avant de lire sa solution. À la correction, note surtout l'indice qui permettait de choisir la méthode.

Autoévaluation rapide

Pour chaque exercice, accorde-toi un point si tu as choisi une méthode adaptée, un point si les calculs sont corrects et un point si la conclusion respecte toutes les conditions. Un résultat juste obtenu en oubliant une valeur interdite reste une solution incomplète.

CHAPITRE 12

Exercices : reconnaître les formes**Astuce | Niveau 1 - Fondations**

Objectif : identifier les blocs et appliquer l'identité adaptée. Dans toutes les questions, les variables sont réelles. Pour une fraction, donner le domaine avant de simplifier.

Exercice 1. Facteur commun

Factoriser $18x^3y - 12x^2y^2$. Choisir un facteur commun qui rende les coefficients restants premiers entre eux.

Exercice 2. Deux carrés de blocs

Factoriser complètement

$$(3x - 2)^2 - (x + 4)^2.$$

Exercice 3. Somme de cubes

Factoriser $27a^3 + 8b^3$. Préciser les deux expressions jouant le rôle de A et B dans $A^3 + B^3$.

Exercice 4. Deux étapes successives

Factoriser $16x^4 - 81$ sur $\mathbb{R}$ en poursuivant tant qu'une différence de carrés apparaît.

Exercice 5. Calcul astucieux

Calculer $99^2 - 101 \times 97$ sans effectuer les deux grands produits. Expliquer pourquoi le nombre 99 est un bon centre.

Exercice 6. Fraction algébrique

Déterminer le domaine et simplifier

$$F(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}.$$

La forme simplifiée permet-elle d'attribuer une valeur à $F(-3)$?

Exercice 7. Carré parfait suivi d'une différence

Factoriser $x^2 + 6x + 9 - y^2$ sans développer davantage.

Exercice 8. Cube caché

Écrire sous la forme du cube d'une expression simple :

$$(x - 2)^3 + 3(x - 2)^2 + 3(x - 2) + 1.$$

Avant de consulter les corrigés : peux-tu nommer l'identité utilisée dans chacune des questions à 8 ? Solutions pages 16 et 17.

CHAPITRE 13

Exercices : combiner les techniques**Astuce | Niveau 2 - Maîtrise**

Objectif : choisir l'ordre des transformations. Une réponse de factorisation doit être accompagnée d'au moins une étape qui rend la méthode visible.

Exercice 9. Regroupement

Factoriser $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ en regroupant les termes deux par deux, puis achever la factorisation.

Exercice 10. Expression bicarrée

Factoriser $x^4 - 5x^2 + 4$ sur $\mathbb{R}$. En déduire les solutions de l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Exercice 11. Une somme qui se factorise

Factoriser $x^4 + 4$ en ajoutant puis retranchant un terme bien choisi. Cette expression peut-elle s'annuler sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12. Carré presque parfait

Factoriser $x^4 + x^2 + 1$, puis montrer que chacun des deux facteurs trouvés est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Ne pas perdre une solution

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^3 - 1 = (x - 1)^3.$$

Regrouper tout dans un membre avant de factoriser.

Exercice 14. Inéquation et valeur interdite $\frac{x^2 - 4}{x - 2} \geq 0$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

Présenter la solution sous forme d'intervalles.

Exercice 15. Calculs symétriques

On sait que $a + b = 7$ et $ab = 10$. Sans calculer a et b , déterminer successivement $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$ et $a^4 + b^4$.

Exercice 16. Une quantité et son inverse

Soit $x > 0$ vérifiant $x + 1/x = 3$. Calculer

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad x^3 + \frac{1}{x^3}$$

sans résoudre l'équation en x .

Contrôle : les exercices 13 et 14 exigent une attention particulière aux valeurs qui pourraient être perdues ou ajoutées. Solutions pages 18 et 19.

CHAPITRE 14

Exercices : aller vers les concours

Astuce | Niveau 3 - Approfondissement

Objectif : justifier une affirmation et traiter tous les cas. Ces problèmes sont originaux et s'appuient sur les méthodes du cours.

Exercice 17. Puissances et facteurs réels

Factoriser $x^6 - 1$ sur $\mathbb{R}$ et expliquer pourquoi les facteurs quadratiques restants ne se décomposent pas en facteurs linéaires réels.

Exercice 18. Trois nombres de somme nulle

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a + b + c = 0$.

a) Montrer que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

b) Si $abc \neq 0$, en déduire $a^2/bc + b^2/ca + c^2/ab = 3$.

Exercice 19. Une équation à deux inconnues

Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$x^3 + y^3 + 1 = 3xy.$$

Exercice 20. Polynôme réciproque

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$3x^4 - 10x^3 + 14x^2 - 10x + 3 = 0.$$

Utiliser $t = x + 1/x$ après avoir justifié la division par x^2 .

Exercice 21. Prouver qu'un entier est composé

Montrer que 1000001 n'est pas premier en reconnaissant une somme de cubes. Donner une décomposition en deux entiers strictement supérieurs à 1.

Exercice 22. Une inégalité et son cas d'égalité

Pour $a, b, c \geq 0$, démontrer $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ à l'aide d'une factorisation. Déterminer exactement les cas d'égalité.

Exercice 23. Une famille d'entiers

Pour un entier $n \geq 1$, étudier si $n^4 + 4$ peut être premier. Justifier séparément $n = 1$ et $n \geq 2$.

Exercice 24. Équation avec un paramètre

Selon la valeur de $m \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre de solutions réelles distinctes de

$$x^4 + (m - 2)x^2 + 1 = 0.$$

Piste : faire apparaître $(x^2 - 1)^2$. Solutions pages 20 et 21.

CHAPITRE 15

Corrigés 1 à 4

Corrigé 1. Sortir le plus grand facteur évident

Le PGCD des coefficients 18 et 12 est 6. La plus petite puissance de x commune aux deux termes est x^2 , et la plus petite puissance de y est y . Ainsi,

$$18x^3y - 12x^2y^2 = 6x^2y(3x - 2y).$$

Vérification : $6x^2y \cdot 3x = 18x^3y$ et $6x^2y \cdot (-2y) = -12x^2y^2$. Aucune division par x ou y n'a été faite ; l'identité vaut aussi lorsqu'une de ces variables est nulle.

Corrigé 2. Garder les blocs jusqu'à la factorisation

Posons $A = 3x - 2$ et $B = x + 4$. L'identité $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ donne

$$\begin{aligned}(3x - 2)^2 - (x + 4)^2 &= (3x - 2 - x - 4)(3x - 2 + x + 4) \\ &= (2x - 6)(4x + 2) \\ &= 4(x - 3)(2x + 1).\end{aligned}$$

Point décisif : devant $x + 4$, le signe moins donne $-x - 4$.

Corrigé 3. Identifier les racines cubiques

On reconnaît $27a^3 = (3a)^3$ et $8b^3 = (2b)^3$. On applique la somme de cubes avec $A = 3a$ et $B = 2b$:

$$27a^3 + 8b^3 = (3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2).$$

Le produit intermédiaire est $AB = 6ab$, d'où le signe $-6ab$ dans le second facteur. Le terme final est $(2b)^2 = 4b^2$, et non $8b^2$.

Corrigé 4. Répéter la différence de carrés

D'abord, $16x^4 = (4x^2)^2$ et $81 = 9^2$. Donc

$$16x^4 - 81 = (4x^2 - 9)(4x^2 + 9).$$

Le premier facteur se décompose encore :

$$4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3).$$

On obtient finalement

$$16x^4 - 81 = (2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9).$$

Le dernier facteur est strictement positif sur $\mathbb{R}$; il n'a donc pas de facteur linéaire réel.

Astuce | À retenir

Une factorisation en révèle souvent une autre. Après chaque étape, regarde si un facteur contient encore un carré, un cube ou un facteur commun.

CHAPITRE 16

Corrigés 5 à 8

Corrigé 5. Centrer le produit autour de 99

Les nombres 101 et 97 sont à la même distance de 99 :

$$101 = 99 + 2, \quad 97 = 99 - 2.$$

Leur produit est une différence de carrés :

$$101 \times 97 = (99 + 2)(99 - 2) = 99^2 - 2^2.$$

Par conséquent,

$$99^2 - 101 \times 97 = 99^2 - (99^2 - 4) = 4.$$

Plus généralement, $u^2 - (u + h)(u - h) = h^2$.

Corrigé 6. Conserver la valeur interdite

Le dénominateur vaut $(x + 3)^2$. Il est nul exactement pour $x = -3$, donc le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Sur ce domaine,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)^2} \\ &= \frac{x - 3}{x + 3} \quad (x \neq -3). \end{aligned}$$

On simplifie un facteur $x + 3$, mais il en reste un au dénominateur. $F(-3)$ n'existe pas : le résultat reste accompagné de la même restriction.

Corrigé 7. Regrouper les trois premiers termes

On repère $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$. L'expression devient

$$(x + 3)^2 - y^2.$$

Avec $A = x + 3$ et $B = y$,

$$x^2 + 6x + 9 - y^2 = (x + 3 - y)(x + 3 + y).$$

Méthode : d'abord reconnaître un carré parfait, puis utiliser une différence de carrés.

Corrigé 8. Remplacer le bloc répété par une lettre

Posons $u = x - 2$. L'expression est

$$u^3 + 3u^2 + 3u + 1.$$

Les quatre termes correspondent exactement au développement de $(u + 1)^3$. En revenant à x ,

$$(u + 1)^3 = (x - 2 + 1)^3 = (x - 1)^3.$$

Piège | Les coefficients comptent

Reconnaître les deux cubes extrêmes ne suffit pas pour reconnaître un cube parfait. Il faut aussi vérifier les deux termes centraux : ici, $3u^2$ et $3u$.

CHAPITRE 17

Corrigés 9 à 12

Corrigé 9. Créer la même parenthèse

$$\begin{aligned}
 x^3 + 2x^2 - 9x - 18 &= x^2(x + 2) - 9(x + 2) \\
 &= (x + 2)(x^2 - 9) \\
 &= (x + 2)(x - 3)(x + 3).
 \end{aligned}$$

Le regroupement est réussi parce que les deux morceaux produisent le même facteur $x + 2$.

Corrigé 10. Poser $t = x^2$ puis revenir à x

On obtient $t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4)$, puisque $1 + 4 = 5$ et $1 \cdot 4 = 4$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) \\
 &= (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).
 \end{aligned}$$

Le produit est nul si et seulement si l'un des quatre facteurs est nul. Les solutions sont donc $-2, -1, 1, 2$.

Corrigé 11. Fabriquer une différence de carrés

Le carré $(x^2 + 2)^2$ contient un terme supplémentaire $4x^2$. On l'ajoute et on le retranche :

$$\begin{aligned}
 x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\
 &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\
 &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).
 \end{aligned}$$

Or $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$ et $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$. Le produit ne peut donc pas s'annuler sur $\mathbb{R}$. On pouvait aussi le voir directement avec $x^4 + 4 \geq 4$.

Corrigé 12. Passer par $(x^2 + 1)^2$

$$\begin{aligned}
 x^4 + x^2 + 1 &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\
 &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).
 \end{aligned}$$

Pour les signes, on complète deux carrés :

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Astuce | Deux méthodes pour les expressions bicarrées

Le changement $t = x^2$ est naturel, mais ne suffit pas toujours à factoriser sur $\mathbb{R}$. Pour $x^4 + x^2 + 1$, le trinôme $t^2 + t + 1$ n'a pas de racines réelles ; compléter un carré en x donne pourtant deux facteurs quadratiques réels.

CHAPITRE 18

Corrigés 13 à 16

Corrigé 13. Utiliser un produit nul, sans division risquée

L'équation équivaut à $x^3 - 1 - (x - 1)^3 = 0$. En développant le cube,

$$\begin{aligned} x^3 - 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) &= 3x^2 - 3x \\ &= 3x(x - 1). \end{aligned}$$

Donc $x = 0$ ou $x = 1$. Les deux valeurs vérifient l'équation initiale : $-1 = -1$ pour $x = 0$, et $0 = 0$ pour $x = 1$.

$$S = \{0, 1\}.$$

Corrigé 14. Simplifier en gardant le domaine

Le domaine est $x \neq 2$. Sur ce domaine seulement,

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

L'inéquation est donc équivalente au système $x + 2 \geq 0$ et $x \neq 2$. On en déduit

$$S = [-2, 2[\cup]2, +\infty[.$$

La valeur -2 est admise car la fraction vaut 0 ; la valeur 2 est exclue car son dénominateur est nul.

Corrigé 15. Rester avec la somme et le produit

Avec $s = 7$ et $p = 10$,

$$a^2 + b^2 = s^2 - 2p = 49 - 20 = 29.$$

Puis

$$a^3 + b^3 = s^3 - 3ps = 343 - 210 = 133.$$

Enfin,

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 29^2 - 2 \cdot 10^2 = 641.$$

Calculer a et b aurait été possible, mais n'était pas nécessaire : les quantités demandées dépendent directement de s et p .

Corrigé 16. Utiliser le produit x : $(1/x) = 1$

Avec $t = x + 1/x = 3$,

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} &= t^2 - 2 = 9 - 2 = 7, \\ x^3 + \frac{1}{x^3} &= t^3 - 3t = 27 - 9 = 18. \end{aligned}$$

La condition $x > 0$ garantit notamment $x \neq 0$. Elle est compatible avec $t = 3 \geq 2$. Les deux valeurs possibles de x donnent les mêmes résultats, parce que ces expressions sont inchangées lorsqu'on échange x et $1/x$.

CHAPITRE 19

Corrigés 17 à 20

Corrigé 17. Combiner différence de carrés et cubes

$$\begin{aligned}x^6 - 1 &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).\end{aligned}$$

Comme $x^2 \pm x + 1 = (x \pm \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, les deux facteurs quadratiques n'ont pas de racines réelles et ne se décomposent pas en facteurs linéaires réels.

Corrigé 18. Annuler le facteur $a + b + c$

L'identité à trois variables donne

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0.$$

Ainsi $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Si $abc \neq 0$, les trois fractions sont définies et la mise au même dénominateur donne

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3.$$

La condition $abc \neq 0$ est indispensable pour cette seconde partie.

Corrigé 19. Traiter les deux facteurs

Appliquons l'identité avec $a = x$, $b = y$ et $c = 1$:

$$x^3 + y^3 + 1 - 3xy = \frac{x + y + 1}{2} [(x - y)^2 + (y - 1)^2 + (1 - x)^2].$$

Le produit s'annule si $x + y + 1 = 0$, ou si la somme des trois carrés est nulle. Dans le second cas, chaque carré est nul : $x = y = 1$. Réciproquement, ces deux possibilités satisfont bien l'équation. Ainsi,

$$S = \{(t, -1 - t) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{(1, 1)\}.$$

Corrigé 20. Écarter une valeur impossible de t

$x = 0$ donne $3 \neq 0$. Pour $x \neq 0$, divisons par x^2 puis posons $t = x + 1/x$:

$$3(t^2 - 2) - 10t + 14 = 0 \iff (3t - 4)(t - 2) = 0.$$

Donc $t = 4/3$ ou $t = 2$. Pour x réel, $|t| \geq 2$: la première valeur est impossible. La seconde donne $x^2 - 2x + 1 = 0$, donc $x = 1$ uniquement.

On peut vérifier directement par la factorisation

$$3x^4 - 10x^3 + 14x^2 - 10x + 3 = (x - 1)^2(3x^2 - 4x + 3),$$

où $3x^2 - 4x + 3 = 3(x - \frac{2}{3})^2 + \frac{5}{3} > 0$.

CHAPITRE 20

Corrigés 21 à 24

Corrigé 21. Reconnaître $100^3 + 1^3$

$$1\,000\,001 = 100^3 + 1^3 = (100 + 1)(100^2 - 100 + 1) = 101 \cdot 9901.$$

Les deux facteurs sont des entiers strictement supérieurs à 1, donc le nombre est composé. Il n'est pas nécessaire de savoir si ces deux facteurs sont eux-mêmes premiers.

Corrigé 22. Prouver l'inégalité et analyser l'égalité

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0,$$

car les deux facteurs sont positifs ou nuls. Si $a+b+c = 0$, la non-négativité de a, b, c impose $a = b = c = 0$. Sinon, l'égalité impose que les trois carrés soient nuls. Dans tous les cas, l'égalité a lieu si et seulement si $a = b = c$.

Corrigé 23. Vérifier que les facteurs ne valent pas 1

Pour $n = 1$, $n^4 + 4 = 5$, qui est premier. Pour $n \geq 2$, l'identité de Sophie Germain donne

$$n^4 + 4 = ((n - 1)^2 + 1)((n + 1)^2 + 1).$$

Le premier facteur est au moins 2 et le second au moins 10. Les deux sont entiers : le nombre est donc composé. Parmi les entiers $n \geq 1$, seul $n = 1$ donne un nombre premier.

Corrigé 24. Réécrire avant de discuter le paramètre

L'équation devient

$$(x^2 - 1)^2 + mx^2 = 0.$$

Si $m > 0$: les deux termes sont positifs ou nuls. Leur somme nulle imposerait simultanément $x^2 = 1$ et $x = 0$, ce qui est impossible. Aucune solution réelle.

Si $m = 0$: $(x^2 - 1)^2 = 0$, donc $x = -1$ ou $x = 1$. Deux solutions réelles distinctes.

Si $m < 0$: posons $k = \sqrt{-m} > 0$. Une différence de carrés donne

$$(x^2 - 1 - kx)(x^2 - 1 + kx) = 0.$$

Chaque facteur est un trinôme de discriminant $k^2 + 4 > 0$: chacun a deux racines réelles distinctes. Ils ne partagent aucune racine, car leur différence est $-2kx$; une racine commune serait donc 0, qui n'annule aucun facteur. Il y a exactement quatre solutions réelles distinctes :

$$\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}, \quad \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}, \quad \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}, \quad \frac{-k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}.$$

Théorème | Bilan du paramètre

$m < 0$: 4 solutions

$m = 0$: 2 solutions

$m > 0$: 0 solution.