



COURS ET PROBLÈMES GUIDÉS

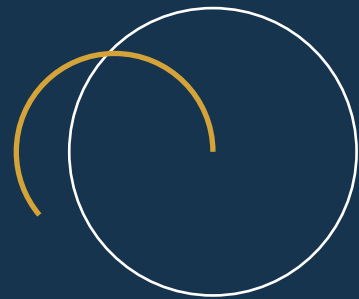
INÉQUATIONS

Comprendre les signes,
maîtriser les intervalles.

COLLÈGE AVANCÉ / LYCÉE

Préparation aux olympiades de mathématiques

Ordre · Fractions · Racines carrées
Méthode wavy curve illustrée



Comprendre. Puis résoudre.

22 pages · 8 exercices supplémentaires corrigés

Explications courtes · Raisonnements complets

LE PARCOURS

Sommaire et mode d'emploi

L'objectif

Résoudre une inéquation sans perdre de solution : contrôler le domaine, étudier les signes et traiter correctement les égalités.

Partie	Pages
Ordre, intervalles et domaines	3–5
La méthode wavy curve	6–10
Problèmes guidés et racines carrées	11–18
Huit exercices supplémentaires	19
Corrigés et fiche de synthèse	20–22

Comment travailler ?

Lire une fiche, puis cacher le corrigé d'un exemple et refaire le raisonnement. Pour les exercices, écrire les étapes sur une copie avant de vérifier les réponses.

Le niveau

Les premiers exemples installent les bases. Les problèmes suivants demandent de combiner plusieurs idées. Les résultats restent justifiés, même lorsque la solution est courte.

Note d'édition. Adaptation française du fichier *Inequation vos 8 12.txt*. Les méthodes mathématiques lisibles sont reprises. Plusieurs formules affichées ne figurent pas dans la transcription : les exemples concernés sont signalés comme adaptés. Les exercices d'entraînement et les compléments sont ajoutés.

COURS · 1

Transformer sans changer le sens

Les règles

Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ pour tout réel c .

$$c > 0 \Rightarrow ac < bc, \quad c < 0 \Rightarrow ac > bc.$$

Multiplier ou diviser par un nombre négatif inverse le sens.

Exemple 1 : une quantité positive

$$3x - 7 \leq 8 \iff 3x \leq 15 \iff x \leq 5.$$

Exemple 2 : une quantité négative

$$-2x + 1 > 7 \iff -2x > 6 \iff x < -3.$$

Si le coefficient dépend d'un paramètre

Pour $cx > d$, trois cas sont nécessaires :

$$\begin{array}{l|l} c > 0 & x > d/c \\ c < 0 & x < d/c \\ c = 0 & 0 > d : \text{tous les réels ou aucun} \end{array}$$

Si $c = 0$, on ne divise pas par c . La condition est vraie pour tout x si $d < 0$, et fausse pour tout x si $d \geq 0$.

Attention. Le signe de x est inconnu. On ne multiplie donc pas une inéquation par x sans séparer les cas $x > 0$, $x < 0$ et $x = 0$.

COURS · 2

Écrire un ensemble de solutions

Les quatre intervalles de base

Condition	Intervalle
$a < x < b$	$]a; b[$
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$
$x < a$	$] -\infty; a[$
$x \geq a$	$[a; +\infty[$

« Et » signifie intersection

Les conditions $x \geq 2$ et $x < 5$ donnent $[2; 5[$. On garde seulement les nombres qui satisfont les deux conditions.

« Ou » signifie réunion

La condition $x < -1$ ou $x > 3$ donne

$$S =] -\infty; -1[\cup]3; +\infty[.$$

Quand les deux intervalles ne se touchent pas

$$[2; 6] \cap]8; +\infty[= \emptyset.$$

L'ensemble vide $\emptyset$ signifie qu'il n'existe aucune solution.

Vérifier les bornes

Une égalité autorisée peut conduire à un crochet fermé. Une valeur interdite reste toujours exclue, même si l'inégalité est large ($\leq$ ou $\geq$).

Idée clé. Les symboles $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres : leurs crochets sont toujours ouverts.

COURS · 3

Commencer par le domaine

Trois conditions à connaître

$$\frac{A(x)}{B(x)} : B(x) \neq 0, \quad \sqrt{A(x)} : A(x) \geq 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{A(x)}} : A(x) > 0.$$

Le domaine est l'intersection de toutes les conditions.

Exemple adapté

Exemple adapté : l'énoncé de la transcription est incomplet.

Pour $F(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x-5}$, il faut $x \geq 3$ et $x \neq 5$:

$$D = [3; 5[\cup]5; +\infty[.$$

Le numérateur est positif si $x > 3$ et nul si $x = 3$.

$$F(x) > 0 \iff x > 5.$$

Pour une inégalité large, il faut aussi regarder $x = 3$:

$$F(x) \geq 0 \iff x = 3 \text{ ou } x > 5.$$

Pourquoi le point 3 est-il isolé ?

On a $F(3) = 0$, mais $F(x) < 0$ pour $3 < x < 5$. La solution peut donc contenir un point isolé.

Attention. Une racine carrée est toujours **positive ou nulle**. Elle n'est pas forcément strictement positive.

WAVY CURVE · 1

La méthode en cinq étapes

Le principe

Un produit de deux facteurs de même signe est positif ; de signes contraires, il est négatif. Le facteur $x - a$ change de signe en a . On trace une ligne ondulée au-dessus de l'axe pour le signe $+$, et en dessous pour le signe $-$. Elle sert à mémoriser le tableau de signes.

1. **Tout ramener d'un côté** : écrire $F(x) > 0$, $F(x) \geq 0$, etc.
2. **Factoriser** : relever les zéros du numérateur et les valeurs interdites du dénominateur.
3. **Les ranger** : placer toutes ces valeurs dans l'ordre croissant.
4. **Partir de la droite** : déterminer le signe pour un x très grand. En traversant un facteur de multiplicité impaire, changer de signe ; avec une multiplicité paire, garder le signe.
5. **Lire la solution** : choisir les bons signes, puis décider si chaque borne est admise.

Le signe à droite

Si $F(x) = C \prod (x - a_i)^{m_i} / \prod (x - b_j)^{n_j}$, tous les facteurs $(x - a_i)$ et $(x - b_j)$ sont positifs à droite des points critiques. Le signe est donc celui de C .

Attention. La courbe est un schéma de signes. Elle ne décrit ni les valeurs de F , ni sa croissance, ni ses asymptotes. Les facteurs sans racine réelle doivent aussi avoir leur signe étudié.

WAVY CURVE · 2

Des racines simples

Exemple complémentaire

Résoudre $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \leq 0$. Les trois racines, -2 , 1 et 3 , sont simples. Le signe à droite est positif ; on change de signe à chaque racine.

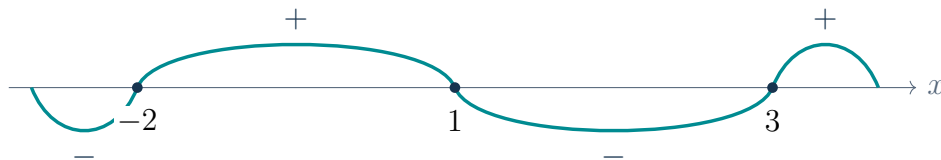


Schéma des signes, sans échelle. Ce n'est pas le graphe de la fonction.

Lecture de droite à gauche

À droite de 3 : $+$. Entre 1 et 3 : $-$. Entre -2 et 1 : $+$. À gauche de -2 : $-$.

Choix des bornes

L'inégalité est large. Le produit est nul aux trois racines, qui sont donc admises.

Résultat

$$S =] -\infty; -2] \cup [1; 3].$$

Contrôle rapide

Pour $x = 0$, le produit vaut $2 \times (-1) \times (-3) = 6 > 0$: zéro n'est pas solution. Pour $x = 2$, il vaut $4 \times 1 \times (-1) = -4$: deux est solution.

Idée clé. Avec des racines toutes simples, les signes alternent.

WAVY CURVE · 3

Une racine double ne traverse pas

Exemple complémentaire

Résoudre $(x+2)(x-1)^2(x-3) \geq 0$. La racine 1 est double : le facteur $(x-1)^2$ ne change pas de signe de part et d'autre de 1.

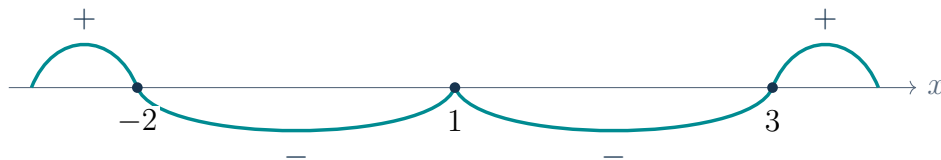


Schéma des signes, sans échelle. Ce n'est pas le graphe de la fonction.

Le point qui change la réponse

Le produit est négatif sur $] -2; 1[$ et $]1; 3[$, mais il est **nul en 1**. L'inégalité large conserve donc ce point.

Résultat

$$S =] -\infty; -2] \cup \{1\} \cup [3; +\infty[.$$

Variante stricte

Pour le même produit avec > 0 , les trois racines sont exclues :

$$S =] -\infty; -2[\cup]3; +\infty[.$$

Attention. « Pas de changement de signe » ne veut pas dire « point inutile ». Une racine de multiplicité paire peut être une solution isolée.

WAVY CURVE · 4

Un quotient et ses valeurs interdites

Exemple complémentaire

Résoudre $\frac{(x+1)(x-2)}{x-4} \leq 0$. Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. Les points critiques sont -1 , 2 et 4 . Tous ont une multiplicité impaire.

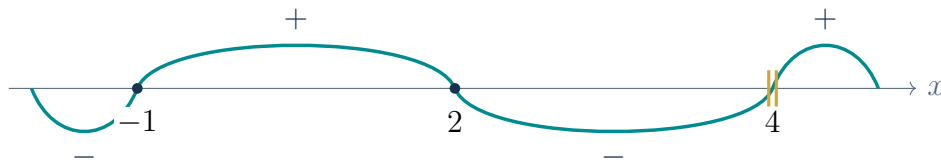


Schéma des signes, sans échelle. Ce n'est pas le graphe de la fonction.

Deux types de bornes

En -1 et en 2 , le numérateur est nul et le dénominateur ne l'est pas : ces points sont admis. En 4 , le quotient n'existe pas : ce point est exclu.

Résultat

$$S =]-\infty; -1] \cup [2; 4[.$$

Ne pas multiplier trop tôt

Multiplier directement par $x-4$ imposerait de connaître son signe. Ramener tout à zéro et étudier le quotient évite cette séparation.

Idée clé. Dans le schéma, la double barre dorée désigne une valeur interdite. Elle ne devient jamais une solution.

WAVY CURVE · 5

Simplifier sans oublier un trou

Exemple complémentaire

Résoudre $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)} \geq 0$. Le domaine initial impose $x \neq 1$ et $x \neq 3$. Sur ce domaine seulement,

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x+2}{x-3}.$$

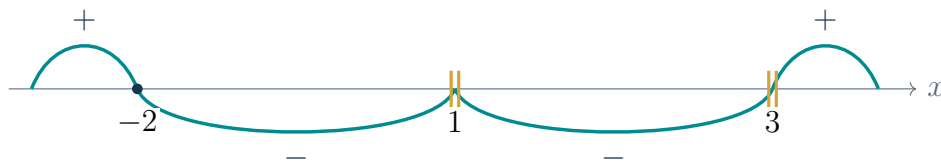


Schéma des signes, sans échelle. Ce n'est pas le graphe de la fonction.

Le point 1 reste interdit ; aucun changement de signe n'y a lieu.

Résultat

$$S =]-\infty; -2] \cup]3; +\infty[.$$

Une variante où le trou est dans la solution

Pour $\frac{(x-1)^2}{x-1} > 0$, on simplifie en $x-1 > 0$ avec $x \neq 1$, d'où $x > 1$. Mais pour $\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} > 0$, on obtient

$$S =]-2; 1[\cup]1; +\infty[.$$

Attention. La simplification transforme l'expression sur son domaine ; elle n'agrandit jamais ce domaine.

PROBLÈME GUIDÉ · 1

Reconnaître le sens d'une demi-droite

Énoncé reformulé

On a $a, b > 0$. L'ensemble des solutions de

$$(2a - b)x > 5b - a$$

est exactement $]10/7; +\infty[$. Résoudre $ax > b$.

1. Utiliser le sens de l'inégalité

La solution est une demi-droite dirigée vers la droite. Donc $2a - b > 0$. Un coefficient négatif donnerait une demi-droite vers la gauche ; un coefficient nul donnerait tout $\mathbb{R}$ ou l'ensemble vide.

2. Identifier la borne

$$\frac{5b - a}{2a - b} = \frac{10}{7} \iff 35b - 7a = 20a - 10b \iff 45b = 27a.$$

Ainsi $b/a = 3/5$.

3. Résoudre la question demandée

Puisque $a > 0$, on peut diviser $ax > b$ par a :

Résultat

$$x > \frac{3}{5}.$$

Idée clé. L'ensemble des solutions fournit deux informations : sa borne et son orientation. Utiliser seulement la borne ne suffit pas en général.

PROBLÈME GUIDÉ · 2

La fraction au plus petit dénominateur

Énoncé

Trouver une fraction a/b , avec a, b entiers strictement positifs, telle que

$$\frac{8}{9} < \frac{a}{b} < \frac{9}{10},$$

et dont le dénominateur b soit le plus petit possible.

1. Mesurer l'écart à 1

Comme $a < b$, posons $k = b - a$, entier positif. Alors $a/b = 1 - k/b$. Les deux inégalités deviennent

$$\frac{1}{10} < \frac{k}{b} < \frac{1}{9} \iff 9k < b < 10k.$$

2. Tester les premières valeurs de k

Si $k = 1$, aucun entier n'est strictement entre 9 et 10. Si $k = 2$, on doit avoir $18 < b < 20$, donc $b = 19$ et $a = 17$.

3. Prouver que c'est minimal

Pour $k \geq 3$, la condition $b > 9k$ impose $b \geq 28$. Aucun de ces cas ne donne un dénominateur inférieur à 19.

Résultat

La fraction cherchée est $\frac{17}{19}$.

Idée clé. Une recherche de minimum doit contenir une preuve qu'aucune valeur plus petite ne convient.

RACINES CARRÉES · 1

Conserver les zéros du radical

Exemple adapté : l'énoncé de la transcription est incomplet.

Étudier le signe de $F(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - x - 2}$.

1. Déterminer le domaine

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) \geq 0 \iff x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2.$$

Donc $D =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$.

2. Examiner les facteurs sur ce domaine

Pour $x < -1$ ou $x > 2$, les deux facteurs sont strictement positifs. Aux bornes :

$$F(-1) = 0, \quad F(2) = 0.$$

3. Répondre selon le symbole

Deux réponses différentes

$$F(x) > 0 \iff x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[,$$

$$F(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[.$$

Attention. Diviser par $\sqrt{x^2 - x - 2}$ éliminerait les points -1 et 2 . On ne peut le faire qu'après les avoir examinés séparément.

RACINES CARRÉES · 2

Un membre négatif simplifie tout

Exemple adapté : l'énoncé de la transcription est incomplet.

Résoudre $\sqrt{-2x^2 + 5x - 2} > -1$.

1. Exiger que la racine existe

$$-2x^2 + 5x - 2 = -(2x - 1)(x - 2) \geq 0 \iff x \in [1/2; 2].$$

2. Comparer les signes

Sur ce domaine, une racine carrée est toujours supérieure ou égale à zéro. Elle est donc automatiquement strictement supérieure à -1 .

Résultat

$$S = [1/2; 2].$$

Pourquoi le carré serait dangereux

La relation $u > -1$ avec $u \geq 0$ est toujours vraie. La remplacer par $u^2 > 1$ ajoute une contrainte fausse. Par exemple $u = 0$ vérifie $0 > -1$, mais pas $0 > 1$.

Une règle immédiate

Sur le domaine de $\sqrt{A(x)}$:

$$B(x) < 0 \implies \sqrt{A(x)} > B(x).$$

Idée clé. Avant de calculer, comparer les signes. Une inéquation avec des racines peut se résoudre sans aucune élévation au carré.

RACINES CARRÉES · 3

Quand peut-on élever au carré ?

Si $A \geq 0$

$$\sqrt{A} < B \iff B > 0 \text{ et } A < B^2.$$

$$\sqrt{A} > B \iff \begin{cases} \text{vrai,} & B < 0, \\ A > B^2, & B \geq 0. \end{cases}$$

Pour $\sqrt{A} \leq B$, exiger $B \geq 0$, puis $A \leq B^2$.

Exemple complémentaire

Résoudre $\sqrt{x+2} < x$. Il faut $x+2 \geq 0$ et, puisque le membre de gauche est positif ou nul, il faut aussi $x > 0$. Sur ce domaine :

$$\sqrt{x+2} < x \iff x+2 < x^2 \iff (x-2)(x+1) > 0.$$

Le produit est positif pour $x < -1$ ou $x > 2$. Après intersection avec $x > 0$, il reste

Résultat

$$S =]2; +\infty[.$$

Attention. La solution du polynôme obtenu après le carré doit encore être intersectée avec les conditions initiales.

RACINES CARRÉES · 4

Une substitution bien choisie

Exemple adapté : l'énoncé de la transcription est incomplet.

Résoudre $8 - x + 2\sqrt{8 - x} > 3$.

1. Poser une nouvelle variable

Le domaine est $x \leq 8$. Posons $t = \sqrt{8 - x}$. Alors $t \geq 0$ et $8 - x = t^2$.

2. Résoudre une inéquation polynomiale

$$t^2 + 2t > 3 \iff (t + 3)(t - 1) > 0.$$

Les solutions en t sont $t < -3$ ou $t > 1$. Comme $t \geq 0$, seul le second cas reste possible.

3. Revenir à x

$$\sqrt{8 - x} > 1 \iff 8 - x > 1 \iff x < 7.$$

Le carré est permis car les deux membres sont positifs ou nuls. La condition $x < 7$ entraîne déjà $x \leq 8$.

Résultat

$$S =] - \infty; 7[.$$

Idée clé. Après la substitution, conserver la contrainte sur la nouvelle variable. Ici, t ne peut jamais être négatif.

RACINES CARRÉES · 5

Le domaine peut être toute la solution

Exemple adapté : l'énoncé de la transcription est incomplet.

Résoudre $\sqrt{2x - x^2} < 5 - x$.

1. Le domaine

$$2x - x^2 = x(2 - x) \geq 0 \iff x \in [0; 2].$$

Sur cet intervalle, $5 - x \geq 3 > 0$. On peut donc élever au carré.

2. Un trinôme toujours positif

$$2x - x^2 < (5 - x)^2 \iff 2x^2 - 12x + 25 > 0.$$

Or

$$2x^2 - 12x + 25 = 2(x - 3)^2 + 7 > 0$$

pour tout réel x . Tous les nombres du domaine conviennent.

Résultat

$$S = [0; 2].$$

Une vérification encore plus courte

Sur $[0; 2]$, on a $2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2 \leq 1$, donc la racine est au plus 1, alors que $5 - x \geq 3$.

Idée clé. Une bonne majoration peut remplacer un long calcul : ici, le membre de gauche est au plus 1 et celui de droite au moins 3.

RACINES CARRÉES · 6

Séparer les cas selon le signe

Exemple adapté : l'énoncé de la transcription est incomplet.

Résoudre $\sqrt{2x-1} > x-2$.

1. Le domaine

Il faut $x \geq 1/2$.

2. Cas où $x < 2$

Le membre de droite est négatif. L'inégalité est donc vraie pour tout $x \in [1/2; 2[$.

3. Cas où $x \geq 2$

Les deux membres sont positifs ou nuls. Alors

$$\sqrt{2x-1} > x-2 \iff 2x-1 > (x-2)^2 \iff (x-1)(x-5) < 0.$$

La dernière condition donne $1 < x < 5$. Avec $x \geq 2$, on garde $[2; 5[$.

4. Réunir

$$[1/2; 2[\cup [2; 5[= [1/2; 5[.$$

Résultat

$$S = [1/2; 5[.$$

Attention. En 5, les deux membres valent 3 : ce point est exclu car l'inégalité est stricte. En $1/2$, on a $0 > -3/2$: ce point est admis.

ENTRAÎNEMENT

Huit exercices à résoudre

Exercices supplémentaires. Chercher d'abord sur une copie. Justifier les bornes et écrire chaque ensemble de solutions. Corrigés pages 20 et 21.

1 • Deux facteurs

Résoudre $(x + 3)(x - 2) \leq 0$.

2 • Un quotient

Résoudre $\frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 3} > 0$.

3 • Une racine double

Résoudre $(x + 1)^2(x - 4) \leq 0$.

4 • Un point isolé

Résoudre $\frac{\sqrt{x - 2}}{x - 5} \geq 0$.

5 • Carré sous conditions

Résoudre $\sqrt{x + 6} \leq x$.

6 • Deux cas

Résoudre $\sqrt{3x + 4} > x$.

7 • Une fraction entre deux autres

Trouver le plus petit dénominateur $b > 0$ d'une fraction a/b telle que $\frac{3}{4} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}$, avec a, b entiers positifs.

8 • Un coefficient inconnu

On sait que l'ensemble des solutions de $cx > 6$ est $]3; +\infty[$. Trouver c .

Idée clé. Pour une racine carrée, le premier calcul est celui du domaine. Pour un quotient, noter immédiatement les valeurs interdites.

CORRIGÉS · 1/2

Signes et valeurs interdites

1. Deux facteurs

Les racines sont -3 et 2 . Le produit est négatif entre les racines, positif à l'extérieur, et nul aux bornes :

$$S = [-3; 2].$$

2. Un quotient

Le point 3 est interdit. Les signes sur les intervalles découpés par -2 , 1 et 3 sont successivement $-$, $+$, $-$, $+$. Comme l'inégalité est stricte :

$$S =]-2; 1[\cup 3; +\infty[.$$

3. Une racine double

Le carré est positif sauf en -1 , où il est nul. Le signe du produit est donc celui de $x - 4$, sauf à ce zéro. Ici -1 appartient déjà à l'intervalle $x \leq 4$:

$$S =]-\infty; 4].$$

4. Un point isolé

Le domaine est $[2; 5[\cup]5; +\infty[$. En 2 , le quotient vaut zéro. Entre 2 et 5 , il est négatif. Au-delà de 5 , il est positif :

$$S = \{2\} \cup]5; +\infty[.$$

Attention. Le nombre 5 reste exclu dans l'exercice 4. L'inégalité ≥ 0 n'autorise pas une division par zéro.

CORRIGÉS · 2/2

Racines et petits raisonnements

5. Carré sous conditions

Il faut $x \geq 0$ pour que $\sqrt{x+6} \leq x$ soit possible. Puis

$$x+6 \leq x^2 \iff (x-3)(x+2) \geq 0.$$

Après intersection avec $x \geq 0$: $S = [3; +\infty[$.

6. Deux cas

Le domaine est $x \geq -4/3$. Si $x < 0$, l'inégalité est vraie. Si $x \geq 0$, on élève au carré :

$$3x+4 > x^2 \iff (x-4)(x+1) < 0 \iff -1 < x < 4.$$

On garde $[0; 4[$ dans ce second cas. Ainsi $S = [-4/3; 4[$.

7. La fraction

Poser $k = b - a \geq 1$. Les conditions donnent $4k < b < 5k$. Pour $k = 1$, aucun entier ne convient. Pour $k = 2$, $b = 9$ et $a = 7$. Pour $k \geq 3$, $b \geq 13$.

$$a/b = 7/9, \quad b_{\min} = 9.$$

8. Le coefficient

La demi-droite est dirigée vers la droite, donc $c > 0$. Sa borne est $6/c = 3$, d'où $c = 2$.

Idée clé. Les calculs peuvent être courts, mais les contraintes doivent être écrites. C'est elles qui rendent les équivalences valables.

FICHE DE SYNTHÈSE

Les réflexes à garder

Pour toute inéquation

1. Écrire le domaine.
2. Transformer avec des opérations autorisées.
3. Résoudre la nouvelle condition.
4. Intersecter avec le domaine.
5. Vérifier les bornes et donner la solution en intervalles.

Pour la wavy curve

Factoriser, ordonner les points critiques et chercher le signe à droite. Multiplicité impaire : changer de signe. Multiplicité paire : garder le signe. Les zéros sont admis seulement si le symbole le permet ; les valeurs interdites ne le sont jamais.

Pour les racines carrées

Une racine est positive ou nulle. Comparer les signes avant de passer au carré. Si le second membre change de signe, séparer les cas.

Pour les inverses

Sur les nombres positifs, comme sur les nombres négatifs, prendre l'inverse renverse l'ordre. Mais il faut rester du même côté de zéro. Par exemple $-1 < 1$ et pourtant $1/(-1) < 1/1$: on ne peut pas appliquer la règle en traversant zéro.

La vérification finale

Un point dans chaque intervalle contrôle les signes. Un contrôle direct aux bornes décide des crochets. Ces vérifications complètent le raisonnement sans le remplacer.