

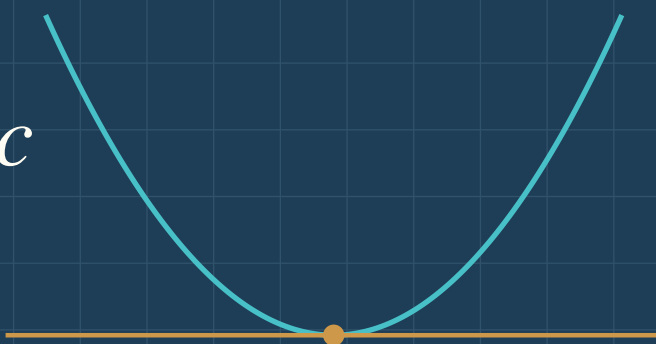
Le discriminant

Une formule, huit domaines

De l'algèbre à la géométrie, jusqu'aux fonctions.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

EXISTENCE · CONTACT · VALEURS



01

Équations

02

Intersections

03

Cercle

04

Parabole

05

Ellipse

06

Hyperbole

07

Trigonométrie

08

Fonctions

Démonstrations · Figures · 16 exercices corrigés

LYCÉE AVANCÉ & APPROFONDISSEMENT

Une formule, huit domaines

Comprendre le mécanisme pour retrouver les résultats.

Ce livret relie huit domaines par une même question : **une équation possède-t-elle une solution réelle ?** Transformer le problème en une équation du second degré permet souvent de répondre avec le discriminant.

Le fil conducteur

Traduire le problème → vérifier le domaine et le degré → calculer le discriminant → interpréter le résultat.

Les outils : identité, conditions, démarche	03
01 · Équations et paramètres	05
02 · Intersections et couples de droites	07
03 · Cercle	09
04 · Parabole	11
05 · Ellipse	13
06 · Hyperbole	15
07 · Trigonométrie	17
08 · Ensembles de valeurs	19
Formulaire et pièges	21
16 exercices progressifs	23
Corrigés détaillés	25

Niveau et prérequis

Lycée avancé et approfondissement. Maîtriser la factorisation, les équations, les coordonnées et la trigonométrie. Les coniques peuvent dépasser le programme suivi dans certaines classes.

Choix éditorial. Les idées du document fourni sont reformulées et développées. Lorsque des expressions n'y sont pas écrites intégralement, des exemples numériques explicitement définis sont proposés ; les exercices d'entraînement sont des ajouts pédagogiques.

Pourquoi le discriminant décide

Une identité suffit à démontrer le critère.

Soient a , b et c des réels avec $a \neq 0$. Posons $P(x) = ax^2 + bx + c$. Compléter le carré donne l'identité suivante, valable pour tout réel x :

$$4aP(x) = (2ax + b)^2 - \Delta, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Ainsi, résoudre $P(x) = 0$ revient à chercher les réels x pour lesquels un carré vaut Δ . Un carré réel est toujours positif ou nul : le signe de Δ décide donc de l'existence des racines.

$\Delta > 0$ • Deux racines distinctes

Le carré vaut un nombre strictement positif. Il existe deux choix de signe, donc deux solutions réelles.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = 0$ • Une racine double

Le carré est nul. La seule solution est $x_0 = -b/(2a)$, et $P(x) = a(x - x_0)^2$.

$\Delta < 0$ • Aucune racine réelle

Aucun carré réel n'est négatif. Le polynôme garde alors le signe de a sur tout $\mathbb{R}$.

Une première vérification

Pour $P(x) = x^2 - 6x + 5$, on trouve $\Delta = 36 - 20 = 16$. Les racines valent $(6 - 4)/2 = 1$ et $(6 + 4)/2 = 5$. On retrouve $P(x) = (x - 1)(x - 5)$.

À ne pas confondre

« Deux racines » compte ici deux valeurs distinctes. Quand $\Delta = 0$, il n'existe qu'une valeur réelle, dite de multiplicité deux.

La démarche en quatre étapes

La condition $\Delta \geq 0$ n'est pas une formule automatique.

1 • Identifier la vraie inconnue

Une équation peut contenir x et un paramètre m . Si l'on cherche x , on calcule le discriminant par rapport à x . Les paramètres restent des coefficients.

2 • Vérifier le domaine et le degré

Écrire les dénominateurs interdits, les contraintes des racines et les éventuelles restrictions sur x . Puis vérifier que le coefficient du carré n'est pas nul.

$$A(t)x^2 + B(t)x + C(t) = 0$$

Si $A(t) = 0$, l'équation devient linéaire ou constante. Il faut traiter ce cas avant d'utiliser le critère du second degré.

3 • Choisir la bonne condition

Le petit dictionnaire

Au moins une racine réelle : $\Delta \geq 0$.

Deux racines réelles distinctes : $\Delta > 0$.

Racine double : $\Delta = 0$.

Aucune racine réelle : $\Delta < 0$.

4 • Revenir au problème

Vérifier que les solutions obtenues respectent le domaine initial. En géométrie, vérifier les coordonnées ; pour un ensemble de valeurs, vérifier que chaque valeur retenue possède réellement un antécédent.

Exemple : une dégénérescence

$$(m - 1)x^2 + 2x + 1 = 0$$

Pour $m \neq 1$, $\Delta = 4 - 4(m - 1) = 4(2 - m)$, donc des racines réelles existent exactement lorsque $m \leq 2$. Pour $m = 1$, l'équation devient $2x + 1 = 0$: elle possède aussi une solution. Au total, les paramètres admissibles sont $m \leq 2$.

Le réflexe qui évite les erreurs

Toujours conserver à part les valeurs qui annulent le coefficient du carré.

Résoudre avec un paramètre

Transformer une question sur les racines en une inéquation.

Problème guidé

Pour quelles valeurs réelles de m l'équation suivante possède-t-elle au moins une solution réelle ?

$$x^2 - 2mx + m + 2 = 0$$

Étape 1 · Repérer les coefficients

L'inconnue est x . Le coefficient de x^2 vaut 1 et ne s'annule jamais. On peut donc utiliser le discriminant pour tout réel m .

$$\Delta_x = (-2m)^2 - 4(m + 2) = 4(m - 2)(m + 1)$$

Étape 2 · Étudier le signe

Le produit $(m - 2)(m + 1)$ est positif ou nul à l'extérieur de l'intervalle délimité par -1 et 2 . Il est strictement négatif entre ces deux nombres.

Réponse

Il existe au moins une racine réelle si et seulement si $m \leq -1$ ou $m \geq 2$.

Étape 3 · Distinguer les cas limites

Si $m = -1$, l'équation est $x^2 + 2x + 1 = 0$: racine double -1 .

Si $m = 2$, l'équation est $x^2 - 4x + 4 = 0$: racine double 2 .

Si $m < -1$ ou $m > 2$, il existe deux racines réelles distinctes.

$$x = m \pm \sqrt{m^2 - m - 2} \quad \text{lorsque } m^2 - m - 2 \geq 0$$

Astuce de rédaction

On peut répondre à la question d'existence sans calculer les racines. Les racines servent ensuite à vérifier ou à préciser le résultat.

Variante. Pour avoir exactement deux racines distinctes, remplacer les inégalités larges par $m < -1$ ou $m > 2$.

Un signe valable pour tout réel

Le discriminant contrôle aussi les inégalités globales.

Si $a > 0$, la parabole représentative de $P(x) = ax^2 + bx + c$ est tournée vers le haut. Pour que P soit strictement positif partout, elle ne doit jamais rencontrer l'axe horizontal.

$$P(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \iff a > 0 \text{ et } \Delta < 0$$

Pour une positivité large, $P(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, le critère devient $a > 0$ et $\Delta \leq 0$, toujours dans le cas du second degré. Quand $\Delta = 0$, le polynôme s'annule à son sommet.

Exemple guidé

$$P_t(x) = x^2 - 2tx + t + 2$$

On cherche les réels t pour lesquels $P_t(x) > 0$ pour tout x . Comme $a = 1$, il suffit d'imposer $\Delta < 0$. Or $\Delta = 4(t - 2)(t + 1)$.

Conclusion

Positivité stricte sur $\mathbb{R}$: $-1 < t < 2$.

Positivité large sur $\mathbb{R}$: $-1 \leq t \leq 2$.

La même preuve par le sommet

$$P_t(x) = (x - t)^2 + 2 + t - t^2$$

Le minimum vaut $2 + t - t^2 = -(t - 2)(t + 1)$. On exige qu'il soit strictement positif. Cette approche et le discriminant expriment exactement la même condition.

Attention au quantificateur

« $P(x) \geq 0$ pour tout x » est très différent de « il existe x tel que $P(x) \geq 0$ ». Le second énoncé n'impose pas $\Delta \leq 0$.

Pour un coefficient $a < 0$: P est strictement négatif partout si et seulement si $\Delta < 0$. Plus généralement, si $\Delta < 0$, P garde le signe de son coefficient dominant.

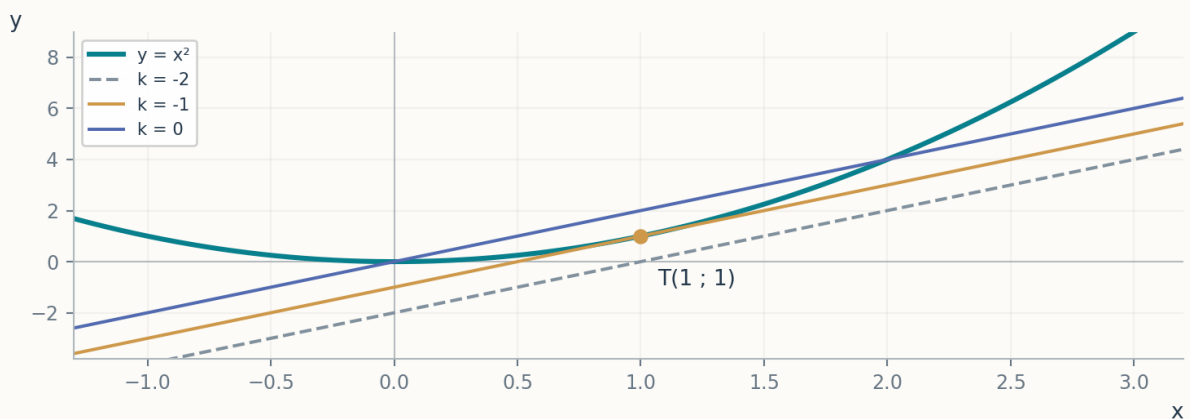
Lire une rencontre de courbes

Égaliser les ordonnées, puis compter les racines.

Cherchons le nombre de points communs entre la parabole $y = x^2$ et la droite $y = 2x + k$. Au point d'intersection, les deux expressions de y sont égales.

$$x^2 = 2x + k \iff x^2 - 2x - k = 0$$

$$\Delta = 4(1 + k)$$



Trois positions de la droite : aucune rencontre, tangence, deux intersections.

Le nombre de points communs

- $k < -1$: aucun point réel.
- $k = -1$: un point de tangence, $T(1 ; 1)$.
- $k > -1$: deux points distincts.

Pour $k = 0$, les racines sont $x = 0$ et $x = 2$. En remplaçant dans $y = x^2$, on obtient les points $(0 ; 0)$ et $(2 ; 4)$. Pour $k = -1$, l'équation devient $(x - 1)^2 = 0$.

Portée de l'interprétation

La correspondance « racine double = tangence » est valable ici pour une droite et une conique régulière, avec une véritable équation quadratique d'intersection. Elle ne s'applique pas sans vérification à toute courbe.

Deux droites dans une équation

Un complément : retrouver les directions sans factoriser.

Considérons une équation homogène de degré deux. Elle peut représenter deux droites passant par l'origine :

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

Pour chercher une direction non verticale, posons $y = mx$. Après substitution, le facteur x^2 fait apparaître l'équation des pentes. Si $b \neq 0$:

$$bm^2 + 2hm + a = 0, \quad \Delta_m = 4(h^2 - ab)$$

Si $h^2 - ab > 0$, il y a deux directions réelles distinctes. Si $h^2 - ab = 0$, il y a une direction double. Si $h^2 - ab < 0$, il n'y a aucune direction réelle et le seul point réel est l'origine.

Exemple complet

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \implies 2m^2 - 3m + 1 = 0$$

Les pentes sont $m_1 = 1$ et $m_2 = 1/2$. L'équation représente donc $y = x$ et $y = x/2$. La factorisation $(x - y)(x - 2y) = 0$ confirme le résultat.

Retrouver l'angle aigu entre les droites

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \frac{1}{3}$$

On peut éviter le calcul individuel des pentes : $m_1 + m_2 = -2h/b$ et $m_1 m_2 = a/b$. Lorsque $a + b \neq 0$, on obtient $\tan \theta = 2\sqrt{(h^2 - ab)/|a + b|}$. Si $a + b = 0$ et les directions sont distinctes, les droites sont perpendiculaires.

Ne pas perdre une droite verticale

Si $b = 0$, l'équation devient $x(ax + 2hy) = 0$. La droite $x = 0$ doit être conservée ; elle n'a pas de pente réelle m .

Retrouver la tangente au cercle

La formule se déduit en trois lignes.

Soit le cercle de centre O et de rayon $R > 0$, d'équation $x^2 + y^2 = R^2$. Étudions la droite non verticale $y = mx + c$.

$$x^2 + (mx + c)^2 = R^2$$

$$(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - R^2 = 0$$

Le coefficient de x^2 vaut $1 + m^2 > 0$: l'équation reste du second degré pour toute pente réelle. Son discriminant se simplifie fortement :

$$\Delta = 4m^2c^2 - 4(1 + m^2)(c^2 - R^2) = 4[R^2(1 + m^2) - c^2]$$

Condition de tangence

La droite est tangente si et seulement si $c^2 = R^2(1 + m^2)$. Pour une pente m fixée, il existe deux tangentes parallèles.

$$y = mx \pm R\sqrt{1 + m^2}$$

Point de contact

Quand $\Delta = 0$, l'abscisse du point de contact est la racine double $-b/(2a)$. On reporte ensuite dans la droite :

$$x_T = -\frac{mc}{1 + m^2}, \quad y_T = \frac{c}{1 + m^2}$$

Le contrôle géométrique

La distance de O à la droite $mx - y + c = 0$ vaut $|c|/\sqrt{1 + m^2}$. La tangence impose que cette distance soit égale à R , ce qui retrouve exactement la même condition.

Le cas vertical

Les deux tangentes verticales sont $x = R$ et $x = -R$. Elles ne figurent pas dans l'écriture $y = mx + c$.

Deux tangentes de même pente

Un exemple avec toutes les coordonnées.

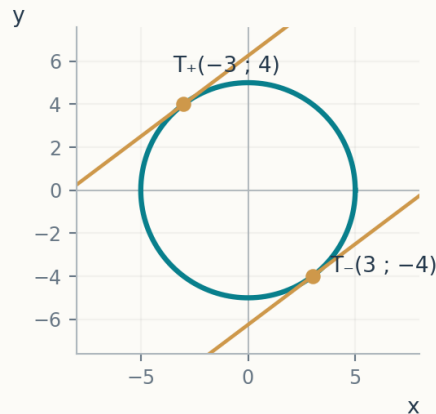
Problème

Trouver les tangentes de pente $3/4$ au cercle $x^2 + y^2 = 25$, puis leurs points de contact.

$$c^2 = 25 \left(1 + \frac{9}{16} \right) = \frac{625}{16}$$

Donc $c = 25/4$ ou $c = -25/4$. Les deux droites cherchées sont :

$$d_+ : y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4}, \quad d_- : y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$



Les points de contact sont symétriques par rapport au centre du cercle.

Calcul et vérification

Pour d_+ , on obtient $x = -(3/4)(25/4)/(25/16) = -3$, puis $y = 4$. Pour d_- , on trouve $(3; -4)$. Les deux points vérifient bien $x^2 + y^2 = 9 + 16 = 25$.

Résultat

Les tangentes touchent le cercle en $T_+(-3; 4)$ et $T_-(3; -4)$.

Réflexe. Si seule la distance au centre est demandée, la formule géométrique est souvent plus courte. Si l'on veut les coordonnées du contact, l'équation quadratique est particulièrement utile.

La forme $y^2 = 4ax$

Démontrer la tangente sans mémoriser sa formule.

Considérons $y^2 = 4ax$ avec $a > 0$ et une droite $y = mx + c$. Pour $m \neq 0$, la substitution donne une équation quadratique en x :

$$m^2x^2 + (2mc - 4a)x + c^2 = 0$$

$$\Delta = (2mc - 4a)^2 - 4m^2c^2 = 16a(a - mc)$$

Une tangente non verticale correspond à une racine double. Comme $a > 0$, la condition $\Delta = 0$ équivaut à $mc = a$.

Forme à pente donnée

Pour $m \neq 0$, la tangente est $y = mx + a/m$.

$$x_T = \frac{a}{m^2}, \quad y_T = \frac{2a}{m}$$

D'où viennent les coordonnées ?

La racine double vaut $-(2mc - 4a)/(2m^2)$. En remplaçant mc par a , on obtient a/m^2 . Le report dans $y = mx + a/m$ donne $2a/m$.

Deux cas que la formule ne contient pas

$m = 0$: $y = c$ coupe la parabole au point $(c^2/(4a) ; c)$. L'équation obtenue est linéaire en x : un unique point d'intersection ne suffit donc pas à conclure à la tangence.

Droite verticale : $x = 0$ est la tangente au sommet O .

Piège classique

« Une seule intersection » n'est pas toujours synonyme de tangence. Il faut vérifier qu'il s'agit d'une racine double d'une véritable équation du second degré.

Un contact et un paramètre

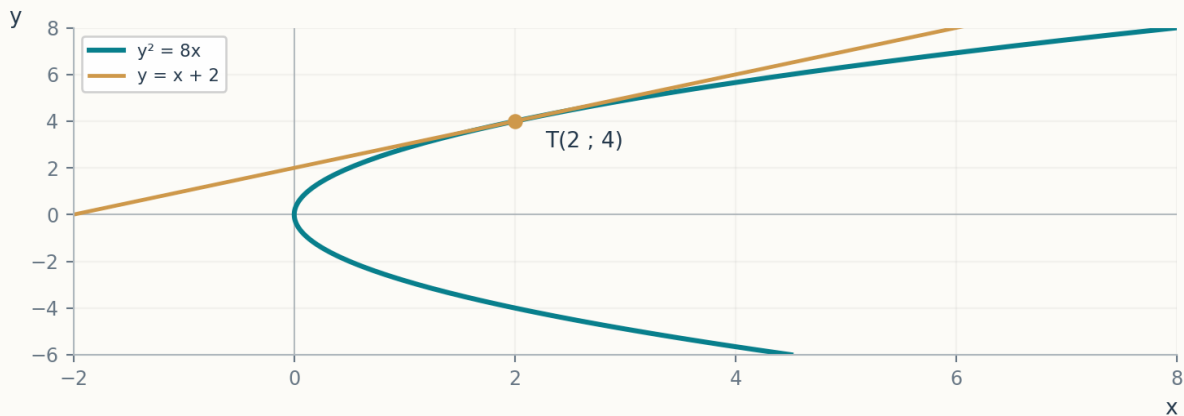
Relier la pente à une écriture très pratique du point.

Exemple : $y^2 = 8x$

Ici $a = 2$. Pour une tangente de pente 1, la formule donne $c = a/m = 2$. La droite cherchée est donc $y = x + 2$.

$$(x + 2)^2 = 8x \iff (x - 2)^2 = 0$$

Le point de contact est $T(2 ; 4)$. Il vérifie à la fois $y^2 = 8x$ et $y = x + 2$.



La tangente $y = x + 2$ touche la parabole $y^2 = 8x$ au point $T(2 ; 4)$.

La paramétrisation qui simplifie les calculs

$$T(t) = (at^2, 2at), \quad ty = x + at^2$$

Pour $t \neq 0$, la dernière équation s'écrit $y = x/t + at$: sa pente est $1/t$. Elle coïncide avec la formule précédente en posant $m = 1/t$. Pour $t = 0$, elle donne $x = 0$, la tangente verticale au sommet.

À retenir

La forme paramétrique $ty = x + at^2$ comprend aussi le cas du sommet, que la formule $y = mx + a/m$ ne peut pas représenter.

Du cercle à l'ellipse

Même raisonnement, deux demi-axes.

Pour $a > 0$ et $b > 0$, considérons l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Remplaçons y par $mx + c$ puis multiplions par a^2b^2 :

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mcx + a^2(c^2 - b^2) = 0$$

Le coefficient dominant est strictement positif. Après développement puis simplification, le discriminant vaut :

$$\Delta = 4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - c^2)$$

Condition de tangence

Une droite $y = mx + c$ est tangente à l'ellipse si et seulement si $c^2 = a^2m^2 + b^2$.

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

Les coordonnées du contact

$$x_T = -\frac{a^2m}{c}, \quad y_T = \frac{b^2}{c}$$

Ces expressions sont permises car $c^2 = a^2m^2 + b^2 > 0$, donc $c \neq 0$. On les obtient à partir de la racine double et de l'équation de la droite.

Comment retrouver le cercle ?

En choisissant $a = b = R$, la formule devient $c^2 = R^2m^2 + R^2 = R^2(1 + m^2)$. Le cercle est bien un cas particulier de l'ellipse.

Les directions particulières

Pour $m = 0$, les tangentes horizontales sont $y = \pm b$. Les tangentes verticales, étudiées séparément, sont $x = \pm a$.

Intersections. Pour une pente m fixée, il y a deux intersections lorsque $c^2 < a^2m^2 + b^2$, et aucune lorsque $c^2 > a^2m^2 + b^2$.

Une tangente oblique à l'ellipse

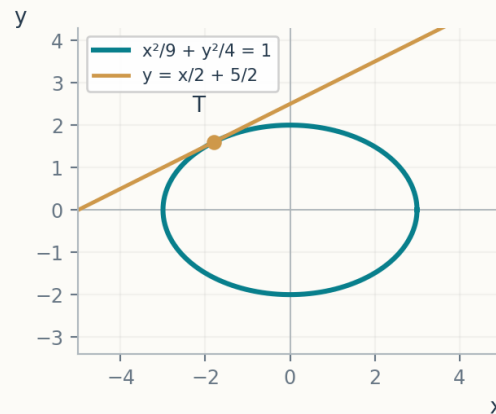
La forme ponctuelle apporte un second contrôle.

Problème

Trouver les tangentes de pente $1/2$ à l'ellipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$. Ici $a = 3$ et $b = 2$.

$$c^2 = 9 \cdot \frac{1}{4} + 4 = \frac{25}{4} \implies c = \pm \frac{5}{2}$$

$$d_+ : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, \quad d_- : y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$



Pour la tangente supérieure : $T(-9/5 ; 8/5)$.

Pour $c = 5/2$, les coordonnées sont $x = -9/5$ et $y = 8/5$. On vérifie $x^2/9 + y^2/4 = 9/25 + 16/25 = 1$. Pour $c = -5/2$, le contact est le point symétrique $(9/5 ; -8/5)$.

Une écriture à partir du point de contact

$$\frac{xx_T}{a^2} + \frac{yy_T}{b^2} = 1$$

Avec $T(-9/5 ; 8/5)$, cette équation devient $-x/5 + 2y/5 = 1$, soit $y = x/2 + 5/2$. On retrouve la même droite.

Astuce

Si le point de contact est donné, la forme ponctuelle est rapide. Si la pente est donnée, la condition $c^2 = a^2m^2 + b^2$ est plus directe.

Un signe change, les cas aussi

La disparition du terme en x^2 devient essentielle.

Considérons $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Pour la droite $y = mx + c$, la substitution donne :

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mcx - a^2(c^2 + b^2) = 0$$

$$\Delta = 4a^2b^2(c^2 + b^2 - a^2m^2)$$

Si $b^2 - a^2m^2 \neq 0$, on impose $\Delta = 0$ pour obtenir une tangente. La condition formelle est $c^2 = a^2m^2 - b^2$.

La condition complète

Une tangente de pente réelle finie m existe si et seulement si $|m| > b/a$. Alors $c = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

Pourquoi une inégalité stricte ?

Si $|m| = b/a$, le terme en x^2 disparaît. Lorsque $c = 0$, l'équation d'intersection devient $-a^2b^2 = 0$, impossible. Les droites $y = \pm(b/a)x$ sont des **asymptotes**, pas des tangentes en un point réel.

Si $|m| = b/a$ et $c \neq 0$, il reste une équation linéaire : la droite possède une seule intersection, mais elle n'est pas tangente. Si $|m| < b/a$, on a $\Delta > 0$ pour tout c et donc deux intersections.

$$x_T = -\frac{a^2m}{c}, \quad y_T = -\frac{b^2}{c} \quad \text{pour une tangente}$$

Les tangentes verticales

Les droites $x = \pm a$ sont tangentes aux sommets $(\pm a ; 0)$. Elles se traitent en dehors de l'écriture $y = mx + c$.

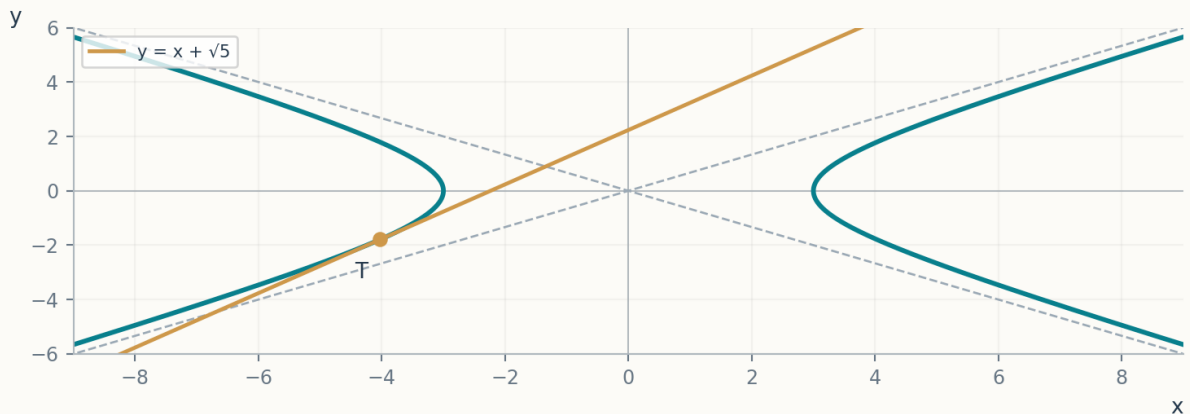
Distinguer contact et asymptote

Un exemple qui oblige à contrôler le degré.

Tangentes de pente 1

Pour l'hyperbole $x^2/9 - y^2/4 = 1$, on a $b/a = 2/3$. La pente 1 convient puisque $1 > 2/3$.

$$c^2 = 9 - 4 = 5 \implies y = x \pm \sqrt{5}$$



En pointillé : les asymptotes. En orange : une tangente de pente 1.

Pour $c = \sqrt{5}$, le point de contact est $T(-9/\sqrt{5} ; -4/\sqrt{5})$. La vérification donne $x^2/9 - y^2/4 = 9/5 - 4/5 = 1$.

Tester une pente limite

$$y = \frac{2}{3}x \implies \frac{x^2}{9} - \frac{(2x/3)^2}{4} = 0 \neq 1$$

La droite ne rencontre donc jamais l'hyperbole. Pourtant, insérer $m = 2/3$ et $c = 0$ dans la formule formelle annulerait Δ . L'erreur serait d'utiliser un critère quadratique alors que le coefficient du carré est nul.

Le point essentiel

Un discriminant nul n'a sa signification habituelle que si l'équation est réellement du second degré.

L'existence avant les angles

Une équation trigonométrique peut se lire géométriquement.

Pour des réels A, B, C , quand l'équation $A \sin x + B \cos x = C$ admet-elle au moins une solution réelle ? Si A et B ne sont pas tous deux nuls, posons $R = \sqrt{A^2 + B^2}$.

$$A \sin x + B \cos x = R \sin(x + \varphi)$$

On choisit $\cos \varphi = A/R$ et $\sin \varphi = B/R$. Comme le sinus prend toutes les valeurs de $[-1 ; 1]$, le membre de gauche prend toutes les valeurs de $[-R ; R]$.

Critère nécessaire et suffisant

$A \sin x + B \cos x = C$ admet une solution réelle si et seulement si $C^2 \leq A^2 + B^2$. Si $A = B = 0$, il faut et il suffit que $C = 0$.

Le lien exact avec le discriminant

Posons $u = \sin x$ et $v = \cos x$. Les points possibles $(u ; v)$ parcourent le cercle $u^2 + v^2 = 1$. L'équation $Au + Bv = C$ décrit une droite : la question devient celle de son intersection avec le cercle.

$$(A^2 + B^2)u^2 - 2ACu + (C^2 - B^2) = 0 \quad (B \neq 0)$$

$$\Delta_u = 4B^2(A^2 + B^2 - C^2)$$

Le critère $\Delta_u \geq 0$ donne exactement $C^2 \leq A^2 + B^2$. Cette preuve explique pourquoi une question de trigonométrie peut se résoudre comme une question de géométrie.

Exemple éclair

L'équation $3 \sin x + 4 \cos x = k$ admet une solution si et seulement si $-5 \leq k \leq 5$. Il est inutile de calculer les angles pour répondre à cette question d'existence.

Une restriction change le problème

Le critère porte sur x parcourant tout $\mathbb{R}$. Sur un intervalle imposé, les valeurs extrêmes accessibles peuvent changer.

L'image d'un quotient trigonométrique

Un exemple construit pour expliciter la méthode.

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Le dénominateur appartient à $[1 ; 3]$: il ne s'annule jamais. Chercher les valeurs prises par f revient à chercher les réels y pour lesquels il existe au moins un x tel que $f(x) = y$.

$$y(2 + \cos x) = 1 + \sin x \iff \sin x - y \cos x = 2y - 1$$

Le critère de la page précédente s'applique avec $A = 1$, $B = -y$ et $C = 2y - 1$. Il donne une condition nécessaire et suffisante :

$$(2y - 1)^2 \leq 1 + y^2 \iff y(3y - 4) \leq 0$$

Ensemble de valeurs

La fonction prend exactement toutes les valeurs de $[0 ; 4/3]$.

Vérifier que les bornes sont atteintes

La valeur 0 est obtenue pour $\sin x = -1$ et $\cos x = 0$. Pour $4/3$, on peut prendre $\sin x = 3/5$ et $\cos x = -4/5$: le quotient vaut $(8/5)/(6/5) = 4/3$.

Une autre voie : $t = \tan(x/2)$

$$f(x) = \frac{(t+1)^2}{t^2+3} \implies (y-1)t^2 - 2t + 3y - 1 = 0$$

Pour $y \neq 1$, le discriminant vaut $4y(4 - 3y)$. Pour $y = 1$, l'équation est linéaire et donne $t = 1$. La substitution exclut $x \equiv \pi$ modulo 2π ; ces angles donnent $f(x) = 1$, déjà conservé.

Pourquoi la première voie est plus courte

Elle contrôle directement l'existence d'un angle, sans résoudre l'équation trigonométrique et sans gérer les angles exclus par la tangente du demi-angle.

L'image d'un quotient rationnel

Chercher les valeurs de y qui possèdent un antécédent.

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$$

Le dénominateur vaut $(x - 1/2)^2 + 3/4 > 0$: le domaine est $\mathbb{R}$. Pour un réel y fixé, l'égalité $f(x) = y$ équivaut à :

$$(y - 1)x^2 - (y + 1)x + (y - 1) = 0$$

Premier cas : $y \neq 1$

L'équation est du second degré. Un antécédent réel existe si et seulement si le discriminant est positif ou nul.

$$\Delta_x = (y + 1)^2 - 4(y - 1)^2 = (3 - y)(3y - 1)$$

La condition $\Delta_x \geq 0$ donne $1/3 \leq y \leq 3$. Comme le dénominateur initial ne s'annule jamais, aucune racine obtenue n'est interdite.

Second cas : $y = 1$

L'équation devient $-2x = 0$, donc $x = 0$. La valeur $y = 1$ appartient bien à l'image, même si le critère du second degré ne s'appliquait pas à ce cas.

Conclusion et bornes

L'image est $[1/3 ; 3]$. Le minimum est atteint en $x = -1$ et le maximum en $x = 1$.

$$f(x) - \frac{1}{3} = \frac{2(x+1)^2}{3(x^2 - x + 1)} \geq 0, \quad 3 - f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2 - x + 1} \geq 0$$

Ces deux identités contrôlent les bornes. Le discriminant prouve en plus que toutes les valeurs intermédiaires possèdent un antécédent.

La bonne question

L'image de f est l'ensemble des y tels qu'il existe au moins un x du domaine avec $f(x) = y$. Il ne faut pas exiger que l'égalité soit vraie pour tous les x .

Les valeurs qu'il faut exclure

Un intervalle peut être ouvert, ou l'image avoir un trou.

1 • Un quotient par une expression linéaire

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$$

L'équation $g(x) = y$ devient $x^2 - yx + y + 1 = 0$. Son discriminant vaut $y^2 - 4y - 4$. Le nombre $x = 1$ n'est jamais une racine, car la substitution donne 2, quelle que soit la valeur de y .

$$\text{Im}(g) = (-\infty, 2 - 2\sqrt{2}] \cup [2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$$

Les valeurs extrêmes sont atteintes pour $x = 1 - \sqrt{2}$ et $x = 1 + \sqrt{2}$. L'image comporte deux morceaux séparés.

2 • Un coefficient dominant qui s'annule

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}, \quad (y - 1)x^2 + (2y - 1) = 0$$

Pour $y \neq 1$, la condition de racine réelle conduit à $1/2 \leq y < 1$. Pour $y = 1$, l'équation devient $1 = 0$, impossible. Pourtant la formule formelle du discriminant vaudrait zéro.

Résultat

L'image de h est $[1/2 ; 1[$. La valeur 1 est une limite à l'infini, jamais une valeur atteinte.

3 • Une simplification qui conserve un interdit

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad \text{seulement pour } x \neq 1$$

Le seul antécédent possible de 2 serait $x = 1$, interdit. L'image est donc $\mathbb{R}$ privé de 2. Effacer le facteur $x - 1$ sans conserver le domaine ferait perdre cette exclusion.

Les trois contrôles

Dénominateur non nul • équation vraiment quadratique • antécédent autorisé.

Les relations à reconstruire

Un aide-mémoire avec les conditions indispensables.

Situation	Condition ou résultat
$ax^2 + bx + c = 0 ; a \neq 0$	$\Delta = b^2 - 4ac ; \text{ racines réelles } \Leftrightarrow \Delta \geq 0$
$P(x) > 0$ pour tout $x ; a > 0$	$\Delta < 0$ (et $\Delta \leq 0$ pour $P(x) \geq 0$)
Cercle $x^2 + y^2 = R^2$	Tangente $y = mx + c : c^2 = R^2(1 + m^2)$
Parabole $y^2 = 4ax ; a > 0$	Tangente : $c = a/m$, avec $m \neq 0$
Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$	Tangente : $c^2 = a^2m^2 + b^2$
Hyperbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$	Tangente : $c^2 = a^2m^2 - b^2 ; m > b/a$
$A \sin x + B \cos x = C ; x \text{ réel}$	Existence $\Leftrightarrow C^2 \leq A^2 + B^2$
Image d'une fonction f	y est atteint $\Leftrightarrow f(x) = y$ a un x autorisé

Les tangentes verticales

Cercle : $x = \pm R$.

Ellipse : $x = \pm a$.

Hyperbole : $x = \pm a$.

Parabole $y^2 = 4ax : x = 0$.

Une recette pour une conique générale

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En remplaçant y par $mx + c$, le coefficient de x^2 devient $A + Bm + Cm^2$. Avant tout calcul de discriminant, vérifier qu'il n'est pas nul. Sur une conique non dégénérée, une racine double correspond à une tangente.

Le bon ordre

Il vaut mieux mémoriser la substitution et le contrôle du degré que réciter une formule sans ses conditions.

Six erreurs faciles à éviter

La méthode devient puissante quand on connaît ses limites.

01 Oublier le coefficient du carré

Une équation qui devient linéaire ne relève plus du critère du discriminant. Exemple : $(y - 1)x^2 + 2y - 1 = 0$ pour $y = 1$ donne $1 = 0$.

02 Confondre un point et une tangence

Une droite horizontale $y = c$ rencontre $y^2 = 4ax$ en un seul point, sans être tangente. L'équation en x est linéaire.

03 Transformer une asymptote en tangente

Pour l'hyperbole, la condition formelle $c^2 = a^2m^2 - b^2$ n'autorise pas $|m| = b/a$: ces pentes imposent un examen séparé.

04 Perdre un interdit en simplifiant

$(x^2 - 1)/(x - 1) = x + 1$ uniquement si $x \neq 1$. L'image reste $\mathbb{R}$ privé de 2, et non $\mathbb{R}$.

05 Remplacer une existence par une universalité

Pour trouver l'image, il suffit d'un antécédent. Pour rendre un polynôme positif partout, il faut contrôler tous les réels.

06 Déclarer une borne atteinte sans contrôle

Une limite peut ne jamais être atteinte. Vérifier l'équation associée à la borne, comme $y = 1$ pour $(x^2 + 1)/(x^2 + 2)$.

Une vérification finale en une phrase

Mon équation garde-t-elle son degré, mes solutions sont-elles autorisées, et ma conclusion répond-elle exactement à la question ?

Algèbre et géométrie

Sans regarder les corrigés · difficulté progressive.

1 Paramètre et racines · Fondamental

Déterminer les réels m pour lesquels $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ possède : a) au moins une racine réelle ; b) une racine double.

2 Positivité · Fondamental

Pour quelles valeurs de t le polynôme $x^2 - 2tx + t + 2$ est-il strictement positif pour tout réel x ? Et positif ou nul ?

3 Nombre d'intersections · Intermédiaire

Étudier selon k les intersections de $y = x^2 - 4x + 1$ et de $y = 2x + k$. Donner le point de contact lorsque la droite est tangente.

4 Deux directions · Intermédiaire

L'équation $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ représente-t-elle deux droites réelles ? Trouver leurs pentes puis la tangente de l'angle aigu entre elles.

5 Tangentes à un cercle · Fondamental

Trouver les tangentes de pente $3/4$ au cercle $x^2 + y^2 = 16$. Calculer leurs points de contact.

6 Cercle traduit · Approfondissement

Déterminer k pour que $y = x + k$ soit tangente au cercle $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$. Utiliser le discriminant ou un changement de coordonnées.

7 Parabole · Fondamental

Trouver la tangente de pente 2 à $y^2 = 12x$ et son point de contact. Vérifier la racine double.

8 Le cas vertical · Intermédiaire

Écrire toutes les tangentes à $y^2 = 4x$ qui passent par $A(-1 ; 0)$. Examiner séparément l'éventualité d'une tangente verticale.

Coniques, angles et fonctions

Justifier les conditions et vérifier les bornes.

9

Ellipse · Fondamental

Trouver les tangentes de pente 1 à $x^2/16 + y^2/9 = 1$ et leurs points de contact.

10

Depuis l'extérieur · Approfondissement

Trouver toutes les tangentes à $x^2/9 + y^2/4 = 1$ passant par $A(5 ; 0)$. Vérifier si une tangente verticale peut convenir.

11

Hyperbole · Intermédiaire

Trouver les tangentes de pente 1 à $x^2/16 - y^2/9 = 1$. Pourquoi la pente $3/4$ ne donne-t-elle aucune tangente ?

12

Une seule rencontre · Approfondissement

Étudier les intersections de $y = x$ et de $y = x + 1$ avec l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$. Une intersection unique signifie-t-elle ici une tangence ?

13

Amplitude · Fondamental

Pour quelles valeurs de k l'équation $5 \sin x + 12 \cos x = k$ possède-t-elle une solution réelle ?

14

Quotient trigonométrique · Intermédiaire

Déterminer l'image de $f(x) = (1 + \sin x)/(2 + \cos x)$, pour x réel. Vérifier que les deux bornes sont atteintes.

15

Quotient rationnel · Intermédiaire

Déterminer l'image de $g(x) = (x^2 + 2x + 2)/(x^2 - 2x + 2)$. Traiter séparément la valeur $y = 1$.

16

Deux pièges · Approfondissement

Déterminer les images de $h(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$ sur $\mathbb{R}$ et $q(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ sur $\mathbb{R}$ privé de 2. Expliquer les valeurs exclues.

Racines et intersections

Exercices 1 à 4.

1 · Le paramètre m

$$\Delta = 4(m^2 - m - 2) = 4(m - 2)(m + 1)$$

Le coefficient dominant est 1. Des racines réelles existent lorsque $(m - 2)(m + 1) \geq 0$, donc pour $m \leq -1$ ou $m \geq 2$. La racine est double si $m = -1$ ou $m = 2$; elle vaut alors respectivement -1 ou 2 .

2 · Un signe sur tout $\mathbb{R}$

Le coefficient dominant étant positif, la stricte positivité partout équivaut à $\Delta < 0$. On obtient $-1 < t < 2$. Pour la positivité large, on accepte $\Delta = 0$: $-1 \leq t \leq 2$. Aux bornes, le polynôme est un carré parfait.

3 · La droite et la parabole

$$x^2 - 4x + 1 = 2x + k \implies x^2 - 6x + 1 - k = 0$$

Le discriminant vaut $36 - 4(1 - k) = 4(k + 8)$. Si $k < -8$, il n'y a aucune rencontre. Si $k = -8$, la racine double est $x = 3$; l'ordonnée vaut $2 \times 3 - 8 = -2$. Si $k > -8$, il y a deux points distincts.

Point de tangence

T(3 ; -2), avec la tangente $y = 2x - 8$.

4 · Les deux droites

$$2m^2 - 5m + 2 = 0 \implies m_1 = 2, \quad m_2 = \frac{1}{2}$$

Le discriminant de l'équation des pentes vaut $25 - 16 = 9 > 0$. Les deux droites sont $y = 2x$ et $y = x/2$. Leur produit de pentes vaut 1 et leur différence vaut $3/2$.

$$\tan \theta = \frac{|2 - 1/2|}{1 + 2 \cdot (1/2)} = \frac{3}{4}$$

Cercle et parabole

Exercices 5 à 8.

5 · Le cercle de rayon 4

$$c^2 = 16\left(1 + \frac{9}{16}\right) = 25$$

Les deux tangentes sont $y = 3x/4 + 5$ et $y = 3x/4 - 5$. Avec $x = -mc/(1 + m^2)$ et $y = c/(1 + m^2)$, on obtient les contacts $(-12/5 ; 16/5)$ et $(12/5 ; -16/5)$. Leur distance au centre vaut bien 4.

6 · Changer l'origine

Posons $X = x - 2$ et $Y = y + 1$. Le cercle devient $X^2 + Y^2 = 9$. La droite devient $Y = X + k + 3$. La condition de tangence est $(k + 3)^2 = 9(1 + 1) = 18$.

$$k = -3 \pm 3\sqrt{2}$$

7 · La pente 2 sur $y^2 = 12x$

On a $a = 3$ et $m = 2$, d'où $c = 3/2$. La tangente est $y = 2x + 3/2$. Le contact est $(a/m^2 ; 2a/m) = (3/4 ; 3)$.

$$(2x + 3/2)^2 = 12x \iff 4(x - 3/4)^2 = 0$$

8 · Tangentes passant par $A(-1 ; 0)$

Une tangente non verticale à $y^2 = 4x$ s'écrit $y = mx + 1/m$, avec $m \neq 0$. Elle passe par A si $0 = -m + 1/m$, soit $m^2 = 1$. On obtient deux droites :

$$y = x + 1 \quad \text{et} \quad y = -x - 1$$

Leurs contacts sont $(1 ; 2)$ et $(1 ; -2)$. La seule tangente verticale à cette parabole est $x = 0$, qui ne passe pas par A. La liste des deux droites est donc complète.

Contrôle géométrique

Un changement d'origine conserve les pentes et transforme souvent un cercle translaté en cercle centré, beaucoup plus simple à traiter.

Ellipse et hyperbole

Exercices 9 à 12.

9 · Ellipse et pente 1

Avec $a^2 = 16$ et $b^2 = 9$, $c^2 = 16 + 9 = 25$. Les tangentes sont $y = x \pm 5$. Pour $c = 5$, le contact est $(-16/5 ; 9/5)$; pour $c = -5$, il est $(16/5 ; -9/5)$.

10 · Depuis A(5 ; 0)

Une droite non verticale passant par A a pour équation $y = m(x - 5)$, donc $c = -5m$. La condition de tangence à l'ellipse est $c^2 = 9m^2 + 4$.

$$25m^2 = 9m^2 + 4 \implies m = \pm \frac{1}{2}$$

Les deux tangentes sont $y = (x - 5)/2$ et $y = -(x - 5)/2$. Les contacts sont $(9/5 ; -8/5)$ et $(9/5 ; 8/5)$. Les tangentes verticales $x = \pm 3$ ne passent pas par A.

11 · Hyperbole et pente 1

$$c^2 = 16 - 9 = 7 \implies y = x \pm \sqrt{7}$$

La pente 1 est autorisée car $1 > 3/4$. Pour la pente $3/4$, le terme quadratique disparaît ; la droite de constante $c = 0$ est une asymptote et n'a aucun point commun avec la courbe. Aucun autre c ne donne de tangence à cette pente.

12 · Un point n'est pas toujours un contact

Avec $y = x$, l'équation $x^2 - y^2 = 1$ donne $0 = 1$: aucune intersection. Avec $y = x + 1$, elle donne $x^2 - (x + 1)^2 = 1$, donc $-2x - 1 = 1$ et $x = -1$. L'unique point est $(-1 ; 0)$.

Pourquoi ce n'est pas une tangente

La tangente au sommet $(-1 ; 0)$ est verticale, d'équation $x = -1$. La droite $y = x + 1$ coupe la courbe et l'équation d'intersection était linéaire.

Ensembles de valeurs

Exercices 13 à 16.

13 · Amplitude 13

La valeur $\sqrt{5^2 + 12^2}$ vaut 13. L'équation admet donc une solution réelle exactement pour $-13 \leq k \leq 13$.

14 · Le quotient trigonométrique

Le dénominateur est toujours positif. L'équation $f(x) = y$ équivaut à $\sin x - y \cos x = 2y - 1$. La condition $(2y - 1)^2 \leq 1 + y^2$ donne $0 \leq y \leq 4/3$. La borne 0 est atteinte pour $\sin x = -1$, $\cos x = 0$; la borne $4/3$ pour $\sin x = 3/5$, $\cos x = -4/5$.

15 · Le quotient rationnel

$$(y - 1)x^2 - 2(y + 1)x + 2(y - 1) = 0$$

Le dénominateur initial est $(x - 1)^2 + 1 > 0$. Pour $y \neq 1$, le discriminant vaut $4(-y^2 + 6y - 1)$. Il est positif ou nul pour $3 - 2\sqrt{2} \leq y \leq 3 + 2\sqrt{2}$. Pour $y = 1$, on obtient $-4x = 0$, donc cette valeur est atteinte.

$$\text{Im}(g) = [3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]$$

Aux bornes, $x = (y + 1)/(y - 1)$ donne respectivement $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. Ces antécédents sont autorisés.

16 · Borne exclue et valeur manquante

Pour h , écrire $h(x) = 1 - 1/(x^2 + 2)$. Puisque $x^2 + 2$ parcourt $[2 ; +\infty[$, l'image est $[1/2 ; 1[$. Le minimum est atteint en 0 ; la valeur 1 est impossible.

Pour q , la factorisation donne $q(x) = x + 2$ pour $x \neq 2$. Toutes les valeurs réelles sauf 4 sont donc prises. L'unique antécédent de 4 serait $x = 2$, interdit.

L'idée à emporter

Le discriminant ne remplace pas le raisonnement : il transforme une question d'existence en une condition calculable. Le domaine et le degré donnent à cette condition son sens.