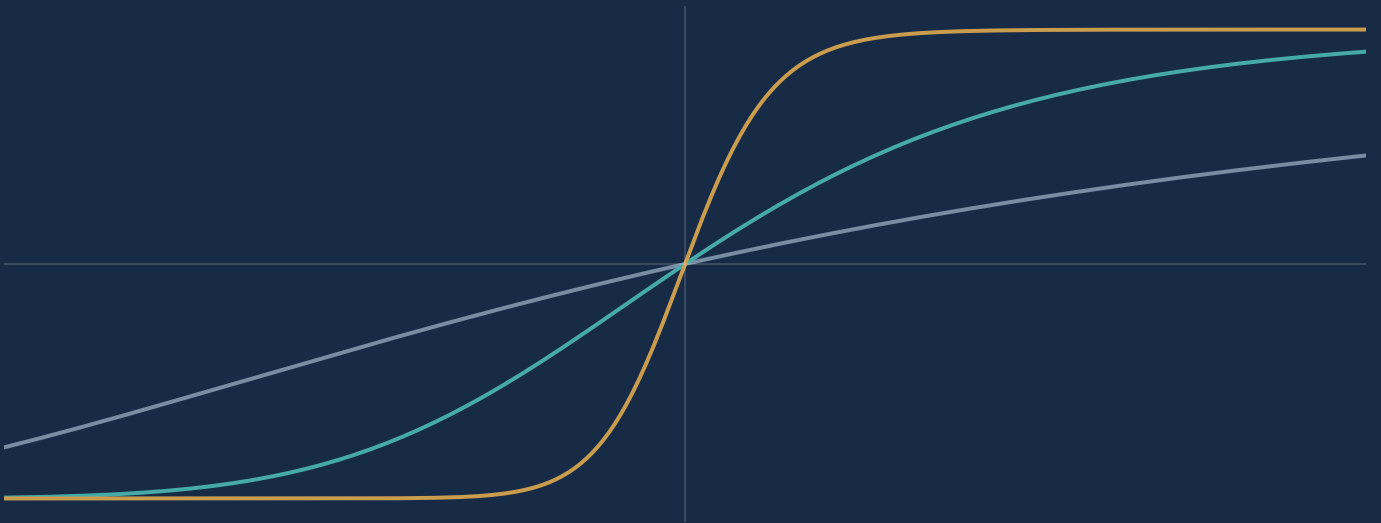


Limites successives

Fonctions définies
par une limite



$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

COURS • GRAPHIQUES • 15 EXERCICES CORRIGÉS

Méthodes par cas • Limites à gauche et à droite

LE LIVRET

Comprendre les deux étapes

On vous donne une fonction sous la forme d'une limite, puis on demande une nouvelle limite de cette fonction. La difficulté consiste à distinguer les variables et à choisir la bonne expression sur chaque intervalle.

01	Lire l'énoncé et maîtriser les puissances	3–5
02	Cinq études guidées	6–13
03	La méthode de résolution	14
04	15 exercices progressifs	15–17
05	Corrigés expliqués	18–20
06	Approfondissements et autoévaluation	21–23
07	La fiche à retenir	24

PRÉREQUIS ET CONVENTIONS

Les angles sont exprimés en **radians**. Le paramètre n parcourt les entiers strictement positifs et tend vers $+\infty$. On suppose connues les limites géométriques, la continuité des fonctions usuelles et

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1.$$

Ce que le fichier permet de reprendre

Les études sur $(x^{2n} - 1)/(x^{2n} + 1)$, sur $\cos^{2n} x$ et sur le quotient contenant $\tan(\pi x^2)$ sont développées à partir des calculs dictés.

DEUX RECONSTITUTIONS SIGNALÉES

Les formules initiales des études 4 et 5 ne sont pas intégralement énoncées dans le texte. Les expressions proposées ici sont des reconstitutions cohérentes avec les étapes dictées, et non des copies certifiées des expressions affichées. Leurs calculs et leurs domaines sont vérifiés indépendamment.

Reformulation française et développement pédagogique : Maths Olympiad. Les exercices et approfondissements complètent les exemples du cours.

01 / LA MÉTHODE

Deux variables, deux limites

LA STRUCTURE DU PROBLÈME

Une famille de fonctions (f_n) est donnée. Pour chaque x fixé, on définit, lorsque cette limite existe,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

On cherche ensuite une limite telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Étape 1 : fixer x , puis faire varier n

Pendant le premier calcul, x est un nombre constant. S'il vaut 0,9, il reste égal à 0,9 pendant que n augmente. S'il vaut 1,1, il reste égal à 1,1. Les deux cas peuvent donner des limites différentes. On construit donc une fonction, souvent définie par morceaux. Il faut préciser les intervalles sur lesquels chaque formule est valable et calculer séparément les valeurs aux seuils.

Étape 2 : faire tendre x vers a

Une fois f déterminée, le paramètre n a disparu. Pour étudier la limite en a , on utilise la branche de f valable à gauche de a , puis celle valable à droite.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

La limite bilatérale existe si les deux limites latérales existent et coïncident.

LE NOMBRE $f(a)$ EST UNE TROISIÈME INFORMATION

La valeur au point ne détermine pas, à elle seule, la limite. La continuité en a exige à la fois l'existence de $f(a)$, l'existence de la limite et leur égalité.

Une rédaction qui garde le bon ordre

« Fixons x . Selon la valeur de la base, nous calculons la limite en n . Nous obtenons les branches de f . Nous calculons ensuite les limites latérales de ces branches au point demandé. »

À ÉVITER

Écrire « on remplace n par l'infini » n'est pas une justification. L'infini n'est pas un entier que l'on substitue dans une formule : on étudie le comportement d'une suite.

01 / LES BASES

Ce que deviennent les puissances

POUR UNE BASE RÉELLE FIXÉE q

$ q < 1$	$q^n \rightarrow 0.$
$q = 1$	$q^n = 1$ pour tout n .
$q > 1$	$q^n \rightarrow +\infty.$
$q = -1$	$(-1)^n$ alterne entre -1 et 1 : pas de limite.
$q < -1$	Les valeurs alternent de signe et leur valeur absolue croît sans borne : pas de limite, même infinie.

Pourquoi la valeur absolue intervient-elle ?

La phrase « une base inférieure à 1 donne zéro » est fausse sans condition supplémentaire. Par exemple, $(-2)^n$ ne tend pas vers zéro. La bonne condition est $|q| < 1$. Pour $-1 < q < 0$, les signes alternent, mais les valeurs absolues tendent vers zéro : la suite tend donc bien vers zéro.

Le cas particulièrement utile des puissances paires

$$x^{2n} = (x^2)^n.$$

La base x^2 est positive ou nulle. Les trois cas sont alors

$ x < 1$	$ x = 1$	$ x > 1$
$x^{2n} \rightarrow 0$	$x^{2n} = 1$	$x^{2n} \rightarrow +\infty$

LES SEUILS SONT -1 ET 1

Pour une puissance paire, comparer seulement x à 1 fait oublier les valeurs $x < -1$. La comparaison correcte porte sur $|x|$, ou sur x^2 .

Autres bases fréquentes

Pour $(1+x)^n$ près de $x = 0$, choisir un voisinage où $1+x > 0$, puis comparer cette base à 1. Pour $e^{-nx} = (e^{-x})^n$, le seuil est $x = 0$: la puissance tend vers zéro si $x > 0$, vaut un si $x = 0$, et tend vers $+\infty$ si $x < 0$.

01 / L'OUTIL CLÉ

Normaliser un quotient

Considérons, pour un x fixé, une expression de la forme

$$U_n = \frac{A + Bt_n}{C + Dt_n}, \quad t_n \geq 0,$$

où les coefficients A, B, C, D sont indépendants de n . Ils peuvent dépendre de x , qui reste fixé pendant ce calcul.

TROIS CAS SIMPLES

Si $t_n \rightarrow 0$ et $C \neq 0$, alors $U_n \rightarrow A/C$.

Si $t_n = 1$ pour tout n et $C + D \neq 0$, alors $U_n = (A + B)/(C + D)$.

Si $t_n \rightarrow +\infty$ et $D \neq 0$, alors

$$U_n = \frac{A/t_n + B}{C/t_n + D} \rightarrow \frac{B}{D}.$$

Pourquoi diviser tous les termes ?

Lorsque le numérateur et le dénominateur deviennent grands, écrire simplement « infini sur infini » ne donne pas une valeur. Diviser le numérateur et le dénominateur par t_n fait apparaître $1/t_n \rightarrow 0$, et transforme le calcul en une limite de quotient ordinaire.

Exemple pédagogique

Pour $q > 0$, calculons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + 3q^n}{4 + q^n}.$$

Si $0 < q < 1$, on trouve $2/4 = 1/2$. Si $q = 1$, la valeur est $5/5 = 1$. Si $q > 1$, la division par q^n donne la limite 3.

LES COEFFICIENTS NULS DOIVENT ÊTRE TRAITÉS À PART

Si $C = 0$ ou $D = 0$, la formule correspondante ne s'applique pas automatiquement. De même, un dénominateur nul au point seuil interdit de calculer une valeur par substitution directe.

Le contrôle de domaine

Vérifier que les expressions sont définies pour les valeurs considérées, au moins à partir d'un certain rang. Dans les exemples de ce livret, un domaine explicite est choisi pour éviter les zéros des dénominateurs et les pôles de la tangente.

02 / ÉTUDE 1

Une fonction à trois valeurs

Formule retrouvée dans les calculs du cours

Pour tout réel x , on pose

$$F_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}, \quad F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x).$$

Le dénominateur est toujours strictement positif : toutes les fonctions F_n sont définies sur $\mathbb{R}$.

Cas 1 : $|x| < 1$

On a $x^{2n} \rightarrow 0$. Par passage à la limite,

$$F_n(x) \rightarrow \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1.$$

Cas 2 : $|x| = 1$

Pour $x = 1$ comme pour $x = -1$, $x^{2n} = 1$. Le quotient vaut exactement zéro pour chaque n , donc $F(1) = F(-1) = 0$.

Cas 3 : $|x| > 1$

On divise par x^{2n} , qui est non nul :

$$F_n(x) = \frac{1 - x^{-2n}}{1 + x^{-2n}} \rightarrow 1,$$

car $|1/x| < 1$, donc $x^{-2n} \rightarrow 0$.

LA FONCTION LIMITE

$$F(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| < 1. \end{cases}$$

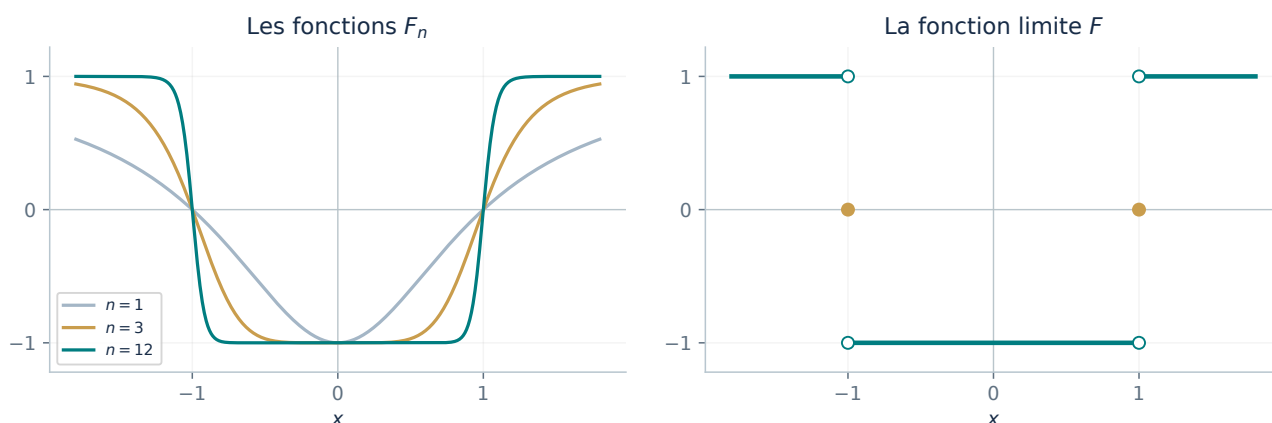
Cette fonction est paire : $F(-x) = F(x)$, comme chacune des fonctions F_n .

NE PAS OUBLIER LES VALEURS AUX SEUILS

Les valeurs $F(-1) = F(1) = 0$ ne se déduisent ni de la branche intérieure, ni de la branche extérieure. Elles résultent du calcul exact avec $x = \pm 1$.

02 / ÉTUDE 1

Lire les sauts sur le graphe



COMMENT LIRE LES POINTS

Les cercles vides indiquent les extrémités exclues des branches. Les points dorés indiquent les valeurs effectives $F(-1) = F(1) = 0$. Les courbes de gauche sont continues, mais leur fonction limite ne l'est pas aux deux seuils.

Au voisinage de 1

À gauche de 1, suffisamment près de 1, on a $|x| < 1$, donc $F(x) = -1$. À droite, $|x| > 1$, donc $F(x) = 1$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = 1.$$

La limite bilatérale en 1 n'existe pas, malgré l'existence de $F(1) = 0$.

Au voisinage de -1

Si $x < -1$, on est à l'extérieur de $[-1, 1]$, donc $F(x) = 1$. Si $-1 < x < 1$, on est à l'intérieur, donc $F(x) = -1$. On obtient

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) = -1.$$

La limite bilatérale en -1 n'existe pas non plus.

« À GAUCHE » NE SIGNIFIE PAS « PLUS PETIT EN VALEUR ABSOLUE »

Par exemple, $-1,1 < -1$, mais $|-1,1| > 1$. Pour ne pas inverser les branches, placer un nombre test de chaque côté du seuil.

En dehors de -1 et 1, la fonction F est constante sur un voisinage de chaque point : elle y est continue.

02 / ÉTUDE 2

Les puissances du cosinus

Exemple du cours

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

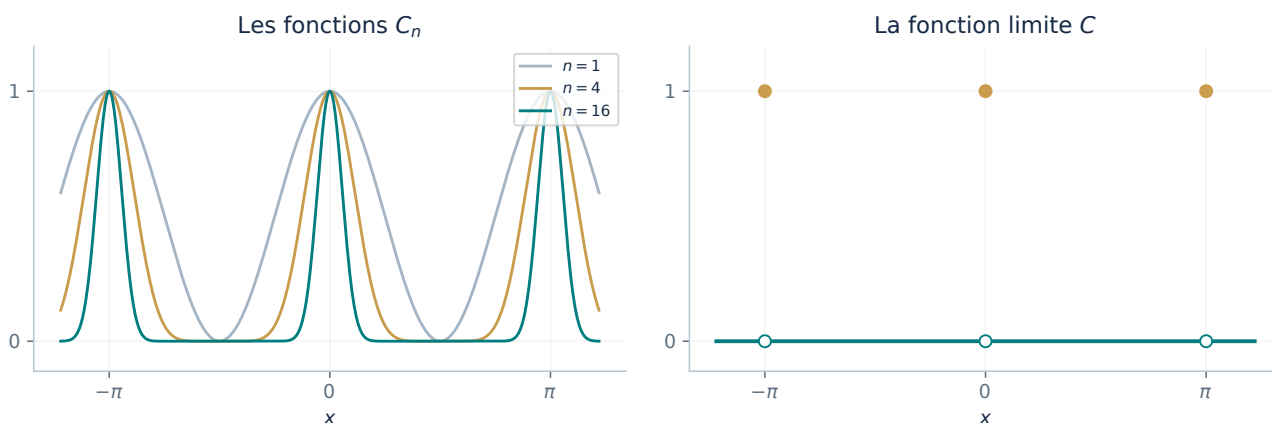
$$C_n(x) = \cos^{2n} x = (\cos^2 x)^n, \quad C(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n(x).$$

La base $\cos^2 x$ appartient à $[0, 1]$. Elle vaut 1 exactement pour $x = k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. Dans tous les autres cas, elle est strictement inférieure à 1.

LA FONCTION LIMITE

$$C(x) = \begin{cases} 1, & x \in \pi\mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Le signe de $\cos x$ ne pose aucun problème : les puissances sont paires.



La limite au point π

Dans le voisinage ponctué $0 < |x - \pi| < \pi/2$, il n'y a aucun autre multiple de π . On a donc $C(x) = 0$, aussi bien à gauche qu'à droite :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} C(x) = 0, \quad C(\pi) = 1.$$

La limite existe, mais la fonction n'est pas continue en π . Le même phénomène se produit en chaque multiple entier de π .

UNE LIMITE NE « PREND » PAS LA VALEUR AU POINT

Dans $\lim_{x \rightarrow \pi} C(x)$, on considère des valeurs de x proches de π et différentes de π . Substituer directement $x = \pi$ donnerait ici une réponse fausse.

02 / UN PIÈGE ESSENTIEL

L'ordre des limites compte

Considérons encore $C_n(x) = \cos^{2n} x$. Comparons deux calculs qui utilisent la même formule, mais dans des ordres différents.

Premier ordre : n d'abord, puis x

Pour x fixé, nous avons trouvé

$$C(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^{2n} x = \begin{cases} 1, & x \in \pi\mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dans l'intervalle ponctué $0 < |x| < \pi/2$, cette fonction vaut zéro. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^{2n} x \right) = 0.$$

Deuxième ordre : x d'abord, puis n

Fixons maintenant un entier n . La fonction $x \mapsto \cos^{2n} x$ est continue en zéro, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^{2n} x = \cos^{2n} 0 = 1.$$

Cette valeur est indépendante de n . Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos^{2n} x \right) = 1.$$

LES DEUX RÉSULTATS SONT DIFFÉRENTS

On obtient 0 dans le premier ordre et 1 dans le second. On ne peut donc pas échanger deux limites sans justification supplémentaire.

Pourquoi la continuité ne suffit-elle pas ?

Chaque C_n est continue. Pourtant, la fonction limite C est discontinue en zéro. Quand n augmente, les pics autour des multiples de π deviennent de plus en plus étroits. Une proximité suffisante de zéro pour un certain n peut ne plus suffire pour un n beaucoup plus grand.

LE BON RÉFLEXE

Respecter l'ordre écrit dans l'énoncé. Pour $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_n f_n(x))$, calculer d'abord la fonction $f(x) = \lim_n f_n(x)$, puis étudier cette fonction.

02 / ÉTUDE 3

Une tangente et une puissance

Pour x dans l'intervalle $I =]-1/2, 1/2[$, on considère

$$T_n(x) = \frac{\tan(\pi x^2) + (1+x)^n \sin x}{x^2 + (1+x)^n}, \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x).$$

Pourquoi ce domaine ?

Sur I , on a $1+x > 0$, donc le dénominateur est strictement positif. De plus, $0 \leq \pi x^2 < \pi/4$: la tangente est définie. Ce domaine suffit pour étudier la limite en zéro.

À gauche de zéro : $-1/2 < x < 0$

La base $1+x$ appartient à $]0, 1[$, donc $(1+x)^n \rightarrow 0$. Comme $x \neq 0$, le dénominateur tend vers $x^2 > 0$. Ainsi

$$T(x) = \frac{\tan(\pi x^2)}{x^2}.$$

À droite de zéro : $0 < x < 1/2$

La base $1+x$ est supérieure à 1. On divise tous les termes par $(1+x)^n$:

$$T_n(x) = \frac{\tan(\pi x^2)(1+x)^{-n} + \sin x}{x^2(1+x)^{-n} + 1} \rightarrow \sin x.$$

Au point zéro

Pour tout n , le numérateur vaut $0 + 1 \times 0 = 0$ et le dénominateur vaut $0 + 1 = 1$. Donc $T(0) = 0$.

LA FONCTION OBTENUE

$$T(x) = \begin{cases} \frac{\tan(\pi x^2)}{x^2}, & -1/2 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \sin x, & 0 < x < 1/2. \end{cases}$$

La limite en n existe pour chaque $x \in I$. Cela ne garantit pas que la nouvelle fonction admette une limite en zéro.

02 / ÉTUDE 3

Deux branches, deux réponses

Limite à gauche

Sur la branche $x < 0$, on doit calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan(\pi x^2)}{x^2}.$$

Pour $x \neq 0$, on écrit exactement

$$\frac{\tan(\pi x^2)}{x^2} = \pi \frac{\tan(\pi x^2)}{\pi x^2}.$$

En posant $u = \pi x^2$, on a $u \rightarrow 0^+$. La limite usuelle $\tan u/u \rightarrow 1$ donne alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} T(x) = \pi.$$

Limite à droite

Pour $x > 0$, la branche est $T(x) = \sin x$. Par continuité du sinus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} T(x) = 0.$$

CONCLUSION

Les deux limites latérales sont différentes. La limite bilatérale de T en zéro n'existe pas, bien que $T(0) = 0$. La fonction est continue à droite en zéro, mais pas à gauche.

ON NE « SIMPLIFIE » PAS UNE TANGENTE

$\tan(\pi x^2)$ n'est pas égal à πx^2 . Leur quotient tend vers 1 quand $x \rightarrow 0$. La transformation rigoureuse consiste à faire apparaître $\tan u/u$, avec des angles en radians.

Vérifier l'ordre une nouvelle fois

Pour chaque n fixé, T_n est continue en zéro et $T_n(0) = 0$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} T_n(x) \right) = 0.$$

Dans l'ordre inverse, la limite extérieure n'existe pas. Cet exemple montre que l'échange des limites peut même transformer un calcul possible en un calcul sans limite bilatérale.

02 / ÉTUDE 4

Une exponentielle dominante

RECONSTITUTION 1

La formule ci-dessous est une reconstitution cohérente avec les calculs dictés. L'expression affichée dans la vidéo d'origine n'est pas intégralement transcrite dans le fichier.

$$G_n(x) = \frac{\cos(\pi x) - e^{-nx} \sin(x-1)}{1 + e^{-nx}(x-1)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Vérifier le dénominateur

Si $x < 0$, alors $e^{-nx} > 1$ et $x - 1 < -1$, donc le dénominateur est négatif. Si $0 < x < 1$, le produit $(1-x)e^{-nx} < 1$, donc il est positif. Pour $x \geq 1$, il est au moins égal à 1. En revanche, pour $x = 0$, il vaut zéro pour tout n . **Le point zéro est exclu du domaine.**

Calculer la limite pour x fixé

Si $x > 0$, alors $e^{-nx} \rightarrow 0$, d'où $G(x) = \cos(\pi x)$.

Si $x < 0$, alors $e^{-nx} \rightarrow +\infty$. En divisant par e^{-nx} , on trouve

$$G_n(x) = \frac{e^{nx} \cos(\pi x) - \sin(x-1)}{e^{nx} + x - 1} \rightarrow -\frac{\sin(x-1)}{x-1}.$$

FONCTION LIMITE ET LIMITES LATÉRALES

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{\sin(x-1)}{x-1}, & x < 0, \\ \cos(\pi x), & x > 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = -\sin 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 1.$$

Le signe à gauche mérite attention :

$$-\frac{\sin(-1)}{-1} = -\sin 1.$$

Les deux limites sont différentes. Il n'y a pas de limite bilatérale en zéro, ni de valeur $G(0)$. En revanche, $G(1) = \cos \pi = -1$.

02 / ÉTUDE 5

Un raccordement continu

RECONSTITUTION 2

Cette expression est également reconstituée à partir des étapes dictées. On l'étudie sur $]0, +\infty[$, domaine suffisant pour examiner le point 1.

$$H_n(x) = \frac{\cos(\pi x) - x^{2n} \sin(x-1)}{1 + x^{2n}(x-1)}, \quad H(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x).$$

Pour $0 < x < 1$, le dénominateur vaut $1 - (1-x)x^{2n} > 0$. Pour $x \geq 1$, il est au moins égal à 1. Les quotients sont donc bien définis.

Les trois cas

- Si $0 < x < 1$, alors $x^{2n} \rightarrow 0$, donc $H(x) = \cos(\pi x)$.
- Si $x = 1$, le quotient vaut exactement -1 , donc $H(1) = -1$.
- Si $x > 1$, on divise par x^{2n} . Le dénominateur tend vers $x-1 \neq 0$, donc $H(x) = -\sin(x-1)/(x-1)$.

LA FONCTION LIMITE

$$H(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & 0 < x < 1, \\ -1, & x = 1, \\ -\frac{\sin(x-1)}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

Le raccordement au point 1

À gauche, la continuité du cosinus donne $\cos \pi = -1$. À droite, on pose $u = x-1 \rightarrow 0^+$, puis on utilise $\sin u/u \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} H(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} H(x) = -1.$$

Les deux limites coïncident et sont égales à $H(1)$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} H(x) = -1 = H(1).}$$

La fonction H est continue en 1, malgré le changement de formule à ce point.

03 / RÉSOUDRE SANS SE TROMPER

Une méthode en cinq étapes

1. **Délimiter le domaine.** Écarter les dénominateurs nuls et les fonctions non définies. Un voisinage du point demandé peut suffire.
2. **Fixer x et comparer la base à 1.** Pour x^{2n} , comparer $|x|$ à 1. Pour une exponentielle, examiner le signe de son exposant.
3. **Calculer chaque branche.** Si la puissance tend vers zéro, utiliser les limites ordinaires. Si elle tend vers l'infini, normaliser le quotient.
4. **Traiter exactement les seuils.** Remplacer x par le seuil dans f_n , si cette valeur appartient au domaine.
5. **Étudier la nouvelle fonction.** Calculer les limites à gauche et à droite, les comparer, puis comparer leur valeur à $f(a)$ pour la continuité.

Ce que montrent les cinq études

Fonction	Point	À gauche	À droite	Valeur	Conclusion
F	1	-1	1	0	Pas de limite
C	π	0	0	1	Limite, sans continuité
T	0	π	0	0	Pas de limite
G	0	$-\sin 1$	1	non définie	Pas de limite
H	1	-1	-1	-1	Continuité

UNE BRANCHE N'EST VALABLE QUE SUR SON INTERVALLE

La formule trouvée pour $x > 1$ ne peut pas être utilisée automatiquement pour calculer la valeur en $x = 1$. Un dénominateur tel que $x - 1$ peut y devenir nul.

Contrôler une réponse

Prendre un nombre test de chaque côté du seuil, vérifier la valeur exacte au seuil, puis contrôler que les signes des résultats sont cohérents. Ces vérifications repèrent de nombreuses erreurs, mais ne remplacent pas la démonstration.

POUR S'ENTRAÎNER

Les exercices suivants vont des puissances simples aux trajectoires où x dépend de n . Les numéros des exercices et des corrigés sont reliés par des liens cliquables.

04 / EXERCICES 1 À 5

Puissances et fonctions limites

Dans tous les exercices, n tend vers $+\infty$ en parcourant les entiers strictement positifs. Justifier chaque changement de branche.

EXERCICE 1 Bases réelles[Corrigé →](#)

Déterminer le comportement de q^n pour chacune des valeurs

$$q = -2, \quad -1, \quad -\frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 2.$$

Distinguer une limite réelle, une limite infinie et l'absence de limite.

EXERCICE 2 L'exemple de référence[Corrigé →](#)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

Déterminer $F(x) = \lim_n F_n(x)$, puis $F(-2)$, $F(-1)$, $F(0)$, $F(1)$ et $F(2)$. La limite de F en 1 existe-t-elle ?

EXERCICE 3 Changer les coefficients[Corrigé →](#)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_n(x) = \frac{3x^{2n} + 2}{x^{2n} + 4}.$$

Déterminer la fonction limite A . Étudier ses limites latérales en 1, puis sa continuité en 1 et en -1 .

EXERCICE 4 Une transformation simple[Corrigé →](#)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$B_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

Déterminer la fonction limite B . Retrouver le résultat en exprimant B_n en fonction de F_n de l'exercice 2.

EXERCICE 5 La valeur n'est pas la limite[Corrigé →](#)

Soit $C(x) = \lim_n \cos^{2n} x$. Déterminer $C(\pi)$, puis $\lim_{x \rightarrow \pi} C(x)$. La fonction C est-elle continue en π ?

04 / EXERCICES 6 À 10

Choisir la bonne branche

EXERCICE 6 Passer au sinus[Corrigé →](#)

Pour tout réel x , soit $S(x) = \lim_n \sin^{2n} x$. Déterminer S , puis comparer $S(\pi/2)$ et $\lim_{x \rightarrow \pi/2} S(x)$.

EXERCICE 7 Un seuil en zéro[Corrigé →](#)

Pour $x > -1$, on pose

$$U_n(x) = \frac{2 + (1+x)^n}{3 + 2(1+x)^n}.$$

Déterminer $U = \lim_n U_n$, sans oublier $x = 0$. La limite de U en zéro existe-t-elle ?

EXERCICE 8 Une exponentielle[Corrigé →](#)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$P_n(x) = \frac{2 + 3e^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$

Déterminer $P = \lim_n P_n$, puis les limites latérales de P en zéro.

EXERCICE 9 Une formule générale[Corrigé →](#)

Les nombres a, b sont réels et $q > 0$. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a + q^n b}{1 + q^n}$$

selon les valeurs de q . Justifier le cas $q > 1$ par une division explicite.

EXERCICE 10 Deux limites trigonométriques[Corrigé →](#)

Pour $-1/2 < x < 1/2$, on pose

$$T_n(x) = \frac{\tan(\pi x^2) + (1+x)^n \sin x}{x^2 + (1+x)^n}.$$

Déterminer $T = \lim_n T_n$, puis ses limites à gauche et à droite en zéro. Conclure sur la limite bilatérale.

INDICE COMMUN

Le signe de x décide ici du comportement de $(1+x)^n$ et de e^{nx} . Mais leurs limites au point $x = 0$ doivent être calculées séparément.

04 / EXERCICES 11 À 15

Raccordements et limites

EXERCICE 11 Contrôler un signe

[Corrigé →](#)

Reprendre la reconstitution 1, pour $x \neq 0$:

$$G_n(x) = \frac{\cos(\pi x) - e^{-nx} \sin(x-1)}{1 + e^{-nx}(x-1)}.$$

Déterminer $G = \lim_n G_n$, calculer $G(1)$ et les limites latérales en zéro. Peut-on attribuer une valeur à $G(0)$ par cette définition ?

EXERCICE 12 Deux branches qui se rejoignent

[Corrigé →](#)

Reprendre la reconstitution 2, pour $x > 0$:

$$H_n(x) = \frac{\cos(\pi x) - x^{2n} \sin(x-1)}{1 + x^{2n}(x-1)}.$$

Déterminer $H = \lim_n H_n$ et démontrer sa continuité en 1.

EXERCICE 13 Un paramètre de continuité

[Corrigé →](#)

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x > -1$, on pose

$$W_n(x) = \frac{a + (1+x)^n b}{1 + (1+x)^n}.$$

Déterminer $W = \lim_n W_n$. À quelle condition sur a, b la fonction W est-elle continue en zéro ?

EXERCICE 14 Peut-on échanger ?

[Corrigé →](#)

Calculer et comparer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^{2n} x \right) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos^{2n} x \right).$$

EXERCICE 15 Défi : un point qui se déplace

[Corrigé →](#)

Soit $c \in \mathbb{R}$ fixé et $x_n = 1 + c/n$. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^{2n} - 1}{x_n^{2n} + 1}.$$

On pourra utiliser $\lim_{u \rightarrow 0} \ln(1+u)/u = 1$. Comparer les résultats pour $c = 0$ et $c = 1$.

05 / CORRIGÉS 1 À 5

Des bases aux premiers sauts

1 CORRIGÉ

Énoncé →

Pour $q = -2$, les sous-suites paires et impaires tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$: aucune limite, même infinie. Pour $q = -1$, la suite alterne entre -1 et 1 , donc n'a pas de limite. Pour $q = -1/2, 0, 1/2$, la limite est 0 . Pour $q = 1$, elle vaut 1 . Pour $q = 2$, elle vaut $+\infty$.

2 CORRIGÉ

Énoncé →

On compare $|x|$ à 1 . Les puissances tendent vers 0 , valent 1 , ou tendent vers $+\infty$. Dans ce dernier cas, on divise par x^{2n} . Ainsi

$$F(x) = \begin{cases} -1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

Les cinq valeurs demandées sont, dans l'ordre, $1, 0, -1, 0, 1$. En 1 , la limite à gauche vaut -1 et celle à droite vaut 1 . Il n'y a pas de limite bilatérale.

3 CORRIGÉ

Énoncé →

Si $|x| < 1$, le quotient tend vers $2/4 = 1/2$. Si $|x| = 1$, il vaut $5/5 = 1$. Si $|x| > 1$, la division par x^{2n} donne la limite 3 . Donc

$$A(x) = \begin{cases} 1/2, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ 3, & |x| > 1. \end{cases}$$

En 1 , les limites gauche et droite sont $1/2$ et 3 . En -1 , elles sont 3 et $1/2$. La fonction est discontinue aux deux points.

4 CORRIGÉ

Énoncé →

On trouve $B(x) = 0$ si $|x| < 1$, $B(x) = 1/2$ si $|x| = 1$, et $B(x) = 1$ si $|x| > 1$. En effet,

$$B_n(x) = \frac{F_n(x) + 1}{2}, \quad B(x) = \frac{F(x) + 1}{2}.$$

Les limites latérales de B en 1 valent 0 et 1 .

5 CORRIGÉ

Énoncé →

La fonction C vaut 1 aux multiples entiers de π , et 0 ailleurs. Donc $C(\pi) = 1$. Dans un voisinage ponctué assez petit de π , $C(x) = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow \pi} C(x) = 0$. Ces deux nombres étant différents, C n'est pas continue en π .

05 / CORRIGÉS 6 À 10

Des seuils bien identifiés

6 CORRIGÉ

Énoncé →

La base $\sin^2 x$ appartient à $[0, 1]$. Elle vaut 1 exactement pour $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $S = 1$ sur cet ensemble et $S = 0$ ailleurs. On a $S(\pi/2) = 1$, mais $S(x) = 0$ dans un voisinage ponctué de $\pi/2$. La limite y vaut 0.

7 CORRIGÉ

Énoncé →

Sur $-1 < x < 0$, $(1+x)^n \rightarrow 0$, donc $U(x) = 2/3$. Au point 0, le quotient vaut $3/5$. Pour $x > 0$, la division par $(1+x)^n$ donne

$$\frac{2(1+x)^{-n} + 1}{3(1+x)^{-n} + 2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Ainsi $U(0) = 3/5$, tandis que les limites latérales sont $2/3$ et $1/2$. La limite bilatérale n'existe pas.

8 CORRIGÉ

Énoncé →

Pour $x < 0$, $e^{nx} \rightarrow 0$, donc $P(x) = 2$. Pour $x = 0$, $P(0) = 5/2$. Pour $x > 0$, on divise par e^{nx} et on obtient

$$\frac{2e^{-nx} + 3}{e^{-nx} + 1} \rightarrow 3.$$

Les limites en zéro sont donc 2 à gauche et 3 à droite : pas de limite bilatérale.

9 CORRIGÉ

Énoncé →

Si $0 < q < 1$, la limite vaut a . Si $q = 1$, le quotient vaut $(a+b)/2$ pour tout n . Si $q > 1$, alors $q^{-n} \rightarrow 0$, et

$$\frac{a + q^n b}{1 + q^n} = \frac{aq^{-n} + b}{q^{-n} + 1} \rightarrow b.$$

Le dénominateur initial est toujours strictement positif.

10 CORRIGÉ

Énoncé →

Pour $x < 0$, la puissance tend vers 0 et $T(x) = \tan(\pi x^2)/x^2$. Au point 0, $T(0) = 0$. Pour $x > 0$, on divise par $(1+x)^n$ et $T(x) = \sin x$. Ensuite,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} T(x) = \pi \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan(\pi x^2)}{\pi x^2} = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} T(x) = 0.$$

La limite bilatérale n'existe pas. Le domaine donné garantit la définition de tous les quotients.

05 / CORRIGÉS 11 À 15

Justifier les cas délicats

11 CORRIGÉ

Énoncé →

Pour $x > 0$, $e^{-nx} \rightarrow 0$, donc $G(x) = \cos(\pi x)$. Pour $x < 0$, la division par e^{-nx} donne $G(x) = -\sin(x-1)/(x-1)$. Ainsi $G(1) = -1$. En zéro :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = -\frac{\sin(-1)}{-1} = -\sin 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 1.$$

Ces limites sont différentes. La définition ne donne pas de valeur $G(0)$, puisque $G_n(0)$ n'est défini pour aucun n .

12 CORRIGÉ

Énoncé →

Sur $0 < x < 1$, $H(x) = \cos(\pi x)$. On calcule séparément $H(1) = -1$. Sur $x > 1$, la division par x^{2n} donne $H(x) = -\sin(x-1)/(x-1)$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} H(x) = \cos \pi = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} H(x) = -\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sin u}{u} = -1.$$

La limite existe et vaut $H(1)$: H est continue en 1.

13 CORRIGÉ

Énoncé →

Les trois branches sont $W(x) = a$ sur $-1 < x < 0$, $W(0) = (a+b)/2$, et $W(x) = b$ sur $x > 0$. Les limites latérales en zéro sont donc a et b . La continuité impose $a = b$. Réciproquement, si $a = b$, toutes les valeurs de W sont égales à a . La condition nécessaire et suffisante est $\boxed{a = b}$.

14 CORRIGÉ

Énoncé →

Si n tend d'abord vers l'infini, on obtient la fonction C , nulle au voisinage ponctué de zéro. La limite extérieure vaut 0. Si x tend d'abord vers zéro, la continuité donne $\cos^{2n} 0 = 1$, puis la limite en n reste 1. Les deux limites successives sont différentes.

15 CORRIGÉ

Énoncé →

Pour $c = 0$, $x_n = 1$, donc le quotient vaut 0. Si $c \neq 0$, la base $1 + c/n$ est positive à partir d'un certain rang et

$$\ln(x_n^{2n}) = 2n \ln(1 + c/n) = 2c \frac{\ln(1 + c/n)}{c/n} \rightarrow 2c.$$

Donc $x_n^{2n} \rightarrow e^{2c}$ et, le dénominateur limite étant positif,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x_n) = \frac{e^{2c} - 1}{e^{2c} + 1}.$$

Pour $c = 0$, le résultat est 0. Pour $c = 1$, il vaut $(e^2 - 1)/(e^2 + 1)$, environ 0,762.

06 / APPROFONDISSEMENT

Un point qui se déplace

Jusqu'ici, x restait fixé pendant le passage à la limite en n . Que se passe-t-il si le point se déplace vers le seuil ?

UNE TRAJECTOIRE VERS 1

Fixons $c \in \mathbb{R}$, puis posons $x_n = 1 + c/n$. On a toujours $x_n \rightarrow 1$. Pourtant, le comportement de $F_n(x_n)$ dépend de c .

Calculer la puissance

Pour $c \neq 0$, et pour n suffisamment grand,

$$2n \ln(1 + c/n) = 2c \frac{\ln(1 + c/n)}{c/n} \rightarrow 2c.$$

La continuité de l'exponentielle donne $(1 + c/n)^{2n} \rightarrow e^{2c}$. Pour $c = 0$, cette conclusion reste vraie puisque la puissance vaut $1 = e^0$.

En déduire la limite du quotient

$$F_n(1 + c/n) \rightarrow \frac{e^{2c} - 1}{e^{2c} + 1}.$$

c	Point x_n	Limite de $F_n(x_n)$
-1	$1 - 1/n$	$(1 - e^2)/(1 + e^2) \approx -0,762$
0	1	0
1	$1 + 1/n$	$(e^2 - 1)/(e^2 + 1) \approx 0,762$

CE N'EST PLUS UNE LIMITE À x FIXÉ

Bien que $x_n > 1$ pour $c > 0$, on ne peut pas conclure $F_n(x_n) \rightarrow 1$ à partir de la branche $F(x) = 1$ pour $x > 1$. Cette branche a été obtenue en gardant x constant, ce qui n'est pas le cas ici.

Ce que cela révèle

Les trajectoires $x_n = 1$ et $x_n = 1 + 1/n$ conduisent à des résultats différents. Il n'existe donc pas de limite commune de $F_n(x)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow 1$ sans préciser leur relation.

06 / APPROFONDISSEMENT

Mesurer l'erreur d'approximation

La convergence est rapide lorsque x reste loin des seuils -1 et 1 . On peut le démontrer en calculant exactement l'écart entre F_n et sa limite.

À l'intérieur : $|x| \leq r < 1$

Sur cet intervalle, $F(x) = -1$. Alors

$$|F_n(x) - F(x)| = F_n(x) + 1 = \frac{2x^{2n}}{1 + x^{2n}} \leq 2r^{2n}.$$

La borne de droite ne dépend plus de x . Elle tend vers zéro quand n augmente.

UN NOMBRE DE TERMES SUFFISANT

Pour $|x| \leq 0,9$, on souhaite une erreur au plus égale à $0,01$. Il suffit d'avoir

$$2(0,9)^{2n} \leq 0,01 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0,005)}{2\ln(0,9)} \approx 25,14.$$

Ainsi $n \geq 26$ garantit cette précision simultanément pour tous les x de l'intervalle.

À l'extérieur : $|x| \geq R > 1$

Ici, $F(x) = 1$, donc

$$|F_n(x) - F(x)| = 1 - F_n(x) = \frac{2}{1 + x^{2n}} \leq 2R^{-2n}.$$

Par exemple, pour $|x| \geq 1,1$, le choix $n \geq 28$ suffit pour assurer une erreur au plus égale à $0,01$.

Pourquoi les seuils posent-ils problème ?

Pour chaque n fixé, lorsque $x \rightarrow 1^-$, on a $F_n(x) \rightarrow 0$, tandis que $F(x) = -1$. L'erreur tend donc vers 1 .

UNE PRÉCISION COMMUNE N'EST PAS TOUJOURS POSSIBLE

Il n'existe aucun rang n qui rende l'erreur inférieure à $0,01$ pour tous les $x \in]-1, 1[$. On peut toujours choisir un point assez proche de 1 pour que l'erreur reste grande.

Obtenir une précision donnée avec le même rang pour tous les points d'un ensemble est l'idée de la **convergence uniforme**. Cette notion prolonge le cours; les inégalités ci-dessus suffisent ici à comprendre le phénomène.

06 / AUTOÉVALUATION

Huit affirmations à examiner

Avant de lire les réponses, décider si chaque affirmation est vraie ou fausse et donner une justification.

1. Si $q < 1$, alors $q^n \rightarrow 0$.
2. Pour $x < -1$, la suite x^{2n} tend vers $+\infty$.
3. Si $f(a)$ existe, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
4. Une limite simple de fonctions continues est toujours continue.
5. Deux limites successives peuvent toujours être échangées.
6. Si $t_n \rightarrow +\infty$, le quotient $(A + Bt_n)/(C + Dt_n)$ tend toujours vers B/D .
7. Si les deux limites latérales en a valent $f(a)$, alors f est continue en a .
8. Une formule obtenue pour chaque x fixé peut être appliquée sans vérification à n'importe quelle suite x_n .

Réponses commentées

1. **Faux.** Le contre-exemple $q = -2$ suffit. La condition correcte pour une limite nulle est $|q| < 1$.
2. **Vrai.** On a $x^{2n} = (x^2)^n$, avec $x^2 > 1$.
3. **Faux.** Pour la fonction C , $C(0) = 1$, mais la limite en zéro vaut 0.
4. **Faux.** Les fonctions F_n sont continues et leur limite F est discontinue en -1 et en 1 . « Limite simple » signifie ici : limite pour chaque x fixé.
5. **Faux.** Avec $\cos^{2n} x$ au voisinage de zéro, les deux ordres donnent respectivement 0 et 1.
6. **Faux.** Il faut notamment $D \neq 0$. Si $A = 0$, $B = C = 1$, $D = 0$, le quotient est t_n , qui tend vers $+\infty$, et B/D n'est pas défini.
7. **Vrai.** Pour une fonction définie sur un voisinage de a , c'est précisément le critère de continuité par les limites latérales.
8. **Faux.** La trajectoire $x_n = 1 + 1/n$ fournit une limite différente de celle obtenue en fixant un $x > 1$.

POUR PROGRESSER

Une erreur sur 1 ou 2 : revoir les puissances. Sur 3 ou 7 : revoir valeur et continuité. Sur 4, 5 ou 8 : revoir l'ordre des limites. Sur 6 : revoir les conditions de normalisation.

07 / FICHE DE SYNTHÈSE

Les réflexes à conserver

LE PARCOURS DE RÉOLUTION

Domaine $\rightarrow$ base $\rightarrow$ branches $\rightarrow$ seuils $\rightarrow$ limites latérales.

Fixer x , calculer la limite en n , puis seulement faire varier x .

Les puissances à connaître

Condition	$ x < 1$	$ x = 1$	$ x > 1$
x^{2n}	$\rightarrow 0$	$= 1$	$\rightarrow +\infty$

Pour e^{nx} , le seuil est $x = 0$: limite 0 si $x < 0$, valeur 1 si $x = 0$, limite $+\infty$ si $x > 0$.

Le quotient à normaliser

Pour des coefficients fixes et un quotient défini,

$$\frac{A + Bt_n}{C + Dt_n} \rightarrow \begin{cases} A/C, & t_n \rightarrow 0, C \neq 0, \\ B/D, & t_n \rightarrow +\infty, D \neq 0. \end{cases}$$

Dans le second cas, diviser le numérateur **et** le dénominateur par t_n .

Trois informations distinctes

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad f(a).$$

Les deux premières décident de l'existence de la limite bilatérale. Leur égalité avec la troisième décide de la continuité.

DEUX RACCOURCIS INTERDITS

Substituer le seuil dans la fonction limite sans connaître sa continuité.

Échanger les limites sans un résultat qui l'autorise.

Trois exemples repères

- $F_n = (x^{2n} - 1)/(x^{2n} + 1)$: trois valeurs $-1, 0, 1$ et des sauts aux seuils.
- $C_n = \cos^{2n} x$: la limite de C en π vaut 0, mais $C(\pi) = 1$.
- L'étude de T : les branches donnent π à gauche de zéro et 0 à droite, donc aucune limite bilatérale.

MATHS OLYMPIAD

Comprendre les conditions, justifier chaque étape, puis utiliser les raccourcis avec précision.