

Logarithmes

Méthodes, exercices et corrections guidées

11

problèmes pour approfondir et progresser

Transformer les produits, maîtriser les bases, résoudre les équations et contrôler le domaine.

Méthodes 2-3 Exercices 4-5

Réponses 6 Corrections guidées 7-12

NIVEAU LYCÉE AVANCÉ • APPROFONDISSEMENT

Édition française • Énoncés conservés et reformulés

FICHE MÉTHODE / 01

Le domaine avant le calcul

Définition et conditions

Pour $b > 0$, $b \neq 1$ et $x > 0$:

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}, \quad b^{\log_b x} = x.$$

Si la base dépend de l'inconnue, il faut aussi contrôler qu'elle reste positive et différente de 1.

Les trois identités essentielles

Pour $u, v > 0$ et $r \in \mathbb{R}$:

$$\ln(uv) = \ln u + \ln v, \quad \ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v, \quad \ln(u^r) = r \ln u.$$

Piège classique

En général, $\ln(u+v) \neq \ln u + \ln v$. Les identités portent sur les produits et les quotients, jamais sur une somme arbitraire.

Changer de base pour simplifier

Si $a, b > 0$ et $a, b \neq 1$, alors

$$\log_a b \log_b a = 1.$$

Un produit de logarithmes à bases différentes peut ainsi se réduire avant tout calcul.

Exemple guidé

Résoudre $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$. Le domaine impose $x > 1$. On obtient $(x-1)(x+1) = 8$, donc $x^2 = 9$. Seule la solution $x = 3$ est admissible.

FICHE MÉTHODE / 02

Les substitutions qui débloquent

Une seule nouvelle inconnue

Dans $\log_b^2 x - 3 \log_b x + 2 = 0$, poser $t = \log_b x$. On résout $t^2 - 3t + 2 = 0$, puis on revient à $x = b$ ou $x = b^2$.

Une puissance à exposant logarithmique

Pour $a > 0$, $b > 0$, l'égalité $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ se démontre en écrivant les deux membres sous la forme $e^{\ln a \ln b}$.

Équations de puissances

Si les deux membres sont strictement positifs, prendre leur logarithme transforme un produit d'exposants en une relation algébrique. Il faut conserver toutes les conditions initiales.

Inéquations : surveiller la base

La fonction $\log_b$ est croissante pour $b > 1$, décroissante pour $0 < b < 1$. Dans ce deuxième cas, le sens de l'inégalité s'inverse.

Routine de résolution

1. Déterminer le domaine.
2. Choisir une base commune.
3. Poser une inconnue auxiliaire si nécessaire.
4. Résoudre.
5. Revenir à l'inconnue initiale et vérifier chaque candidat.

Comment utiliser ce livret

Les exercices conservent leur numérotation. La grille donne des réponses courtes ; les pages suivantes détaillent les raisonnements choisis. L'exercice 2 comporte une ambiguïté, analysée dans sa correction.

Logarithmes

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

001 EXERCICE

La somme des carrés des solutions réelles de l'équation

$$\log_{(x+1)}(2x^2 + 5x + 3) = 4 - \log_{(2x+3)}(x^2 + 2x + 1) \text{ vaut } \underline{\hspace{2cm}}.$$

002 EXERCICE

Soit a, b, c trois réels positifs distincts tels que $(2a)^{\log_e a} = (bc)^{\log_e b}$ et $b^{\log_e 2} = a^{\log_e c}$.

Alors, $6a + 5bc$ vaut $\underline{\hspace{2cm}}$.

003 EXERCICE

Soit $S = \{\alpha : \log_2(9^{2\alpha-4} + 13) - \log_2(\frac{5}{2} \cdot 3^{2\alpha-4} + 1) = 2\}$. La valeur maximale de β pour laquelle l'équation $x^2 - 2\left(\sum_{\alpha \in S} \alpha\right)^2 x + \sum_{\alpha \in S} (\alpha + 1)^2 \beta = 0$ admet des racines réelles, vaut $\underline{\hspace{2cm}}$.

004 EXERCICE

Le nombre de solutions de l'équation

$$\log_{(x+1)}(2x^2 + 7x + 5) + \log_{(2x+5)}(x+1)^2 - 4 = 0, x > 0, \text{ vaut :}$$

005 EXERCICE

Le nombre de solutions de l'équation $\log_4(x-1) = \log_2(x-3)$ est $\underline{\hspace{2cm}}$.

006 EXERCICE

Le nombre de solutions distinctes de l'équation

$$\log_{\frac{1}{2}} |\sin x| = 2 - \log_{\frac{1}{2}} |\cos x| \text{ dans l'intervalle } [0, 2\pi], \text{ est } \underline{\hspace{2cm}}.$$

007 EXERCICE

Soit $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \infty$ et

$\beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \infty$. La valeur de

$$(0.2)^{\log_{\sqrt{5}}(\alpha)} + (0.04)^{\log_5(\beta)} \text{ vaut :}$$

- (A) 4 (B) 5 (C) 8 (D) 25

008 EXERCICE

La somme des solutions réelles de l'équation

$$\log_{(x+3)}(6x^2 + 28x + 30) = 5 - 2\log_{(6x+10)}(x^2 + 6x + 9) \text{ vaut :}$$

- (A) 1 (B) 4 (C) 0 (D) 2

009 EXERCICE

Le produit des solutions de l'équation $e^{5(\log_e x)^2 + 3} = x^8, x > 0$, vaut :

- (A) e^2 (B) e (C) $e^{6/5}$ (D) $e^{8/5}$

Logarithmes

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

010

EXERCICE

Le nombre de solutions entières x de $\log_{(x+\frac{7}{2})} \left(\frac{x-7}{2x-3} \right)^2 \geq 0$ vaut :

(A) 8

(B) 7

(C) 5

(D) 6

011

EXERCICE

Si la solution de l'équation $\log_{\cos x} \cot x + 4 \log_{\sin x} \tan x = 1, x \in (0, \frac{\pi}{2})$, est $\sin^{-1} \left(\frac{\alpha + \sqrt{\beta}}{2} \right)$, où α, β sont entiers, alors $\alpha + \beta$ vaut :

(A) 3

(B) 6

(C) 4

(D) 5

Logarithmes

GRILLE DES RÉPONSES

Les réponses courtes de la source sont regroupées ci-dessous.

Les corrections détaillées concernent les exercices sélectionnés dans la dernière partie.

001 2

002 Non unique*

003 25

004 1

005 1

006 8

007 C

008 C

009 D

010 D

011 C

* Exercice 2 : les conditions ne déterminent pas une réponse unique. Voir l'analyse.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 1

Deux bases, une seule inconnue

Le domaine impose $x > -1$ et $x \neq 0$. Posons $A = x+1$, $B = 2x+3$ et $t = \log_A B$. Comme $2x^2+5x+3 = AB$ et $x^2+2x+1 = A^2$, l'équation devient

$$1+t = 4 - \frac{2}{t} \iff (t-1)(t-2) = 0.$$

Si $t = 1$, alors $B = A$, soit $x = -2$, hors domaine. Si $t = 2$, alors $B = A^2$, soit $x^2 = 2$. Seul $x = \sqrt{2}$ convient.

Réponse : la somme des carrés vaut $\boxed{2}$.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 2

Une réponse qui n'est pas unique

Les deux conditions de l'énoncé sont vérifiées par

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\right),$$

qui donne $6a + 5bc = 8$. Mais elles le sont également par

$$(a, b, c) = \left(3, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right),$$

qui donne $6a + 5bc = 18 + 5/6 = 113/6$. Pour le vérifier, prendre le logarithme des deux égalités : on obtient

$$\ln(2a) \ln a = \ln(bc) \ln b, \quad \ln 2 \ln b = \ln a \ln c.$$

Conclusion : les données ne déterminent pas une valeur unique. La réponse 8 de la source est seulement un exemple admissible.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 3

Un ensemble, puis un discriminant

Posons $u = 3^{2\alpha-4} > 0$. L'égalité des logarithmes donne

$$\frac{u^2 + 13}{(5/2)u + 1} = 4, \quad u^2 - 10u + 9 = 0.$$

Ainsi $u = 1$ ou $u = 9$, d'où $S = \{2, 3\}$. On calcule

$$\sum_{\alpha \in S} \alpha = 5, \quad \sum_{\alpha \in S} (\alpha + 1)^2 = 25.$$

Le trinôme est donc $x^2 - 50x + 25\beta$. Il a des racines réelles si $2500 - 100\beta \geq 0$.

Réponse : $\boxed{\beta_{\max} = 25}$.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 4

Reprendre la substitution réciproque

Pour $x > 0$, les bases $x + 1$ et $2x + 5$ sont supérieures à 1. Posons $t = \log_{x+1}(2x + 5)$. Comme

$$2x^2 + 7x + 5 = (x + 1)(2x + 5),$$

on obtient $1 + t + 2/t - 4 = 0$, donc $t = 1$ ou $t = 2$. Le premier cas donne $x = -4$, exclu. Le second donne $2x + 5 = (x + 1)^2$, donc $x = \pm 2$.

La condition $x > 0$ ne laisse que $x = 2$.

Réponse : $\boxed{1}$ solution.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 5

Une base commune suffit

Le domaine est $x > 3$. Comme $\log_4(x-1) = \frac{1}{2} \log_2(x-1)$, l'équation équivaut à

$$\log_2(x-1) = \log_2((x-3)^2).$$

Le logarithme étant injectif, $x-1 = (x-3)^2$, soit

$$x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5) = 0.$$

On élimine $x = 2$, qui n'appartient pas au domaine.

Réponse : 1 solution, $x = 5$.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 6

Passer au produit des sinus

Les logarithmes exigent $\sin x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$. En regroupant les logarithmes de base $1/2$:

$$\log_{1/2}(|\sin x \cos x|) = 2.$$

Il vient $|\sin x \cos x| = 1/4$, donc $|\sin 2x| = 1/2$. Lorsque x parcourt $[0, 2\pi]$, $2x$ parcourt $[0, 4\pi]$: il y a quatre solutions par période, donc huit au total. Toutes respectent le domaine.

Réponse : 8.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 7

Calculer d'abord les deux sommes

Les suites géométriques donnent

$$\alpha = \frac{1/4}{1 - 1/2} = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}.$$

Comme $0,2 = 1/5$ et $0,04 = 1/25$, on utilise $a^{\log_b u} = u^{\log_b a}$:

$$(0,2)^{\log_{\sqrt{5}} \alpha} = \alpha^{-2} = 4,$$

$$(0,04)^{\log_5 \beta} = \beta^{-2} = 4.$$

Réponse : 8, proposition C.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 8

Une factorisation cachée

Posons $A = x + 3$, $B = 6x + 10$ et $t = \log_A B$, sur le domaine de l'équation. Puisque $6x^2 + 28x + 30 = AB$, on obtient

$$1 + t = 5 - \frac{4}{t}, \quad (t - 2)^2 = 0.$$

Donc $B = A^2$, soit $6x + 10 = (x + 3)^2$, d'où $x = \pm 1$. Les deux valeurs vérifient les conditions sur les bases et les arguments.

Réponse : leur somme vaut 0, proposition C.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 9

Le logarithme transforme les exposants

Comme $x > 0$, posons $u = \ln x$. L'équation devient

$$5u^2 + 3 = 8u, \quad (5u - 3)(u - 1) = 0.$$

Ainsi $u = 3/5$ ou $u = 1$, donc $x = e^{3/5}$ ou $x = e$. On demande leur produit, pas leur somme :

$$e^{3/5} \cdot e = e^{8/5}.$$

Réponse : $\boxed{e^{8/5}}$, proposition D.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 10

Distinguer les bases inférieures à un

Pour x entier, le domaine impose $x \geq -3$, avec $x \neq 7$. Si $x = -3$, la base vaut $1/2$ et l'argument $100/81 > 1$: le logarithme est négatif, donc ce cas est exclu. Pour $x \geq -2$, la base dépasse 1 ; il faut

$$\left| \frac{x-7}{2x-3} \right| \geq 1 \iff -3x^2 - 2x + 40 \geq 0.$$

On obtient $-4 \leq x \leq 10/3$. Avec le domaine, les entiers admis sont $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Réponse : $\boxed{6}$, proposition D.

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 11

Une substitution entre sinus et cosinus

Sur $]0, \pi/2[$, posons $t = \ln(\sin x)/\ln(\cos x) > 0$. Les deux logarithmes deviennent $1 - t$ et $1 - 1/t$. Ainsi

$$1 - t + 4 \left(1 - \frac{1}{t} \right) = 1 \iff (t - 2)^2 = 0.$$

Donc $\sin x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. En posant $s = \sin x > 0$, on trouve

$$s = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Réponse : $\alpha = -1$, $\beta = 5$, donc $\boxed{\alpha + \beta = 4}$ (C).