

COLLECTION ENTRAÎNEMENT • MATHÉMATIQUES

Matrices et déterminants

Méthodes, exercices et corrections guidées

376

problèmes pour approfondir et progresser

Calcul matriciel, systèmes linéaires et déterminants : des outils pour passer de la technique à la preuve.

Méthodes 2-3 Exercices 4-71

Réponses 72 Corrections guidées 75-77

NIVEAU LYCÉE AVANCÉ • APPROFONDISSEMENT

Édition française • Énoncés conservés et reformulés

FICHE MÉTHODE / 01

Choisir la bonne opération

Déterminant et inversibilité

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Pour deux matrices carrées de même ordre :

$$\det(AB) = \det A \det B, \quad \det(A^T) = \det A.$$

Pour A d'ordre n : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Opérations sur les lignes

Échanger deux lignes change le signe du déterminant. Multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ . Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ne change pas le déterminant.

Comatrice transposée

La notation $\text{adj}(A)$ désigne l'adjointe classique, c'est-à-dire la transposée de la matrice des cofacteurs :

$$A \text{adj}(A) = \det(A)I.$$

Si A est inversible : $A^{-1} = \text{adj}(A) / \det(A)$.

Un exemple sans développement

Pour une matrice triangulaire, le déterminant est le produit des coefficients diagonaux. Chercher d'abord à créer des zéros par opérations sur les lignes.

Ne pas confondre

En général, $AB \neq BA$, $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ et $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$. La commutation doit être justifiée.

FICHE MÉTHODE / 02

Systèmes et puissances

Un système $AX = B$

Si $\det A \neq 0$, il possède une solution unique. Si $\det A = 0$, il faut étudier la compatibilité : il peut n'avoir aucune solution ou en avoir une infinité. Un système homogène $AX = 0$ a une solution non nulle exactement lorsque $\det A = 0$.

Repérer une dépendance

Si une ligne des coefficients est une combinaison d'autres lignes, le second membre doit vérifier la même combinaison. Cette condition est nécessaire ; vérifier ensuite le rang pour conclure.

Une puissance très élevée peut être simple

Si $A = I + N$ et $N^3 = 0$, le binôme donne exactement

$$A^m = I + mN + \binom{m}{2}N^2.$$

La formule s'applique car I et N commutent. Tous les termes suivants s'annulent.

Linéarité du déterminant

Le déterminant est linéaire par rapport à une ligne, les autres lignes restant fixes. On peut ainsi réunir une somme de déterminants qui ne diffèrent que par une même ligne ou colonne.

Conventions

La transposée peut être notée A^T ou A' . La matrice identité est notée I . Les réponses de la grille sont celles de la source ; les six corrections guidées montrent des stratégies réutilisables.

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

001 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires :

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 5z = 10$$

$$2x + 3y + \lambda z = \mu$$

admet une infinité de solutions, alors la valeur de $\lambda + \mu$ vaut :

- (A) 12 (B) 16 (C) 22 (D) 28

002 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5\alpha & 0 \\ 0 & 4\alpha & -2\alpha \end{bmatrix} + \text{adj}(A)$. Si $\det(B) = 66$, alors $\det(\text{adj}(A))$ vaut :

- (A) 289 (B) 361 (C) 441 (D) 529

003 EXERCICE

La somme des valeurs possibles de $\theta \in [0, 2\pi]$, pour lesquelles le système d'équations :

$$x \cos 3\theta - 8y - 12z = 0$$

$$x \cos 2\theta + 3y + 3z = 0$$

$$x + y + 3z = 0$$

admet une solution non nulle, vaut :

- (A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π

004 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = [b_{ij}], 1 \leq i, j \leq 3$. Si $B = A^{99} - I$, alors la valeur de $\frac{b_{31} - b_{21}}{b_{32}}$ vaut :

- (A) 99 (B) 199 (C) 149 (D) 159

005 EXERCICE

Si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ est défini par

$$f(n) = \begin{vmatrix} n & -1 & -5 \\ -2n^2 & 3(2k+1) & 2k+1 \\ -3n^3 & 3k(2k+1) & 3k(k+2)+1 \end{vmatrix}, k \in \mathbb{N},$$

et $\sum_{n=1}^k f(n) = 98$, alors k vaut :

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

006 EXERCICE

Soit M matrice 3×3 telle que $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \text{ alors } x + y + z \text{ vaut :}$$

- (A) 4 (B) 5 (C) 7 (D) 11

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

007 EXERCICE

On note A matrice 3×3 telle que

$$A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, A^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ et } A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si $\det(A) = 1$, alors $\det(\operatorname{adj}(A^2 + A))$ vaut :

- (A) 16 (B) 25 (C) 49 (D) 64

008 EXERCICE

Considérons le système d'équations linéaires en x, y, z :

$$x + 2y + tz = 0$$

$$6x + y + 5tz = 0$$

$$3x + t^2y + f(t)z = 0$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable. Si ce système a une infinité de solutions pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors f

- (A) est une fonction constante (B) est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
(C) est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (D) a deux points critiques

009 EXERCICE

Si le système d'équations :

$$x + y + z = 5$$

$$x + 2y + 3z = 9$$

$$x + 3y + \lambda z = \mu$$

admet une infinité de solutions, alors la valeur de $\lambda + \mu$ vaut :

- (A) 16 (B) 18 (C) 19 (D) 21

010 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & -2 & 8 \\ 3 & 8 & -7 \end{bmatrix}$ et $\det(A - \alpha I) = 0$, où α est un réel. Si la plus grande valeur possible

de α est p , alors le cercle $(x - p)^2 + (y - 2p)^2 = 320$, rencontre les axes de coordonnées en

- (A) 1 point (B) 2 points (C) 3 points (D) 4 points

011 EXERCICE

Soit $S = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ et } A^2 - 4A + 3I = 0 \right\}$ un ensemble de 2×2 matrices.

Alors le nombre de matrices de S , dont la somme des éléments diagonaux vaut 4, vaut :

- (A) 20 (B) 17 (C) 21 (D) 19

012 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$. Alors la somme des éléments de la matrice $\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(2(\operatorname{adj} A)^{-1}))$ vaut :

- (A) 3 (B) 4 (C) -4 (D) -3

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

013 EXERCICE

Si le système d'équations

$$x + 5y + 6z = 4$$

$$2x + 3y + 4z = 7$$

$$x + 6y + az = b$$

admet une infinité de solutions, alors le point (a, b) appartient à la droite

- (A) $y - x = 3$ (B) $x - y = 3$ (C) $x + y = 11$ (D) $x + y = 12$

014 EXERCICE

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que le système d'équations linéaires

$$x + 2y + z = 5$$

$$2x + y + \alpha z = 5$$

$$8x + 4y + \beta z = 18$$

n'a aucune solution. Alors $\frac{\beta}{\alpha}$ vaut :

- (A) -4 (B) 4 (C) 8 (D) -8

015 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ \beta & 2 \end{bmatrix}$. Si $A^2 - 4A + I = O$ et $B^2 - 5B - 6I = O$, alors parmi les deux affirmations :

$$(S1) : [(B - A)(B + A)]^T = \begin{bmatrix} 13 & 15 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

et

$$(S2) : \det(\text{adj}(A + B)) = -5$$

- (A) seule (S1) est vraie (B) seule (S2) est vraie
(C) les deux (S1) et (S2) sont vraies (D) les deux (S1) et (S2) sont fausses

016 EXERCICE

Soit A, B et C trois 2×2 matrices à coefficients réels telles que $B = (I + A)^{-1}$ et $A + C = I$.

$$\text{Si } BC = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } CB \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -6 \end{bmatrix}, \text{ alors } x_1 + x_2 \text{ est}$$

- (A) 4 (B) 2 (C) 0 (D) -2

017 EXERCICE

Soit $P = [p_{ij}]$ et $Q = [q_{ij}]$ deux matrices carrées d'ordre 3 tels que $q_{ij} = 2^{(i+j-1)} p_{ij}$ et $\det(Q) = 2^{10}$. La valeur de $\det(\text{adj}(\text{adj } P))$ est :

- (A) 81 (B) 16 (C) 124 (D) 32

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

018 EXERCICE

Soit $f(x) = \int \frac{7x^{10} + 9x^8}{(1+x^2+2x^9)^2} dx, x > 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{4}$.

Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & f'(1) & 1 \\ \alpha^2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \text{adj}(\text{adj } A)$ tel que $|B| = 81$, alors α^2 vaut

- (A) 2 (B) 4 (C) 3 (D) 1

019 EXERCICE

Le système d'équations linéaires

$$x + y + z = 6$$

$$2x + 5y + az = 36$$

$$x + 2y + 3z = b$$

admet :

- (A) une solution unique pour $a = 8$ et $b = 16$
 (B) une infinité de solutions pour $a = 8$ et $b = 14$
 (C) une infinité de solutions pour $a = 8$ et $b = 16$
 (D) une solution unique pour $a = 8$ et $b = 14$

020 EXERCICE

Parmi les affirmations :

I : Si $\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & 1 & \cos \gamma \\ \cos \beta & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & 0 & \cos \gamma \\ \cos \beta & \cos \gamma & 0 \end{vmatrix}$, alors $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{3}{2}$, et

II : Si $\begin{vmatrix} x^2 + x & x + 1 & x - 2 \\ 2x^2 + 3x - 1 & 3x & 3x - 3 \\ x^2 + 2x + 3 & 2x - 1 & 2x - 1 \end{vmatrix} = px + q$, alors $p^2 = 196q^2$,

- (A) les deux sont vraies (B) les deux sont fausses (C) seule I est vraie (D) seule II est vraie

021 EXERCICE

Soit n le résultat d'un lancer d'un dé équilibré. Si la probabilité que le système

$$x - ny + z = 6$$

$$x + (n - 2)y + (n + 1)z = 8$$

$$(n - 1)y + z = 1$$

ait une solution unique vaut $\frac{k}{6}$, alors la somme de k et de toutes les valeurs possibles de n vaut :

- (A) 22 (B) 20 (C) 24 (D) 21

022 EXERCICE

Si $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ est une solution du système d'équations $AX = B$, où $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ et

$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, alors $|x + y + z|$ vaut :

- (A) 3 (B) 2 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 1

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

023 EXERCICE

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, alors le déterminant de la matrice $(A^{2025} - 3A^{2024} + A^{2023})$ est

- (A) 12 (B) 24 (C) 28 (D) 16

024 EXERCICE

Si le système d'équations

$$3x + y + 4z = 3$$

$$2x + \alpha y - z = -3$$

$$x + 2y + z = 4$$

n'a aucune solution, alors la valeur de α vaut :

- (A) 13 (B) 4 (C) 19 (D) 23

025 EXERCICE

Pour les matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -29 & 49 \\ -13 & 18 \end{bmatrix}$, si $(A^{15} + B) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, alors parmi les

propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- (A) $x = 16, y = 3$ (B) $x = 5, y = 7$ (C) $x = 11, y = 2$ (D) $x = 18, y = 11$

026 EXERCICE

Soit α une solution de $x^2 + x + 1 = 0$, et pour certains a et b dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} 4 & a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 16 & 13 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -14 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Si } \frac{4}{\alpha^4} + \frac{m}{\alpha^a} + \frac{n}{\alpha^b} = 3, \text{ alors } m + n \text{ vaut } \underline{\hspace{2cm}}$$

- (A) 11 (B) 3 (C) 8 (D) 7

027 EXERCICE

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 2 & 2+p & 2+p+q \\ 4 & 6+2p & 8+3p+2q \\ 6 & 12+3p & 20+6p+3q \end{bmatrix}.$$

Si $\det(\text{adj}(\text{adj}(3A))) = 2^m \cdot 3^n$, $m, n \in \mathbb{N}$, alors $m + n$ vaut

- (A) 22 (B) 20 (C) 24 (D) 26

028 EXERCICE

Supposons que le système d'équations

$$x + 5y - z = 1$$

$$4x + 3y - 3z = 7$$

$$24x + y + \lambda z = \mu$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ait une infinité de solutions. Le nombre de solutions de ce système,

si x, y, z sont entiers et vérifient $7 \leq x + y + z \leq 77$, vaut :

- (A) 4 (B) 5 (C) 3 (D) 6

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

029 EXERCICE

Soit A matrice 3×3 telle que $|\text{adj}(\text{adj}(\text{adj } A))| = 81$.

Si $S = \left\{ n \in \mathbb{Z} : (|\text{adj}(\text{adj } A)|)^{\frac{(n-1)^2}{2}} = |A|^{(3n^2-5n-4)} \right\}$, alors $\sum_{n \in S} |A|^{(n^2+n)}$ vaut :

- (A) 820 (B) 866 (C) 750 (D) 732

030 EXERCICE

Supposons que le système d'équations :

$$2x + 3y + 5z = 9$$

$$7x + 3y - 2z = 8$$

$$12x + 3y - (4 + \lambda)z = 16 - \mu$$

ait une infinité de solutions. Le rayon du cercle de centre (λ, μ) et tangent à la droite $4x = 3y$ vaut :

- (A) $\frac{7}{5}$ (B) $\frac{21}{5}$ (C) 7 (D) $\frac{17}{5}$

031 EXERCICE

Supposons que la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ vérifie $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$ pour $n \geq 3$. Alors la somme de tous les éléments de A^{50} vaut :

- (A) 44 (B) 39 (C) 52 (D) 53

032 EXERCICE

Soit A une matrice d'ordre 3×3 et $|A| = 5$. Si $|2 \text{adj}(3A \text{adj}(2A))| = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, alors $\alpha + \beta + \gamma$ vaut

- (A) 26 (B) 27 (C) 25 (D) 28

033 EXERCICE

Si le système d'équations

$$2x + \lambda y + 3z = 5$$

$$3x + 2y - z = 7$$

$$4x + 5y + \mu z = 9$$

admet une infinité de solutions, alors $(\lambda^2 + \mu^2)$ vaut :

- (A) 30 (B) 26 (C) 22 (D) 18

034 EXERCICE

Soit A une 3×3 matrice réelle telle que $A^2(A - 2I) - 4(A - I) = O$, où I et O sont l'identité et la matrice nulle, respectivement. Si $A^5 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$, où α, β , et γ sont des constantes réelles, alors $\alpha + \beta + \gamma$ vaut :

- (A) 76 (B) 12 (C) 4 (D) 20

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

035 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 6 & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha > 0$, telles que $\det(A) = 0$ et $\alpha + \beta = 1$. Si I désigne 2×2 matrice identité, alors la matrice $(I + A)^8$ vaut :

- (A) $\begin{bmatrix} 257 & -64 \\ 514 & -127 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 766 & -255 \\ 1530 & -509 \end{bmatrix}$
 (C) $\begin{bmatrix} 1025 & -511 \\ 2024 & -1024 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

036 EXERCICE

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A une matrice d'ordre 3×3 tels que $\det(A) = -4$ et $A + I = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 2 \end{bmatrix}$, où I est la matrice identité d'ordre 3×3 . Si $\det((a+1) \operatorname{adj}((a-1)A))$ est $2^m 3^n$, $m, n \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$, alors $m + n$ vaut :

- (A) 14 (B) 17 (C) 15 (D) 16

037 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 3x + y + \beta z &= 3 \\ 2x + \alpha y - z &= -3 \\ x + 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

admet une infinité de solutions, alors la valeur de $22\beta - 9\alpha$ vaut :

- (A) 31 (B) 37 (C) 43 (D) 49

038 EXERCICE

Soit $A = [a_{ij}]$ matrice 2×2 telle que $a_{ij} \in \{0, 1\}$ pour tout i et j . On note la variable aléatoire X qui désigne les valeurs possibles du déterminant de la matrice A . Alors la variance de X est :

- (A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$

039 EXERCICE

Soit α, β ($\alpha \neq \beta$) les valeurs de m , pour lesquelles les équations $x + y + z = 1$, $x + 2y + 4z = m$ et $x + 4y + 10z = m^2$ ont une infinité de solutions. Alors la valeur de $\sum_{n=1}^{10} (n^\alpha + n^\beta)$ vaut :

- (A) 3410 (B) 560 (C) 3080 (D) 440

040 EXERCICE

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice d'ordre 3×3 , avec $a_{ij} = (\sqrt{2})^{i+j}$. Si la somme des éléments de la troisième ligne de A^2 est $\alpha + \beta\sqrt{2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, alors $\alpha + \beta$ vaut :

- (A) 210 (B) 280 (C) 224 (D) 168

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

041 EXERCICE

Soit $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \log_5 128 & \log_4 5 \\ \log_5 8 & \log_4 25 \end{bmatrix}$. Si A_{ij} est le cofacteur de a_{ij} , $C_{ij} = \sum_{k=1}^2 a_{ik} A_{jk}$, $1 \leq i, j \leq 2$, et $C = [C_{ij}]$, alors $8|C|$ vaut :

- (A) 288 (B) 262 (C) 222 (D) 242

042 EXERCICE

Soit M et m respectivement les valeurs maximale et minimale de

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 + \sin^2 x & \cos^2 x & 4 \sin 4x \\ \sin^2 x & 1 + \cos^2 x & 4 \sin 4x \\ \sin^2 x & \cos^2 x & 1 + 4 \sin 4x \end{vmatrix}, x \in R$$

Alors $M^4 - m^4$ vaut :

- (A) 1280 (B) 1040 (C) 1215 (D) 1295

043 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, $\theta > 0$. Si $B = PAP^T$, $C = P^T B^{10} P$ et celle des éléments diagonaux de C est $\frac{m}{n}$, où $\gcd(m, n) = 1$, alors $m + n$ vaut :

- (A) 127 (B) 2049 (C) 258 (D) 65

044 EXERCICE

Pour certains a, b , on note $f(x) = \begin{vmatrix} a + \frac{\sin x}{x} & 1 & b \\ a & 1 + \frac{\sin x}{x} & b \\ a & 1 & b + \frac{\sin x}{x} \end{vmatrix}$, $x \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda + \mu a + \nu b$. Alors

$(\lambda + \mu + \nu)^2$ vaut :

- (A) 25 (B) 16 (C) 9 (D) 36

045 EXERCICE

Si le système d'équations

$$x + 2y - 3z = 2$$

$$2x + \lambda y + 5z = 5$$

$$14x + 3y + \mu z = 33$$

admet une infinité de solutions, alors $\lambda + \mu$ vaut :

- (A) 13 (B) 10 (C) 12 (D) 11

046 EXERCICE

Si le système d'équations

$$2x - y + z = 4$$

$$5x + \lambda y + 3z = 12$$

$$100x - 47y + \mu z = 212$$

admet une infinité de solutions, alors $\mu - 2\lambda$ vaut

- (A) 56 (B) 59 (C) 57 (D) 55

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

047 EXERCICE

Le système d'équations

$$x + y + z = 6,$$

$$x + 2y + 5z = 9,$$

$$x + 5y + \lambda z = \mu,$$

n'a aucune solution si

- (A) $\lambda = 17, \mu = 18$ (B) $\lambda = 17, \mu \neq 18$ (C) $\lambda = 15, \mu \neq 17$ (D) $\lambda \neq 17, \mu \neq 18$

048 EXERCICE

Soit $A = [a_{ij}]$ matrice 3×3 telle que

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ alors } a_{23}$$

vaut :

- (A) 2 (B) -1 (C) 1 (D) 0

049 EXERCICE

Si le système d'équations

$$(\lambda - 1)x + (\lambda - 4)y + \lambda z = 5$$

$$\lambda x + (\lambda - 1)y + (\lambda - 4)z = 7$$

$$(\lambda + 1)x + (\lambda + 2)y - (\lambda + 2)z = 9$$

admet une infinité de solutions, alors $\lambda^2 + \lambda$ vaut

- (A) 20 (B) 10 (C) 6 (D) 12

050 EXERCICE

Si A, B , and $(\text{adj}(A^{-1}) + \text{adj}(B^{-1}))$ sont des matrices inversibles de même ordre, alors l'inverse de $A(\text{adj}(A^{-1}) + \text{adj}(B^{-1}))^{-1}B$, vaut

- (A) $\frac{AB^{-1}}{|A|} + \frac{BA^{-1}}{|B|}$
 (B) $\text{adj}(B^{-1}) + \text{adj}(A^{-1})$
 (C) $AB^{-1} + A^{-1}B$
 (D) $\frac{1}{|AB|}(\text{adj}(B) + \text{adj}(A))$

051 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires :

$$x + y + 2z = 6$$

$$2x + 3y + az = a + 1$$

$$-x - 3y + bz = 2b$$

où $a, b \in \mathbf{R}$, admet une infinité de solutions, alors $7a + 3b$ vaut :

- (A) 12 (B) 9 (C) 22 (D) 16

052 EXERCICE

Pour a 3×3 matrice M , on note $\text{trace}(M)$ la somme des éléments diagonaux de M . On note A une 3×3 matrice telle que $|A| = \frac{1}{2}$ et $\text{trace}(A) = 3$. Si $B = \text{adj}(\text{adj}(2A))$, alors la valeur de $|B| + \text{trace}(B)$ vaut :

- (A) 56 (B) 132 (C) 174 (D) 280

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

053

EXERCICE

Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ et A matrice 2×2 telle que $AB^{-1} = A^{-1}$. Si $BCB^{-1} = A$ et $C^4 + \alpha C^2 + \beta I = O$, alors $2\beta - \alpha$ vaut

(A) 16

(B) 10

(C) 8

(D) 2

054

EXERCICE

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si le système d'équations

$$3x + 5y + \lambda z = 3$$

$$7x + 11y - 9z = 2$$

$$97x + 155y - 189z = \mu$$

admet une infinité de solutions, alors $\mu + 2\lambda$ vaut :

(A) 24

(B) 25

(C) 27

(D) 22

055

EXERCICE

Si $\alpha \neq a, \beta \neq b, \gamma \neq c$ et $\begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ a & \beta & c \\ a & b & \gamma \end{vmatrix} = 0$, alors $\frac{a}{\alpha-a} + \frac{b}{\beta-b} + \frac{\gamma}{\gamma-c}$ vaut :

(A) 2

(B) 3

(C) 1

(D) 0

056

EXERCICE

Si le système d'équations $x + 4y - z = \lambda, 7x + 9y + \mu z = -3, 5x + y + 2z = -1$ admet une infinité de solutions, alors $(2\mu + 3\lambda)$ vaut :

(A) -2

(B) 2

(C) 3

(D) -3

057

EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & b \end{bmatrix}$. Si $A^3 = 4A^2 - A - 21I$, où I est la matrice identité d'ordre 3×3 , alors

$2a + 3b$ vaut

(A) -10

(B) -12

(C) -13

(D) -9

058

EXERCICE

§ A est une matrice carrée d'ordre 3 tels que $\det(A) = 3$ et

$\det(\text{adj}(-4 \text{adj}(-3 \text{adj}(3 \text{adj}((2A)^{-1})))))) = 2^m 3^n$, alors $m + 2n$ vaut :

(A) 2

(B) 4

(C) 3

(D) 6

059

EXERCICE

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et a entier naturel n , soit $A_r = \begin{vmatrix} r & 1 & \frac{n^2}{2} + \alpha \\ 2r & 2 & n^2 - \beta \\ 3r - 2 & 3 & \frac{n(3n-1)}{2} \end{vmatrix}$. Alors $2A_{10} - A_8$ est

(A) $4\alpha + 2\beta$

(B) 0

(C) $2n$ (D) $2\alpha + 4\beta$

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

060 EXERCICE

Les valeurs de m, n , pour lesquelles le système d'équations

$$x + y + z = 4,$$

$$2x + 5y + 5z = 17,$$

$$x + 2y + mz = n$$

admet une infinité de solutions, vérifient l'équation :

(A) $m^2 + n^2 - m - n = 46$

(B) $m^2 + n^2 + mn = 68$

(C) $m^2 + n^2 - mn = 39$

(D) $m^2 + n^2 + m + n = 64$

061 EXERCICE

Soit $\alpha\beta \neq 0$ et $A = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & 3 \\ \alpha & \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha & 2\alpha \end{bmatrix}$. Si $B = \begin{bmatrix} 3\alpha & -9 & 3\alpha \\ -\alpha & 7 & -2\alpha \\ -2\alpha & 5 & -2\beta \end{bmatrix}$ est la matrice des cofacteurs de la

éléments de A , alors $\det(AB)$ vaut :

(A) 64

(B) 343

(C) 125

(D) 216

062 EXERCICE

On note A et B deux matrices carrées d'ordre 3 tels que $|A| = 3$ et $|B| = 2$. Alors

$|A^T A (\text{adj}(2A))^{-1} (\text{adj}(4B)) (\text{adj}(AB))^{-1} A A^T|$ vaut :

(A) 32

(B) 81

(C) 64

(D) 108

063 EXERCICE

Si le système d'équations

$$11x + y + \lambda z = -5$$

$$2x + 3y + 5z = 3$$

$$8x - 19y - 39z = \mu$$

admet une infinité de solutions, alors $\lambda^4 - \mu$ vaut :

(A) 51

(B) 45

(C) 47

(D) 49

064 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = I + \text{adj}(A) + (\text{adj } A)^2 + \dots + (\text{adj } A)^{10}$. Alors, la somme de tous les éléments de la matrice B est :

(A) -110

(B) 22

(C) -124

(D) -88

065 EXERCICE

Soit $\alpha \in (0, \infty)$ et $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Si $\det(\text{adj}(2A - A^T) \cdot \text{adj}(A - 2A^T)) = 2^8$, alors $(\det(A))^2$ est

égal à :

(A) 16

(B) 36

(C) 49

(D) 1

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

066 EXERCICE

Si le système d'équations

$$x + (\sqrt{2} \sin \alpha)y + (\sqrt{2} \cos \alpha)z = 0$$

$$x + (\cos \alpha)y + (\sin \alpha)z = 0$$

$$x + (\sin \alpha)y - (\cos \alpha)z = 0$$

admet une solution non nulle, alors $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ vaut :

(A) $\frac{5\pi}{24}$

(B) $\frac{11\pi}{24}$

(C) $\frac{7\pi}{24}$

(D) $\frac{3\pi}{4}$

067 EXERCICE

Supposons que le système d'équations $x + 2y + 3z = 5$, $2x + 3y + z = 9$, $4x + 3y + \lambda z = \mu$ ont une infinité de solutions. Alors $\lambda + 2\mu$ vaut :

(A) 22

(B) 17

(C) 15

(D) 28

068 EXERCICE

Si $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = ABA^T$ et $X = A^T C^2 A$, alors $\det X$ vaut :

(A) 243

(B) 729

(C) 27

(D) 891

069 EXERCICE

Si le système d'équations

$$2x + 3y - z = 5$$

$$x + \alpha y + 3z = -4$$

$$3x - y + \beta z = 7$$

admet une infinité de solutions, alors $13\alpha\beta$ vaut :

(A) 1110

(B) 1120

(C) 1210

(D) 1220

070 EXERCICE

Soit A une 3×3 matrice réelle telle que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, le système $(A - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ admet :

(A) exactement deux solutions

(B) une infinité de solutions

(C) une solution unique

(D) aucune solution

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

071 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$x - 2y + z = -4$$

$$2x + \alpha y + 3z = 5$$

$$3x - y + \beta z = 3$$

admet une infinité de solutions, alors $12\alpha + 13\beta$ vaut

- (A) 60 (B) 54 (C) 64 (D) 58

072 EXERCICE

Soit $R = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ une matrice non nulle 3×3 , où

$x \sin \theta = y \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = z \sin \left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \neq 0, \theta \in (0, 2\pi)$. Pour une matrice carrée M , on note $\text{trace}(M)$ qui désigne la somme des éléments diagonaux de M . Alors, parmi les affirmations :

(I) $\text{Trace}(R) = 0$

(II) Si $\text{trace}(\text{adj}(\text{adj}(R))) = 0$, alors R possède exactement un coefficient non nul.

(A) Seule (I) est vraie

(B) Seule (II) est vraie

(C) Les affirmations (I) et (II) sont vraies

(D) Ni (I) ni (II) n'est vraie

073 EXERCICE

Considérons le système d'équations linéaires $x + y + z = 5, x + 2y + \lambda^2 z = 9, x + 3y + \lambda z = \mu$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Laquelle des affirmations suivantes est FAUSSE ?

(A) Le système est compatible si $\lambda \neq 1$ et $\mu = 13$

(B) Le système est incompatible si $\lambda = 1$ et $\mu \neq 13$

(C) Le système a une solution unique si $\lambda \neq 1$ et $\mu \neq 13$

(D) Le système a une infinité de solutions si $\lambda = 1$ et $\mu = 13$

074 EXERCICE

Considérons le système d'équations linéaires

$x + y + z = 4\mu, x + 2y + 2\lambda z = 10\mu, x + 3y + 4\lambda^2 z = \mu^2 + 15$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Laquelle des affirmations suivantes est FAUSSE ?

(A) Le système a une solution unique si $\lambda \neq \frac{1}{2}$ et $\mu \neq 1, 15$

(B) Le système a une infinité de solutions si $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = 15$

(C) Le système est compatible si $\lambda \neq \frac{1}{2}$

(D) Le système est incompatible si $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu \neq 1$

075 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 11 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. La somme des facteurs premiers de $|P^{-1}AP - 2I|$ vaut

- (A) 66 (B) 27 (C) 23 (D) 26

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

076 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$ et $|2A|^3 = 2^{21}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Alors la valeur de α est

- (A) 9 (B) 17 (C) 3 (D) 5

077 EXERCICE

Soit A une matrice carrée telle que $AA^T = I$. Alors $\frac{1}{2}A \left[(A + A^T)^2 + (A - A^T)^2 \right]$ vaut

- (A) $A^2 + A^T$ (B) $A^3 + I$
(C) $A^3 + A^T$ (D) $A^2 + I$

078 EXERCICE

Les valeurs de α , pour laquelle $\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \alpha + \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} & \alpha + \frac{1}{3} \\ 2\alpha + 3 & 3\alpha + 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, appartiennent à l'intervalle

- (A) $(-2, 1)$ (B) $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$
(C) $(-3, 0)$ (D) $(0, 3)$

079 EXERCICE

Considérons la matrice $f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Voici deux affirmations :

affirmation I : $f(-x)$ est l'inverse de la matrice $f(x)$.

Affirmation II : $f(x)f(y) = f(x+y)$.

À partir de ces affirmations, choisir la réponse correcte parmi les propositions suivantes :

- (A) L'affirmation I est fausse, mais l'affirmation II est vraie
(B) L'affirmation I et l'affirmation II sont fausses
(C) L'affirmation I et l'affirmation II sont vraies
(D) L'affirmation I est vraie, mais l'affirmation II est fausse

080 EXERCICE

Si le système d'équations

$$2x + y - z = 5$$

$$2x - 5y + \lambda z = \mu$$

$$x + 2y - 5z = 7$$

admet une infinité de solutions, alors $(\lambda + \mu)^2 + (\lambda - \mu)^2$ vaut

- (A) 916 (B) 912 (C) 920 (D) 904

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

081 EXERCICE

Pour le système d'équations linéaires

$$2x + 4y + 2az = b$$

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$2x - 5y + 2z = 8$$

quelle proposition est FAUSSE ?

(A) Il a une infinité de solutions si $a = 3, b = 8$

(B) Il a une infinité de solutions si $a = 3, b = 6$

(C) Il a une solution unique si $a = b = 8$

(D) Il a une solution unique si $a = b = 6$

082 EXERCICE

Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \alpha & 4 \end{bmatrix}$, $\alpha > 2$ l'adjointe classique d'une matrice A et $|A| = 2$. Alors $\begin{bmatrix} \alpha & -2\alpha & \alpha \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ est égal à :

(A) 32

(B) -16

(C) 0

(D) 16

083 EXERCICE

Le nombre de matrices symétriques d'ordre 3, dont tous les coefficients appartiennent à l'ensemble

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ vaut :

(A) 10^9

(B) 9^{10}

(C) 10^6

(D) 6^{10}

084 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{51} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, alors la somme des éléments de la matrice $\sum_{n=1}^{50} B^n$ vaut

(A) 50

(B) 75

(C) 100

(D) 125

085 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$7x + 11y + \alpha z = 13$$

$$5x + 4y + 7z = \beta$$

$$175x + 194y + 57z = 361$$

admet une infinité de solutions, alors $\alpha + \beta + 2$ vaut :

(A) 6

(B) 4

(C) 5

(D) 3

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

086 EXERCICE

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x \\ x & x+\lambda & x \\ x & x & x+\lambda^2 \end{vmatrix} = \frac{9}{8}(103x+81), \text{ alors } \lambda, \frac{\lambda}{3} \text{ sont les racines de l'équation :}$$

- (A) $4x^2 + 24x - 27 = 0$ (B) $4x^2 - 24x + 27 = 0$
 (C) $4x^2 - 24x - 27 = 0$ (D) $4x^2 + 24x + 27 = 0$

087 EXERCICE

Soit A matrice 2×2 à coefficients réels telle que $A' = \alpha A + I$, où $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Si $\det(A^2 - A) = 4$, alors la somme des valeurs possibles de α vaut :

- (A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{5}{2}$

088 EXERCICE

Pour le système d'équations linéaires

$$2x - y + 3z = 5$$

$$3x + 2y - z = 7$$

$$4x + 5y + \alpha z = \beta,$$

quelle proposition est FAUSSE ?

- (A) Le système a une infinité de solutions pour $\alpha = -6$ et $\beta = 9$
 (B) Le système a une solution unique pour $\alpha \neq -5$ et $\beta = 8$
 (C) Le système est incompatible pour $\alpha = -5$ et $\beta = 8$
 (D) Le système a une infinité de solutions pour $\alpha = -5$ et $\beta = 9$

089 EXERCICE

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ \lambda & 10 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \alpha A + \beta I$ et $\alpha + \beta = -2$, alors $4\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2$ vaut :

- (A) 12 (B) 10 (C) 19 (D) 14

090 EXERCICE

Soit S l'ensemble des valeurs de $\theta \in [-\pi, \pi]$ pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$x + y + \sqrt{3}z = 0$$

$$-x + (\tan \theta)y + \sqrt{7}z = 0$$

$$x + y + (\tan \theta)z = 0$$

admet une solution non nulle. Alors $\frac{120}{\pi} \sum_{\theta \in S} \theta$ vaut :

- (A) 40 (B) 30 (C) 10 (D) 20

091 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Si $|\text{adj}(\text{adj}(\text{adj } 2A))| = (16)^n$, alors n vaut :

- (A) 9 (B) 8 (C) 10 (D) 12

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

092 EXERCICE

Soit $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $Q = PAP^T$. Si $P^T Q^{2007} P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors $2a + b - 3c - 4d$ égal à :

- (A) 2004 (B) 2006 (C) 2007 (D) 2005

093 EXERCICE

Soit P une matrice carrée telle que $P^2 = I - P$. Pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$, si $P^\alpha + P^\beta = \gamma I - 29P$ et $P^\alpha - P^\beta = \delta I - 13P$, alors $\alpha + \beta + \gamma - \delta$ vaut :

- (A) 18 (B) 22 (C) 24 (D) 40

094 EXERCICE

Pour le système d'équations

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + \alpha z = 10$$

$x + 3y + 5z = \beta$, laquelle des affirmations suivantes est FAUSSE ?

- (A) Le système a une solution unique pour $\alpha = 3, \beta \neq 14$.
 (B) Le système a une infinité de solutions pour $\alpha = 3, \beta = 14$.
 (C) Le système n'a aucune solution pour $\alpha = 3, \beta = 24$.
 (D) Le système a une solution unique pour $\alpha = -3, \beta = 14$.

095 EXERCICE

Si le système d'équations

$$x + y + az = b$$

$$2x + 5y + 2z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 3$$

admet une infinité de solutions, alors $2a + 3b$ vaut :

- (A) 28 (B) 25 (C) 20 (D) 23

096 EXERCICE

Soit $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, où $a_{ij} \neq 0$ pour tout i, j et $A^2 = I$. On note a la somme des éléments diagonaux de A et $b = |A|$. Alors $3a^2 + 4b^2$ vaut :

- (A) 4 (B) 3 (C) 14 (D) 7

097 EXERCICE

Pour le système d'équations linéaires $\alpha x + y + z = 1, x + \alpha y + z = 1, x + y + \alpha z = \beta$, laquelle des affirmations suivantes est FAUSSE ?

- (A) Il a une infinité de solutions si $\alpha = 1$ et $\beta = 1$
 (B) Il a une infinité de solutions si $\alpha = 2$ et $\beta = -1$
 (C) $x + y + z = \frac{3}{4}$ si $\alpha = 2$ et $\beta = 1$
 (D) Il n'a aucune solution si $\alpha = -2$ et $\beta = 1$

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

098 EXERCICE

Si $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$, alors :

- (A) $A^{30} - A^{25} = 2I$ (B) $A^{30} + A^{25} - A = I$ (C) $A^{30} = A^{25}$ (D) $A^{30} + A^{25} + A = I$

099 EXERCICE

Soit S désigne l'ensemble des valeurs réelles de λ telles que le système d'équations

$$\lambda x + y + z = 1$$

$$x + \lambda y + z = 1$$

$$x + y + \lambda z = 1$$

est incompatible, alors $\sum_{\lambda \in S} (|\lambda|^2 + |\lambda|)$ vaut

- (A) 12 (B) 2 (C) 4 (D) 6

100 EXERCICE

Soit $f(x) = \begin{vmatrix} 1 + \sin^2 x & \cos^2 x & \sin 2x \\ \sin^2 x & 1 + \cos^2 x & \sin 2x \\ \sin^2 x & \cos^2 x & 1 + \sin 2x \end{vmatrix}$, $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$. Si α et β sont respectivement les valeurs maximale et minimale de f , alors

- (A) $\alpha^2 - \beta^2 = 4\sqrt{3}$ (B) $\beta^2 - 2\sqrt{\alpha} = \frac{19}{4}$
 (C) $\beta^2 + 2\sqrt{\alpha} = \frac{19}{4}$ (D) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{9}{2}$

101 EXERCICE

Pour le système d'équations linéaires

$$x + y + z = 6$$

$$\alpha x + \beta y + 7z = 3$$

$$x + 2y + 3z = 14$$

quelle proposition est FAUSSE ?

- (A) Si $\alpha = \beta = 7$, alors le système n'a aucune solution
 (B) Pour tout point $(\alpha, \beta) \neq (7, 7)$ sur la droite $x - 2y + 7 = 0$, le système a une infinité de solutions
 (C) Il existe un unique point (α, β) sur la droite $x + 2y + 18 = 0$ pour lequel le système a une infinité de solutions
 (D) Si $\alpha = \beta$ et $\alpha \neq 7$, alors le système a une solution unique

102 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 12 & -3 \end{pmatrix}$. Alors la somme des éléments diagonaux de la matrice $(A + I)^{11}$ vaut :

- (A) 4094 (B) 2050 (C) 6144 (D) 4097

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

103

EXERCICE

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, supposons que le système d'équations linéaires

$$x - y + z = 5$$

$$2x + 2y + \alpha z = 8$$

$$3x - y + 4z = \beta$$

admette une infinité de solutions. Alors α et β sont les racines de :

(A) $x^2 + 18x + 56 = 0$ (B) $x^2 - 10x + 16 = 0$ (C) $x^2 + 14x + 24 = 0$ (D) $x^2 - 18x + 56 = 0$

104

EXERCICE

Supposons que le système d'équations linéaires

$$x + y + kz = 2$$

$$2x + 3y - z = 1$$

$$3x + 4y + 2z = k$$

ait une infinité de solutions. Alors le système

$$(k+1)x + (2k-1)y = 7$$

$$(2k+1)x + (k+5)y = 10$$

admet :

(A) une solution unique vérifiant $x - y = 1$

(B) une infinité de solutions

(C) aucune solution

(D) une solution unique vérifiant $x + y = 1$

105

EXERCICE

Soit α et β des réels. Considérons une 3×3 matrice A tels que $A^2 = 3A + \alpha I$. Si $A^4 = 21A + \beta I$, alors

(A) $\alpha = 1$

(B) $\alpha = 4$

(C) $\beta = 8$

(D) $\beta = -8$

106

EXERCICE

Considérons le système d'équations suivant

$$\alpha x + 2y + z = 1$$

$$2\alpha x + 3y + z = 1$$

$$3x + \alpha y + 2z = \beta$$

pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Laquelle des propositions suivantes est FAUSSE ?

(A) Il a une solution pour tout $\alpha \neq -1$ et $\beta = 2$

(B) Il n'a aucune solution si $\alpha = -1$ et $\beta \neq 2$

(C) Il n'a aucune solution pour $\alpha = -1$ et pour tout $\beta \in \mathbb{R}$

(D) Il n'a aucune solution pour $\alpha = 3$ et pour tout $\beta \neq 2$

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

107 EXERCICE

Soit A, B, C soit 3×3 matrices telles que A est symétrique et B et C sont antisymétriques. Considérons les affirmations

(S1) $A^{13} B^{26} - B^{26} A^{13}$ est symétrique

(S2) $A^{26} C^{13} - C^{13} A^{26}$ est symétrique

Alors,

(A) Seule S2 est vraie

(B) Seule S1 est vraie

(C) Les affirmations S1 et S2 sont fausses

(D) Les affirmations S1 et S2 sont vraies

108 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, où $i = \sqrt{-1}$. Si $M = A^T B A$, alors l'inverse de la matrice $A M^{2023} A^T$ est

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -2023i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2023i & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 2023i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2023i & 1 \end{bmatrix}$

109 EXERCICE

Soit S_1 et S_2 respectivement les ensembles des $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$ax + 2ay - 3az = 1$$

$$(2a + 1)x + (2a + 3)y + (a + 1)z = 2$$

$$(3a + 5)x + (a + 5)y + (a + 2)z = 3$$

a une solution unique et une infinité de solutions. Alors

(A) $n(S_1) = 2$ et S_2 est un ensemble infini

(B) $S_1 = \emptyset$ et $S_2 = \mathbb{R} - \{0\}$

(C) $S_1 = \mathbb{R} - \{0\}$ et $S_2 = \emptyset$

(D) S_1 est un ensemble infini et $n(S_2) = 2$

110 EXERCICE

Si le système d'équations

$$x + 2y + 3z = 3$$

$$4x + 3y - 4z = 4$$

$$8x + 4y - \lambda z = 9 + \mu$$

a une infinité de solutions, alors le couple (

λ, μ) vaut :

(A) $(\frac{72}{5}, \frac{21}{5})$

(B) $(-\frac{72}{5}, -\frac{21}{5})$

(C) $(-\frac{72}{5}, \frac{21}{5})$

(D) $(\frac{72}{5}, -\frac{21}{5})$

111 EXERCICE

Si A et B sont deux matrices non nulles $n \times n$ matrices telles que $A^2 + B = A^2 B$, alors :

(A) $A^2 B = I$

(B) $A^2 = I$ ou $B = I$

(C) $A^2 B = B A^2$

(D) $AB = I$

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

112

EXERCICE

Laquelle des matrices suivantes ne peut PAS être obtenue à partir de la matrice $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ par seule opération élémentaire sur les lignes ?

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

113

EXERCICE

Si le système d'équations

$$x + y + z = 6$$

$$2x + 5y + \alpha z = \beta$$

$$x + 2y + 3z = 14$$

admet une infinité de solutions, alors $\alpha + \beta$ vaut

(A) 8

(B) 36

(C) 44

(D) 48

114

EXERCICE

On note A et B deux 3×3 matrices réelles non nulles telles que AB soit nulle. Alors

(A) le système d'équations linéaires $AX = 0$ a une solution unique

(B) le système d'équations linéaires $AX = 0$ a une infinité de solutions

(C) B est une matrice inversible

(D) $\text{adj}(A)$ est une matrice inversible

115

EXERCICE

Soit A et B deux matrices quelconques 3×3 respectivement symétrique et antisymétrique. Laquelle des affirmations suivantes est FAUSSE ?

(A) $A^4 - B^4$ est une matrice symétrique

(B) $AB - BA$ est une matrice symétrique

(C) $B^5 - A^5$ est une matrice antisymétrique

(D) $AB + BA$ est une matrice antisymétrique

116

EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$. On note $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha A^2 + \beta A = 2I$. Alors $\alpha + \beta$ vaut

(A) -10

(B) -6

(C) 6

(D) 10

117

EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 9^2 & -10^2 & 11^2 \\ 12^2 & 13^2 & -14^2 \\ -15^2 & 16^2 & 17^2 \end{bmatrix}$, alors la valeur de $A'BA$ est :

(A) 1224

(B) 1042

(C) 540

(D) 539

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

118 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires.

$$8x + y + 4z = -2$$

$$x + y + z = 0$$

$$\lambda x - 3y = \mu$$

a une infinité de solutions, alors la distance du point $(\lambda, \mu, -\frac{1}{2})$ au plan

$$8x + y + 4z + 2 = 0 \text{ vaut :}$$

- (A) $3\sqrt{5}$ (B) 4 (C) $\frac{26}{9}$ (D) $\frac{10}{3}$

119 EXERCICE

Le nombre de valeurs réelles de λ , telles que le système d'équations linéaires

$$2x - 3y + 5z = 9$$

$$x + 3y - z = -18$$

$$3x - y + (\lambda^2 - |\lambda|)z = 16$$

n'a aucune solution, vaut

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

120 EXERCICE

Le nombre de $\theta \in (0, 4\pi)$ pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$3(\sin 3\theta)x - y + z = 2$$

$$3(\cos 2\theta)x + 4y + 3z = 3$$

$$6x + 7y + 7z = 9$$

n'a aucune solution, vaut :

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

121 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \alpha \\ \alpha & 2 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors la valeur absolue de la somme des valeurs

de α pour lesquelles $\det(AB) = 0$ vaut :

- (A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 5

122 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$2x + y - z = 7$$

$$x - 3y + 2z = 1$$

$x + 4y + \delta z = k$, où $\delta, k \in \mathbb{R}$ admet une infinité de solutions, alors $\delta + k$ vaut :

- (A) -3 (B) 3 (C) 6 (D) 9

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

123 EXERCICE

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice carrée d'ordre 3 tels que $a_{ij} = 2^{j-i}$, pour tout $i, j = 1, 2, 3$. Alors, la matrice $A^2 + A^3 + \dots + A^{10}$ vaut :

- (A) $\left(\frac{3^{10}-3}{2}\right)A$ (B) $\left(\frac{3^{10}-1}{2}\right)A$
 (C) $\left(\frac{3^{10}+1}{2}\right)A$ (D) $\left(\frac{3^{10}+3}{2}\right)A$

124 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$2x + 3y - z = -2$$

$$x + y + z = 4$$

$$x - y + |\lambda|z = 4\lambda - 4$$

où, $\lambda \in \mathbb{R}$, n'a aucune solution, alors

- (A) $\lambda = 7$ (B) $\lambda = -7$ (C) $\lambda = 8$ (D) $\lambda^2 = 1$

125 EXERCICE

Supposons que le système d'équations linéaires

$$x + 2y + z = 2,$$

$$\alpha x + 3y - z = \alpha,$$

$$-\alpha x + y + 2z = -\alpha$$

soit incompatible. Alors α vaut :

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $-\frac{5}{2}$ (C) $\frac{7}{2}$ (D) $-\frac{7}{2}$

126 EXERCICE

Si le système d'équations

$$\alpha x + y + z = 5, x + 2y + 3z = 4, x + 3y + 5z = \beta$$

a une infinité de solutions, alors le couple (α, β) vaut :

- (A) $(1, -3)$ (B) $(-1, 3)$ (C) $(1, 3)$ (D) $(-1, -3)$

127 EXERCICE

Le couple (a, b) , pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$3x - 2y + z = b$$

$$5x - 8y + 9z = 3$$

$$2x + y + az = -1$$

n'a aucune solution, vaut :

- (A) $(3, \frac{1}{3})$ (B) $(-3, \frac{1}{3})$
 (C) $(-3, -\frac{1}{3})$ (D) $(3, -\frac{1}{3})$

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

128 EXERCICE

Le système d'équations

$$-kx + 3y - 14z = 25$$

$$-15x + 4y - kz = 3$$

$$-4x + y + 3z = 4$$

est compatible pour tous les k dans l'ensemble

- (A) $\mathbb{R}$ (B) $\mathbb{R} - \{-11, 13\}$ (C) $\mathbb{R} - \{13\}$ (D) $\mathbb{R} - \{-11, 11\}$

129 EXERCICE

On note A une 3×3 matrice réelle telle que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ et I est une matrice identité d'ordre 3, alors le système $(A - 2I)X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet :

- (A) aucune solution (B) une infinité de solutions
(C) une solution unique (D) exactement deux solutions

130 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Si M et N sont deux matrices définies par $M = \sum_{k=1}^{10} A^{2k}$ et $N = \sum_{k=1}^{10} A^{2k-1}$ alors MN^2 est :

- (A) a une matrice symétrique différente de l'identité
(B) a une matrice antisymétrique
(C) une matrice ni symétrique ni antisymétrique
(D) une matrice identité

131 EXERCICE

Supposons que le système d'équations linéaires

$$x + y + \alpha z = 2$$

$$3x + y + z = 4$$

$$x + 2z = 1$$

ont une solution unique (x^*, y^*, z^*) . Si $(\alpha, x^*), (y^*, \alpha)$ et $(x^*, -y^*)$ sont des points alignés, alors la somme des valeurs absolues des valeurs possibles de α est :

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

132 EXERCICE

Le nombre de valeurs de α pour lesquelles le système d'équations :

$$x + y + z = \alpha$$

$$\alpha x + 2\alpha y + 3z = -1$$

$$x + 3\alpha y + 5z = 4$$

est incompatible, vaut

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

133 EXERCICE

Considérons le système d'équations linéaires

$$-x + y + 2z = 0$$

$$3x - ay + 5z = 1$$

$$2x - 2y - az = 7$$

Soit S_1 l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ pour lesquels le système est incompatible et S_2 l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ pour lesquels le système a une infinité de solutions. Si $n(S_1)$ et $n(S_2)$ désigne le nombre d'éléments de S_1 et S_2 respectivement, alors

- (A) $n(S_1) = 2, n(S_2) = 2$ (B) $n(S_1) = 1, n(S_2) = 0$
 (C) $n(S_1) = 2, n(S_2) = 0$ (D) $n(S_1) = 0, n(S_2) = 2$

134 EXERCICE

§ $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, alors le système d'équations

$$x + (\cos \gamma)y + (\cos \beta)z = 0$$

$$(\cos \gamma)x + y + (\cos \alpha)z = 0$$

$$(\cos \beta)x + (\cos \alpha)y + z = 0$$

admet :

- (A) aucune solution (B) une infinité de solutions
 (C) exactement deux solutions (D) a une solution unique

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

135

EXERCICE

Si le système d'équations linéaires suivant

$$2x + y + z = 5$$

$$x - y + z = 3$$

$$x + y + az = b$$

n'a aucune solution, alors :

(A) $a = -\frac{1}{3}, b \neq \frac{7}{3}$

(B) $a \neq \frac{1}{3}, b = \frac{7}{3}$

(C) $a \neq -\frac{1}{3}, b = \frac{7}{3}$

(D) $a = \frac{1}{3}, b \neq \frac{7}{3}$

136

EXERCICE

Si $a_r = \cos \frac{2r\pi}{9} + i \sin \frac{2r\pi}{9}$, $r = 1, 2, 3, \dots, i = \sqrt{-1}$, alorsle déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}$ vaut :

(A) $a_2a_6 - a_4a_8$

(B) a_9

(C) $a_1a_9 - a_3a_7$

(D) a_5

137

EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} [x+1] & [x+2] & [x+3] \\ [x] & [x+3] & [x+3] \\ [x] & [x+2] & [x+4] \end{pmatrix}$, où $[t]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à t . Si $\det(A) = 192$, alors l'ensemble des valeurs de x est l'intervalle :

(A) $[68, 69)$

(B) $[62, 63)$

(C) $[65, 66)$

(D) $[60, 61)$

138

EXERCICE

Soit $[\lambda]$ le plus grand entier inférieur ou égal à λ . L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$x + y + z = 4,$$

$$3x + 2y + 5z = 3,$$

$$9x + 4y + (28 + [\lambda])z = [\lambda]$$
 admet une solution est :

(A) $\mathbb{R}$

(B) $(-\infty, -9) \cup (-9, \infty)$

(C) $[-9, -8)$

(D) $(-\infty, -9) \cup [-8, \infty)$

139

EXERCICE

Si la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ K & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $A(A^3 + 3I) = 2I$, alors la valeur de K vaut :

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) -1

(D) 1

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

140 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A^{2025} - A^{2020}$ vaut :

- (A) $A^6 - A$ (B) A^5 (C) $A^5 - A$ (D) A^6

141 EXERCICE

Soit $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Si le système d'équations linéaires

$$(1 + \cos^2 \theta)x + \sin^2 \theta y + 4 \sin 3 \theta z = 0$$

$$\cos^2 \theta x + (1 + \sin^2 \theta)y + 4 \sin 3 \theta z = 0$$

$$\cos^2 \theta x + \sin^2 \theta y + (1 + 4 \sin 3 \theta)z = 0$$

admet une solution non nulle, alors la valeur de θ vaut :

- (A) $\frac{4\pi}{9}$ (B) $\frac{7\pi}{18}$ (C) $\frac{\pi}{18}$ (D) $\frac{5\pi}{18}$

142 EXERCICE

Si $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $i = \sqrt{-1}$, et $Q = A^T B A$, alors l'inverse de la matrice $A Q^{2021} A^T$ vaut :

- (A) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -2021 \\ 2021 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$
 (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2021i & 1 \end{pmatrix}$
 (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2021i & 1 \end{pmatrix}$
 (D) $\begin{pmatrix} 1 & -2021i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

143 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Si $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, I est une 2×2 matrice identité, alors $4(\alpha - \beta)$ vaut :

- (A) 5 (B) $\frac{8}{3}$ (C) 2 (D) 4

144 EXERCICE

Le nombre de racines réelles distinctes

de $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \cos x \\ \cos x & \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 0$ dans l'intervalle $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ vaut :

- (A) 4 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

145

EXERCICE

Si $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, alors P^{50} vaut :

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 25 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 50 & 1 \end{bmatrix}$

146

EXERCICE

Les valeurs de a et b, pour lesquelles le système d'équations

$$2x + 3y + 6z = 8$$

$$x + 2y + az = 5$$

$$3x + 5y + 9z = b$$

n'a aucune solution sont :

(A) $a = 3, b \neq 13$

(B) $a \neq 3, b \neq 13$

(C) $a \neq 3, b = 3$

(D) $a = 3, b = 13$

147

EXERCICE

Les valeurs de λ et μ telles que le système d'équations $x + y + z = 6, 3x + 5y + 5z = 26,$

$x + 2y + \lambda z = \mu$ n'a aucune solution sont :

(A) $\lambda = 3, \mu = 5$

(B) $\lambda = 3, \mu \neq 10$

(C) $\lambda \neq 2, \mu = 10$

(D) $\lambda = 2, \mu \neq 10$

148

EXERCICE

On note $A = [a_{ij}]$ une matrice réelle d'ordre 3×3 , tels que $a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = 1$, pour $i = 1, 2, 3$. Alors, la somme de tous les coefficients de la matrice A^3 vaut :

(A) 2

(B) 1

(C) 3

(D) 9

149

EXERCICE

La valeur de $k \in \mathbb{R}$, pour lesquelles le système d'équations linéaires suivant

$$3x - y + 4z = 3,$$

$$x + 2y - 3z = -2$$

$$6x + 5y + kz = -3,$$

admet une infinité de solutions, est :

(A) 3

(B) -5

(C) 5

(D) -3

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

150 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ a & 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ s'écrire $P + Q$ où P est une matrice symétrique et Q est une matrice antisymétrique.

Si $\det(Q) = 9$, alors la valeur absolue de la somme des valeurs possibles du déterminant de P est égal à :

- (A) 36 (B) 24 (C) 45 (D) 18

151 EXERCICE

Supposons que le système d'équations linéaires

$$4x + \lambda y + 2z = 0$$

$$2x - y + z = 0$$

$$\mu x + 2y + 3z = 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

admet une solution non nulle. Quelle proposition est vraie ?

- (A) $\mu = 6, \lambda \in \mathbb{R}$ (B) $\lambda = 3, \mu \in \mathbb{R}$
 (C) $\mu = -6, \lambda \in \mathbb{R}$ (D) $\lambda = 2, \mu \in \mathbb{R}$

152 EXERCICE

Les solutions de l'équation
$$\begin{vmatrix} 1 + \sin^2 x & \sin^2 x & \sin^2 x \\ \cos^2 x & 1 + \cos^2 x & \cos^2 x \\ 4 \sin 2x & 4 \sin 2x & 1 + 4 \sin 2x \end{vmatrix} = 0, (0 < x < \pi), \text{ valent}$$

- (A) $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
 (C) $\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}$ (D) $\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$

153 EXERCICE

Soit α, β, γ les racines réelles de l'équation, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a, b \neq 0$). Si le système d'équations (en u, v, w) défini par $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, $\beta u + \gamma v + \alpha w = 0$; $\gamma u + \alpha v + \beta w = 0$ admet une solution non nulle, alors la valeur de $\frac{a^2}{b}$ est

- (A) 5 (B) 3 (C) 1 (D) 0

154 EXERCICE

Soit $A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ et $2A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Si $\text{Tr}(A)$ désigne la somme des éléments diagonaux

de la matrice A , alors $\text{Tr}(A) - \text{Tr}(B)$ vaut

- (A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) 3

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

155 EXERCICE

Si x, y, z sont en S.A. de raison

$d, x \neq 3d$, et le déterminant de la

matrice $\begin{bmatrix} 3 & 4\sqrt{2} & x \\ 4 & 5\sqrt{2} & y \\ 5 & k & z \end{bmatrix}$ est nul, alors la valeur de k^2 vaut :

- (A) 72 (B) 12 (C) 36 (D) 6

156 EXERCICE

Le système d'équations $kx + y + z = 1, x + ky + z = k$ et $x + y + zk = k^2$ n'a aucune solution si k est égal à :

- (A) 0 (B) -1 (C) -2 (D) 1

157 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}, i = \sqrt{-1}$. Alors, le système d'équations linéaires $A^8 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 64 \end{bmatrix}$ admet :

- (A) Exactement deux solutions (B) Une infinité de solutions
(C) A une solution unique (D) Aucune solution

158 EXERCICE

Considérons le système d'équations suivant :

$$x + 2y - 3z = a$$

$$2x + 6y - 11z = b$$

$$x - 2y + 7z = c,$$

où a, b et c sont des constantes réelles. Alors le système d'équations :

- (A) n'a aucune solution pour tout a, b et c
(B) admet une solution unique lorsque $5a = 2b + c$
(C) a une infinité de solutions lorsque $5a = 2b + c$
(D) admet une solution unique pour tout a, b et c

159 EXERCICE

On note A une matrice symétrique d'ordre 2 à coefficients entiers. Si la somme de ses éléments diagonaux A^2 est 1, alors le nombre de matrices possibles est :

- (A) 6 (B) 4 (C) 1 (D) 12

160 EXERCICE

La valeur de $\begin{vmatrix} (a+1)(a+2) & a+2 & 1 \\ (a+2)(a+3) & a+3 & 1 \\ (a+3)(a+4) & a+4 & 1 \end{vmatrix}$ vaut :

- (A) -2 (B) 0
(C) $(a+2)(a+3)(a+4)$ (D) $(a+1)(a+2)(a+3)$

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

161 EXERCICE

On note A matrice 3×3 avec $\det(A) = 4$. Soit R_i désigne la i^{e} ligne de A . Si une matrice B est obtenue en effectuant l'opération $R_2 \rightarrow 2R_2 + 5R_3$ sur $2A$, alors $\det(B)$ vaut :

- (A) 64 (B) 16 (C) 128 (D) 80

162 EXERCICE

Si, pour la matrice, $A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$, $AA^T = I_2$, alors la valeur de $\alpha^4 + \beta^4$ vaut :

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 4

163 EXERCICE

Le système d'équations linéaires suivant

$$2x + 3y + 2z = 9$$

$$3x + 2y + 2z = 9$$

$$x - y + 4z = 8$$

- (A) n'a aucune solution
 (B) admet solution (α, β, γ) vérifiant $\alpha + \beta^2 + \gamma^3 = 12$
 (C) admet une solution unique
 (D) a une infinité de solutions

164 EXERCICE

On note A et B soit 3×3 matrices réelles telles que A est symétrique et B est une matrice antisymétrique.

Alors le système d'équations linéaires $(A^2B^2 - B^2A^2)X = O$, où X est une 3×1 matrice colonne de inconnues et O est une 3×1 matrice nulle, admet :

- (A) aucune solution (B) exactement deux solutions
 (C) une infinité de solutions (D) a une solution unique

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

165

EXERCICE

Pour le système d'équations linéaires :

$$x - 2y = 1, x - y + kz = -2, ky + 4z = 6, k \in \mathbb{R},$$

considérons les affirmations suivantes :

(A) Le système a une solution unique si $k \neq 2, k \neq -2$.

(B) Le système a une solution unique si $k = -2$

(C) Le système a une solution unique si $k = 2$

(D) Le système n'a aucune solution si $k = 2$

(E) Le système a une infinité de solutions si $k \neq -2$.

Quelles affirmations sont vraies ?

(A) (B) et (E) seulement (B) (C) et (D) seulement (C) (A) et (E) seulement (D) (A) et (D) seulement

166

EXERCICE

Le système d'équations linéaires

$$3x - 2y - kz = 10$$

$$2x - 4y - 2z = 6$$

$$x + 2y - z = 5m$$

est incompatible si :

(A) $k \neq 3, m \in \mathbb{R}$

(B) $k = 3, m \neq \frac{4}{5}$

(C) $k = 3, m = \frac{4}{5}$

(D) $k \neq 3, m \neq \frac{4}{5}$

167

EXERCICE

Soit $\theta = \frac{\pi}{5}$ et $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.

Si $B = A + A^4$, alors $\det(B)$:

(A) appartient à $(1, 2)$

(B) appartient à $(2, 3)$.

(C) vaut zéro.

(D) vaut un.

168

EXERCICE

Les valeurs de λ et μ pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$x + y + z = 2$$

$$x + 2y + 3z = 5$$

$$x + 3y + \lambda z = \mu$$

a une infinité de solutions sont respectivement :

(A) 6 et 8

(B) 5 et 8

(C) 5 et 7

(D) 4 et 9

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

169 EXERCICE

Soit m et M respectivement les valeurs minimale et maximale de

$$\begin{vmatrix} \cos^2 x & 1 + \sin^2 x & \sin 2x \\ 1 + \cos^2 x & \sin^2 x & \sin 2x \\ \cos^2 x & \sin^2 x & 1 + \sin 2x \end{vmatrix}$$

Alors le couple (m, M) vaut :

- (A) $(-3, -1)$ (B) $(-4, -1)$ (C) $(1, 3)$ (D) $(-3, 3)$

170 EXERCICE

Si $a + x = b + y = c + z + 1$, où a, b, c, x, y, z sont des réels non nuls distincts, alors

$$\begin{vmatrix} x & a + y & x + a \\ y & b + y & y + b \\ z & c + y & z + c \end{vmatrix} \text{ vaut :}$$

- (A) $y(b - a)$ (B) $y(a - b)$ (C) $y(a - c)$ (D) 0

171 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$x + y + 3z = 0$$

$$x + 3y + k^2 z = 0$$

$$3x + y + 3z = 0$$

admet une solution non nulle (x, y, z) pour certains $k \in \mathbb{R}$, alors $x + \left(\frac{y}{z}\right)$ vaut :

- (A) 9 (B) 3 (C) -9 (D) -3

172 EXERCICE

Si les valeurs minimale et maximale de la fonction $f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(\theta) = \begin{vmatrix} -\sin^2 \theta & -1 - \sin^2 \theta & 1 \\ -\cos^2 \theta & -1 - \cos^2 \theta & 1 \\ 12 & 10 & -2 \end{vmatrix} \text{ sont } m \text{ et } M \text{ respectivement, alors le couple } (m, M) \text{ vaut}$$

:

- (A) $(0, 2\sqrt{2})$ (B) $(-4, 0)$ (C) $(-4, 4)$ (D) $(0, 4)$

173 EXERCICE

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le système d'équations linéaires

$$2x_1 - 4x_2 + \lambda x_3 = 1$$

$$x_1 - 6x_2 + x_3 = 2$$

$$\lambda x_1 - 10x_2 + 4x_3 = 3$$

est incompatible pour :

- (A) exactement une valeur positive de λ (B) exactement une valeur négative de λ
(C) exactement deux valeurs de λ (D) toute valeur de λ

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

174 EXERCICE

Supposons que les vecteurs x_1, x_2 et x_3 sont les
soient solutions du système d'équations linéaires,
 $Ax = b$ lorsque le vecteur b du second membre vaut b_1, b_2 et b_3 respectivement. Si

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

alors le déterminant de A vaut :

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) 4 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

175 EXERCICE

Si le système d'équations

$$x+y+z=2$$

$$2x+4y-z=6$$

$$3x+2y+\lambda z=\mu$$

admet une infinité de solutions, alors

- (A) $2\lambda - \mu = 5$ (B) $\lambda - 2\mu = -5$ (C) $2\lambda + \mu = 14$ (D) $\lambda + 2\mu = 14$

176 EXERCICE

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \left(\theta = \frac{\pi}{24} \right)$$

$$\text{et } A^5 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ où } i = \sqrt{-1} \text{ laquelle des propositions suivantes est fausse ?}$$

- (A) $a^2 - c^2 = 1$ (B) $0 \leq a^2 + b^2 \leq 1$ (C) $a^2 - d^2 = 0$ (D) $a^2 - b^2 = \frac{1}{2}$

177 EXERCICE

$$\text{Si } \Delta = \begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ 2x-3 & 3x-4 & 4x-5 \\ 3x-5 & 5x-8 & 10x-17 \end{vmatrix} =$$

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, alors $B + C$ vaut :

- (A) -1 (B) -3 (C) 9 (D) 1

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

178 EXERCICE

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tous non nuls et vérifiant

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2. \text{ Si la matrice}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

vérifie $A^T A = I$, alors la valeur de abc peut être :

- (A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

179 EXERCICE

On note $A = \{X = (x, y, z)^T : PX = 0 \text{ et}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
 où

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & 9 & -1 \end{bmatrix},$$

alors l'ensemble A :

- (A) est vide. (B) contient plus de deux éléments.
(C) contient exactement deux éléments. (D) est un singleton.

180 EXERCICE

Soit S l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 2 \\ x - 2y + \lambda z &= -4 \\ x + \lambda y + z &= 4 \end{aligned}$$

n'a aucune solution. Alors l'ensemble S :

- (A) contient plus de deux éléments. (B) contient exactement deux éléments.
(C) est un singleton. (D) est vide.

181 EXERCICE

On note A une 2×2 matrice réelle à coefficients dans $\{0, 1\}$ et $|A| \neq 0$. Considérons les deux affirmations suivantes :

- (P) Si $A \neq I_2$, alors $|A| = -1$
(Q) Si $|A| = 1$, alors $\text{tr}(A) = 2$,

où I_2 désigne 2×2 matrice identité et $\text{tr}(A)$ désigne la somme des éléments diagonaux de A . Alors :

- (A) (P) est vraie et (Q) est fausse (B) Les affirmations (P) et (Q) sont fausses
(C) Les affirmations (P) et (Q) sont vraies (D) (P) est fausse et (Q) est vraie

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

182 EXERCICE

Le système d'équations linéaires suivant

$$7x + 6y - 2z = 0$$

$$3x + 4y + 2z = 0$$

$$x - 2y - 6z = 0, \text{ admet}$$

- (A) aucune solution
 (B) une infinité de solutions, (x, y, z) vérifiant $y = 2z$
 (C) une infinité de solutions, (x, y, z) vérifiant $x = 2z$
 (D) uniquement la solution nulle

183 EXERCICE

Si, pour certains α et β dans $\mathbb{R}$, l'intersection des trois plans suivants

$$x + 4y - 2z = 1$$

$$x + 7y - 5z = \beta$$

$$x + 5y + \alpha z = 5$$

est une droite dans $\mathbb{R}^3$, alors $\alpha + \beta$ vaut :

- (A) -10 (B) 0 (C) 10 (D) 2

184 EXERCICE

Le système d'équations linéaires

$$\lambda x + 2y + 2z = 5$$

$$2\lambda x + 3y + 5z = 8$$

$$4x + \lambda y + 6z = 10 \text{ admet}$$

- (A) a une solution unique lorsque $\lambda = -8$ (B) aucune solution lorsque $\lambda = 2$
 (C) une infinité de solutions lorsque $\lambda = 2$ (D) aucune solution lorsque $\lambda = 8$

185 EXERCICE

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $10A^{-1}$ vaut :

- (A) $6I - A$ (B) $4I - A$ (C) $A - 6I$ (D) $A - 4I$

186 EXERCICE

Pour lequel des couples suivants (μ, δ) , le système d'équations linéaires

$$x + 2y + 3z = 1$$

$$3x + 4y + 5z = \mu$$

$$4x + 4y + 4z = \delta$$

est-il incompatible ?

- (A) (1, 0) (B) (4, 3) (C) (4, 6) (D) (3, 4)

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

187 EXERCICE

Soit α une racine de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ et le

$$\text{matrice } A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 \end{bmatrix}$$

alors la matrice A^{31} vaut

- (A) A^2 (B) A (C) I_3 (D) A^3

188 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$2x + 2ay + az = 0$$

$$2x + 3by + bz = 0$$

$$2x + 4cy + cz = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont non nuls distincts ; admet une solution non nulle, alors :

- (A) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ sont en S.A. (B) $a + b + c = 0$
(C) a, b, c sont en S.G. (D) a, b, c sont en S.A.

189 EXERCICE

A valeur de $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$, pour laquelle

$$\begin{vmatrix} 1 + \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 4 \cos 6\theta \\ \cos^2 \theta & 1 + \sin^2 \theta & 4 \cos 6\theta \\ \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 1 + 4 \cos 6\theta \end{vmatrix} = 0, \text{ vaut :}$$

- (A) $\frac{\pi}{18}$ (B) $\frac{\pi}{9}$ (C) $\frac{7\pi}{24}$ (D) $\frac{7\pi}{36}$

190 EXERCICE

Si A est une matrice symétrique et B est une matrice antisymétrique telle que $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, alors AB est égal à :

- (A) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

191 EXERCICE

Si $B = \begin{bmatrix} 5 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \alpha & 3 & -1 \end{bmatrix}$ est l'inverse d'une 3×3 matrice A , alors la somme de toutes les valeurs de α pour laquelle

$\det(A) + 1 = 0$, vaut :

- (A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

192

EXERCICE

Soit λ un réel pour lequel le système d'équations linéaires $x + y + z = 6$, $4x + \lambda y - \lambda z = \lambda - 2$, $3x + 2y - 4z = -5$ admette une infinité de solutions. Alors λ est une racine de l'équation du second degré :

- (A) $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ (B) $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$
 (C) $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ (D) $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

193

EXERCICE

La somme des racines réelles de l'équation

$$\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0, \text{ vaut :}$$

- (A) -4 (B) 0 (C) 1 (D) 6

194

EXERCICE

$$\text{Si } \Delta_1 = \begin{vmatrix} x & \sin \theta & \cos \theta \\ -\sin \theta & -x & 1 \\ \cos \theta & 1 & x \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_2 = \begin{vmatrix} x & \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta & -x & 1 \\ \cos 2\theta & 1 & x \end{vmatrix}, x \neq 0;$$

alors pour tout $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$:

- (A) $\Delta_1 - \Delta_2 = x (\cos 2\theta - \cos 4\theta)$
 (B) $\Delta_1 + \Delta_2 = -2x^3$
 (C) $\Delta_1 + \Delta_2 = -2(x^3 + x - 1)$
 (D) $\Delta_1 - \Delta_2 = -2x^3$

195

EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$x + y + z = 5$$

$$x + 2y + 2z = 6$$

$$x + 3y + \lambda z = \mu, (\lambda, \mu \in \mathbb{R}), \text{ admet une infinité de solutions, alors la valeur de } \lambda + \mu \text{ vaut :}$$

- (A) 10 (B) 9 (C) 7 (D) 12

196

EXERCICE

Si le système d'équations $2x + 3y - z = 0$, $x + ky - 2z = 0$ et $2x - y + z = 0$ admet une solution non nulle

(x, y, z) , alors $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + k$ vaut :-

- (A) -4 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{4}$

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

197 EXERCICE

Le nombre total de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 1 \\ 2x & y & -1 \\ 2x & -y & 1 \end{pmatrix}$$

(x, y ∈ ℝ, x ≠ y) pour laquelle $A^T A = 3I_3$ est :-

- (A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 6

198 EXERCICE

Soit α et β les racines de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Alors pour $y \neq 0$ dans ℝ,

$$\begin{vmatrix} y+1 & \alpha & \beta \\ \alpha & y+\beta & 1 \\ \beta & 1 & y+\alpha \end{vmatrix}$$

vaut

- (A) $y(y^2 - 1)$ (B) $y(y^2 - 3)$ (C) y^3 (D) $y^3 - 1$

199 EXERCICE

$$\text{Si } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 78 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

alors l'inverse de $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$
 (C) $\begin{bmatrix} 1 & -13 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & -12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

200 EXERCICE

Supposons que le nombre 2, b, c en S.A. et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & c \\ 4 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}. \text{ Si } \det(A) \in [2, 16], \text{ alors } c \text{ appartient à l'intervalle :}$$

- (A) [2, 3] (B) [4, 6] (C) $(2 + 2^{3/4}, 4)$ (D) $[3, 2 + 2^{3/4}]$

201 EXERCICE

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, (\alpha \in \mathbb{R})$$

tels que $A^{32} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors a valeur de α est

- (A) 0 (B) $\frac{\pi}{16}$ (C) $\frac{\pi}{32}$ (D) $\frac{\pi}{64}$

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

202 EXERCICE

La plus grande valeur de $c \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$x - cy - cz = 0$$

$$cx - y + cz = 0$$

$$cx + cy - z = 0$$

admet une solution non nulle, est :

- (A) -1 (B) 0 (C) $1/2$ (D) 2

203 EXERCICE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sin \theta & 1 \\ -\sin \theta & 1 & \sin \theta \\ -1 & -\sin \theta & 1 \end{bmatrix};$$

alors pour tout $\theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, $\det(A)$ appartient à l'intervalle :

- (A) $\left(\frac{3}{2}, 3\right]$ (B) $\left(0, \frac{3}{2}\right]$ (C) $\left[\frac{5}{2}, 4\right)$ (D) $\left(1, \frac{5}{2}\right]$

204 EXERCICE

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$x - 2y - 2z = \lambda x$$

$$x + 2y + z = \lambda y$$

$$-x - y = \lambda z$$

admet une solution non nulle :

- (A) est vide (B) contient plus de deux éléments
(C) est un singleton (D) contient exactement deux éléments

205 EXERCICE

Un couple (α, β) pour lequel le système d'équations linéaires

$$(1 + \alpha)x + \beta y + z = 2$$

$$\alpha x + (1 + \beta)y + z = 3$$

$$\alpha x + \beta y + 2z = 2$$

admet une solution unique, est :

- (A) $(-3, 1)$ (B) $(1, -3)$ (C) $(-4, 2)$ (D) $(2, 4)$

206 EXERCICE

Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ et $Q = [q_{ij}]$ deux 3×3 matrices telles que $Q - P^5 = I_3$.

Alors $\frac{q_{21} + q_{31}}{q_{32}}$ vaut :

- (A) 15 (B) 9 (C) 135 (D) 10

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

207 EXERCICE

$$\S \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(x+a+b+c)^2, x \neq 0,$$

alors x vaut :

- (A) $-2(a+b+c)$ (B) $2(a+b+c)$ (C) abc (D) $-(a+b+c)$

208 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$2x + 2y + 3z = a$$

$$3x - y + 5z = b$$

$$x - 3y + 2z = c$$

où a, b, c sont des réels non nuls, admet plusieurs solutions, alors :

- (A) $b - c - a = 0$ (B) $a + b + c = 0$ (C) $b - c + a = 0$ (D) $b + c - a = 0$

209 EXERCICE

$$\text{On note } A = \begin{pmatrix} 0 & 2q & r \\ p & q & -r \\ p & -q & r \end{pmatrix}. \quad \S \quad AA^T = I_3, \quad \text{alors } |p| \text{ vaut :}$$

- (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

210 EXERCICE

$$\text{On note } A = \begin{bmatrix} 2 & b & 1 \\ b & b^2 + 1 & b \\ 1 & b & 2 \end{bmatrix} \text{ où } b > 0.$$

Alors la valeur minimale de $\frac{\det(A)}{b}$ est -

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{3}$ (C) $-\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}$

211 EXERCICE

Le nombre de valeurs de $\theta \in (0, \pi)$ pour lequel le système d'équations linéaires

$$x + 3y + 7z = 0$$

$$-x + 4y + 7z = 0$$

$$(\sin 3\theta)x + (\cos 2\theta)y + 2z = 0.$$

admet une solution non nulle, vaut -

- (A) deux (B) une (C) quatre (D) trois

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

212 EXERCICE

Si le système d'équations

$$x + y + z = 5$$

$$x + 2y + 3z = 9$$

$$x + 3y + \alpha z = \beta$$

admet une infinité de solutions, alors $\beta - \alpha$ vaut -

- (A) 8 (B) 21 (C) 18 (D) 5

213 EXERCICE

Soit $d \in \mathbb{R}$, et

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4+d & (\sin \theta) - 2 \\ 1 & (\sin \theta) + 2 & d \\ 5 & (2 \sin \theta) - d & (-\sin \theta) + 2 + 2d \end{bmatrix},$$

 $\theta \in [0, 2\pi]$ Si la valeur minimale de $\det(A)$ vaut 8, alors la valeur de d est -

- (A) -7 (B) $2(\sqrt{2} + 2)$ (C) -5 (D) $2(\sqrt{2} + 1)$

214 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$x - 4y + 7z = g$$

$$3y - 5z = h$$

$$-2x + 5y - 9z = k$$

est compatible, alors :

- (A) $g + 2h + k = 0$ (B) $g + h + 2k = 0$ (C) $2g + h + k = 0$ (D) $g + h + k = 0$

215 EXERCICE

$$A = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ e^t & -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t & -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t \\ e^t & 2e^{-t} \sin t & -2e^{-t} \cos t \end{bmatrix}$$

alors A vaut :

- (A) inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$. (B) inversible seulement si $t = \pi$
 (C) inversible pour aucun $t \in \mathbb{R}$ (D) inversible seulement si $t = \frac{\pi}{2}$.

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

216 EXERCICE

Si $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, alors la matrice A^{-50} lorsque $\theta = \frac{\pi}{12}$, vaut :

- (A) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$
 (B) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
 (C) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$
 (D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

217 EXERCICE

Le système d'équations linéaires

$$x + y + z = 2$$

$$2x + 3y + 2z = 5$$

$$2x + 3y + (a^2 - 1)z = a + 1 \text{ alors}$$

(A) a une infinité de solutions pour $a = 4$

(B) admet une solution unique pour $|a| = \sqrt{3}$

(C) est incompatible lorsque $|a| = \sqrt{3}$

(D) est incompatible lorsque $a = 4$

218 EXERCICE

On note $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = A^{20}$. La somme des éléments de la première colonne de B vaut :

(A) 210

(B) 211

(C) 231

(D) 251

219 EXERCICE

Le nombre de valeurs de k pour lequel le système d'équations linéaires,

$$(k + 2)x + 10y = k$$

$$kx + (k + 3)y = k - 1$$

n'a aucune solution, vaut :

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) une infinité

220 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$x + ky + 3z = 0$$

$$3x + ky - 2z = 0$$

$$2x + 4y - 3z = 0$$

admet une solution non nulle (x, y, z) , alors $\frac{xz}{y^2}$ vaut

(A) 30

(B) -10

(C) 10

(D) -30

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

221 EXERCICE

Si $\begin{vmatrix} x-4 & 2x & 2x \\ 2x & x-4 & 2x \\ 2x & 2x & x-4 \end{vmatrix} = (A+Bx)(x-A)^2$

alors le couple (A, B) vaut :

- (A) (4, 5) (B) (-4, -5) (C) (-4, 3) (D) (-4, 5)

222 EXERCICE

Supposons que A est une 3×3 matrice inversible et $(A - 3I)(A - 5I) = O$ où $I = I_3$ et $O = O_3$. Si $\alpha A + \beta A^{-1} = 4I$, alors $\alpha + \beta$ vaut :

- (A) 8 (B) 7 (C) 13 (D) 12

223 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$x + ay + z = 3$$

$$x + 2y + 2z = 6$$

$$x + 5y + 3z = b$$

n'a aucune solution, alors :

- (A) $a = -1, b = 9$ (B) $a = -1, b \neq 9$
(C) $a \neq -1, b = 9$ (D) $a = 1, b \neq 9$

224 EXERCICE

Soit A une matrice telle que $A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ est une matrice scalaire et $|3A| = 108$.

Alors A^2 vaut :

- (A) $\begin{bmatrix} 4 & -32 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 36 & 0 \\ -32 & 4 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -32 & 36 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 36 & -32 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

225 EXERCICE

Soit S l'ensemble des valeurs réelles de k pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$x + y + z = 2$$

$$2x + y - z = 3$$

$$3x + 2y + kz = 4$$

admet une solution unique. Alors S vaut :

- (A) un ensemble vide (B) égal à $\{0\}$ (C) égal à $\mathbb{R}$ (D) égal à $\mathbb{R} - \{0\}$

226 EXERCICE

Pour deux 3×3 matrices A et B , on note $A + B = 2B^T$ et $3A + 2B = I_3$, où B^T est la transposée de B et I_3 est 3×3 matrice identité. Alors :

- (A) $5A + 10B = 2I_3$ (B) $10A + 5B = 3I_3$ (C) $B + 2A = I_3$ (D) $3A + 6B = 2I_3$

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

227

EXERCICE

Le nombre de valeurs réelles de λ pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$2x + 4y - \lambda z = 0$$

$$4x + \lambda y + 2z = 0$$

$$\lambda x + 2y + 2z = 0$$

admet une infinité de solutions, est :

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

228

EXERCICE

On note A une quelconque 3×3 matrice inversible. Quelle proposition n'est pas toujours vraie ?

(A) $\text{adj}(A) = |A| \cdot A^{-1}$

(B) $\text{adj}(\text{adj}(A)) = |A| \cdot A$

(C) $\text{adj}(\text{adj}(A)) = |A|^2 \cdot (\text{adj}(A))^{-1}$

(D) $\text{adj}(\text{adj}(A)) = |A| \cdot (\text{adj}(A))^{-1}$

229

EXERCICE

§

$$S = \left\{ x \in [0, 2\pi] : \begin{vmatrix} 0 & \cos x & -\sin x \\ \sin x & 0 & \cos x \\ \cos x & \sin x & 0 \end{vmatrix} = 0 \right\},$$

alors $\sum_{x \in S} \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ vaut :

(A) $4 + 2\sqrt{3}$

(B) $-2 + \sqrt{3}$

(C) $-2 - \sqrt{3}$

(D) $-4 - 2\sqrt{3}$

230

EXERCICE

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$,

alors $\text{adj}(3A^2 + 12A)$ vaut

(A) $\begin{bmatrix} 51 & 63 \\ 84 & 72 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 51 & 84 \\ 63 & 72 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 72 & -63 \\ -84 & 51 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 72 & -84 \\ -63 & 51 \end{bmatrix}$

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

231

EXERCICE

Si S est l'ensemble des valeurs distinctes de ' b ' pour lesquelles le système d'équations linéaires suivant

$$x + y + z = 1$$

$$x + ay + z = 1$$

$$ax + by + z = 0$$

n'a aucune solution, alors S vaut :

(A) un ensemble vide

(B) un ensemble infini

(C) a un ensemble fini d'au moins deux éléments

(D) a un singleton

232

EXERCICE

On note A matrice 3×3 telle que $A^2 - 5A + 7I = 0$

affirmation - I :

$$A^{-1} = \frac{1}{7} (5I - A).$$

affirmation - II :

Le polynôme $A^3 - 2A^2 - 3A + I$ peut se réduire à $5(A - 4I)$.

Alors :

(A) L'affirmation I est vraie, mais II est fausse.

(B) L'affirmation I est fausse, mais II est vraie.

(C) Les deux affirmations sont vraies.

(D) Les deux affirmations sont fausses

233

EXERCICE

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

alors le déterminant de la matrice $(A^{2016} - 2A^{2015} - A^{2014})$ vaut :

(A) 2014

(B) - 175

(C) 2016

(D) - 25

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

234 EXERCICE

$$\text{Si } P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Q = PAP^T$, alors $P^T Q^{2015} P$ vaut :

- (A) $\begin{bmatrix} 0 & 2015 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2015 & 1 \\ 0 & 2015 \end{bmatrix}$
 (C) $\begin{bmatrix} 2015 & 0 \\ 1 & 2015 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 2015 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

235 EXERCICE

Le nombre de racines réelles distinctes de l'équation,

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x & \sin x \\ \sin x & \cos x & \sin x \\ \sin x & \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0 \text{ dans l'intervalle } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ vaut :}$$

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

236 EXERCICE

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 5a & -b \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } A \operatorname{adj} A = A A^T, \text{ alors } 5a + b \text{ vaut :}$$

- (A) 4 (B) 13 (C) -1 (D) 5

237 EXERCICE

Le système d'équations linéaires

$$x + \lambda y - z = 0$$

$$\lambda x - y - z = 0$$

$$x + y - \lambda z = 0$$

admet une solution non nulle pour :

- (A) une infinité de valeurs de λ . (B) exactement une valeur de λ .
 (C) exactement deux valeurs de λ . (D) exactement trois valeurs de λ .

238 EXERCICE

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ a & 2 & b \end{bmatrix} \text{ est une matrice vérifiant l'équation}$$

$$AA^T = 9I, \text{ où } I \text{ est } 3 \times 3 \text{ matrice identité, alors le}$$

couples (a, b) vaut :

- (A) (2, 1) (B) (-2, -1) (C) (2, -1) (D) (-2, 1)

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

239

EXERCICE

L'ensemble des valeurs de λ pour lequel le système d'équations linéaires :

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= \lambda x_2 \\ -x_1 + 2x_2 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

admet une solution non nulle

(A) contient deux éléments

(B) contient plus de deux éléments

(C) est vide

(D) est un singleton

240

EXERCICE

Si $\alpha, \beta \neq 0$, et $f(n) = \alpha^n + \beta^n$ et

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 + f(1) & 1 + f(2) \\ 1 + f(1) & 1 + f(2) & 1 + f(3) \\ 1 + f(2) & 1 + f(3) & 1 + f(4) \end{vmatrix}$$

$= K(1 - \alpha)^2(1 - \beta)^2(\alpha - \beta)^2$, alors K vaut :

(A) 1

(B) -1

(C) $\alpha\beta$

(D) $\frac{1}{\alpha\beta}$

241

EXERCICE

Si A est une 3×3 matrice inversible telle que $AA' = A'A$ et

$B = A^{-1}A'$, alors BB' vaut :

(A) B^{-1}

(B) $(B^{-1})'$

(C) $I + B$

(D) I

242

EXERCICE

Le nombre de valeurs de k , pour lesquelles le système d'équations :

$$\begin{aligned} (k+1)x + 8y &= 4k \\ kx + (k+3)y &= 3k-1 \end{aligned}$$

n'a aucune solution, vaut

(A) une infinité

(B) 1

(C) 2

(D) 3

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

243 EXERCICE

Soit A et B deux matrices symétriques d'ordre 3.

affirmation - 1 : $A(BA)$ et $(AB)A$ sont des matrices symétriques.

affirmation - 2 : AB est symétrique si le produit matriciel de A avec B est commutatif.

(A) l'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est vraie ; l'affirmation - 2 n'est pas une justification correcte de l'affirmation - 1.

(B) l'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est fausse.

(C) l'affirmation - 1 est fausse, l'affirmation - 2 est vraie

(D) l'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est vraie ; l'affirmation - 2 explique correctement l'affirmation - 1.

244 EXERCICE

Le nombre de valeurs de k pour lequel les équations linéaires

$4x + ky + 2z = 0$, $kx + 4y + z = 0$ et $2x + 2y + z = 0$ admettent une solution non nulle, vaut :

(A) 2

(B) 1

(C) zéro

(D) 3

245 EXERCICE

Soit A matrice 2×2 à coefficients non nuls et on note $A^2 = I$,

où I est 2×2 matrice identité. Posons

$Tr(A)$ = somme des éléments diagonaux de A et $|A|$ = déterminant de la matrice A .

Affirmation-1: $Tr(A) = 0$.

Affirmation-2: $|A| = 1$.

(A) l'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est vraie ; l'affirmation - 2 n'est pas une justification correcte de l'affirmation - 1.

(B) l'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est fausse.

(C) l'affirmation - 1 est fausse, l'affirmation - 2 est vraie

(D) l'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est vraie ; l'affirmation - 2 explique correctement l'affirmation - 1.

246 EXERCICE

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

Considérons le système d'équations linéaires ; $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1$$

Le système admet :

(A) exactement 3 solutions

(B) a une solution unique

(C) aucune solution

(D) une infinité de solutions

247 EXERCICE

Le nombre de 3×3 matrices inversibles, dont quatre coefficients valent 1 et tous les autres coefficients valent 0, vaut :

(A) 5

(B) 6

(C) au moins 7

(D) moins de 4

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

248

EXERCICE

Soit a, b, c tel que $b(a+c) \neq 0$ si

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a-1 \\ -b & b+1 & b-1 \\ c & c-1 & c+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c-1 \\ a-1 & b-1 & c+1 \\ (-1)^{n+2}a & (-1)^{n+1}b & (-1)^nc \end{vmatrix} = 0$$

alors la valeur de n :

- (A) tout entier pair (B) tout entier impair (C) tout entier (D) zéro

249

EXERCICE

Soit A matrice 2×2 à coefficients réels. On note I les 2×2 matrice identité. Désignons par $\text{tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A . Supposons que $A^2 = I$.

Affirmation 1 : Si $A \neq I$ et $A \neq -I$, alors $\det(A) = -1$

Affirmation-2 : Si $A \neq I$ et $A \neq -I$, alors $\text{tr}(A) \neq 0$.

- (A) l'affirmation - 1 est fausse, l'affirmation -2 est vraie
 (B) l'affirmation -1 est vraie, l'affirmation - 2 est vraie ; l'affirmation - 2 explique correctement l'affirmation - 1.
 (C) l'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est vraie ; l'affirmation - 2 n'est pas une justification correcte de l'affirmation - 1.
 (D) l'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est fausse.

250

EXERCICE

Soit a, b, c des réels quelconques. Supposons qu'il existe des réels x, y, z non tous nuls tels que $x = cy + bz$, $y = az + cx$, et $z = bx + ay$. Alors $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc$ vaut :

- (A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

251

EXERCICE

Si $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$ pour $x \neq 0, y \neq 0$, alors D vaut :

- (A) divisible par x mais pas par y (B) divisible par y mais pas par x
 (C) divisible ni par x ni y (D) divisible à la fois par x et y

252

EXERCICE

§ A et B sont des matrices carrées de taille $n \times n$ tels que

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, quelle proposition sera toujours vraie ?

- (A) $A = B$ (B) $AB = BA$
 (C) l'une des matrices A ou B est nulle (D) l'une des matrices A ou B est la matrice identité

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

253 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Alors

- (A) il n'existe aucune B tels que $AB = BA$
 (B) il existe un nombre fini supérieur à un de B 's tels que $AB = BA$
 (C) il existe exactement une B tels que $AB = BA$
 (D) il existe une infinité de B 's tels que $AB = BA$

254 EXERCICE

Si $A^2 - A + I = 0$, alors l'inverse de A vaut :

- (A) $A + I$ (B) A (C) $A - I$ (D) $I - A$

255 EXERCICE

Le système d'équations

$$\alpha x + y + z = \alpha - 1$$

$$x + \alpha y + z = \alpha - 1$$

$$x + y + \alpha z = \alpha - 1$$

n'a aucune solution si α vaut :

- (A) -2 (B) soit -2 ou 1 (C) différent de -2 (D) 1

256 EXERCICE

Si $a^2 + b^2 + c^2 = -2$ et

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 + a^2x & (1 + b^2)x & (1 + c^2)x \\ (1 + a^2)x & 1 + b^2x & (1 + c^2)x \\ (1 + a^2)x & (1 + b^2)x & 1 + c^2x \end{vmatrix},$$

alors $f(x)$ est un polynôme de degré :

- (A) 1 (B) 0 (C) 3 (D) 2

257 EXERCICE

Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ forment une G.P., alors le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} \log a_n & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ \log a_{n+3} & \log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ \log a_{n+6} & \log a_{n+7} & \log a_{n+8} \end{vmatrix}$

vaut :

- (A) 1 (B) 0 (C) 4 (D) 2

258 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La seule affirmation correcte sur la matrice A est

- (A) $A^2 = I$ (B) $A = (-1)I$, où I est la matrice identité
 (C) A^{-1} n'existe pas (D) A est nulle

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

259 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $10B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Si B est l'inverse de la matrice A , alors α est

- (A) 5 (B) -1 (C) 2 (D) -2

260 EXERCICE

Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ forment une G.P., alors la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} \log a_n & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ \log a_{n+3} & \log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ \log a_{n+6} & \log a_{n+7} & \log a_{n+8} \end{vmatrix}, \text{ est}$$

- (A) -2 (B) 1 (C) 2 (D) 0

261 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$x + 2ay + az = 0; x + 3by + bz = 0; x + 4cy + cz = 0;$$

admet une solution - non nulle, alors a, b, c .

- (A) vérifient $a + 2b + 3c = 0$ (B) sont en S.A.
(C) sont en S.G. (D) forment une suite harmonique

262 EXERCICE

Si $1, \omega, \omega^2$ sont les racines cubiques de l'unité, alors

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega^n & \omega^{2n} \\ \omega^n & \omega^{2n} & 1 \\ \omega^{2n} & 1 & \omega^n \end{vmatrix} \text{ vaut}$$

- (A) ω^2 (B) 0 (C) 1 (D) ω

263 EXERCICE

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ et $A^2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, alors

- (A) $\alpha = 2ab, \beta = a^2 + b^2$ (B) $\alpha = a^2 + b^2, \beta = ab$
(C) $\alpha = a^2 + b^2, \beta = 2ab$ (D) $\alpha = a^2 + b^2, \beta = a^2 - b^2$

264 EXERCICE

Si $a > 0$ et le discriminant de $ax^2 + 2bx + c$ est $-ve$, alors

$$\begin{vmatrix} a & b & ax+b \\ b & c & bx+c \\ ax+b & bx+c & 0 \end{vmatrix} \text{ vaut}$$

- (A) $+ve$ (B) $(ac - b^2)(ax^2 + 2bx + c)$
(C) $-ve$ (D) 0

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

265 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vérifie

$$A^2 + \alpha(\text{adj}(\text{adj}(A))) + \beta(\text{adj}(A)(\text{adj}(\text{adj}(A)))) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ pour certains } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Alors $(\alpha - \beta)^2$ vaut _____

266 EXERCICE

Considérons les matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Si les matrices P et Q sont telles que $PA = B$ et $AQ = B$, alors la valeur absolue de la somme des éléments diagonaux de $2(P + Q)$ est _____.

267 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et B deux matrices telles que $A^{100} = 100B + I$. Alors la somme de tous les éléments de B^{100} est _____

268 EXERCICE

Le nombre de 3×2 matrices A , qui peuvent être formées avec les éléments de l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ telles que la somme des éléments diagonaux de $A^T A$ est 5, est

269 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ et B une matrice telle que $B(I - A) = I + A$. Alors la somme des éléments diagonaux de $B^T B$ vaut _____

270 EXERCICE

Soit $|A| = 6$, où A est une 3×3 matrice. Si $|\text{adj}(3 \text{adj}(A^2 \cdot \text{adj}(2A)))| = 2^m \cdot 3^n$, $m, n \in \mathbb{N}$, alors $m + n$ vaut

_____.

271 EXERCICE

On note A matrice 3×3 telle que $A + A^T = O$. Si $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 19 \\ -24 \end{bmatrix}$ et

$\det(\text{adj}(2 \text{adj}(A + I))) = (2)^\alpha \cdot (3)^\beta \cdot (11)^\gamma$, α, β, γ sont des entiers positifs ou nuls, alors $\alpha + \beta + \gamma$ est égal à _____

272 EXERCICE

Pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, soit $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$ tel que $A^2 - 4A + 2I = B^2 - 3B + I = O$. Alors $(\det(\text{adj}(A^3 - B^3)))^2$ vaut _____.

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

273 EXERCICE

Le nombre de matrices non inversibles d'ordre 2, dont les coefficients appartiennent à l'ensemble $\{2, 3, 6, 9\}$, est

_____.

274 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$. Si, pour certains $\theta \in (0, \pi)$, $A^2 = A^T$, alors la somme des éléments diagonaux de la matrice $(A + I)^3 + (A - I)^3 - 6A$ vaut _____.

275 EXERCICE

Soit I la matrice identité d'ordre 3×3 et pour la matrice $A = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $|A| = -1$. On note B soit l'inverse de la matrice $\text{adj}(A \text{adj}(A^2))$. Alors $|(\lambda B + I)|$ vaut _____.

276 EXERCICE

Soit $S = \{m \in \mathbb{Z} : A^{m^2} + A^m = 3I - A^{-6}\}$, où $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Alors $n(S)$ vaut _____.

277 EXERCICE

Soit M désigne l'ensemble des matrices réelles d'ordre 3×3 et on note $S = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$. On note

$S_1 = \{A = [a_{ij}] \in M : A = A^T \text{ et } a_{ij} \in S, \forall i, j\}$,
 $S_2 = \{A = [a_{ij}] \in M : A = -A^T \text{ et } a_{ij} \in S, \forall i, j\}$,
 $S_3 = \{A = [a_{ij}] \in M : a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \text{ et } a_{ij} \in S, \forall i, j\}$.
 Si $n(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = 125\alpha$, alors α vaut _____.

278 EXERCICE

On note A matrice 3×3 telle que $X^T A X = O$ pour tout non nul 3×1 matrices $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Si

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$, et $\det(\text{adj}(2(A + I))) = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, alors $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ est

279 EXERCICE

Soit A une matrice carrée d'ordre 3 tels que $\det(A) = -2$ et $\det(3 \text{adj}(-6 \text{adj}(3A))) = 2^{m+n} \cdot 3^{mn}$, $m > n$. Alors $4m + 2n$ vaut _____.

280 EXERCICE

Considérons les matrices : $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & m \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 20 \\ m \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Supposons que l'ensemble des m , pour lesquels le système d'équations $AX = B$ admet une solution négative (i.e., $x < 0$ et $y < 0$), soit l'intervalle (a, b) . Alors $8 \int_a^b |A| dm$ vaut _____.

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

281 EXERCICE

Soit A une matrice inversible d'ordre 3. Si $\det(3 \operatorname{adj}(2 \operatorname{adj}((\det A)A))) = 3^{-13} \cdot 2^{-10}$ et $\det(3 \operatorname{adj}(2A)) = 2^m \cdot 3^n$, alors $|3m + 2n|$ vaut _____.

282 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Si la somme des éléments diagonaux de A^{13} est 3^n , alors n vaut _____.

283 EXERCICE

Si le système d'équations

$$2x + 7y + \lambda z = 3$$

$$3x + 2y + 5z = 4$$

$$x + \mu y + 32z = -1$$

admet une infinité de solutions, alors $(\lambda - \mu)$ vaut _____ :

284 EXERCICE

Soit $\alpha\beta\gamma = 45$; $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Si $x(\alpha, 1, 2) + y(1, \beta, 2) + z(2, 3, \gamma) = (0, 0, 0)$ pour certains $x, y, z \in \mathbb{R}, xyz \neq 0$, alors $6\alpha + 4\beta + \gamma$ vaut _____.

285 EXERCICE

Soit A une 2×2 matrice symétrique telle que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ et le déterminant de A soit 1. Si $A^{-1} = \alpha A + \beta I$, où I est une matrice identité d'ordre 2×2 , alors $\alpha + \beta$ vaut _____.

286 EXERCICE

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 tels que $|A| = 2$ et la somme de ses éléments diagonaux vaut -3 . Si les points (x, y) vérifiant $A^2 + xA + yI = O$ sont sur une hyperbole dont l'axe transverse est parallèle à l' x -axe, d'excentricité e et dont la longueur du côté droit vaut, alors $e^4 + l^4$ vaut _____.

287 EXERCICE

Soit A matrice 3×3 à coefficients réels positifs ou nuls telle que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Alors la valeur maximale valeur de $\det(A)$ est _____.

288 EXERCICE

Soit $A = I_2 - 2MM^T$, où M est une matrice réelle d'ordre 2×1 telle que la relation $M^T M = I_1$ est vérifiée. Si λ est un réel tel que la relation $AX = \lambda X$ est vérifiée pour une matrice réelle non nulle X d'ordre 2×1 , alors la somme des carrés des valeurs possibles de λ vaut _____.

289 EXERCICE

On note A matrice 3×3 et $\det(A) = 2$. Si $n = \underbrace{\det(\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(\dots(\operatorname{adj} A))))}_{2024 \text{ fois}}$, alors le reste de la division de n par 9 vaut _____.

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

290 EXERCICE

Pour trois termes consécutifs distincts a, b, c d'une A.P, les droites $ax + by + c = 0$ soient concourantes au point P et $Q(\alpha, \beta)$ un point tel que le système d'équations

$$x + y + z = 6,$$

$$2x + 5y + \alpha z = \beta \text{ et}$$

$$x + 2y + 3z = 4, \text{ admette une infinité de solutions. Alors } (PQ)^2 \text{ vaut } \underline{\hspace{2cm}}.$$

291 EXERCICE

Soit A une 2×2 matrice réelle et I la matrice identité d'ordre 2. Si les racines de l'équation $|A - xI| = 0$ sont -1 et 3 , alors la somme des éléments diagonaux de la matrice A^2 est

292 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [B_1, B_2, B_3]$, où B_1, B_2, B_3 sont des matrices colonnes, et

$$AB_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, AB_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, AB_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si $\alpha = |B|$ et β est la somme des éléments diagonaux de B , alors $\alpha^3 + \beta^3$ vaut $\underline{\hspace{2cm}}.$

293 EXERCICE

Soit $D_k = \begin{vmatrix} 1 & 2k & 2k-1 \\ n & n^2+n+2 & n^2 \\ n & n^2+n & n^2+n+2 \end{vmatrix}$. Si $\sum_{k=1}^n D_k = 96$, alors n vaut $\underline{\hspace{2cm}}.$

294 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \\ 1 & c & 0 \end{bmatrix}$, où $a, c \in \mathbb{R}$. Si $A^3 = A$ et la valeur positive de a appartient à l'intervalle $(n-1, n]$, où $n \in \mathbb{N}$, alors n vaut $\underline{\hspace{2cm}}.$

295 EXERCICE

Soit S l'ensemble des valeurs de λ , pour lesquelles le système d'équations

$$6\lambda x - 3y + 3z = 4\lambda^2,$$

$$2x + 6\lambda y + 4z = 1,$$

$$3x + 2y + 3\lambda z = \lambda \text{ n'ait aucune solution. Alors } 12 \sum_{\lambda \in S} |\lambda| \text{ vaut } \underline{\hspace{2cm}}.$$

296 EXERCICE

On note A une matrice symétrique telle que $|A| = 2$ et $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$. Si la somme des éléments diagonaux de A vaut s , alors $\frac{\beta s}{\alpha^2}$ vaut $\underline{\hspace{2cm}}.$

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

297 EXERCICE

Soit A_1, A_2, A_3 les trois S.A. de même raison d et de premiers termes $A, A+1, A+2$, respectivement. On note a, b, c les $7^{\text{th}}, 9^{\text{th}}, 17^{\text{th}}$ premiers termes de A_1, A_2, A_3 , respectivement, tels que $\begin{vmatrix} a & 7 & 1 \\ 2b & 17 & 1 \\ c & 17 & 1 \end{vmatrix} + 70 = 0$.

Si $a = 29$, alors la somme des 20 premiers termes d'une S.A. de premier terme $c - a - b$ et de raison $\frac{d}{12}$, vaut _____.

298 EXERCICE

Soit $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, si $X' A^k X = 33$, alors k vaut _____.

299 EXERCICE

Soit p et $p+2$ des nombres premiers et on note

$$\Delta = \begin{vmatrix} p! & (p+1)! & (p+2)! \\ (p+1)! & (p+2)! & (p+3)! \\ (p+2)! & (p+3)! & (p+4)! \end{vmatrix}$$

Alors la somme des valeurs maximales de α et β , telles que p^α et $(p+2)^\beta$ divisent Δ , est _____.

300 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On note α_1 la valeur de α qui vérifie $(A+B)^2 = A^2 + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ et α_2 la valeur de α qui vérifie $(A+B)^2 = B^2$. Alors $|\alpha_1 - \alpha_2|$ est égal à _____.

301 EXERCICE

Soit S l'ensemble de toutes les 3×3 matrices à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$. Le nombre total de matrices $A \in S$ telles que la somme des éléments diagonaux de $A^T A$ est 6 est _____.

302 EXERCICE

Le nombre de matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $a, b, c, d \in \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$, telles que $A = A^{-1}$, est _____.

303 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Si, pour certains

$n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 48 & 2160 \\ 0 & 1 & 96 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ alors $n + a + b$ vaut _____.

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

304 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$. Si $\omega = \frac{\sqrt{3}i-1}{2}$, alors le nombre d'éléments de l'ensemble $\{n \in \{1, 2, \dots, 100\} : A^n + (\omega B)^n = A + B\}$ vaut _____.

305 EXERCICE

Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$, où α est un réel non nul et $N = \sum_{k=1}^{49} M^{2k}$. Si $(I - M^2)N = -2I$, alors la valeur entière positive de α est _____.

306 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires $2x - 3y = \gamma + 5$, $\alpha x + 5y = \beta + 1$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a une infinité de solutions, alors la valeur de $|9\alpha + 3\beta + 5\gamma|$ vaut _____.

307 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ où $i = \sqrt{-1}$. Alors, le nombre d'éléments de l'ensemble $\{n \in \{1, 2, \dots, 100\} : A^n = A\}$ est _____.

308 EXERCICE

Soit $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \alpha I + \beta X + \gamma X^2$ et $Z = \alpha^2 I - \alpha\beta X + (\beta^2 - \alpha\gamma)X^2$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Si $Y^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, alors $(\alpha - \beta + \gamma)^2$ vaut _____.

309 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors le nombre d'éléments de l'ensemble $\{(n, m) : n, m \in \{1, 2, \dots, 10\} \text{ et } nA^n + mB^m = I\}$ est _____.

310 EXERCICE

Soit $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} ; a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 100\} \right\}$ et on note $T_n = \{A \in S : A^{n(n+1)} = I\}$. Alors le nombre d'éléments de $\bigcap_{n=1}^{100} T_n$ est _____.

311 EXERCICE

Le nombre d'éléments de l'ensemble $\left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \{-1, 0, 1\} \text{ and } (I - A)^3 = I - A^3 \right\}$, où I est 2×2 matrice identité, vaut :

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

312 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires

$$2x + y - z = 3$$

$$x - y - z = \alpha$$

$$3x + 3y + \beta z = 3$$

admet une infinité de solutions, alors $\alpha + \beta - \alpha\beta$ vaut _____.

313 EXERCICE

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $M = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{20}$, alors la somme des éléments de la matrice M vaut _____.

314 EXERCICE

Pour des réels α et β , considérons le système d'équations linéaires suivant :

$x + y - z = 2$, $x + 2y + \alpha z = 1$, $2x - y + z = \beta$. Si le système a une infinité de solutions, alors $\alpha + \beta$ vaut _____.

315 EXERCICE

Soit $f(x) = \begin{vmatrix} \sin^2 x & -2 + \cos^2 x & \cos 2x \\ 2 + \sin^2 x & \cos^2 x & \cos 2x \\ \sin^2 x & \cos^2 x & 1 + \cos 2x \end{vmatrix}$, $x \in [0, \pi]$. La valeur maximale de $f(x)$ est égale à _____.

316 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors le nombre de 3×3 matrices B à coefficients dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et vérifiant $AB = BA$ vaut _____.

317 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = 7A^{20} - 20A^7 + 2I$, où I est une matrice identité d'ordre 3×3 . Si $B = [b_{ij}]$, alors b_{13} vaut _____.

318 EXERCICE

Soit a, b, c, d en S.A. de raison

$$\lambda. \text{ Si } \begin{vmatrix} x+a-c & x+b & x+a \\ x-1 & x+c & x+b \\ x-b+d & x+d & x+c \end{vmatrix} = 2,$$

alors la valeur de λ^2 vaut _____.

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

319 EXERCICE

Soit I une matrice identité d'ordre 2×2 et $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$. La valeur de $n \in \mathbb{N}$ pour laquelle $P^n = 5I - 8P$ vaut _____.

320 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ telles que $AB = B$ et $a + d = 2021$, alors la valeur de $ad - bc$ est égal à _____.

321 EXERCICE

Si $1, \log_{10}(4^x - 2)$ et $\log_{10}(4^x + \frac{18}{5})$ sont en S.A. pour un réel x , alors l'équation a

valeur du déterminant $\begin{vmatrix} 2(x - \frac{1}{2}) & x - 1 & x^2 \\ 1 & 0 & x \\ x & 1 & 0 \end{vmatrix}$ vaut :

322 EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ deux 2×1 matrices à coefficients réels telles que $A = XB$, où

$$X = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{bmatrix}, \text{ et } k \in \mathbb{R}.$$

Si $a_1^2 + a_2^2 = \frac{2}{3}(b_1^2 + b_2^2)$ et $(k^2 + 1)b_2^2 \neq -2b_1b_2$, alors la valeur de k est _____.

323 EXERCICE

Le nombre total de 3×3 matrices A à coefficients dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ telles que la somme des éléments diagonaux de AA^T est 9, vaut _____.

324 EXERCICE

Si la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ vérifie l'équation

$$A^{20} + \alpha A^{19} + \beta A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour certains réels } \alpha \text{ et } \beta, \text{ alors } \beta - \alpha \text{ vaut } _____.$$

325 EXERCICE

Si $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan(\frac{\theta}{2}) \\ \tan(\frac{\theta}{2}) & 0 \end{bmatrix}$ et $(I_2 + A)(I_2 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, alors $13(a^2 + b^2)$ vaut

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

326 EXERCICE

Si le système d'équations

$$kx + y + 2z = 1$$

$$3x - y - 2z = 2$$

$$-2x - 2y - 4z = 3$$

admet une infinité de solutions, alors k vaut _____.

327 EXERCICE

Soit $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons que $Q = [q_{ij}]$ est une matrice vérifiant $PQ = kI_3$ pour un certain non-nul $k \in \mathbb{R}$.

Si $q_{23} = -\frac{k}{8}$ et $|Q| = \frac{k^2}{2}$, alors $\alpha^2 + k^2$ vaut _____.

328 EXERCICE

Soit M une quelconque 3×3 matrice à coefficients dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. Le nombre maximal de telles matrices, dont la somme des éléments diagonaux de $M^T M$ vaut sept, est _____.

329 EXERCICE

La somme des valeurs distinctes de λ pour lesquelles le système d'équations

$$(\lambda - 1)x + (3\lambda + 1)y + 2\lambda z = 0$$

$$(\lambda - 1)x + (4\lambda - 2)y + (\lambda + 3)z = 0$$

$$2x + (3\lambda + 1)y + 3(\lambda - 1)z = 0$$

admet des solutions non nulles, vaut _____.

330 EXERCICE

Si le système d'équations

$$x - 2y + 3z = 9$$

$$2x + y + z = b$$

$$x - 7y + az = 24,$$

admet une infinité de solutions, alors $a - b$ vaut

331 EXERCICE

Soit S l'ensemble des solutions entières, (x, y, z) , du système d'équations

$$x - 2y + 5z = 0$$

$$-2x + 4y + z = 0$$

$$-7x + 14y + 9z = 0$$

tels que $15 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 150$. Alors, le nombre d'éléments de l'ensemble S vaut _____.

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

332 EXERCICE

On note $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$ et $A^4 = [a_{ij}]$.

Si $a_{11} = 109$, alors a_{22} vaut _____.

333 EXERCICE

Le nombre de toutes les 3×3 matrices A , à coefficients dans l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ telles que la somme des éléments diagonaux de AA^T est 3, est

334 EXERCICE

Si le système d'équations linéaires,

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$3x + 2y + \lambda z = \mu$$

admet plus de deux solutions, alors $\mu - \lambda^2$ vaut _____.

335 EXERCICE

Supposons que le déterminant d'une matrice carrée A d'ordre m soit $m - n$, où m et n vérifie $4m + n = 22$ et $17m + 4n = 93$.

Si $\det(n \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(mA))) = 3^a 5^b 6^c$ alors $a + b + c$ vaut :

(A) 96

(B) 84

(C) 109

(D) 101

336 EXERCICE

Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $|A| = 2$. Si $|2 \operatorname{adj}(2 \operatorname{adj}(2A))| = 32^n$, alors $3n + \alpha$ vaut

(A) 11

(B) 9

(C) 12

(D) 10

337 EXERCICE

Si $A = \frac{1}{5!6!7!} \begin{bmatrix} 5! & 6! & 7! \\ 6! & 7! & 8! \\ 7! & 8! & 9! \end{bmatrix}$, alors $|\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(2A))|$ vaut :

(A) 2^{12} (B) 2^{20} (C) 2^8 (D) 2^{16}

338 EXERCICE

Si A est une 3×3 matrice et $|A| = 2$, alors $|3 \operatorname{adj}(|3A|A^2)|$ vaut :

(A) $3^{12} \cdot 6^{10}$ (B) $3^{11} \cdot 6^{10}$ (C) $3^{12} \cdot 6^{11}$ (D) $3^{10} \cdot 6^{11}$

339 EXERCICE

Si P est une 3×3 matrice réelle telle que $P^T = aP + (a - 1)I$, où $a > 1$, alors :

(A) $|\operatorname{Adj}P| = 1$ (B) $|\operatorname{Adj}P| > 1$ (C) $|\operatorname{Adj}P| = \frac{1}{2}$ (D) P est une matrice non inversible

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

340 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, $d = |A| \neq 0$ et $|A - d(\text{Adj} A)| = 0$. Alors

- (A) $1 + d^2 = m^2 + q^2$ (B) $1 + d^2 = (m + q)^2$
 (C) $(1 + d)^2 = m^2 + q^2$ (D) $(1 + d)^2 = (m + q)^2$

341 EXERCICE

L'ensemble des valeurs de $t \in \mathbb{R}$, pour lesquelles la matrice

$$\begin{bmatrix} e^t & e^{-t}(\sin t - 2 \cos t) & e^{-t}(-2 \sin t - \cos t) \\ e^t & e^{-t}(2 \sin t + \cos t) & e^{-t}(\sin t - 2 \cos t) \\ e^t & e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \end{bmatrix}$$
 est inversible, vaut :

- (A) $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (B) $\mathbb{R}$
 (C) $\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ (D) $\{k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$

342 EXERCICE

Soit $x, y, z > 1$ et $A = \begin{bmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 2 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 3 \end{bmatrix}$. Alors $|\text{adj}(\text{adj} A^2)|$ vaut

- (A) 6^4 (B) 2^8 (C) 4^8 (D) 2^4

343 EXERCICE

On note A matrice 3×3 telle que $|\text{adj}(\text{adj}(\text{adj} A))| = 12^4$. Alors $|A^{-1} \text{adj} A|$ vaut

- (A) 12 (B) $2\sqrt{3}$ (C) 1 (D) $\sqrt{6}$

344 EXERCICE

Soit α une racine de l'équation $(a - c)x^2 + (b - a)x + (c - b) = 0$ où a, b, c sont des réels distincts

tels que la matrice $\begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$ est non inversible. Alors la valeur de

$$\frac{(a-c)^2}{(b-a)(c-b)} + \frac{(b-a)^2}{(a-c)(c-b)} + \frac{(c-b)^2}{(a-c)(b-a)}$$
 est

- (A) 3 (B) 6 (C) 12 (D) 9

345 EXERCICE

Supposons que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et la matrice $B_0 = A^{49} + 2A^{98}$. Si $B_n = \text{Adj}(B_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$,

alors $\det(B_4)$ vaut :

- (A) 3^{28} (B) 3^{30} (C) 3^{32} (D) 3^{36}

346 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$.

Si $A^2 + \gamma A + 18I = O$, alors $\det(A)$ vaut _____.

- (A) -18 (B) 18 (C) -50 (D) 50

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

347 EXERCICE

On note A une matrice 2×2 avec $\det(A) = -1$ et $\det((A+I)(\operatorname{Adj}(A)+I)) = 4$. Alors la somme des éléments diagonaux de A peut être :

- (A) -1 (B) 2 (C) 1 (D) $-\sqrt{2}$

348 EXERCICE

On note A et B deux matrices carrées d'ordre 2. Si $\det(A) = 2$, $\det(B) = 3$ et $\det((\det(5(\det(A)B))A^2) = 2^a 3^b 5^c$ pour certains $a, b, c \in \mathbb{N}$, alors $a + b + c$ vaut :

- (A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14

349 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si $B = I - {}^5C_1(\operatorname{adj} A) + {}^5C_2(\operatorname{adj} A)^2 - \dots - {}^5C_5(\operatorname{adj} A)^5$, alors la somme de tous les de la matrice B est

- (A) -5 (B) -6 (C) -7 (D) -8

350 EXERCICE

On note A une matrice d'ordre 3×3 et $\det(A) = 2$. Alors $\det(\det(A) \operatorname{adj}(5 \operatorname{adj}(A^3)))$ vaut

- (A) 512×10^6 (B) 256×10^6 (C) 1024×10^6 (D) 256×10^{11}

351 EXERCICE

Soit $f(x) = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ ax & a & -1 \\ ax^2 & ax & a \end{vmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Alors la somme des carrés des valeurs de a , pour laquelle $2f'(10) - f'(5) + 100 = 0$, est

- (A) 117 (B) 106 (C) 125 (D) 136

352 EXERCICE

On note A et B deux 3×3 matrices telles que $AB = I$ et $|A| = \frac{1}{8}$. Alors $|\operatorname{adj}(B \operatorname{adj}(2A))|$ vaut

- (A) 16 (B) 32 (C) 64 (D) 128

353 EXERCICE

On note A une 3×3 matrice inversible. Si $|\operatorname{adj}(24A)| = |\operatorname{adj}(3 \operatorname{adj}(2A))|$, alors $|A|^2$ vaut :

- (A) 6^6 (B) 2^{12} (C) 2^6 (D) 1

354 EXERCICE

Soit $S = \{\sqrt{n} : 1 \leq n \leq 50 \text{ et } n \text{ est impair}\}$.

On note $a \in S$ et $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Si $\sum_{a \in S} \det(\operatorname{adj} A) = 100\lambda$, alors λ vaut :

- (A) 218 (B) 221 (C) 663 (D) 1717

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

355 EXERCICE

Soit $A(a, 0)$, $B(b, 2b + 1)$ et $C(0, b)$, $b \neq 0$, $|b| \neq 1$, des points tels que l'aire du triangle ABC vaut 1 unité d'aire, alors la somme des valeurs possibles de a vaut :

- (A) $\frac{-2b}{b+1}$ (B) $\frac{2b}{b+1}$ (C) $\frac{2b^2}{b+1}$ (D) $\frac{-2b^2}{b+1}$

356 EXERCICE

On note A et B deux 3×3 matrices réelles telles que $(A^2 - B^2)$ est une matrice inversible. Si $A^5 = B^5$ et $A^3 B^2 = A^2 B^3$, alors la valeur du déterminant de la matrice $A^3 + B^3$ vaut :

- (A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 0

357 EXERCICE

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & \sin \alpha \\ \sin \alpha & 0 \end{pmatrix}$ et $\det(A^2 - \frac{1}{2}I) = 0$, alors la valeur possible de α vaut :

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

358 EXERCICE

On note A matrice 3×3 telle que

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \text{adj}(\text{adj } A).$$

si $|A| = \lambda$ et $|(B^{-1})^T| = \mu$, alors le couple, $(|\lambda|, \mu)$ vaut :

- (A) (3, 81) (B) $(9, \frac{1}{9})$
(C) $(3, \frac{1}{81})$ (D) $(9, \frac{1}{81})$

359 EXERCICE

Si les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$,

$B = \text{adj} A$ et $C = 3A$, alors $\frac{|\text{adj} B|}{|C|}$ vaut :

- (A) 8 (B) 2 (C) 72 (D) 16

360 EXERCICE

On note $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ deux 3×3 matrices réelles telles que $b_{ij} = (3)^{(i+j-2)} a_{ji}$, où $i, j = 1, 2, 3$. Si le déterminant de B est 81, alors le déterminant de A vaut :

- (A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{81}$

361 EXERCICE

On note A et B deux matrices inversibles d'ordre 3×3 . Si $\det(ABA^T) = 8$ et $\det(AB^{-1}) = 8$, alors $\det(BA^{-1}B^T)$ vaut :

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) 16 (C) $\frac{1}{16}$ (D) 1

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

362 EXERCICE

Si $P = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ est l'adjointe classique d'une 3×3 matrice A et

$|A| = 4$, alors α vaut :

- (A) 4 (B) 11 (C) 5 (D) 0

363 EXERCICE

Soit P et Q soit 3×3 matrices $P \neq Q$. Si $P^3 = Q^3$ et $P^2Q = Q^2P$ alors le déterminant de $(P^2 + Q^2)$ vaut :

- (A) -2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

364 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si u_1 et u_2 sont des matrices colonnes telles

que $Au_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Au_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $u_1 + u_2$ vaut :

- (A) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 (C) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

365 EXERCICE

Soit A matrice 2×2

affirmation - 1 : $\text{adj}(\text{adj } A) = A$

affirmation - 2 : $|\text{adj } A| = |A|$

- (A) l'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est vraie ; l'affirmation - 2 n'est pas une justification correcte de l'affirmation - 1.
 (B) l'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est fausse.
 (C) l'affirmation - 1 est fausse, l'affirmation - 2 est vraie
 (D) l'affirmation - 1 est vraie, l'affirmation - 2 est vraie ; l'affirmation - 2 explique correctement l'affirmation - 1.

366 EXERCICE

Soit A une matrice carrée dont les coefficients sont entiers.

Alors quelle proposition est vraie ?

- (A) Si $\det A = \pm 1$, alors A^{-1} existe, mais ses coefficients ne sont pas nécessairement tous entiers
 (B) Si $\det A \neq \pm 1$, alors A^{-1} existe et tous ses coefficients sont non entiers
 (C) Si $\det A = \pm 1$, alors A^{-1} existe et tous ses coefficients sont entiers
 (D) Si $\det A = \pm 1$, alors A^{-1} n'existe pas nécessairement

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

367 EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 5\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 5\alpha \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Si $|A^2| = 25$, alors $|\alpha|$ vaut

- (A) $1/5$ (B) 5 (C) 5^2 (D) 1

368 EXERCICE

On note A matrice $n \times n$ telle que $|A| = 2$. Si le déterminant de la matrice $\text{Adj}(2 \cdot \text{Adj}(2A^{-1}))$ est 2^{84} , alors n vaut :

369 EXERCICE

Considérons une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta + \gamma & \gamma + \alpha & \alpha + \beta \end{pmatrix}$, où α, β, γ sont trois entiers naturels distincts.

Si $\frac{\det(\text{adj}(\text{adj}(\text{adj}(\text{adj} A))))}{(\alpha - \beta)^{16}(\beta - \gamma)^{16}(\gamma - \alpha)^{16}} = 2^{32} \times 3^{16}$, alors le nombre de tels 3 - n-uplets (α, β, γ) est _____.

370 EXERCICE

La valeur positive du déterminant de la matrice A , dont

$$\text{Adj}(\text{Adj}(A)) = \begin{pmatrix} 14 & 28 & -14 \\ -14 & 14 & 28 \\ 28 & -14 & 14 \end{pmatrix}, \text{ est } \underline{\hspace{2cm}}.$$

371 EXERCICE

On note A une 3×3 matrice réelle. Si $\det(2\text{Adj}(2\text{Adj}(\text{Adj}(2A)))) = 2^{41}$, alors la valeur de $\det(A^2)$ vaut _____.

372 EXERCICE

Soit $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \{\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\} \right\}$. Posons $f : M \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(A) = \det(A)$, pour tout $A \in M$, où $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers. Alors le nombre de $A \in M$ tels que $f(A) = 15$ vaut _____.

373 EXERCICE

Soit $A = \{a_{ij}\}$ matrice 3×3 ,

$$\text{où } a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-i} & \text{if } i < j, \\ 2 & \text{if } i = j, \\ (-1)^{i+j} & \text{if } i > j \end{cases}$$

alors $\det(3\text{Adj}(2A^{-1}))$ vaut _____.

374 EXERCICE

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, alors la valeur de $\det(A^4) + \det(A^{10} - (\text{Adj}(2A))^{10})$ vaut _____.

Matrices et déterminants

BANQUE D'EXERCICES • CHERCHER AVANT DE CONSULTER LES RÉPONSES

375

EXERCICE

Soit $P = \begin{bmatrix} -30 & 20 & 56 \\ 90 & 140 & 112 \\ 120 & 60 & 14 \end{bmatrix}$ et

$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & \omega^2 \\ -1 & -\omega & 1 \\ 0 & -\omega & -\omega + 1 \end{bmatrix}$ où

$\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, et I_3 la matrice identité d'ordre 3. Si le

le déterminant de la matrice $(P^{-1}AP - I_3)^2$ est $\alpha\omega^2$, alors la valeur de α vaut _____.

376

EXERCICE

Soit $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{bmatrix}$, où x, y et z sont des réels tels que $x + y + z > 0$ et $xyz = 2$. Si $A^2 = I_3$,

alors la valeur de $x^3 + y^3 + z^3$ est _____.

Matrices et déterminants

GRILLE DES RÉPONSES

Les réponses courtes de la source sont regroupées ci-dessous.

Les corrections détaillées concernent les exercices sélectionnés dans la dernière partie.

001 C	029 D	057 C	085 B	113 C
002 C	030 A	058 B	086 B	114 B
003 D	031 D	059 A	087 D	115 C
004 C	032 B	060 C	088 A	116 D
005 A	033 B	061 D	089 D	117 D
006 B	034 B	062 C	090 D	118 D
007 D	035 B	063 C	091 C	119 C
008 B	036 D	064 D	092 D	120 B
009 B	037 A	065 A	093 C	121 A
010 C	038 D	066 A	094 A	122 B
011 D	039 D	067 B	095 D	123 A
012 D	040 C	068 B	096 A	124 B
013 B	041 D	069 B	097 B	125 D
014 B	042 A	070 C	098 B	126 C
015 B	043 D	071 D	099 D	127 C
016 C	044 B	072 D	100 B	128 D
017 B	045 C	073 C	101 B	129 B
018 B	046 C	074 D	102 D	130 A
019 B	047 B	075 D	103 D	131 C
020 B	048 B	076 D	104 D	132 B
021 A	049 D	077 C	105 D	133 C
022 B	050 D	078 C	106 C	134 B
023 D	051 D	079 C	107 A	135 D
024 C	052 D	080 A	108 C	136 C
025 C	053 B	081 B	109 C	137 B
026 A	054 B	082 B	110 D	138 A
027 C	055 D	083 C	111 C	139 A
028 C	056 D	084 C	112 C	140 A

Matrices et déterminants

GRILLE DES RÉPONSES

Les réponses courtes de la source sont regroupées ci-dessous.

Les corrections détaillées concernent les exercices sélectionnés dans la dernière partie.

141	B	169	A	197	B	225	D	253	D
142	B	170	B	198	C	226	B	254	D
143	D	171	D	199	C	227	B	255	A
144	B	172	B	200	B	228	D	256	D
145	A	173	B	201	D	229	C	257	B
146	A	174	C	202	C	230	A	258	A
147	D	175	C	203	A	231	D	259	A
148	C	176	D	204	C	232	C	260	D
149	B	177	B	205	D	233	D	261	D
150	A	178	B	206	D	234	D	262	B
151	A	179	C	207	A	235	C	263	C
152	D	180	B	208	A	236	D	264	C
153	B	181	D	209	A	237	D	265	4
154	B	182	C	210	D	238	B	266	34
155	A	183	C	211	A	239	A	267	0
156	C	184	B	212	A	240	A	268	312
157	D	185	C	213	C	241	D	269	3
158	C	186	B	214	C	242	B	270	62
159	B	187	D	215	A	243	A	271	18
160	A	188	A	216	C	244	A	272	225
161	A	189	B	217	C	245	B	273	36
162	C	190	D	218	C	246	C	274	6
163	C	191	D	219	A	247	C	275	38 ou -38
164	C	192	B	220	C	248	B	276	2
165	D	193	B	221	D	249	D	277	1613
166	B	194	B	222	A	250	D	278	44
167	A	195	A	223	B	251	D	279	34
168	B	196	C	224	D	252	B	280	450

Matrices et déterminants

GRILLE DES RÉPONSES

Les réponses courtes de la source sont regroupées ci-dessous.

Les corrections détaillées concernent les exercices sélectionnés dans la dernière partie.

281 14	309 1	337 D	365 D
282 7	310 100	338 B	366 C
283 38	311 8	339 A	367 A
284 55	312 5	340 D	368 5
285 5	313 2020	341 B	369 42
286 25	314 5	342 B	370 14
287 27	315 6	343 B	371 4
288 2	316 3125	344 A	372 16
289 7	317 910	345 C	373 108
290 113	318 1	346 B	374 16
291 10	319 6	347 B	375 36
292 28	320 2020	348 B	376 7
293 6	321 2	349 C	
294 2	322 1	350 A	
295 24	323 766	351 C	
296 5	324 4	352 C	
297 495	325 13	353 C	
298 10	326 21	354 B	
299 4	327 17	355 D	
300 2	328 540	356 D	
301 5376	329 3	357 A	
302 50	330 5	358 C	
303 24	331 8	359 A	
304 17	332 10	360 C	
305 1	333 672	361 C	
306 58	334 13	362 B	
307 25	335 A	363 C	
308 100	336 A	364 D	

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 1

Chercher une combinaison de lignes

Dans la troisième équation, les coefficients de x et y sont la somme de ceux des deux premières. Pour une infinité de solutions, il faut donc aussi

$$\lambda = 1 + 5 = 6, \quad \mu = 6 + 10 = 16.$$

Les deux premières lignes sont indépendantes : le système compatible a alors un paramètre libre.

Réponse : $\lambda + \mu = 22$ (C).

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 2

Calculer l'adjointe une seule fois

Le calcul des cofacteurs donne

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 15 & 3 & -6 \\ -10 & 5\alpha & 4 \\ 8 & -4\alpha & 3\alpha - 2 \end{pmatrix}.$$

Après l'addition indiquée, $B = \begin{pmatrix} 16 & 3 & -6 \\ -10 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$, donc $\det B = 30\alpha + 36$. Comme $\det B = 66$, $\alpha = 1$ et $\det A = 21$. Pour une matrice d'ordre 3, $\det(\text{adj } A) = (\det A)^2$.

Réponse : 441 (C).

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 3

Une solution non nulle impose un déterminant nul

Le déterminant du système homogène vaut $6(\cos 3\theta + 2 \cos 2\theta + 2)$. En posant $c = \cos \theta$, il devient

$$6(4c^3 + 4c^2 - 3c) = 6c(2c - 1)(2c + 3).$$

Comme $c \in [-1, 1]$, seules les valeurs $c = 0$ et $c = 1/2$ conviennent. Dans $[0, 2\pi]$, on trouve $\pi/2, 3\pi/2, \pi/3, 5\pi/3$.

Réponse : leur somme vaut $\boxed{4\pi}$ (D).

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 4

Une matrice nilpotente simplifie la puissance

Écrivons $A = I + N$. On vérifie que $N^3 = 0$, et que le seul coefficient non nul de N^2 est celui de position $(3, 1)$, égal à 9. Ainsi

$$B = A^{99} - I = 99N + \binom{99}{2}N^2.$$

On lit $b_{21} = b_{32} = 297$ et $b_{31} = 99 \times 9 + 4851 \times 9 = 44550$.

Réponse : $(b_{31} - b_{21})/b_{32} = 44253/297 = \boxed{149}$ (C).

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 5

Sommer une colonne de déterminants

Seule la première colonne du déterminant dépend de n . Par linéarité, on peut sommer cette colonne, en utilisant $\sum n$, $\sum n^2$ et $\sum n^3$. Après calcul :

$$\sum_{n=1}^k f(n) = \frac{7}{6}k(k+1)(2k+1).$$

L'égalité avec 98 impose $k(k+1)(2k+1) = 84$. Pour $k = 3$, on a $3 \times 4 \times 7 = 84$. L'expression est strictement croissante pour les entiers positifs, ce qui assure l'unicité.

Réponse : $\boxed{k = 3}$ (A).

CORRECTION GUIDÉE / EXERCICE 6

Lire un produit comme un système

L'égalité matricielle équivaut au système

$$x - z = 1, \quad 2x + y + z = 7, \quad 3x + 2y + z = 11.$$

La première équation donne $x = 1 + z$. La deuxième donne $y = 5 - 3z$. En reportant dans la troisième :

$$3(1 + z) + 2(5 - 3z) + z = 11, \quad z = 1.$$

Donc $x = 2$ et $y = 2$.

Réponse : $\boxed{x + y + z = 5}$ (B).